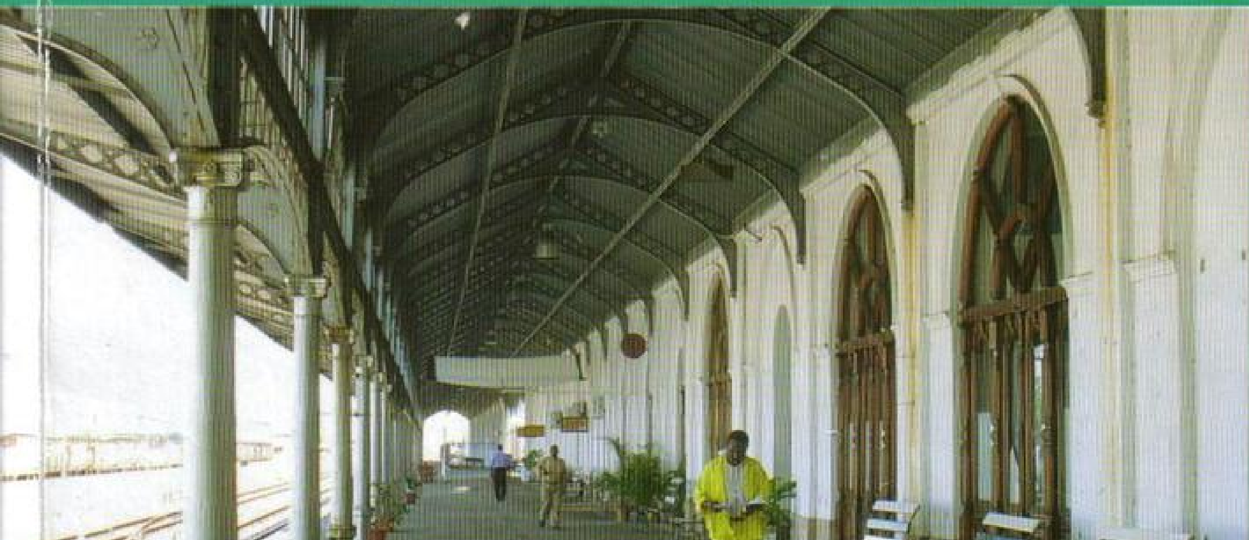
Vasco Filipe Camundimo

DGD 11

Desenho e Geometria Descritiva
11.ª Classe



Programa Actualizado

Texto Editores
www.textoeditores.com

f i c h a t é c n i c a

título	**DGD 11 • Desenho e Geometria Descritiva 11.ª Classe**
autor	**Vasco Filipe Camundimo**
coordenação	**Stella Morgadinho**
editor	**Texto Editores, Lda. – Moçambique**
capa e foto	**Omaia Panachande**
arranjo gráfico	**Acbar Khan**
paginação	**Rui Manganhele**
pré-impressão	**LEYA, SA**
impressão e acabamentos	**Mirandela – Artes Gráficas, SA**

Texto Editores
www.textoeditores.com

Avenida Julius Nyerere, 46 • Polana • Cimento B • Maputo • Moçambique
Tels. (+258) 21 49 86 48 • 21 49 90 71 Fax: 21 49 86 48
E-mail: info@ME.co.mz

MAPUTO, JULHO de 2009 • 1.ª EDIÇÃO • REGISTADO NO INLD SOB O NÚMERO: 5280/RLINLD/08

Vasco Filipe Camundimo

DGD 11

Desenho e Geometria Descritiva
11.ª Classe

Caro Amigo Miguel
O desenvolvimento de um país depende da Educação, pelo que, com o presente livro se pretende contribuir para a melhoria da qualidade da Educação.
Um forte abraço
20.Fevereiro.2010
Camundimo

Texto Editores
www.textoeditores.com

Mais do que a ciência que estuda e sistematiza as representações das formas do espaço no plano (plano do desenho), a Geometria Descritiva é a área do conhecimento que desenvolve a capacidade de análise e de interpretação das formas no espaço, visando dotar todos cujas áreas profissionais se baseiam na utilização do desenho rigoroso ou do desenho técnico de forma sistemática (arquitectos, engenheiros, *designers*, etc., e de uma forma geral, todos os projectistas ou pintores e escultores) dos instrumentos mentais e dos meios gráficos de representação que são essenciais às suas actividades profissionais.

Para uma melhor compreensão dos conteúdos que serão abordados ao longo do manual é fundamental que o aluno desenvolva a capacidade de ver no espaço, a partir das quatro primeiras unidades temáticas. Esta disciplina é um exemplo típico de conteúdos que se desenvolvem em espiral, por isso é necessário que os alunos, ao abordarem um conteúdo, tenham percebido os que o antecedem.

O presente manual responde aos objectivos preconizados no currículo vigente desde 2008 e segue a sequência preconizada no programa de ensino da disciplina de Desenho e Geometria Descritiva da 11.ª classe.

O manual é composto por nove Unidades Temáticas, nomeadamente: Introdução à Geometria Descritiva, Representação Diédrica do Ponto, Representação Diédrica da Recta, Representação Diédrica do Plano, Processos Geométricos Auxiliares, Representação Diédrica de Figuras Planas, Intersecção de Dois Planos, Intersecção de Rectas com Planos e Representação Diédrica de Sólidos Geométricos.

De modo a que o manual se torne o mais compreensível possível, adaptámos algumas estratégias; por exemplo:

- Reduzir a memorização e assegurar a plena compreensão através de um desenvolvimento lógico e articulado das matérias.
- Dar prioridade à apresentação e à compreensão visual, pelo que sempre que julgámos necessário procedemos ao desdobramento dos desenhos nas suas diversas fases intermédias.
- Apresentar um conjunto de problemas resolvidos e outros por resolver, possibilitando o aprofundamento e a prática dos conhecimentos adquiridos.
- Ter especial cuidado com a visibilidade das execuções gráficas, o que nos levou a recorrer a diversos meios auxiliares, entre as quais diferentes espessuras dos traços, tonalidades de cinzento e utilização de traço interrompido.

Nota: Por razões inerentes à paginação de um manual escolar, parte dos desenhos associados à exemplificação dos problemas apresentados não se encontra à escala real apresentada nos enunciados.

No final de cada unidade temática surge uma rubrica com Exercícios Propostos, que permitem a consolidação dos conteúdos abordados. Os exercícios assinalados com asterisco têm a solução no fim do manual.

Esperamos que as competências que vai desenvolver nesta disciplina lhe permitam resolver problemas concretos do seu dia-a-dia, pois este currículo do Ensino Secundário Geral tem um carácter profissionalizante, que pretende assegurar um emprego ou auto-emprego aos que o frequentam.

O autor

Índice

Resenha histórica

A necessidade de o Homem se expressar através de desenhos data desde a Pré-História.

Os primeiros desenhos tenderam a tornar-se cada vez mais esquemáticos, acabando por conduzir às chamadas escritas ideográficas, de que são exemplos os hieróglifos egípcios e a escrita ainda hoje usada na China. Pouco a pouco, o desenho foi registando evolução, até ter a sua própria gramática.

O desenho, como meio de expressão, desenvolveu duas linhas: a de representação artística e a de representação rigorosa, esta última livre de matrizes subjectivas, racional e sem ambiguidade.

A representação de formas tridimensionais sobre uma superfície plana foi uma das grandes dificuldades que o Homem foi tendo ao longo dos tempos. Só a partir do século XV, com os estudos das teorias do desenho e da pintura realizados por Leonardo da Vinci (assim como com os desenhos dos seus inventos), é que se iniciou a representação de formas tridimensionais sobre superfícies planas.

Nos séculos seguintes à descoberta de Leonardo da Vinci, muitos outros interessaram-se pelo assunto, com particular destaque para Gaspard Monge (1746-1818), o homem que revolucionou esse processo de representação e que desenvolveu o método de representação de figuras no espaço, fundando, deste modo, a Geometria Descritiva e em 1795 publicou um tratado no qual expôs o método das projecções ortogonais.

Deste modo, foi finalmente possível representar sobre um plano as figuras do espaço, de modo a resolver problemas de Geometria em que se consideram três dimensões.

A Geometria Descritiva assume um papel basilar, fundamental para as áreas da arquitectura, da engenharia de construção civil e do *design*, porquanto permite exteriorizar numa linguagem própria as concepções espaciais e construtivas.

É através da Geometria Descritiva que é possível, por exemplo, executar levantamentos rigorosos de edifícios ou pontes, as edificações já existentes ou projectar os que se pretende construir.

Objecto e finalidade

A área de conhecimentos de Desenho e Geometria Descritiva aborda a sistematização dos diversos métodos de representação gráfica rigorosa, permitindo a aquisição de conhecimentos e o domínio de instrumentos geométricos, na perspectiva do desenvolvimento de capacidades de:

- Percepção dos espaços, formas visuais e suas posições relativas.
- Representação mental de formas imaginadas ou reais.
- Representação de formas, de modo normalizado e sistematizado.

As competências que serão desenvolvidas na base do que se vai aprender em Desenho e Geometria Descritiva irão permitir o desenvolvimento da autonomia e espírito de cooperação. Com os conhecimentos desta disciplina poder-se-ão resolver problemas com que as comunidade se deparam nas áreas da construção e do *design*.

Esta disciplina fornece, deste modo, uma linguagem visual normalizada, baseada em critérios de rigor, em que se usam materiais e instrumentos específicos para o desenho geométrico.

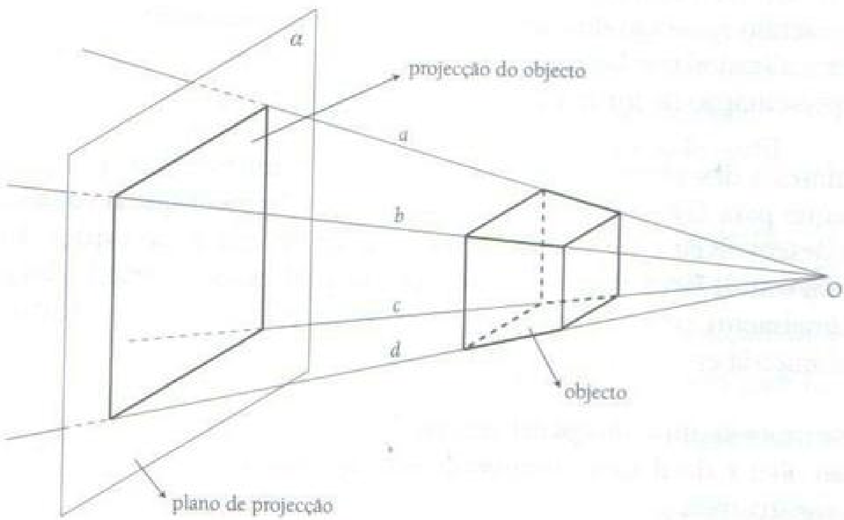
Assim sendo, o objecto do nosso estudo é, afinal, uma iniciação ao método de Monge, na base do qual está o conceito de projecção.

Noção de projecção

O campo da Geometria Descritiva, como referimos anteriormente, é a representação, num plano, de objectos no espaço e de espaços. Essa representação é feita através da projecção desses objectos num plano.

Quando paramos num sítio, ao sol, vemos a nossa sombra reflectida no plano onde nos encontramos, o chão. Essa sombra é a projecção da nossa figura sobre o chão; o foco luminoso da projecção é o Sol.

A projecção de um objecto num plano resulta numa figura plana, que se obtém fazendo passar, por alguns dos pontos mais significativos do seu contorno, rectas que ao intersectarem o plano determinam as projecções dos pontos pelos quais passam.



Projecção de um cubo num plano (α).

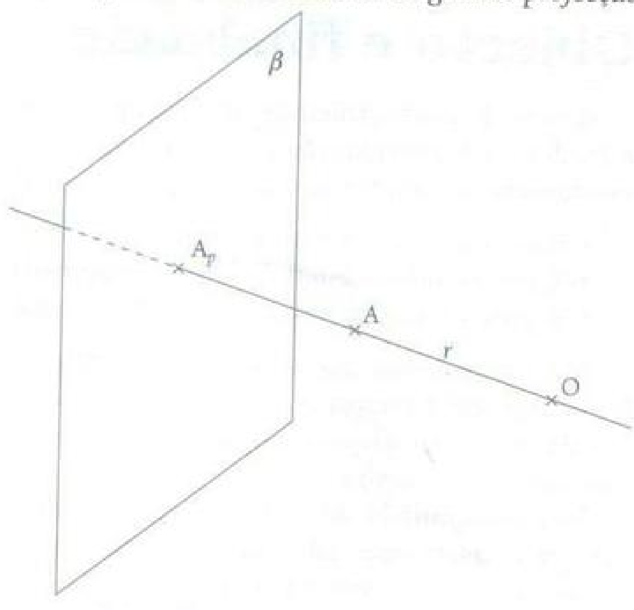
Conforme se pode observar na figura acima, os quatro raios luminosos que focam o cubo intersectam o plano também em quatro pontos, que definem a sua projecção sobre esse plano.

Esses raios, que estão representados por rectas (que determinam a projecção do objecto), denominam-se *linhas projectantes* (na figura acima são as linhas *a*, *b*, *c* e *d*). O ponto O denomina-se *origem de projecção* ou *foco luminoso*, e é o ponto do espaço, exterior ao plano onde se projectam os objectos, em que concorrem todas as projectantes.

À superfície plana onde o objecto é projectado, chama-se *plano de projecção* (neste caso, o plano α). Recorde-se que um plano é designado por uma letra minúscula do alfabeto grego.

Vejamos agora um desenho mais simplificado, que permite uma visão mais fácil do que acabámos de aprender.

A recta *r* é uma recta projectante, pois ao passar por A (ponto que se pretende projectar), no seu prolongamento intersecta o plano β, dando origem a A_p. A_p é a projecção do ponto A sobre o plano β. O é o ponto de origem da linha projectante e encontra-se a uma distância finita.



Projecção de um ponto num plano.

Tipos de projecção

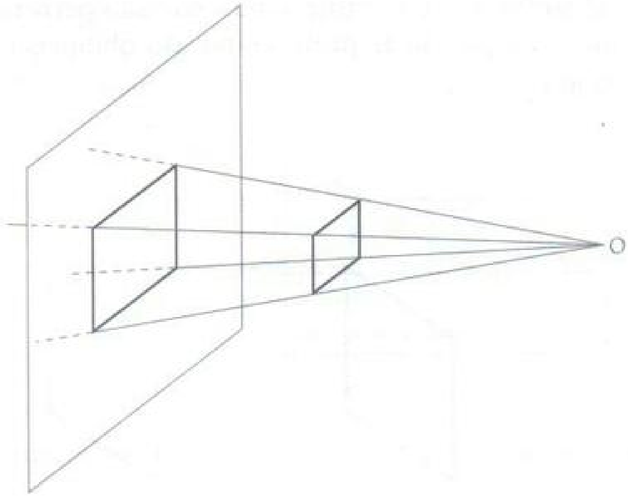
Quando falamos de projecções temos de considerar três variáveis:

- Distância da origem de projecção ao plano de projecção.
- Posição das rectas projectantes em relação ao plano de projecção.
- Número de planos de projecção.

A variável número um, que é referente à distância da origem de projecção ao plano de projecção, permite-nos distinguir dois sistemas de projecção, que iremos descrever em seguida.

Sistema de projecção central ou cónica

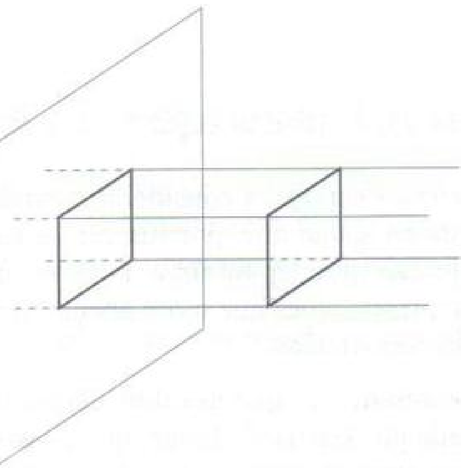
Quando as rectas projectantes têm origem num ponto situado a uma distância finita, ou seja, quando a origem de projecção se situa a uma distância ao nosso alcance, trata-se do sistema de *projecção central* ou *cónica*.



As linhas projectantes têm origem num ponto O, situado a uma distância finita.

Sistema de projecção paralela ou cilíndrica

De acordo com o que aprendeu anteriormente, duas rectas paralelas são teoricamente concorrentes no infinito. Se as rectas projectantes se cruzam a uma distância infinita em relação aos planos de projecção, isto é, se as projectantes são paralelas entre si, trata-se do sistema de *projecção paralela* ou *cilíndrica*.



Sistema de projecção paralela ou cilíndrica.

Métodos de representação

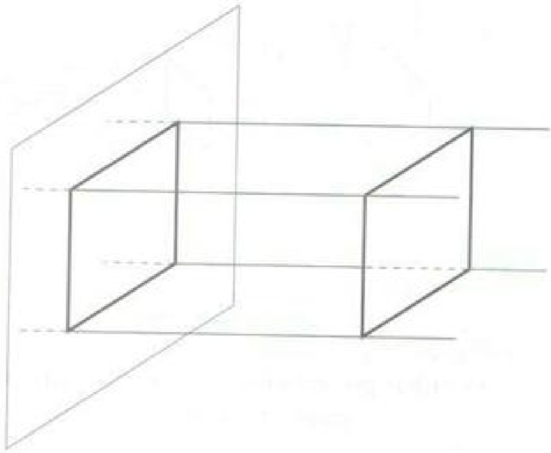
O nosso estudo, ao nível de todo o segundo ciclo do Ensino Secundário Geral, vai desenvolver o sistema de projecção paralela ou cilíndrica.

Neste sistema, como anteriormente se observou, as rectas projectantes são paralelas entre si, e o ponto de observação situa-se a uma distância infinita.

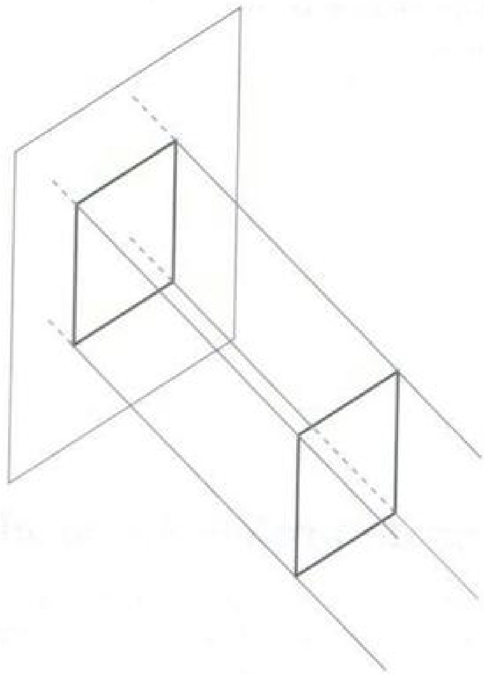
Das três variáveis consideradas na projecção de objectos no sistema de projecção cilíndrica, a segunda diz respeito à *projecção ortogonal* e à *projecção oblíqua*.

Projecção ortogonal e projecção oblíqua

Quando as rectas projectantes não são perpendiculares ao plano de projecção diz-se que a projecção é ortogonal; quando as projectantes são oblíquas em relação ao plano de projecção diz-se que a projecção é oblíqua.



Projecção ortogonal.



Projecção oblíqua.

A terceira variável a considerar, quando se fala de projecções de objectos, diz respeito ao *subsistema de projecção ortogonal* que, por sua vez, se subdivide em várias representações conforme o número de planos de projecção (que, no mínimo, pode ser um e, no máximo, podem ser seis planos).

As representações que usam apenas um plano de projecção são as *perspectivas axonométricas* e o método de *projecções cotadas*.

A representação que usa dois planos de projecção é o princípio estruturante da Geometria Descritiva inventada por Gaspard Monge, que consiste em projectar objectos sobre dois planos de projecção perpendiculares entre si, mais conhecida por *dupla projecção ortogonal*.

O subsistema de projecção oblíqua subdivide-se em duas perspectivas axonométricas, nomeadamente, a *perspectiva cavaleira* e a *perspectiva militar* que igualmente usam apenas um único plano de projecção.

Na 9.ª e 10.ª classes tivemos a oportunidade de falar sobre esse sistema de projecções e, certamente, ainda se recorda do esquema que se segue, que resume o que acabámos de abordar:

<table>
<tr><th rowspan="10">Tipo de projecção</th><th>Sistema</th><th>Subsistema</th><th>Representações</th><th>N.º de planos de projecção</th></tr>
<tr><td rowspan="8">Paralela ou cilíndrica</td><td rowspan="4">Ortogonal</td><td>Projecções Cotadas</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Perspectiva Isomérica</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Perspectiva Dimétrica</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Perspectiva Anisométrica</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Oblíqua</td><td>Dupla Projecção Ortogonal</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Múltipla Projecção Ortogonal</td><td>Mais de 2</td></tr>
<tr><td>Perspectiva Cavaleira</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Perspectiva Militar</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Cónica ou central</td><td>..................</td><td>Perspectiva Cónica ou Linear</td><td>1</td></tr>
</table>

Através desta representação esquemática, podemos muito facilmente visualizar todo o sistema de projecções e perceber como ele se subdivide.

A primeira e a maior parte do nosso estudo, debruçar-se-ão sobre o estudo da dupla projecção ortogonal. Neste sistema de projecção, o objecto é projectado em dois planos de projecção, perpendiculares entre si; tal fornece-nos uma informação sobre a tridimensionalidade do objecto (caso seja tridimensional).

Este método de representação tem a vantagem da rapidez e da facilidade de execução dos traçados e oferece rigor na representação dos objectos. Contudo, na projecção de objectos de maior complexidade, em algumas posições no espaço, as duas projecções podem revelar-se insuficientes, o que se pode ultrapassar com o recurso a outros sistemas de projecção.

Aplicação prática dos vários tipos de representação

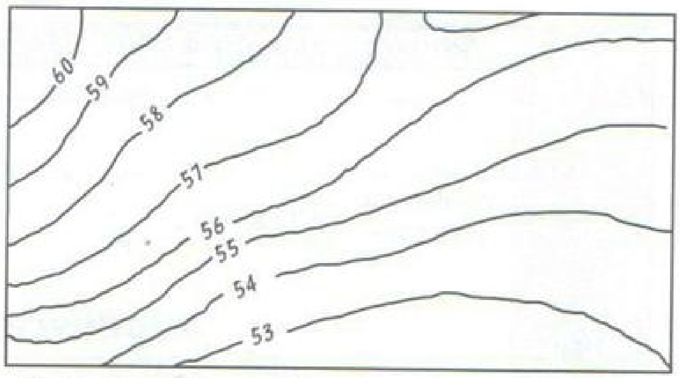
Os diferentes tipos de representação que constam do quadro que acabámos de ver, têm, cada um deles, aplicação específica e complementam-se entre eles. Por exemplo, no desenvolvimento de um projecto de um edifício o arquitecto pode precisar de muitas dessas representações de modo a responder a variadas necessidades.

Vejamos em seguida como é que algumas das representações são aplicadas, no projecto de um edifício, por exemplo.

Projecções cotadas

Este método apresenta realidades tridimensionais num único plano, ou seja, a realidade tridimensional é representada de forma bidimensional, sendo que a terceira dimensão é indicada por valores numéricos que se denominam cotas; daí advém a designação projecção «cotada».

Quando um arquitecto pretende implantar um edifício, antes da construção deve fazer o estudo do terreno onde será implantado o edifício. Esse estudo baseia-se nas projecções cotadas que lhe permitem estudar a morfologia do terreno.



Projecção cotada: método que usa uma única projecção na representação de curvas de nível e respectivas cotas.

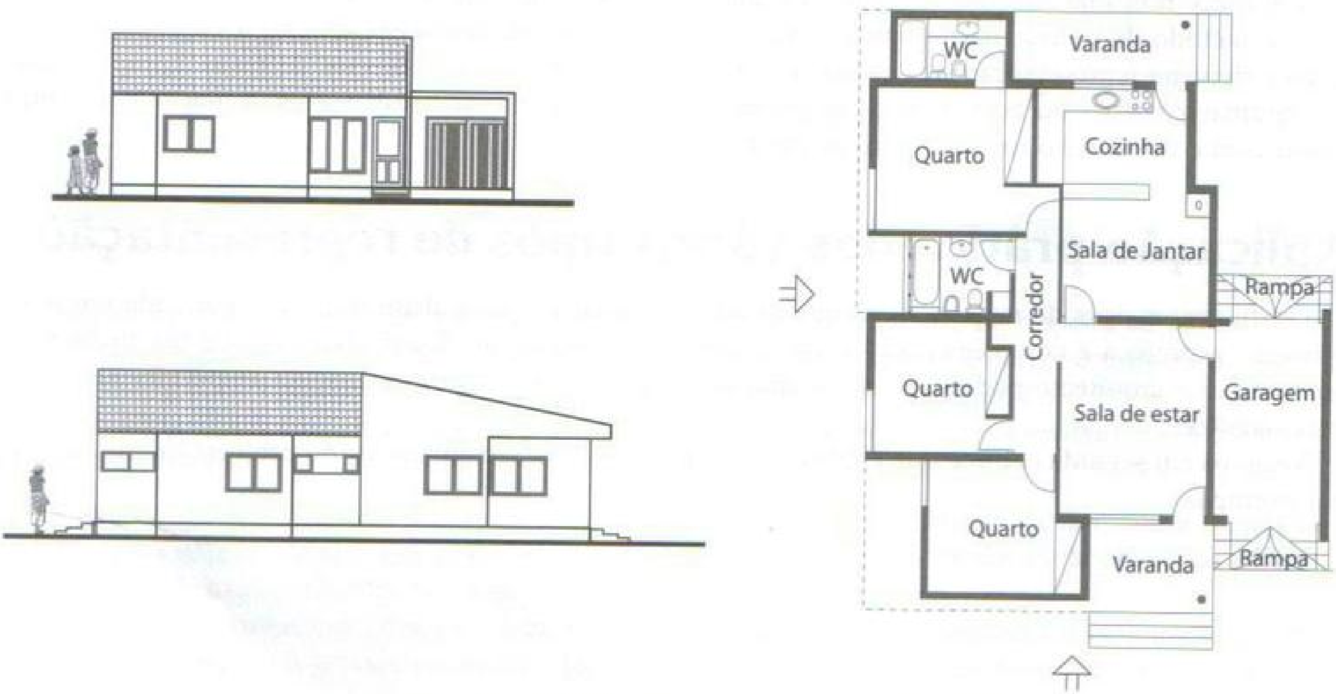
Múltipla projecção ortogonal

Certamente que já teve várias oportunidades de observar as projecções de uma casa, aquilo que vulgarmente se denomina planta de uma casa. Estas projecções apresentam as diferentes vistas laterais e frontais (alçados) da casa e os cortes, antes mesmo da própria construção. Trata-se de um projecto inicial, que muitas das vezes tem de ser apresentado ao Concelho Municipal para a sua aprovação e autorização para o início da construção.

Como pode ter percebido, as diferentes vistas da casa resultam das suas projecções sobre planos de projecção, que são cinco: quatro laterais e um de cima.

Na 9.ª classe resolvemos vários exercícios de representação das vistas de um objecto.

O método das projecções cotadas é insuficiente para fornecer este tipo de informação.

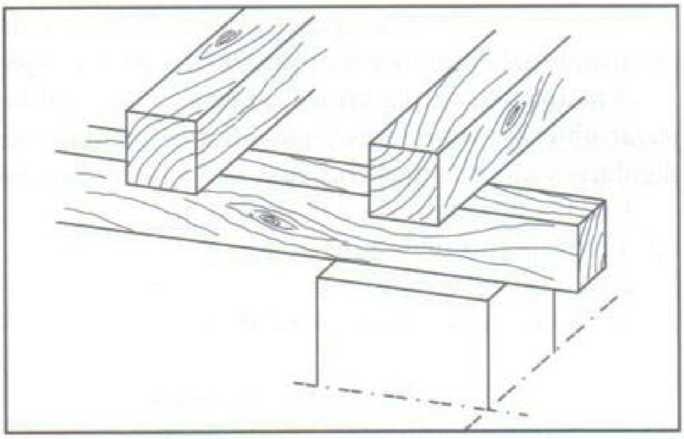


Representação de alçados de uma casa e a sua respectiva planta.

Perspectivas axonométricas

Como é do seu conhecimento, as perspectivas axonómetricas compreendem as representações isométrica, dimétrica, anisométrica, cavaleira ou militar, que podem ser usadas para clarificar certos pormenores que na múltipla projecção ortogonal não se percebem claramente.

Apesar de facilitar um pouco mais a percepção visual do objecto desenhado, comparativamente com a múltipla projecção ortogonal, ainda se distancia do aspecto gráfico da percepção visual real do objecto.



Pormenor de um elemento estrutural de um edifício em perspectiva dimétrica.

Perspectiva cónica

Na 10.ª classe resolvemos vários exercícios de projecção das vistas de um objecto para a posterior representação em perspectiva cónica.

É a representação mais próxima da realidade, que dá a mesma ideia que temos quando se trata de uma fotografia. É de extrema importância, pois permite que antes mesmo da construção do edifício o seu dono possa ter ideia de como ele será.

Como dissemos anteriormente, cada uma das representações tem a sua aplicação específica e entre elas complementam-se; ou seja, a perspectiva cónica por si só não resolve o problema de conceber, planear ou representar uma edificação.

Representação de uma casa em perspectiva cónica.

Projecção ortogonal

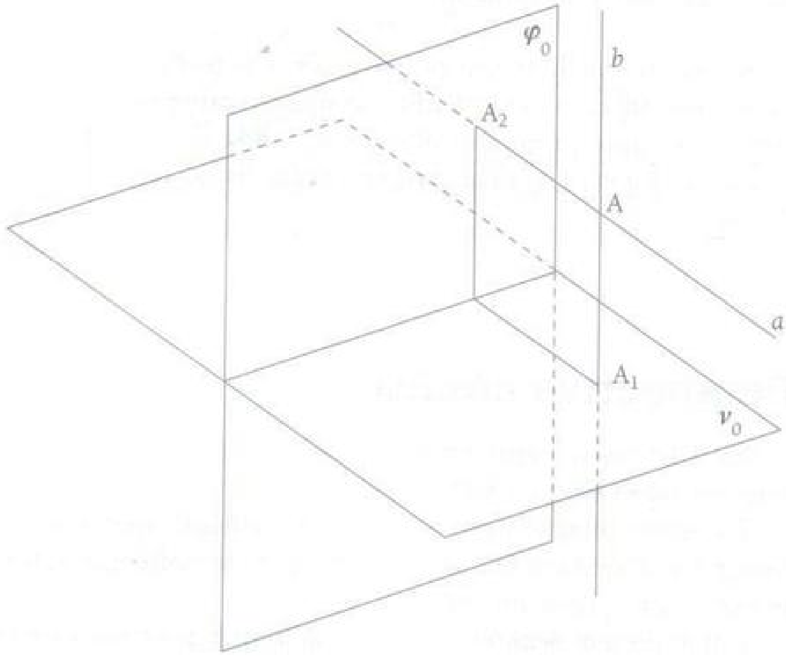
O nosso estudo de Geometria Descritiva desenvolver-se-á, exclusivamente, no subsistema de projecção ortogonal, com maior profundidade para a *dupla projecção ortogonal*.

O método da dupla projecção ortogonal é também conhecido por *sistema de Monge*. Consiste em projectar objectos sobre dois planos perpendiculares entre si, através de rectas projectantes também perpendiculares entre si e perpendiculares aos planos de projecção.

A recta que determina a projecção frontal de um ponto denomina-se *projectante frontal* e a que determina a projecção horizontal chama-se *projectante horizontal*.

Através do método de *Monge* é possível encontrar a localização exacta de um ponto no espaço.

Aconselhamo-lo desde já a familiarizar-se com os termos utilizados, relacionando-os não só com o que designam, como também com o que as ilustrações forem mostrando.



Rectas projectantes:
a – projectante frontal do ponto **A**.
b – projectante horizontal do ponto **A**.

Planos ortogonais de projecção

Os planos ortogonais de projecção são dois planos perpendiculares entre si, estando um em posição vertical ou frontal, que se designa *plano frontal de projecção* e representa-se por φ_0 (fi zero); o outro, plano de projecção perpendicular ao plano frontal de projecção, toma a posição horizontal, denomina-se *plano horizontal de projecção* e representa-se por ν_0 (niu zero).

Recorde-se que um plano é representado por uma letra minúscula do alfabeto grego. φ (fi) e ν (niu) são duas das vinte e seis letras minúsculas do alfabeto grego e são sucedidas pelo índice zero (φ_0 e ν_0) porque as contagens das medidas são feitas a partir deles.

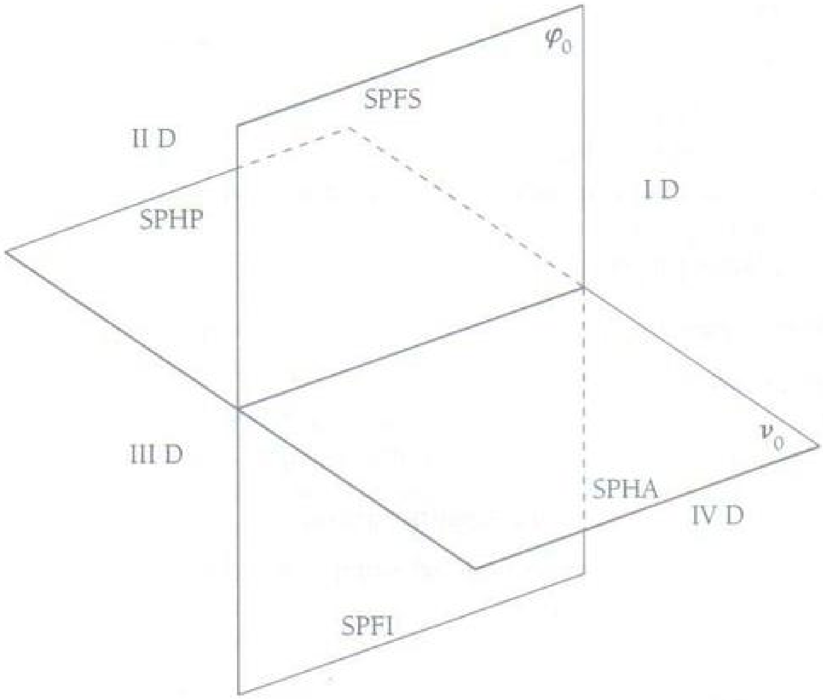
O plano frontal de projecção, ao intersectar o plano horizontal de projecção, origina uma linha, designada por eixo *x*, que é representada por *x* e que divide cada um dos planos de projecção em dois semiplanos. Vejamos as suas respectivas designações.

- Semiplano horizontal anterior (SPHA)
- Semiplano horizontal posterior (SPHP)
- Semiplano frontal superior (SPFS)
- Semiplano frontal inferior (SPFI)

Divisão do espaço em diedros (ou Quadrantes)

Os dois planos de projecção dividem o espaço em quatro diedros rectos, designadamente:

1. Primeiro diedro de projecção (I D) limitado pelos semiplanos horizontal anterior e frontal superior.
2. Segundo diedro de projecção (II D) limitado pelos semiplanos horizontal posterior e frontal superior.
3. Terceiro diedro de projecção (III D) limitado pelos semiplanos horizontal posterior e frontal inferior.
4. Quarto diedro de projecção (IV D) limitado pelos semiplanos horizontal anterior e frontal inferior.



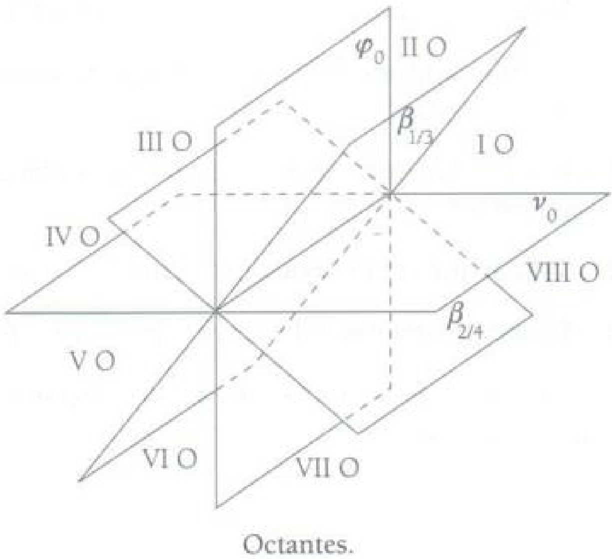
Planos Ortogonais de Projecção e respectivos diedros.

Subdivisão dos diedros de projecção em Octantes

Com o intuito de estabelecer maior precisão na localização dos pontos no espaço, são considerados mais dois planos que também se intersectam no eixo *x* e que tornam o espaço dividido em oito partes, chamados *Octantes*. A palavra «octante» resulta da palavra «oito».

Porque esses planos dividem cada um dos diedros em duas partes iguais, são chamados *planos bissectores*, sendo representados pela letra β.

Ao plano bissector que atravessa o I e o III diedros de projecção chama-se *plano bissector dos diedros de projecção ímpares*, representado por $\beta_{1/3}$ (beta um-três) e o que atravessa o II e o IV diedros designa-se por *plano bissector dos diedros de projecção pares* ou simplesmente $\beta_{2/4}$ (beta dois-quatro).



Octantes.

1. Nesta primeira parte procedemos à abordagem do surgimento de uma área de conhecimentos denominada Geometria Descritiva. Em que consiste a Geometria Descritiva?

2. Quando foi fundada e quem é que fundou a Geometria Descritiva?

3. Que capacidades são desenvolvidas no domínio do Desenho e da Geometria Descritiva?

4. Quais são as áreas em que se aplicam os conhecimentos adquiridos na disciplina de Desenho e de Geometria Descritiva?

5.* Indique a opção correcta.

   Uma projecção resulta:

   A. Da intersecção de dois planos.
   B. De uma situação em que não há luz.
   C. Da intersecção de uma recta projectante com o plano de projecção.
   D. Da intersecção de duas linhas.
   E. Da intersecção de planos projectantes com outros planos.

6. Explique o que são os seguintes elementos que definem uma projecção:

   a) Origem da projecção ou foco luminoso.
   b) Linha projectante.
   c) Plano de projecção.

7. Indique a opção correcta para completar a seguinte afirmação.

   A origem de projecção ou foco luminoso pode ser comparado com:

   A. Um plano de projecção.
   B. Um olho humano.
   C. O fundador da Geometria Descritiva.
   D. Linhas paralelas.
   E. A importância da Geometria Descritiva.

8. Faça um desenho, usando instrumentos de rigor, representando uma figura onde estão representados os elementos definidores de uma projecção. Seguidamente, apresente a respectiva legenda.

9. Quais são as três variáveis que devem ser levadas em consideração, quando falamos de projecções?

10. Das três variáveis referidas na pergunta anterior, qual delas diz respeito à projecção ortogonal e à projecção oblíqua?

11. Qual é a diferença entre o sistema de projecção central ou cónica e o sistema de projecção paralela ou cilíndrica?

12. Como é que se subdivide o sistema de projecção ortogonal?

13. Mencione uma das aplicações práticas da representação de múltipla projecção ortogonal.

14. Como se chama a linha que, ao intersectar o plano frontal de projecção, determina a projecção frontal de um ponto?

15. Indique a opção correcta para completar a seguinte afirmação.

A linha que, ao intersectar o plano horizontal de projecção, determina a projecção horizontal de um ponto, chama-se:

A. Plano frontal de projecção.
B. Linha horizontal.
C. Projectante frontal.
D. Projectante horizontal.
E. Origem de projecção ou foco luminoso.

16.* Descreva os planos ortogonais de projecção.

17. Em quantas partes se divide cada um dos planos de projecção e como é que se chama cada uma delas?

18. Em quantas partes os planos ortogonais de projecção dividem o espaço? Como se chama cada uma das partes?

19. Quais são os semiplanos que definem o terceiro diedro de projecção?

20. Assinale com um ✓ as afirmações correctas:

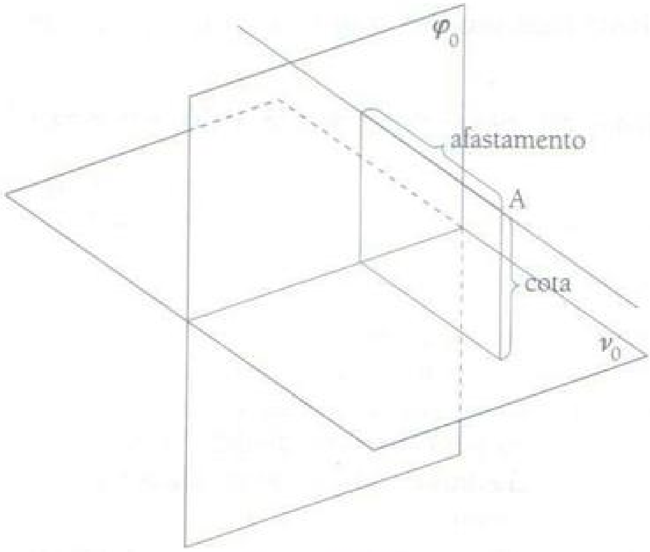
A. O plano bissector é aquele que divide um quadrante em duas partes iguais.
B. O plano bissector dos quadrantes ímpares também é conhecido por $\beta_{2/4}$.
C. O plano bissector dos quadrantes ímpares atravessa os I e IV diedros de projecção.
D. $\beta_{1/3}$ é o plano que bissecta os primeiro e terceiro diedros de projecção.
E. O plano que divide o II e o IV diedros de projecção em duas parte iguais chama-se plano bissector dos quadrantes pares ou simplesmente $\beta_{2/4}$.
F. O espaço resultante da divisão de um diedro de projecção em duas partes iguais chama-se octante.

Coordenadas de um ponto

De acordo com o que aprendeu anteriormente, um ponto é representado por uma letra maiúscula do alfabeto latino; por exemplo, o ponto A.

As coordenadas de um ponto no espaço são a sua localização em relação a determinados referenciais.

Para a definição das coordenadas de um ponto no espaço, serão considerados como referenciais o plano frontal de projecção (φ_0), o plano horizontal de projecção (ν_0) e um plano π_0, auxiliar, perpendicular aos dois planos ortogonais de projecção. O índice zero de cada um dos três planos que acabámos de citar como referenciais indica o lugar geométrico a partir do qual se iniciam as contagens.



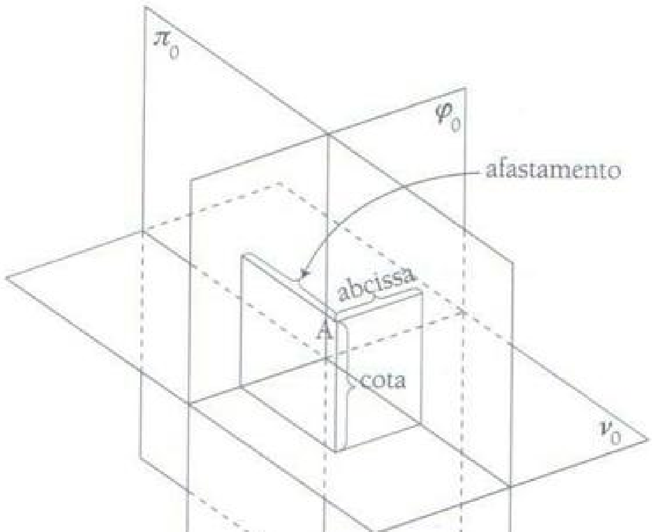
Afastamento e cota.

A distância de separação de um ponto no espaço ao plano frontal de projecção denomina-se *afastamento* e a distância de separação dum ponto no espaço ao plano horizontal de projecção chama-se *cota* ou *altura*.

A distância de um ponto ao plano π_0 auxiliar, simultaneamente perpendicular a φ_0 e a ν_0, denomina-se *abcissa ou largura*.

A localização de um ponto no espaço é suficientemente definida pelas suas três coordenadas, nomeadamente a abcissa, o afastamento e a cota. Essas coordenadas deverão ser indicadas sempre nesta ordem e representam-se da seguinte maneira:

A (x; y; z), onde x representa a abcissa, y o afastamento e z a cota.

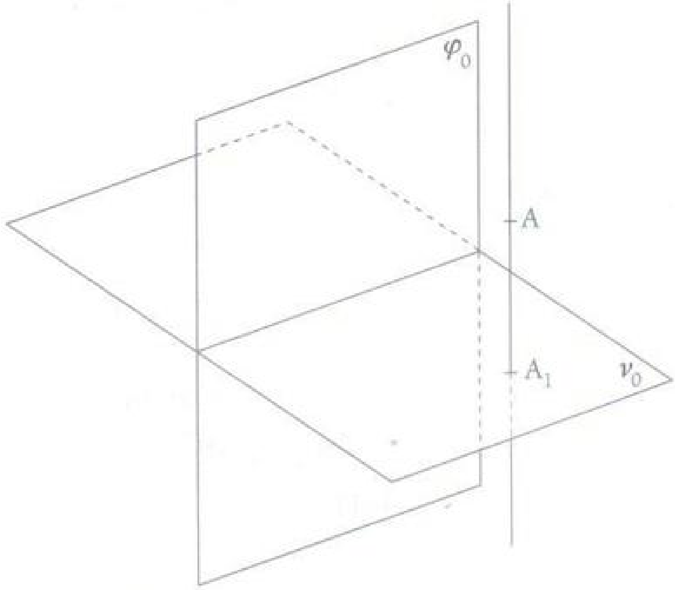


Afastamento, cota e abcissa.

Projecções de um ponto no plano do desenho

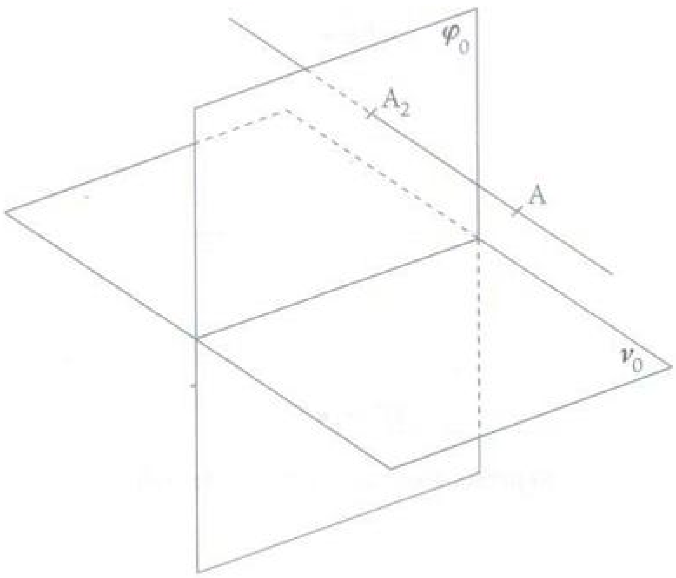
Como já é do seu conhecimento, as projecções de um ponto efectuam-se fazendo passar por ele rectas projectantes que, ao intersectarem os planos de projecção, determinam as projecções desse ponto. Recorde-se que as rectas projectantes no sistema de dupla projecção ortogonal são perpendiculares aos planos ortogonais de projecção.

A projecção horizontal de um ponto resulta da intersecção da projectante horizontal desse ponto com o plano horizontal de projecção e representa-se por uma letra maiúscula do alfabeto latino, seguida pelo índice 1; por exemplo, A_1.



Projecção horizontal do ponto A (A_1).

Fazendo passar por um ponto no espaço uma recta perpendicular ao plano frontal de projecção, projectante vertical, na sua intersecção com esse plano, obtém-se a projecção frontal do ponto. Esta é representada por uma letra maiúscula do alfabeto latino, seguida pelo índice 2; por exemplo, A_2.

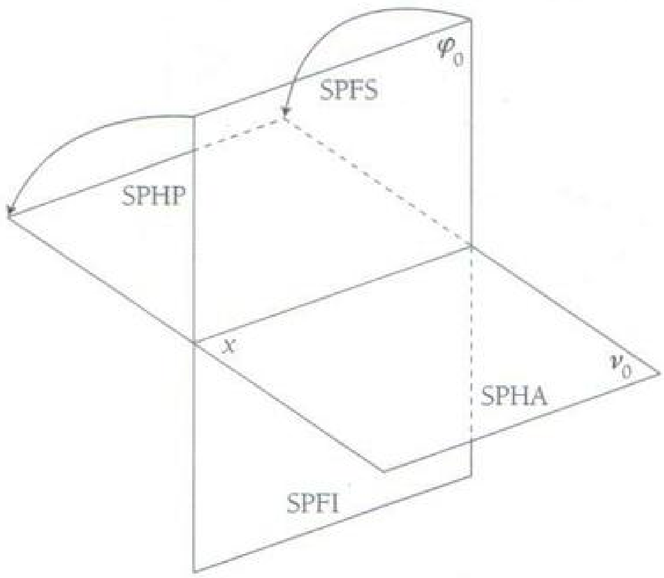


Projecção frontal do ponto A (A_2).

UNIDADE 2 Representação Diédrica do Ponto

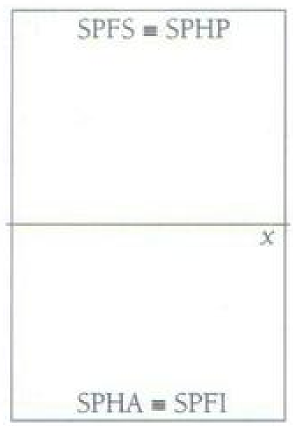
A maneira como se apresentam os planos de projecção não é prática, isto é, não seria cómoda para a execução normal de um desenho, uma vez que só é possível desenhar comodamente sobre um único plano; por exemplo, no quadro da sala de aulas ou numa folha de papel assente sobre um estirador ou uma carteira.

De modo a que se possa desenhar convenientemente, procede-se ao *rebatimento*, ou seja, faz-se girar um dos planos ortogonais de projecção sobre outro, de modo a que os dois fiquem coincidentes. Esse rebatimento deve ser efectuado num sentido que faça com que o semiplano frontal superior coincida com o semiplano horizontal posterior; consequentemente, o semiplano frontal inferior irá coincidir com o semiplano horizontal anterior.



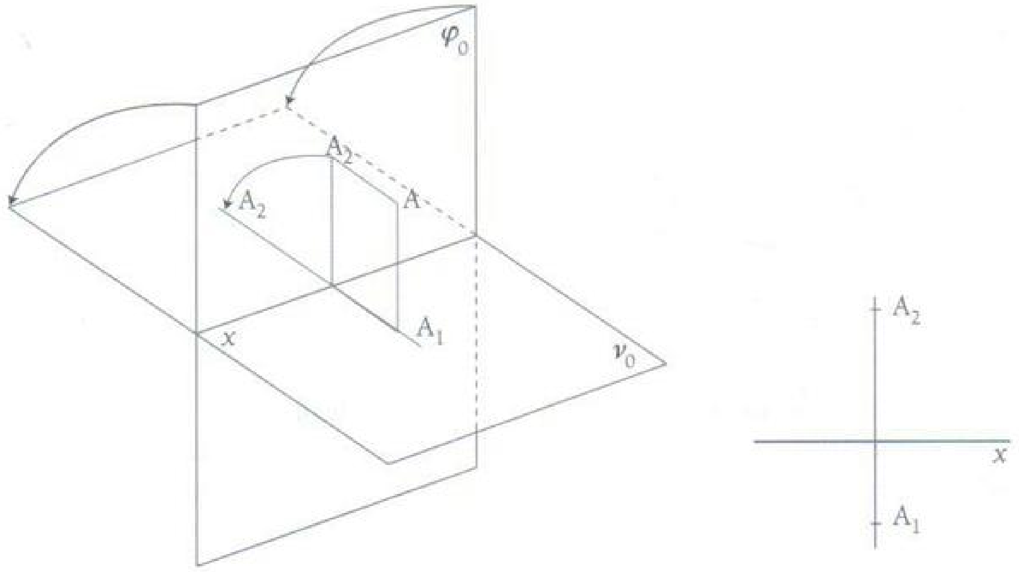
Rebatimento do plano frontal de projecção sobre o plano horizontal de projecção.

Uma vez efectuado o rebatimento, o plano fica colocado na posição em que o semiplano frontal superior e o semiplano horizontal posterior fiquem para cima do eixo x e o semiplano frontal inferior e o semiplano horizontal anterior fiquem para baixo do eixo x. Este plano denomina-se *plano do desenho*.

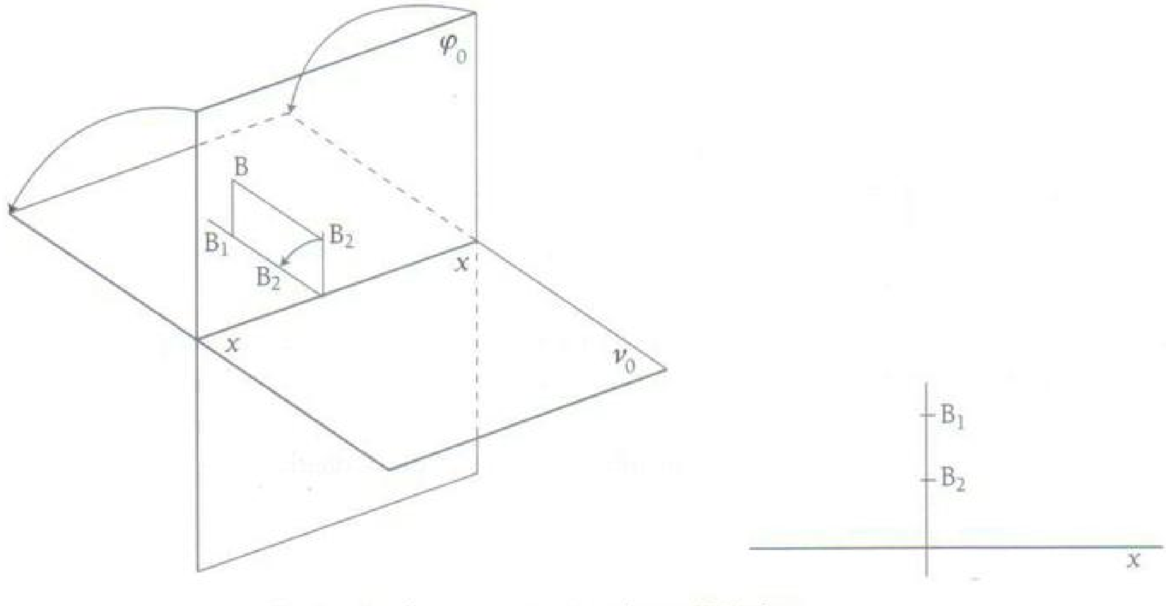


Representação do plano do desenho.

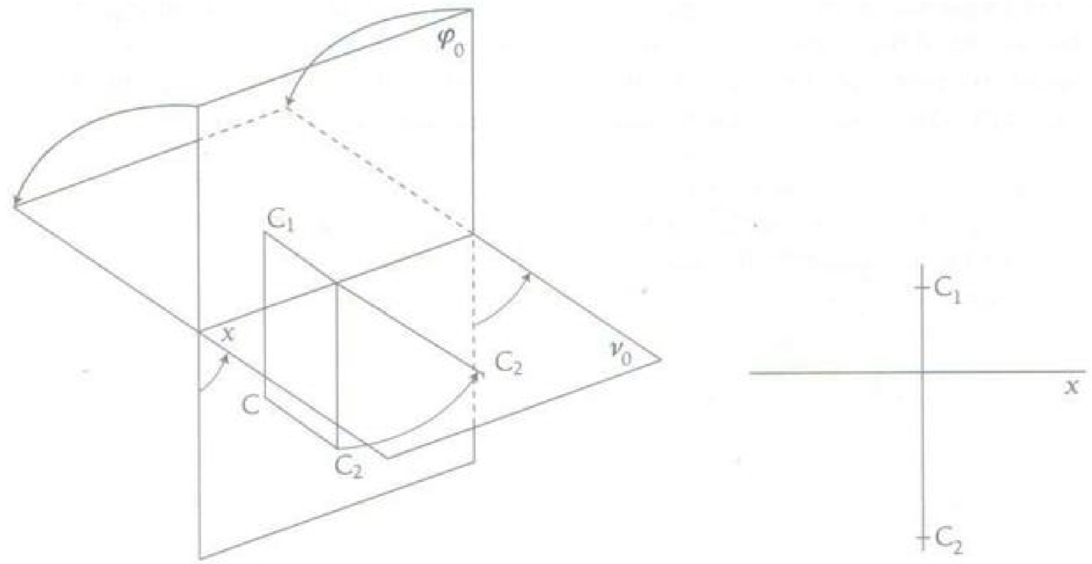
Juntamente com os planos de projecção, giram as projecções dos pontos, linhas ou figuras neles contidos. Na figura que se segue mostramos-lhe as projecções, nos planos ortogonais de projecção dos pontos **A**, **B**, **C** e **D** situados no primeiro, no segundo, no terceiro e no quarto diedros de projecção respectivamente, e a representação das projecções dos mesmos pontos no plano do desenho.



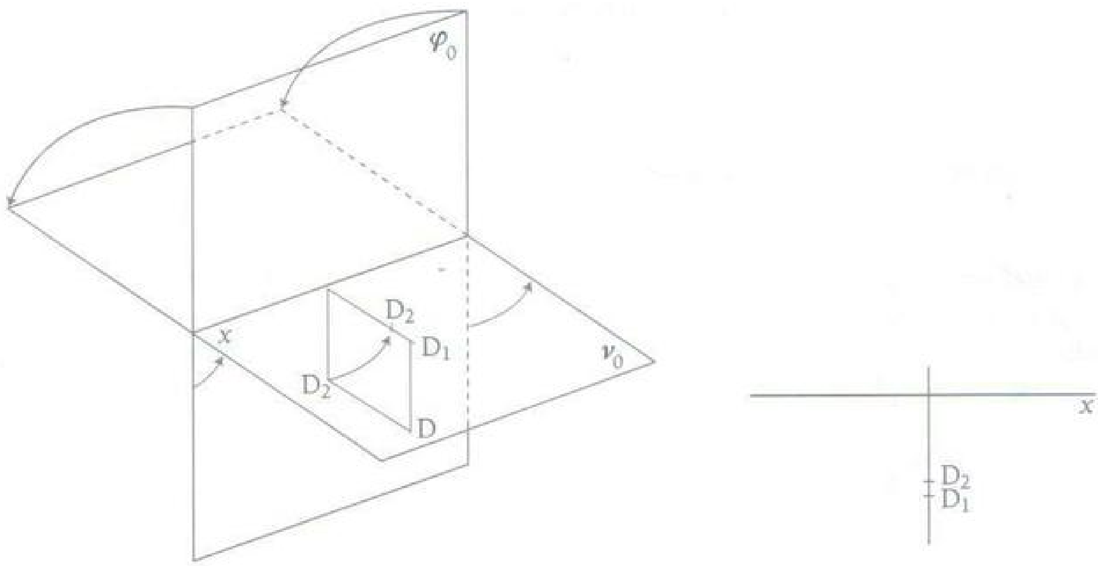
Projecção de um ponto situado no I diedro.



Projecção de um ponto situado no II diedro.



Projecção de um ponto situado no III diedro.

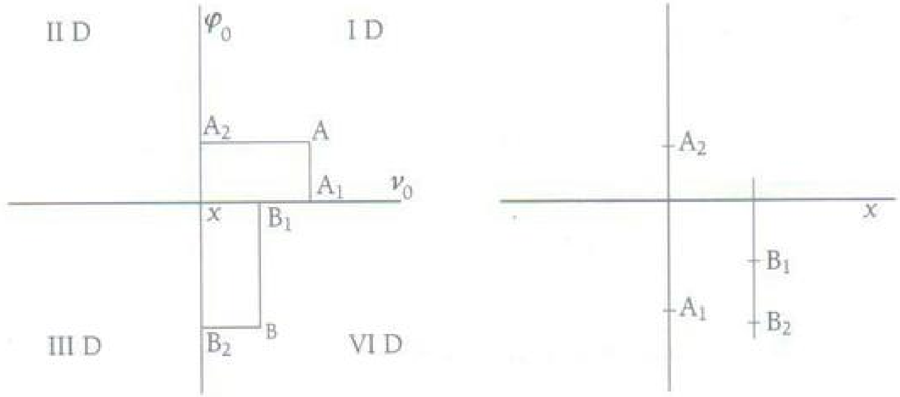


Projecção de um ponto situado no IV diedro.

Como pode observar nas imagens anteriores, as duas projecções de cada ponto no plano do desenho estão ligadas através de uma linha perpendicular ao eixo x, que se chama *linha de referência* ou *linha de chamada*.

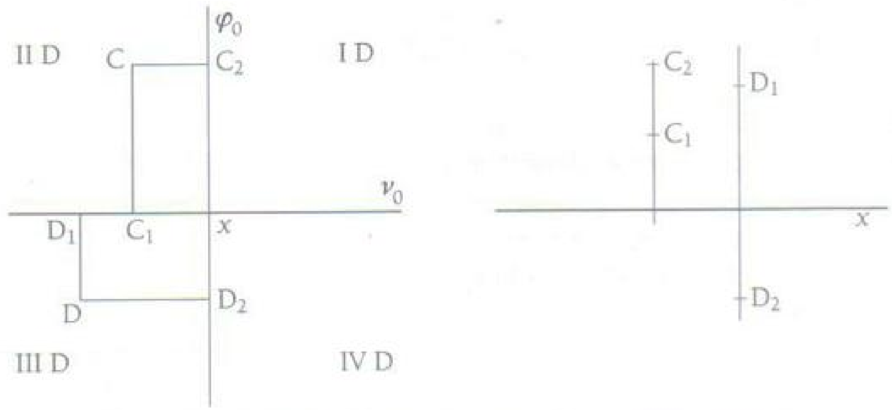
Os planos ortogonais de projecção podem tomar várias posições (mantendo o plano frontal na posição vertical e o horizontal na posição horizontal), entre elas a de perfil, que permite visualizá-los em forma de uma cruz. Para compreender se as cotas e os afastamentos são positivos ou negativos, a posição de perfil dos planos de projecção é facilitadora.

Assim, todos os pontos situados à direita de φ_0 em perfil têm afastamento positivo. No plano do desenho, as projecções horizontais desses pontos situam-se para baixo do eixo x, ou seja, no semiplano horizontal anterior.



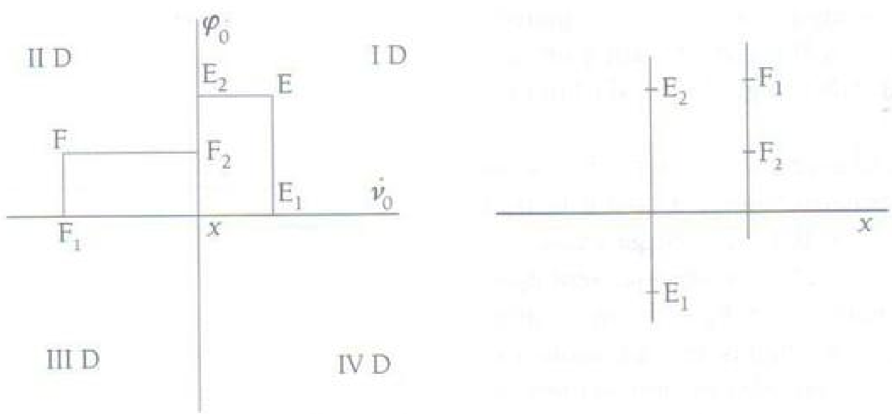
Projecção horizontal de pontos com afastamento positivo.

Todos os pontos no espaço situados à esquerda de φ_0 em perfil têm afastamento negativo. No plano do desenho, as suas projecções horizontais situam-se para cima do eixo x, isto é, no semiplano horizontal posterior.



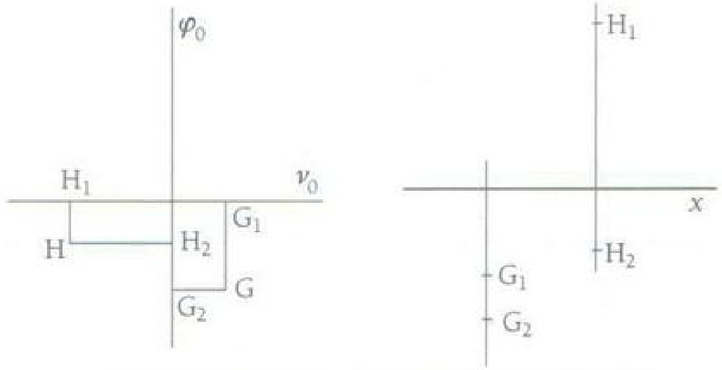
Projecção horizontal de pontos com afastamento negativo.

Têm cota positiva todos os pontos que se situam para cima de ν_0. As suas projecções frontais situam-se no semiplano frontal superior e, consequentemente, no plano do desenho localizam-se para cima do eixo x.



Projecção frontal de pontos com cota positiva.

Finalmente, os pontos cuja projecção frontal se situa no semiplano frontal inferior têm cota negativa e localizam-se abaixo de ν_0. No plano do desenho, as suas projecções frontais ficam para baixo do eixo x.



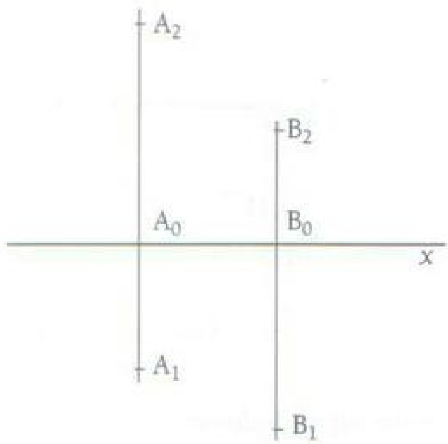
Projecção frontal de pontos com cota negativa.

De uma forma esquemática, resumiremos o que acabámos de abordar da seguinte forma:

Diedros	Afastamento	Cota ou altura
I Diedro de projecção	+	+
II Diedro de projecção	−	+
III Diedro de projecção	−	−
IV Diedro de projecção	+	−

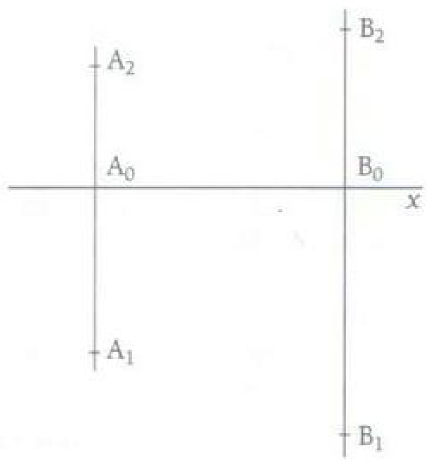
A abcissa é um dado importante quando se representam dois pontos ou mais, permitindo definir a distância entre eles ao longo do eixo x.

No eixo x, poderão ser marcadas as abcissas designando essa projecção do ponto com o índice zero, por exemplo; $\mathbf{A_0}$, $\mathbf{B_0}$, etc.



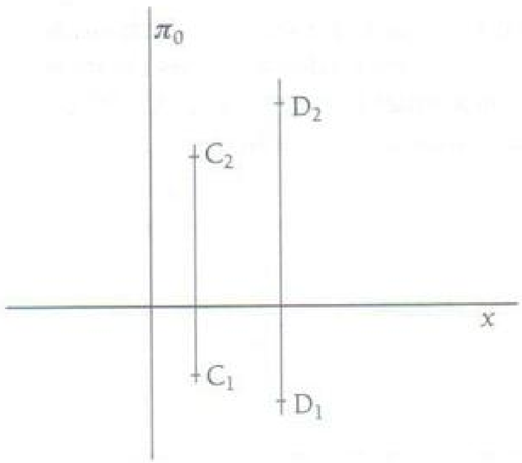
Conforme o que se disse anteriormente, quando se indicam as três coordenadas de um ponto, a abcissa é o primeiro valor, seguida do afastamento e da cota.

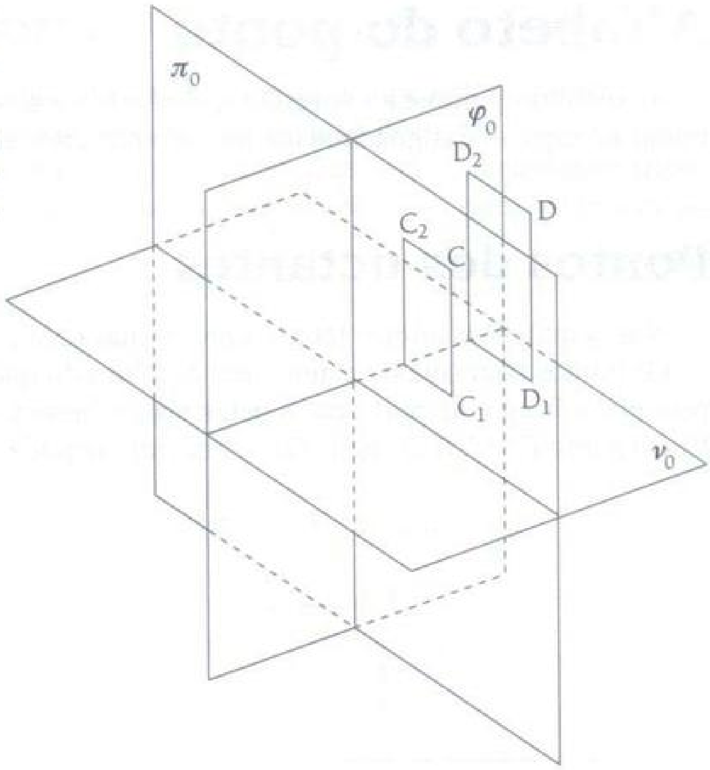
Caso sejam indicadas apenas duas coordenadas, o afastamento é o primeiro valor e a cota o último; por exemplo, **A** (2; 1,5), **B** (3; 2). Nesses casos, se for necessário indicar o valor da abcissa, será apresentado da seguinte maneira: $A_0B_0 = 3$ cm, estando B à direita de A. Este é apenas um exemplo dos pontos A e B. Veja-se como eles se representam no plano do desenho.



O plano π_0 atrás referido não é um plano de projecção, mas apenas um plano de referência zero, para as abcissas.

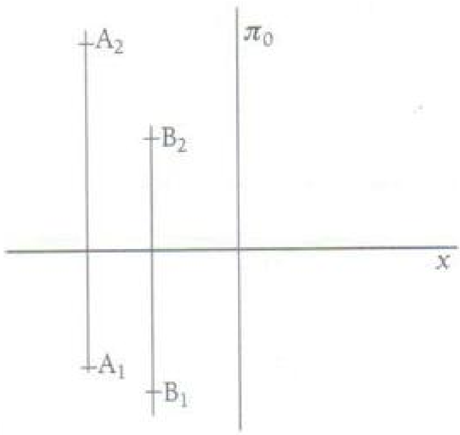
Deste modo, terão abcissa positiva todos os pontos situados à direita do plano π_0, tanto nos planos de projecção como nas suas projecções no plano de desenho.

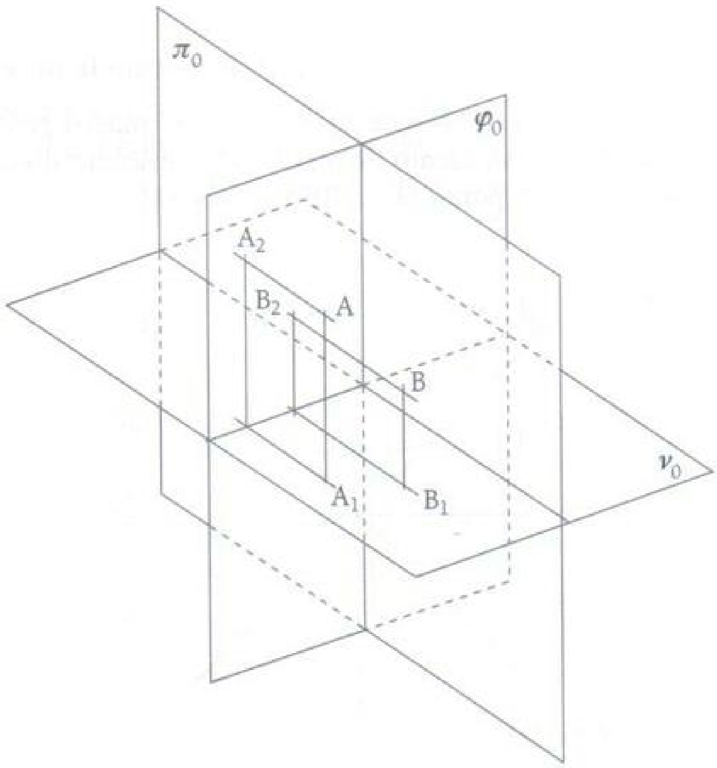




Pontos com abcissa positiva.

Todos os pontos situados à esquerda do plano π_0 têm abcissa negativa. No plano do desenho, as suas projecções também se situam à esquerda do mesmo plano.





Pontos com abcissa negativa.

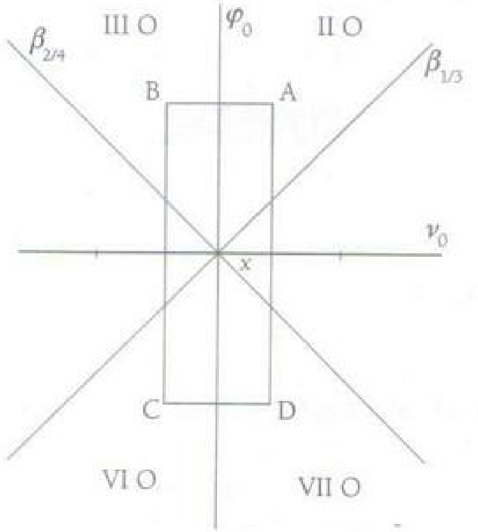
Alfabeto do ponto

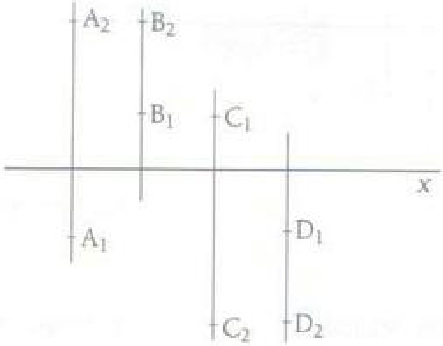
Alfabeto do ponto é a expressão que identifica o conjunto das diferentes posições que um ponto pode tomar no espaço, designadamente nos octantes, nos semiplanos, nos planos bissectores e eixo x.

Pontos dos octantes

Nos octantes, os pontos têm sempre as suas coordenadas diferentes entre si e diferentes de zero.

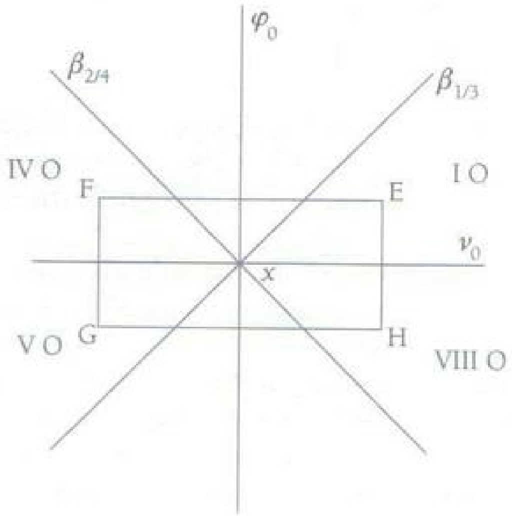
Os pontos com cota de maior valor absoluto do que o seu afastamento situam-se nos octantes formados pelo plano frontal de projecção e pelos planos bissectores, nomeadamente II O (ponto A), III O (ponto B), VI O (ponto C) e VII O (ponto D), conforme se pode ver nas figuras que se seguem.

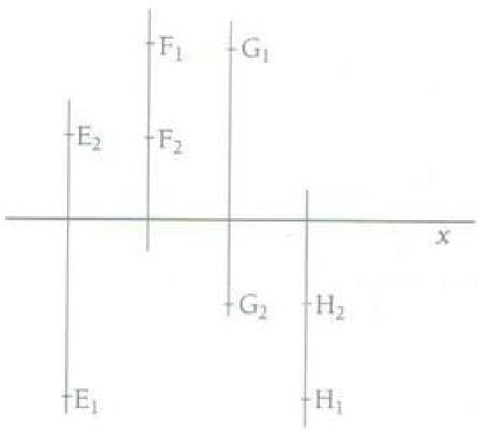




Pontos dos II, III, VI e VII octantes.

Os pontos pertencentes aos octantes formados pelo plano horizontal de projecção e pelos planos bissectores têm afastamento de maior valor absoluto do que a sua cota, designadamente I O (ponto E), IV O (ponto F), V O (ponto G) e VIII O (ponto H).



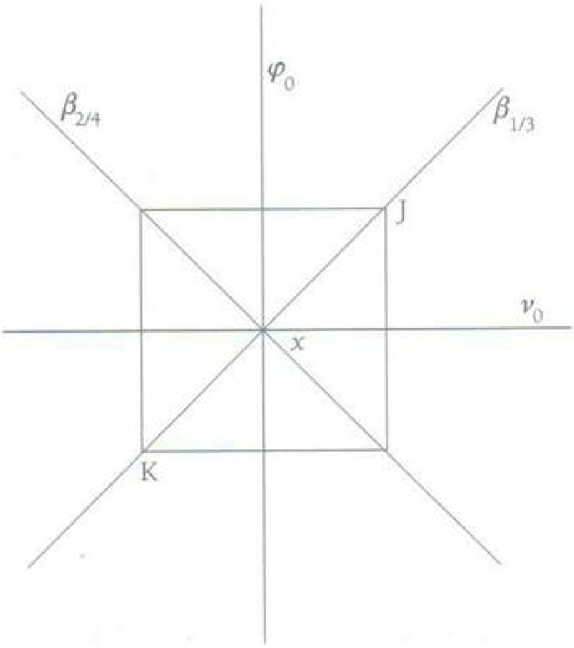


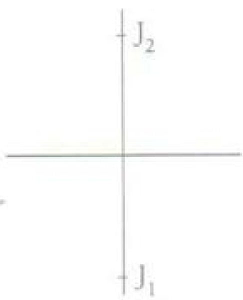
Pontos dos I, IV, V e VIII octantes.

Pontos dos planos bissectores

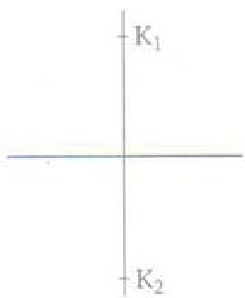
Os pontos situados nos planos bissectores no espaço são equidistantes aos planos de projecção, ou seja, o valor absoluto da cota de um ponto é igual ao valor absoluto do seu afastamento.

Os pontos do plano bissector dos diedros de projecção ímpares, $\beta_{1/3}$, têm cota e afastamento iguais, sendo, como é óbvio, no I D positivos e no III D negativos. No plano do desenho, as suas projecções são simétricas em relação ao eixo x.



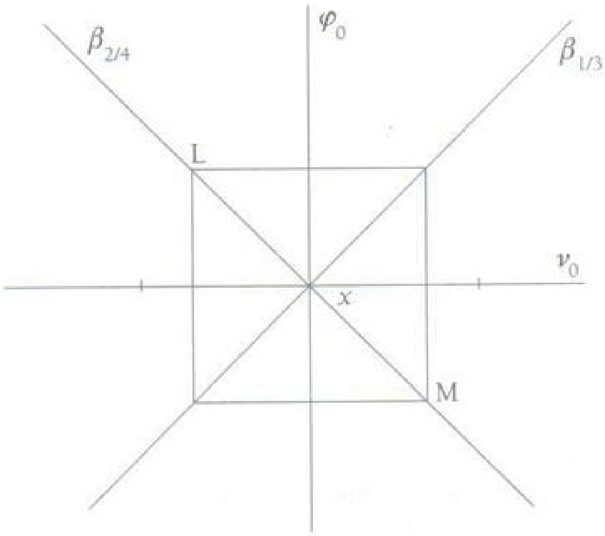


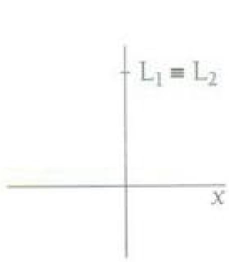
Ponto do $\beta_{1/3}$ no I D.



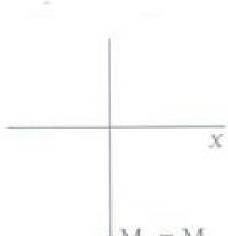
Ponto do $\beta_{1/3}$ no III D.

Os pontos contidos no plano bissector dos diedros de projecção pares, $\beta_{2/4}$, têm o seu afastamento com sinal contrário ao da cota e as suas projecções são sempre coincidentes, estando, no plano do desenho, para cima do eixo x as projecções do ponto do II D e para baixo do eixo x as projecções dos pontos do $\beta_{2/4}$ no IV D.





Ponto do $\beta_{2/4}$ no II D.

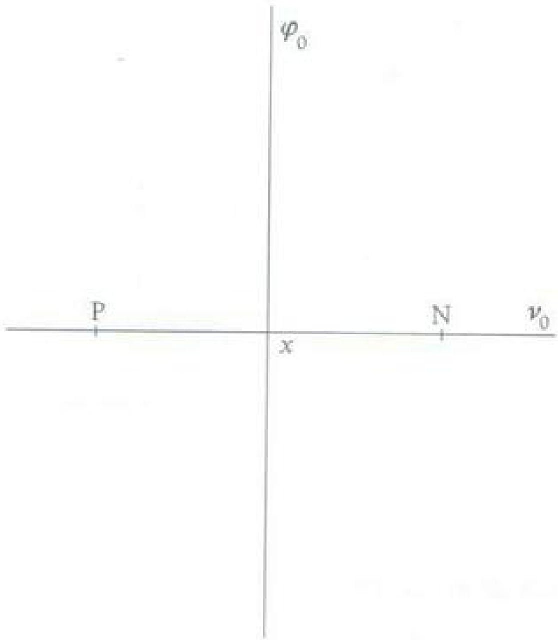


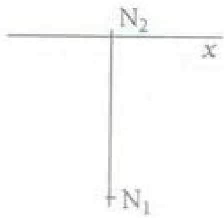
Ponto do $\beta_{2/4}$ no IV D.

Pontos dos semiplanos

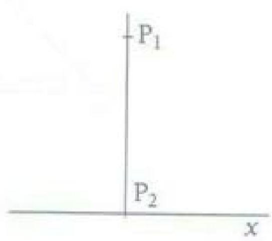
Os pontos situados em semiplanos não pertencem a nenhum diedro de projecção, pois são estes planos que delimitam os diedros e, sendo assim, são lugares geométricos onde começam as contagens dos valores das cotas e dos afastamentos.

Portanto, os pontos contidos no plano horizontal de projecção têm cota igual a zero, ou seja, cota nula. O seu afastamento será positivo se estiver no semiplano horizontal anterior, e negativo se estiver no semiplano horizontal posterior.



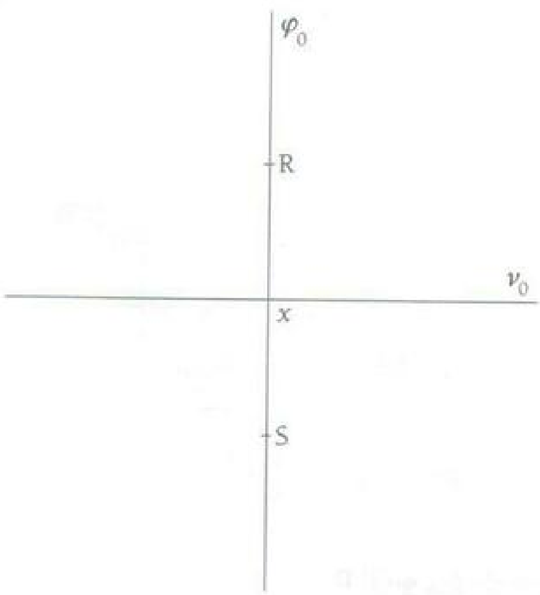


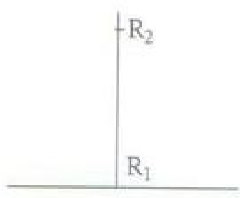
Ponto do semiplano horizontal anterior.



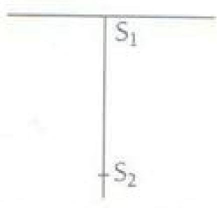
Ponto do semiplano horizontal posterior.

Os pontos do plano frontal de projecção têm *afastamento nulo*. As suas cotas são positivas no semiplano frontal superior e negativas no semiplano frontal inferior.





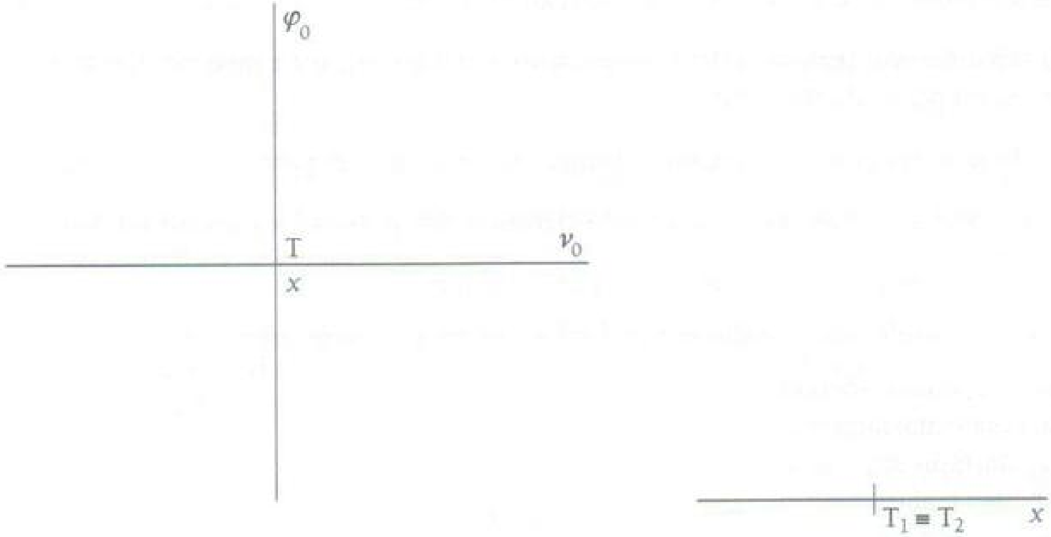
Ponto do semiplano frontal superior.



Ponto do semiplano frontal inferior.

Pontos situados no eixo x

O eixo x resulta da intersecção dos dois planos de projecção e, assim sendo, é o lugar geométrico em que a cota e o afastamento são portanto iguais a zero (ou seja, são nulos). As duas projecções dos pontos situados nesse lugar geométrico são nele coincidentes (ou seja, são coincidentes no eixo x).



Pontos do eixo x.

Exercícios propostos

1. Em que é que consiste o sistema da dupla projecção ortogonal?

2. Porque é que o sistema de dupla projecção ortogonal também é chamado sistema de Monge?

3. Desenhe os planos ortogonais de projecção incluindo os planos bissectores e faça a respectiva legenda, indicando as designações de todos os elementos e espaços aí existentes.

4. Qual é o sentido que deverão tomar os planos no rebatimento?

5. Depois do rebatimento, temos o plano do desenho. Qual deverá ser a posição dos semiplanos em relação ao eixo x, no plano do desenho?

6.* No plano do desenho, onde se situam as projecções frontais dos pontos de cota negativa?

7. Em que semiplano se situam as projecções horizontais dos pontos localizados no primeiro diedro?

8. Assinale com ✓ a resposta que completa a frase seguinte:

   A ordem que as coordenadas de um ponto deve apresentar é a seguinte:

   A. Afastamento, cota e abcissa.
   B. Abcissa, cota e afastamento.
   C. Abcissa, afastamento e cota.
   D. Cota, abcissa e afastamento.
   E. Afastamento, abcissa e cota.

9. Usando as palavras «positivo» e «negativo», preencha os espaços em branco.
   Os pontos situados no primeiro diedro têm cota __________ e afastamento __________. Os pontos situados no quarto diedro têm afastamento __________ e cota __________.

10. Assinale com ✓ as afirmações correctas:

    A. Os pontos com afastamento negativo têm a sua projecção horizontal abaixo do eixo x.
    B. As projecções horizontais que se apresentam para baixo do eixo x são de pontos situados no primeiro diedro de projecção.
    C. Qualquer ponto com a projecção horizontal acima do eixo x pertence ao segundo diedro.
    D. Os pontos cujas projecções frontais se situam para cima do eixo x pertencem ao primeiro diedro.
    E. As projecções frontais situadas acima do eixo x, são de pontos de cota positiva.
    F. Todos os pontos com a projecção frontal abaixo do eixo x têm afastamento negativo.
    G. Os pontos cujas projecções frontais se situam para baixo do eixo x têm cota positiva.

11. Qual é a característica comum dos pontos situados no terceiro octante?

12. Represente, pelas suas projecções, quatro pontos A $(2; 1; 2)$, B $(4; -1; 6)$, C $(0; 3; -5)$ e D $(-2; -3; -1)$ Identifique os lugares geométricos em que estes pontos se localizam.

13. Assinale com ✓ as afirmações correctas:

    A. Os pontos do bissector dos diedros de projecção impar, no terceiro diedro, têm cota e afastamento iguais.
    B. Todos os pontos do $\beta_{2/4}$ têm cota e afastamento simétricos.
    C. Os pontos que têm, no plano do desenho, as projecções coincidentes pertencem ao $\beta_{2/4}$.

Exercícios propostos

14.* Assinale com um ✓ as afirmações correctas:

A. Qualquer ponto de cota nula e afastamento positivo pertence ao semiplano horizontal anterior.
B. Os pontos do semiplano frontal superior têm afastamento igual a zero e cota positiva.
C. Os pontos com afastamento negativo e cota nula pertencem ao SPHP.
D. Todos os pontos que tenham cota nula e afastamento negativo pertencem a um plano frontal.

15. Qual é a característica comum dos pontos situados no quinto octante?

16. Como se chama o lugar geométrico onde todos os pontos têm afastamento nulo e cota negativa?

17. Assinale com ✓ as afirmações verdadeiras:

A. Todos os pontos situados no semiplano horizontal posterior, têm afastamento nulo.
B. O lugar geométrico onde todos os pontos têm afastamento e cota nulos é o eixo x.
C. Os pontos de afastamento negativo com menor valor absoluto do que a cota positiva, pertencem ao III O.
D. Qualquer ponto que tenha a cota e o afastamento com valor igual e positivo, pertence ao $\beta_{2/4}$, II D.
E. Todos os pontos que tenham, no plano do desenho, as suas projecções simétricas em relação ao eixo x pertencem ao plano bissector dos diedros ímpares, $\beta_{1/3}$.

18. Represente pelas suas projecções os seguintes pontos e diga o lugar geométrico onde cada um deles se localiza: A (–3; 0; 3); A (0; 2; 0); A (1; 2; 1); A (2; 1,5; 1,5).

19. Os pontos A, B, C e D pertencem à mesma projectante horizontal que dista 2,5 cm de φ_0. Desenhe as projecções desses pontos, sabendo que:

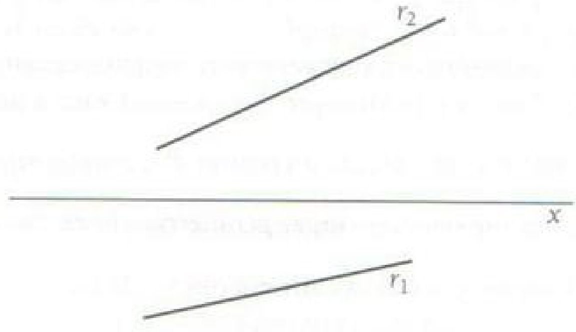
A. é do IV Q e pertence a $\beta_{2/4}$.
B. é simétrico a A em relação a ν_0.
C. pertence ao plano horizontal de projecção.
D. pertence ao II O.

Definição de recta

Dois pontos não coincidentes ou um ponto e uma direcção podem definir uma recta.

Uma recta é designada por uma letra minúscula do alfabeto latino, por exemplo, *a*, *f*, *r*, etc.

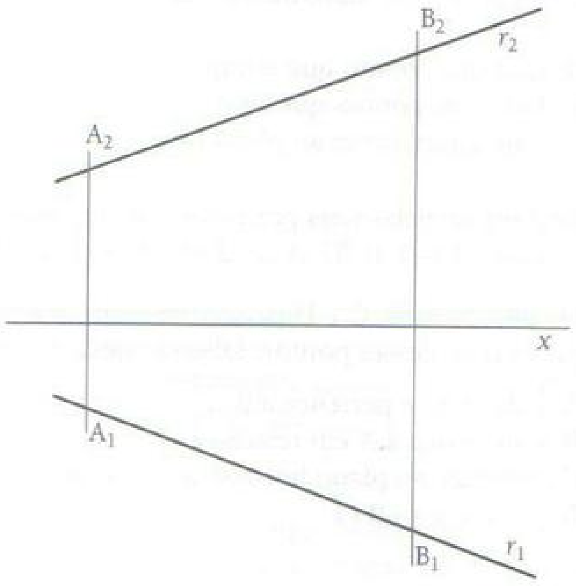
No plano do desenho, uma recta é representada pela sua projecção horizontal, que é designada por uma letra minúscula do alfabeto latino com o índice 1, e pela sua projecção frontal que é designada pela mesma letra com índice 2.



Projecções de uma recta.

Dadas as coordenadas dum ponto podemos representar, no plano do desenho, uma determinada recta. Por exemplo, podemos determinar as projecções de uma recta r definida pelos pontos A (0; 1; 2) e B (4; 2,5; 3,5).

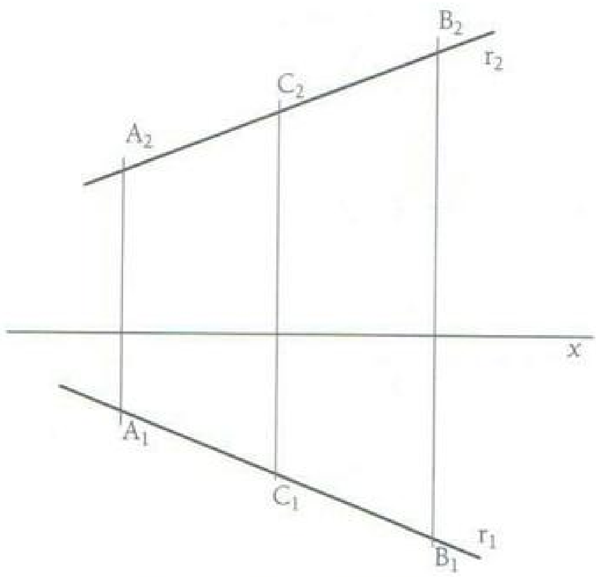
Para resolver este exercício começa-se por representar pelas suas projecções os pontos A e B. Seguidamente, une-se A_2 com B_2 para obter a projecção frontal da recta r, r_2. Para se obter a projecção horizontal da recta, r_1, unem-se as projecções horizontais dos pontos, A_1 com B_1. Assim, já estão determinadas as projecções da recta r.



Projecções de uma recta, sendo conhecidos os pontos que a definem.

Como se pode ver, os pontos A e B, porque definem a recta r, estão nela contidos. Logo, esses pontos são pontos da recta r. Tal como se obtiveram esses pontos, podem-se obter outros pontos da recta r.

Um ponto pertence a uma recta se a recta passa por ele, ou seja, se a sua projecção frontal estiver sobre a projecção frontal da recta e a sua projecção horizontal estiver sobre a projecção do mesmo nome da recta, por exemplo, o ponto C.



Ponto C, pertencente à recta r.

Traços da recta (pontos notáveis da recta)

Uma recta é constituída por uma infinidade de pontos que segue a mesma direcção e não tem limites. Assim sendo, diferentemente do ponto, a recta pode ocupar simultaneamente vários lugares geométricos, ou um único excepcionalmente, quando a recta é paralela aos dois planos de projecção.

Ao passar de um lugar geométrico para outro, a recta intersecta os planos de projecção e os planos bissectores, originando pontos. A esses pontos de intersecção duma recta com os planos de projecção ou planos bissectores, chamam-se *traços da recta*.

Assim, uma recta poderá ter traço frontal, traço horizontal, traço no $\beta_{1/3}$ e traço no $\beta_{2/4}$, e esses são considerados pontos notáveis duma recta.

Traço frontal (F)

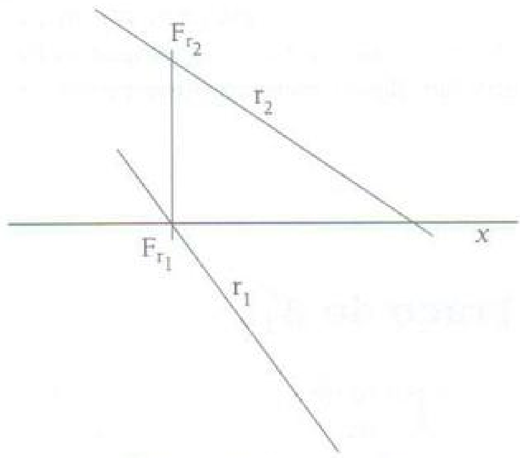
É o ponto de intersecção de uma recta com o plano frontal de projecção; designa-se pela letra F, seguida pelo índice que designa a recta. Por exemplo, se se tratar duma recta *r* ou *f*, a designação do seu traço frontal seria, por conseguinte, F_r ou F_f, respectivamente.

Por se tratar de um ponto de φ_0, o seu afastamento é nulo, isto é, é o ponto da recta com afastamento igual a zero.

No plano do desenho, a projecção horizontal do traço frontal duma recta situa-se no ponto de intersecção da projecção horizontal da recta com o eixo *x*, e designa-se por F_{r_1}, se se tratar duma recta *r*.

A projecção frontal do traço frontal da recta *r* situa-se na intersecção da linha de chamada de F_{r_1} com a projecção frontal da recta e designa-se por F_{r_2}.

Portanto, no plano do desenho, o traço frontal de qualquer recta localiza-se a partir da projecção horizontal dessa recta.



Traço frontal da recta *r*.

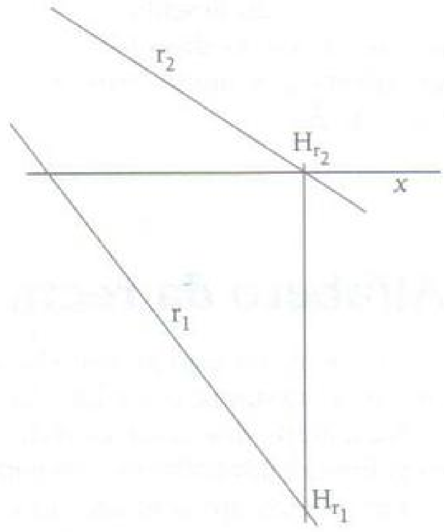
Traço horizontal (H)

É o ponto de intersecção de uma recta com ν_0, ou seja, é o ponto de uma recta com cota nula.

Designa-se pela letra H, seguida de um índice que designa a recta que determina esse traço; por exemplo, H_r, para o caso em que a recta é *r*.

No plano do desenho, localiza-se a partir do ponto de intersecção da projecção frontal da recta com o eixo *x*, projecção frontal do traço horizontal da recta H_{r_2}, se se tratar da recta *r*.

A projecção horizontal da recta obtém-se no ponto de intersecção da linha de chamada que passa por H_{r_2} com a projecção horizontal da recta *r*.



Traço horizontal da recta *r*.

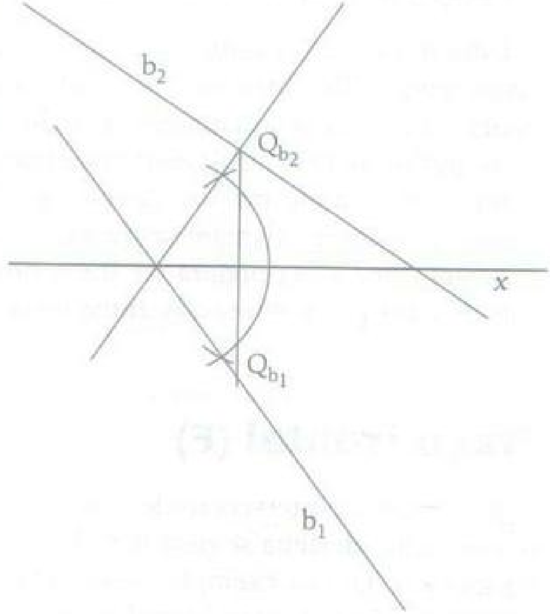
Traço do $\beta_{1/3}$

Por convenção, esse traço designa-se pela letra Q; e tal como nos traços dos planos de projecção, nomeadamente **F** e **H**, é precedida pelo nome da recta, por exemplo, Q_b. Esse traço resulta da intersecção de uma recta com o plano bissector de $\beta_{1/3}$, logo, é o ponto da recta com cota e afastamento iguais.

Como é do seu conhecimento, o traço em $\beta_{1/3}$, por se tratar dum ponto do $\beta_{1/3}$, tem no plano do desenho as suas projecções sempre simétricas em relação ao eixo *x*.

O traço em $\beta_{1/3}$, no plano do desenho, obtém-se traçando uma recta auxiliar, simétrica a uma das projecções da recta, que se marca a partir do ponto em que essa projecção intersecta o eixo *x*. O ponto de intersecção da recta auxiliar com a outra projecção da recta é uma das projecções do traço Q.

Fazendo passar pela primeira projecção de Q uma linha de chamada, ao intersectar a projecção da recta simétrica à linha auxiliar, determina-se a outra projecção do traço em $\beta_{1/3}$.



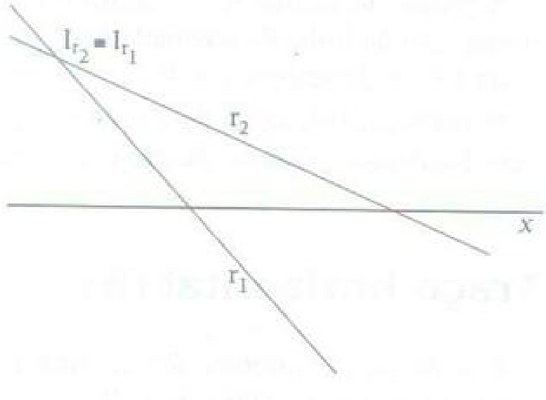
Traço no $\beta_{1/3}$.

Traço do $\beta_{2/4}$

É o ponto de intersecção de uma recta com $\beta_{2/4}$, ou seja, o ponto de uma recta com cota e afastamento simétricos, isto é, se a cota for igual a 1 cm, por exemplo, o afastamento será igual a –1 cm.

Este traço é designado pela letra **I**, no plano do desenho, e as suas projecções são sempre coincidentes, conforme referimos quando falámos dos pontos situados no plano bissector dos diedros de projecção par.

No plano do desenho, as suas projecções localizam-se no ponto em que as duas projecções da recta se intersectam. A sua obtenção é muito mais simples, comparativamente à do traço em $\beta_{1/3}$.



Traço no $\beta_{2/4}$.

Alfabeto da recta

Uma recta no espaço, em relação aos planos ortogonais de projecção, pode tomar várias posições, e é em função destas posições que ela recebe nomes específicos.

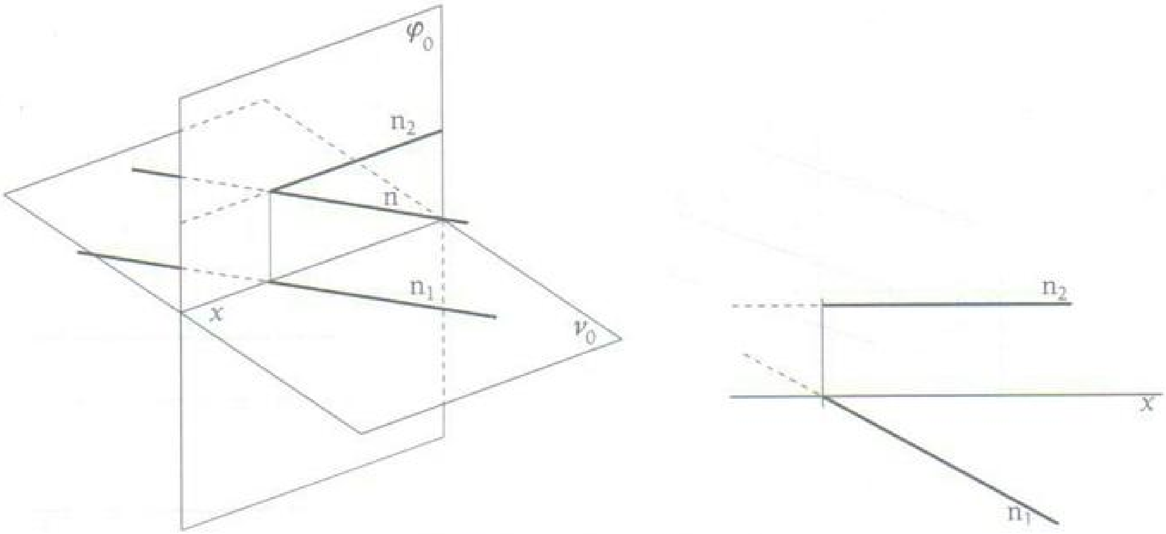
Na maioria dos casos as rectas são designadas pela primeira letra do seu nome; por exemplo, uma recta frontal, normalmente, designa-se pela letra *f*.

Em seguida apresentamos as diferentes rectas existentes quanto à sua localização no espaço, tendo como referentes os planos de projecção.

1. Recta de nível ou horizontal

É paralela ao plano horizontal de projecção e oblíqua em relação ao plano frontal. Por ser paralela ao plano horizontal de projecção, todos os seus pontos têm cotas iguais e, consequentemente, não têm traço horizontal.

A recta horizontal ou de nível intersecta sempre os planos bissectores; logo, tem sempre os seus traços nesses planos, bem como o traço frontal. No plano do desenho, a sua projecção frontal é sempre paralela ao eixo x, e a sua projecção horizontal é oblíqua ao eixo x.

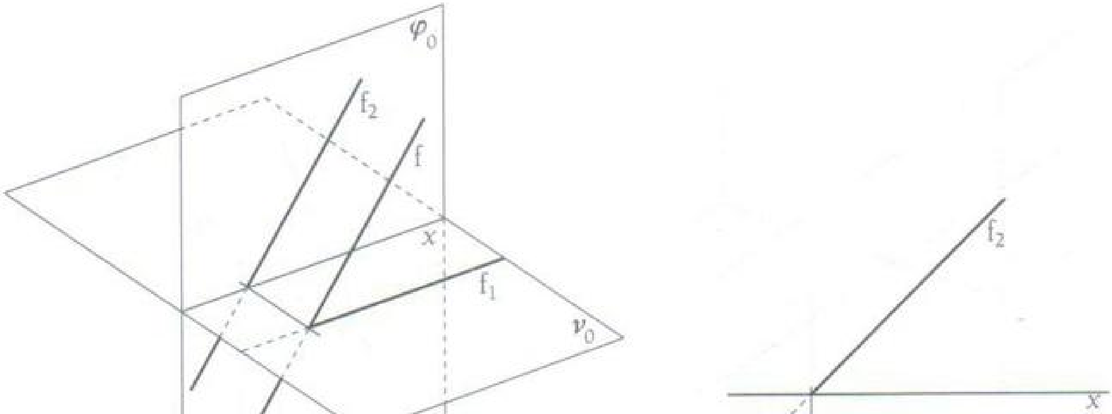


Recta de nível ou horizontal.

2. Recta frontal ou de frente

É paralela ao plano frontal de projecção; logo, não tem traço frontal. Apenas tem traços no plano horizontal de projecção e nos planos bissectores. Em relação ao plano horizontal ela é oblíqua.

No plano do desenho, porque todos os seus pontos têm o mesmo afastamento, a sua projecção horizontal é paralela ao eixo x. A projecção frontal de uma recta de frente é oblíqua em relação ao eixo x.



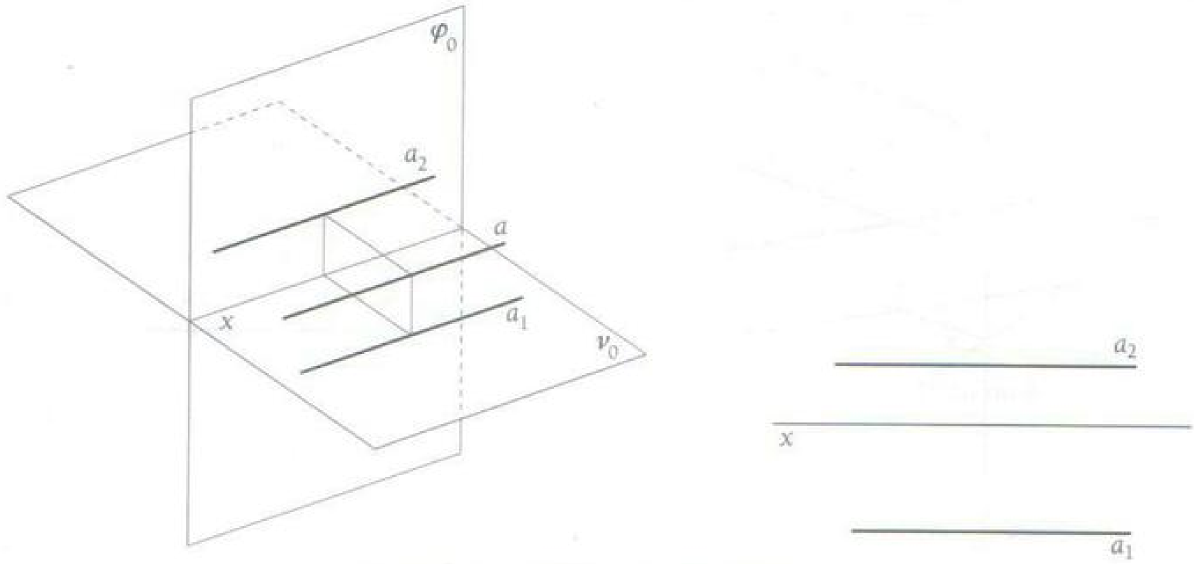
Recta frontal ou de frente.

3. Recta fronto-horizontal ou horizontal de frente ou ainda paralela

A recta fronto-horizontal é paralela aos dois planos de projecção; logo, não tem nenhum traço nesses planos nem nos planos bissectores, isto é, não tem nenhum ponto notável.

É uma recta que ocupa apenas um único lugar geométrico.

As suas projecções são paralelas entre si e paralelas ao eixo x.

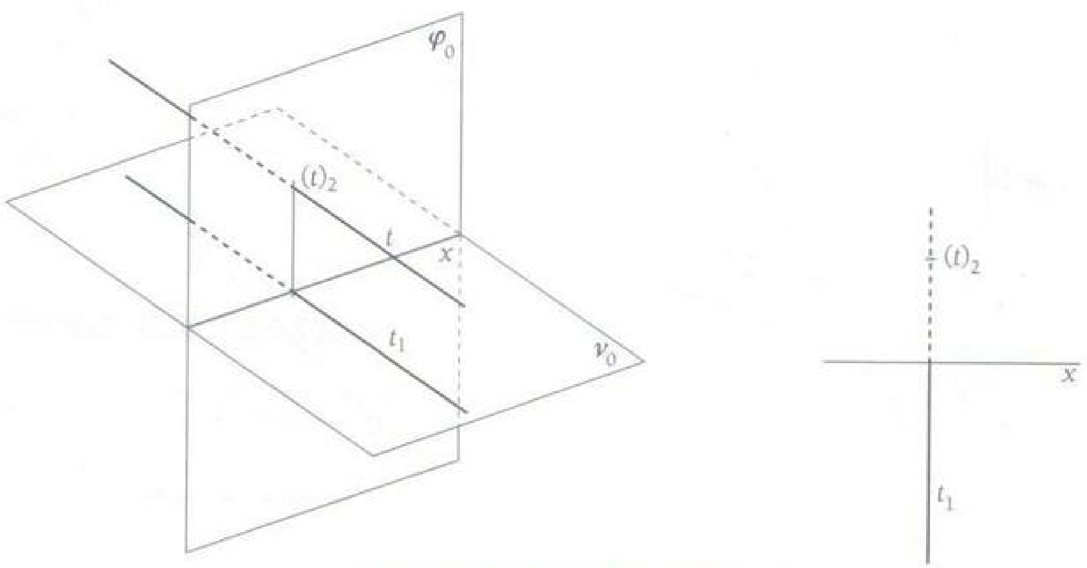


Recta fronto-horizontal ou paralela.

4. Recta de topo ou projectante frontal

Tal como a recta de nível, esta recta é paralela ao plano horizontal de projecção distinguindo-se da de nível pelo facto de ser perpendicular ao plano frontal. Não tem apenas o traço horizontal.

A sua projecção frontal fica reduzida a um ponto e, por esse facto, a sua representação deverá estar entre parêntesis, por exemplo, (t_2). A sua projecção horizontal é perpendicular ao eixo x.

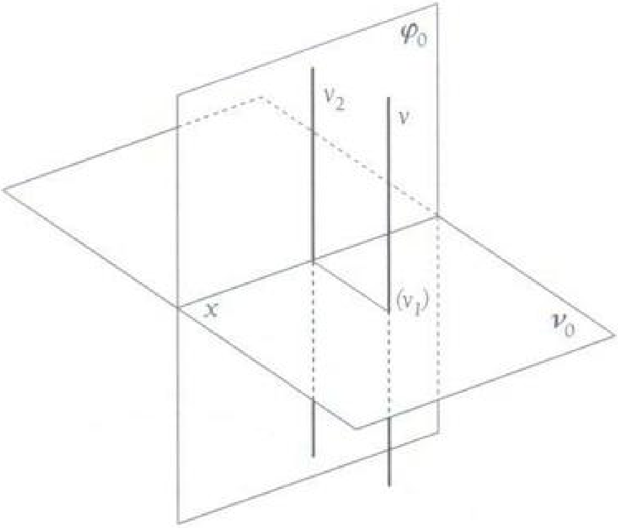


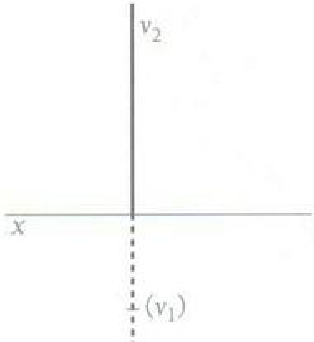
Recta de topo ou projectante frontal.

5. Recta vertical ou projectante horizontal

É uma recta perpendicular ao plano horizontal de projecção e, consequentemente, paralela ao plano frontal de projecção. Tem, obviamente, todos os traços, exceptuando o frontal. Aliás, o seu traço frontal teoricamente encontra-se num ponto inacessível, pois, como deve estar recordado, duas rectas paralelas cruzam-se no infinito.

A sua projecção frontal é perpendicular ao eixo x, e a sua projecção horizontal reduz-se a um ponto. Por se tratar duma recta cuja projecção é um ponto, a sua representação fica entre parêntesis, por exemplo, (ν_1).



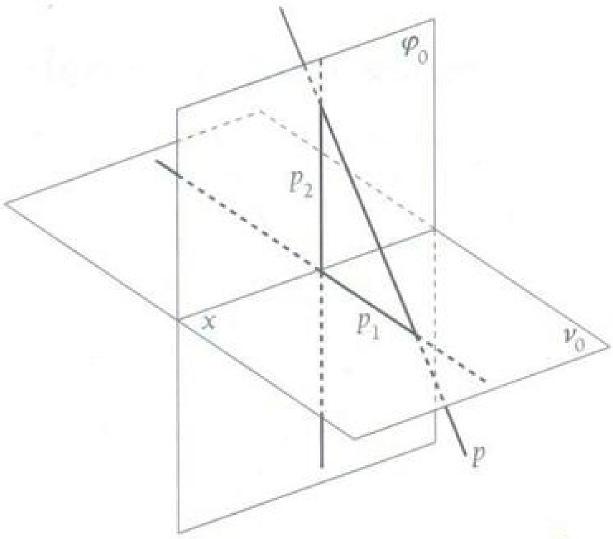


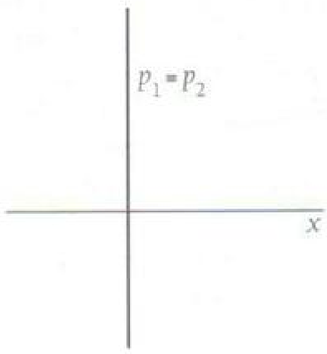
Recta vertical ou projectante horizontal.

6. Recta de perfil

É uma recta contida num plano de perfil (plano perpendicular aos dois planos de projecção, como, por exemplo, o plano π_0, das abcissas) e é oblíqua em relação aos dois planos de projecção. Assim, tem pelo menos três traços, mas se não for paralela a um dos planos bissectores tem os quatro traços.

As suas projecções são coincidentes e perpendiculares ao eixo x. Neste tipo de recta, a representação de um terceiro plano (representação triédrica) é especialmente utilizada.



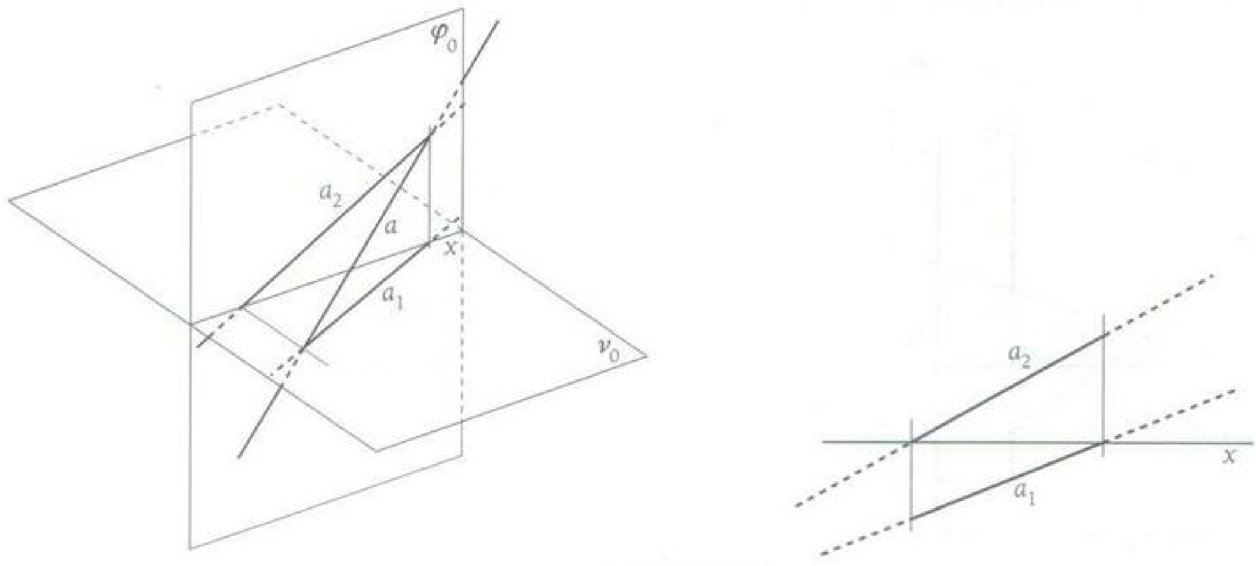


Recta oblíqua.

7. Recta oblíqua

Como o próprio nome indica, é uma recta oblíqua em relação aos dois planos de projecção, intersecta sempre os planos de projecção e, em condições gerais, intersecta também os dois planos bissectores. Poderá não intersectar um dos planos bissectores se for paralela ou coincidente a ele. Esta situação também ocorre na recta de perfil.

Recorde-se que a recta de perfil é um caso especial da recta oblíqua.

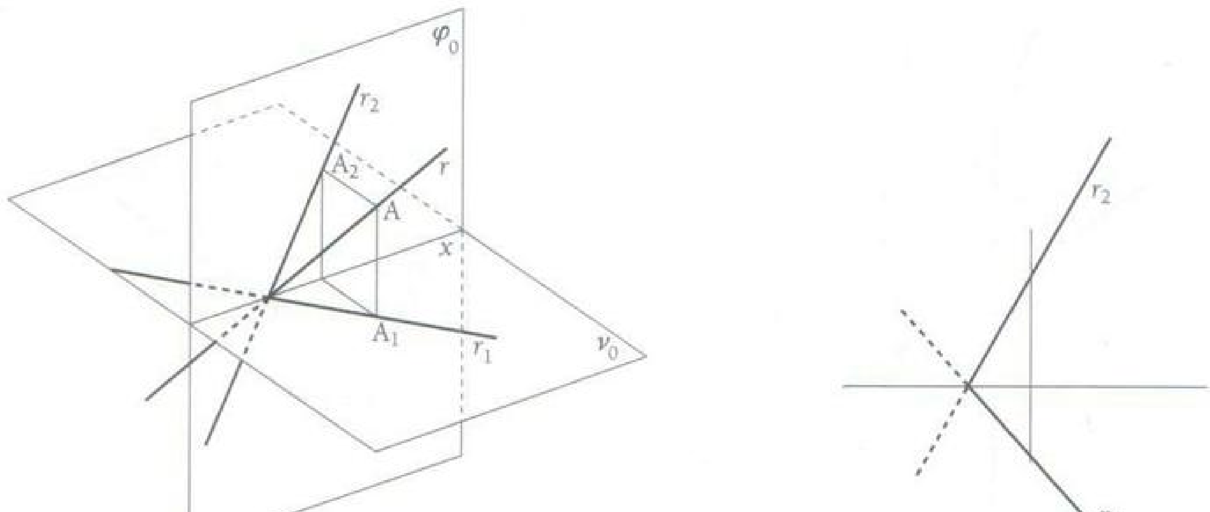


Recta oblíqua.

8. Recta passante

É uma recta que pode tomar algumas das posições descritas anteriormente, apresentando a característica específica de intersectar o eixo x.

Sendo assim, as duas projecções são concorrentes no eixo x. As rectas contidas nos planos de projecção e as rectas oblíquas contidas nos planos bissectores também são rectas passantes.



Recta passante.

O quadro seguinte resume as diferentes posições que uma recta ocupa no espaço.

Posição em relação ν_0 e φ_0	Designação		Representação no plano do desenho
// a ν_0	$\angle$ a φ_0	Recta horizontal ou de nível	Projecção frontal paralela ao eixo x Projecção horizontal oblíqua ao eixo x
	$\perp$ a φ_0	Recta de topo ou projectante frontal	Projecção frontal reduzida a um ponto Projecção horizontal perpendicular ao eixo x
	// a φ_0	Recta fronto-horizontal	Ambas as projecções paralelas ao eixo x
// a φ_0	$\angle$ a ν_0	Recta frontal ou de frente	Projecção frontal oblíqua ao eixo x Projecção horizontal paralela ao eixo x
	$\perp$ a φ_0	Recta vertical ou projectante horizontal	Projecção frontal perpendicular ao eixo x Projecção horizontal reduzida a um ponto
	$\angle$ a ν_0	Recta fronto-horizontal	Ambas as projecções paralelas ao eixo x
	$\angle$ a ν_0 e $\angle$ φ_0	Recta oblíqua	Ambas as projecções oblíquas ao eixo x
		Recta de perfil	Ambas as projecções perpendiculares ao eixo x

// – paralela $\perp$ – perpendicular $\angle$ – oblíqua

Posições relativas de duas rectas

De um modo geral, duas rectas dadas pelas suas projecções são consideradas paralelas quando as suas projecções do mesmo nome forem paralelas. No entanto, há casos particulares, que iremos aprofundar, em que nem sempre as duas projecções do mesmo nome são paralelas.

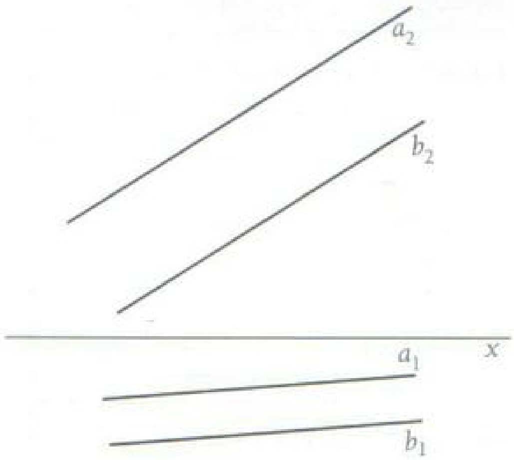
Iremos falar também sobre outra relação de rectas que, de um modo geral, no plano do desenho, são consideradas concorrentes. São aquelas cujas projecções do mesmo nome se intersectam em pontos da mesma linha de chamada.

Entretanto, há rectas que, por se encontrarem em certos planos, já não se apresentam conforme o que acabámos de referir.

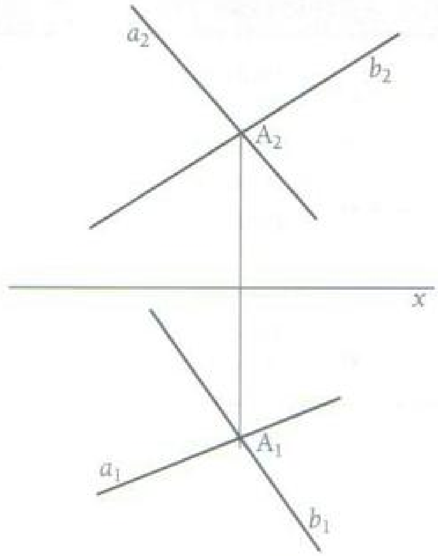
Iremos abordar os casos gerais e os casos particulares das rectas concorrentes e das rectas paralelas.

Duas rectas podem ser paralelas, concorrentes ou enviesadas. Este último caso, de rectas enviesadas, refere-se a rectas que não podem estar contidas no mesmo plano e, por conseguinte, não se podem cruzar nem podem ser paralelas entre si.

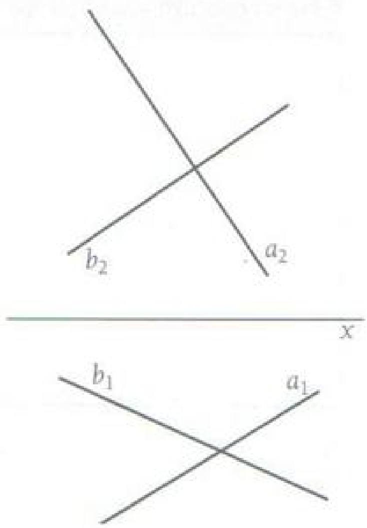
Como sabe, na relação entre duas rectas concorrentes, constata-se que elas podem ser perpendiculares ou oblíquas.



Rectas paralelas.



Rectas concorrentes.



Rectas enviesadas.

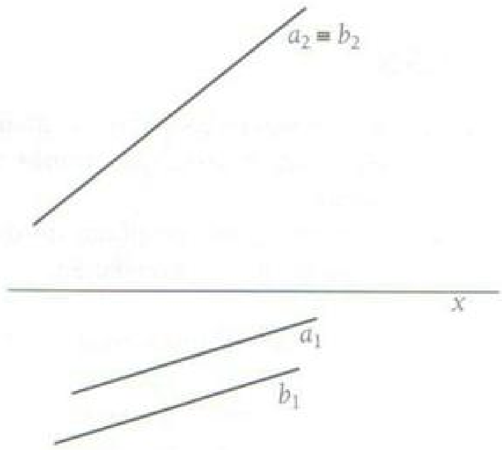
Rectas paralelas

Duas rectas paralelas são aquelas que, estando no mesmo plano, não têm nenhum ponto em comum.

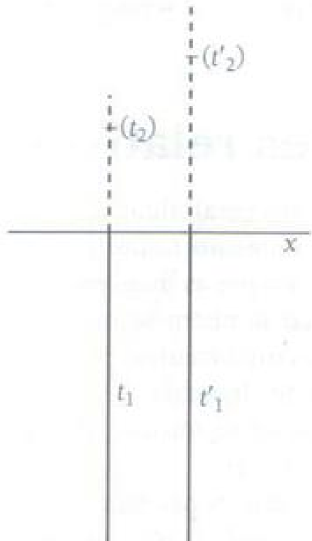
As projecções do mesmo nome de duas rectas paralelas, normalmente, também são paralelas.

No entanto, há casos particulares em que as rectas se situam no mesmo plano, perpendicular a um ou a ambos os planos de projecção.

As rectas paralelas contidas em planos perpendiculares ao plano frontal de projecção têm as suas projecções frontais coincidentes numa única linha ou reduzidas a dois pontos.

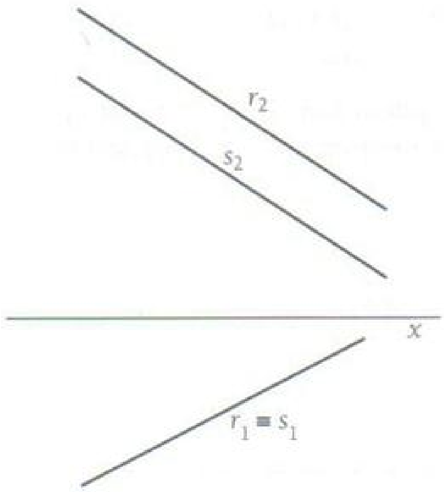


Projecções frontais de rectas paralelas reduzidas a uma linha.

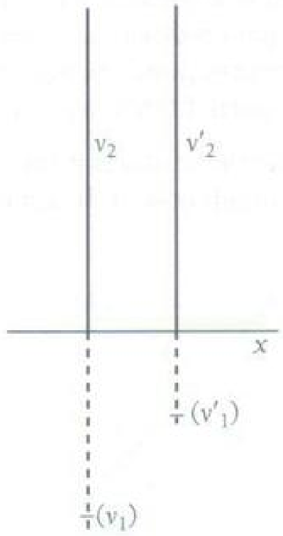


Projecções frontais de rectas paralelas reduzidas a dois pontos.

As rectas paralelas contidas em planos perpendiculares ao plano horizontal de projecção têm as suas projecções horizontais reduzidas a uma linha ou a dois pontos.

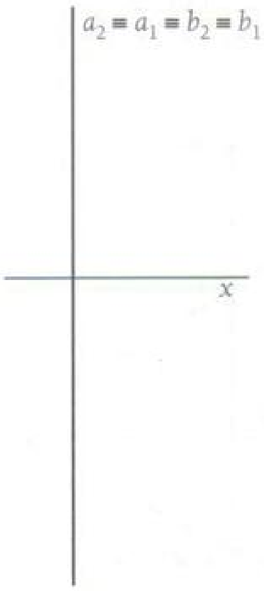


Projecções horizontais reduzidas a uma linha.

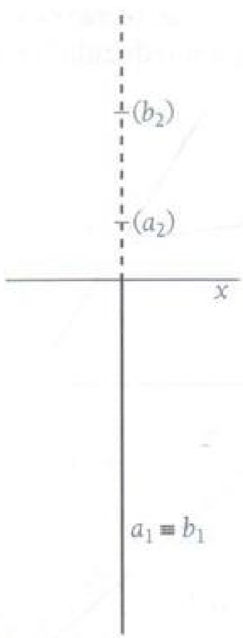


Projecções horizontais reduzidas a dois pontos.

Duas rectas paralelas contidas num plano que é perpendicular aos dois planos de projecção podem ter as suas projecções coincidentes numa única linha ou, por outro lado, coincidentes numa projecção coincidente e noutra reduzidas a dois pontos.



Projecções horizontais e frontais reduzidas a uma única linha.



Projecções frontais reduzidas a dois pontos e horizontais coincidentes, reduzidas a uma linha.

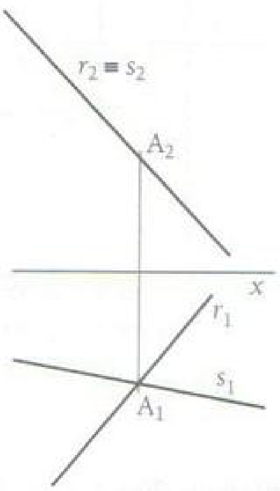
Rectas concorrentes

Duas rectas concorrentes são aquelas que se cruzam num ponto, como já o tínhamos dito.

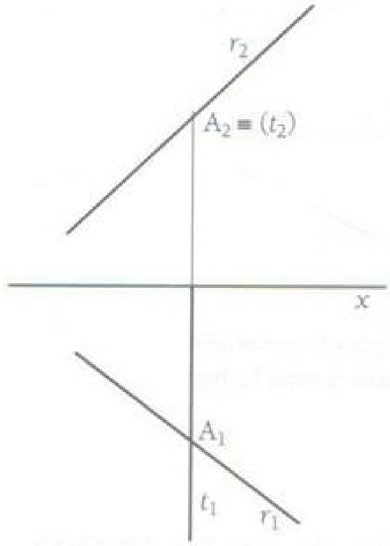
Relativamente a rectas enviesadas, não iremos aprofundar o seu estudo porque são rectas cuja relação não é muito relevante para o desenvolvimento do nosso estudo.

As projecções do mesmo nome de duas rectas concorrentes também são concorrentes, mas pode acontecer, em alguns casos particulares, que não apresentem estas características.

1. Se as rectas estiverem contidas num plano perpendicular ao plano frontal de projecção, as suas projecções frontais são coincidentes ou ficam reduzidas a uma linha e um ponto contido nessa linha.

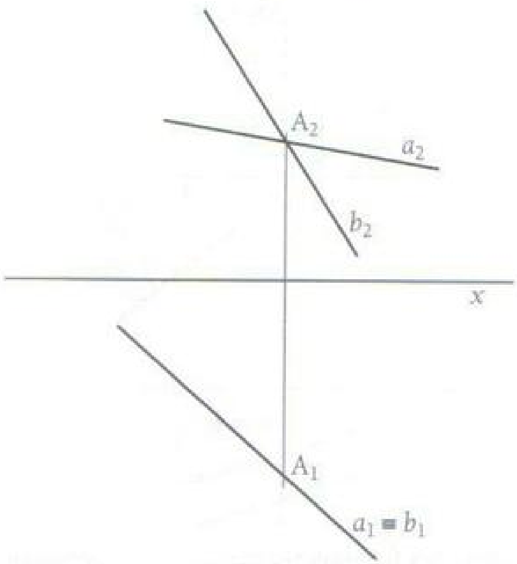


Projecção frontal reduzida numa única linha.

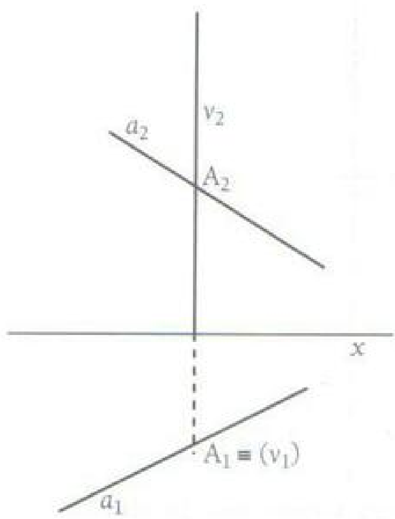


Projecções frontais reduzidas a uma linha e um ponto dessa linha.

2. No caso em que as rectas se encontram num plano perpendicular a υ_0, as projecções horizontais são coincidentes ou ficam reduzidas numa linha e num ponto contido nessa linha.

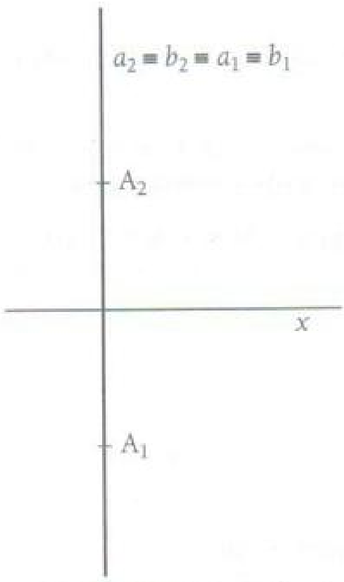


Projecções horizontais coincidentes.

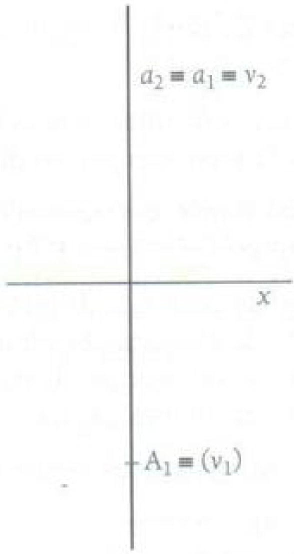


Projecções horizontais reduzidas a uma linha e um ponto.

3. Quando duas rectas concorrentes estiverem situadas num plano perpendicular aos dois planos de projecção, as suas projecções situam-se numa única linha perpendicular ao eixo x. Esta situação acontece exclusivamente quando se trata da intersecção de rectas de perfil, de topo e vertical.

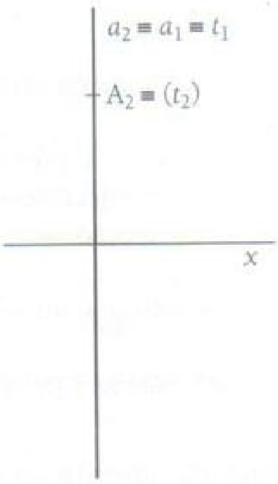


Duas rectas de perfil.

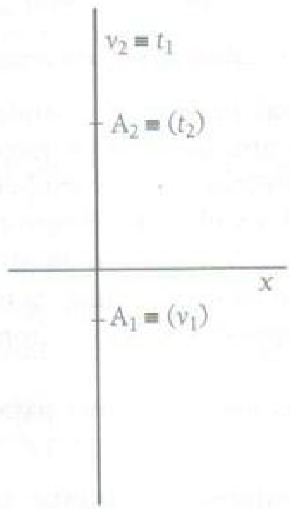


Uma recta de perfil
e uma recta vertical.

4. Quando duas rectas concorrentes estiverem situadas num plano perpendicular aos dois planos de projecção, as suas projecções situam-se numa única linha perpendicular ao eixo x. Esta situação acontece exclusivamente quando se trata da intersecção de rectas de perfil, de topo e vertical.



Uma recta de perfil
e uma recta de topo.



Uma recta vertical
e uma recta de topo.

Duas rectas paralelas ou concorrentes definem um plano, sendo por isso complanares. Assim, obviamente, os seus traços encontram-se sobre os traços do mesmo nome do plano.

A terceira relação entre as rectas é a de serem *enviesadas*. Trata-se de duas rectas que não admitem um plano comum, isto é, de modo algum podem ser complanares.

O estudo dessas rectas não terá desenvolvimento neste livro.

Exercícios propostos

1. Desenhe as projecções da recta *r* definida pelos pontos K (-2; 2; 3) e Z (5; 5; 0,5).

2. Represente pelas suas projecções uma recta *n*, definida pelo ponto A (0; 3; 4,5) e a sua direcção. A projecção frontal da recta é paralela ao eixo *x* e a projecção horizontal faz um ângulo de 45° com o mesmo eixo de abertura para a direita.

3. Desenhe as projecções do ponto K, qualquer, contido numa recta *b* definida pelos pontos C (0; 6; 5) e D (6; 0,5; 2).

4.* Determine as projecções de uma recta definida pelos pontos A (0; 1; 5; 0,5) e B (5; 3,5; 4). Determine os traços da recta nos planos de projecção e nos planos bissectores.

5. Represente, pelas suas projecções, uma recta s definida pelos pontos A e B, sabendo que as suas coordenadas são as seguintes: E (8; 3; 7), F (3; 1; 5)

   a) Determine o ponto de cota nula da recta.
   b) Determine o ponto de afastamento nulo.
   c) Determine o ponto de intersecção da recta com o $\beta_{1/3}$.
   d) Determine o ponto de intersecção da recta com o $\beta_{2/4}$.

6. Assinale com um ✓ as afirmações verdadeiras:

   A. O traço frontal de uma recta é o seu ponto com afastamento nulo.
   B. O lugar geométrico onde se situam pontos com projecções coincidentes no plano do desenho é o $\beta_{2/4}$.
   C. Traço horizontal de uma recta é o ponto da sua intersecção com o plano horizontal de projecção.
   D. Todos os pontos dos planos bissectores são equidistantes aos planos de projecção.
   E. Todos os pontos cujas projecções são simétricas em relação ao eixo x pertencem ao $\beta_{2/4}$.
   F. O lugar geométrico onde todos os pontos têm cota e afastamento simétricos é o $\beta_{2/4}$.
   G. Todos os pontos do eixo *x* têm projecções coincidentes.
   H. Uma recta paralela ao plano horizontal não tem traço horizontal.

7. Assinale com um ✓ as afirmações correctas:

   A. Uma recta horizontal ou de nível é paralela ao plano horizontal de projecção.
   B. Uma recta pode ter uma das suas projecções reduzida a um ponto.
   C. Uma recta fronto-horizontal é perpendicular ao plano horizontal de projecção.
   D. Uma recta de perfil, no plano do desenho sempre tem as suas projecções coincidentes.
   E. Uma recta oblíqua é perpendicular ao plano horizontal de projecção.
   F. A recta de perfil é um caso particular da recta oblíqua.
   G. A recta de frente é paralela ao plano frontal de projecção e oblíqua em relação ao plano horizontal de projecção.
   H. Se uma recta tem as suas projecções paralelas ao eixo *x*, no espaço é paralela aos planos ortogonais de projecção.

8. Desenhe as projecções duma recta frontal ou de frente com afastamento igual a 5 cm e que faz com o plano horizontal de projecção um ângulo de 30° de abertura para a esquerda.

9. Represente pelas suas projecções uma recta de topo com 4 cm de cota e determine os seus pontos notáveis.

10. Uma recta horizontal de frente situa-se no plano bissector dos quadrantes pares e tem afastamento igual a 4 cm. Determine as suas projecções.

Exercícios propostos

11. Preencha os espaços em branco usando as seguintes palavras: paralela, oblíqua, perpendicular, frontal, horizontal.

Uma recta de nível é ____________ ao plano horizontal e ____________ em relação ao plano frontal. Por essa razão não tem traço ____________. Contrariamente à recta de nível, a recta frontal ou de frente é paralela ao plano ____________ de projecção e oblíqua em relação ao plano ____________ de projecção. Uma recta de topo é paralela ao plano ____________ de projecção e perpendicular ao plano ____________ de projecção.

12. Assinale com um ✓ as afirmações correctas:

A. Duas rectas que não estejam no mesmo plano não podem nem ser concorrentes nem paralelas.
B. Duas rectas concorrentes podem ter as suas projecções frontais reduzidas a dois pontos.
C. Duas rectas paralelas podem ter as suas projecções horizontais reduzidas a dois pontos.
D. Se as projecções do mesmo nome de duas rectas forem paralelas, essas rectas são paralelas.
E. Rectas concorrentes contidas num plano perpendicular simultaneamente a φ_0 e ν_0, só podem ser de perfil.
F. Uma recta de topo nunca pode ser paralela a uma recta vertical.
G. Uma recta de nível nunca pode ser concorrente com uma recta frontal ou de frente.
H. Duas rectas de topo são sempre paralelas.
I. Duas rectas de nível são sempre paralelas.
J. Duas rectas frontais podem ser concorrentes.

13. Desenhe, pelas suas projecções, duas rectas concorrentes, sendo uma de topo com 6 cm de cota e outra projectante horizontal com 3 cm de afastamento.

a) Determine os traços das duas rectas nos planos de projecção.

b) Determine os traços da recta projectante horizontal nos planos bissectores.

c) Que quadrantes atravessa a recta de topo?

14.* Represente pelas suas projecções duas rectas ***a*** e ***b*** concorrentes no ponto A (5; 3; 4).

A recta ***a*** contém o ponto B (8; 2; 2)

A recta ***b*** contém o ponto C (3; 1; 1)

Pelos pontos do $\beta_{1/3}$ das duas rectas faça passar a recta ***q*** e diga qual é a sua posição em relação a ***a*** e ***b***.

15. Represente pelas suas projecções duas rectas *n* de nível e *f* de frente concorrentes num ponto K (6; 5,5), sabendo que:

A recta de nível faz um ângulo de 45° com ν_0, de abertura para a esquerda.

A recta *f* faz com o plano frontal de projecção também um ângulo de 45°, de abertura para a direita.

a) Determine os traços das duas rectas nos planos de projecção.

b) Que quadrantes atravessa a recta de frente e qual é o lugar geométrico onde se encontra o seu traço nos planos de projecção?

Definição de plano

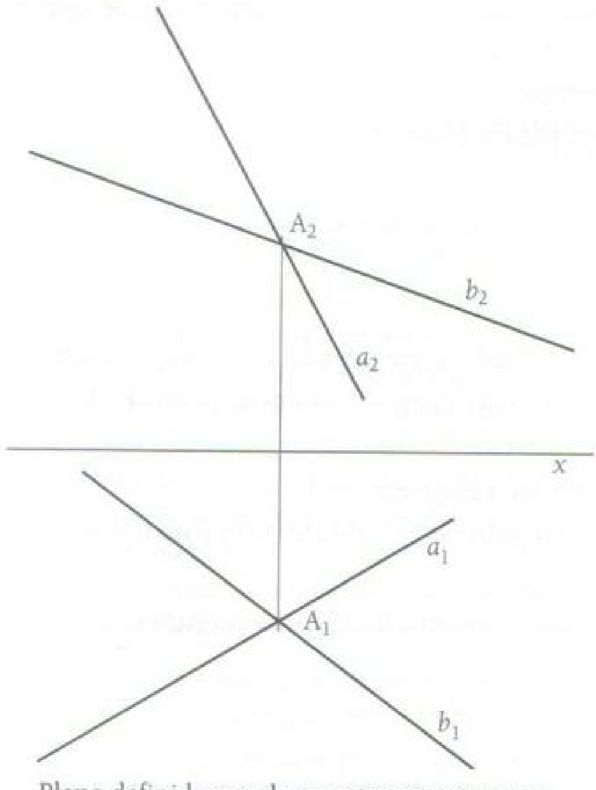
Um plano é designado por uma letra minúscula do alfabeto grego. Cada letra do alfabeto latino tem a sua correspondente no alfabeto grego, ou seja, também existem 26 letras do alfabeto grego. No nosso estudo iremos usar com maior frequência as seguintes letras do alfabeto grego, para a designação dos planos:

Alfa – α	Delta – δ	Pi – π
Beta – β	Teta – τ	Fi – φ
Gama – γ	Niú – ν	Ómega – ω

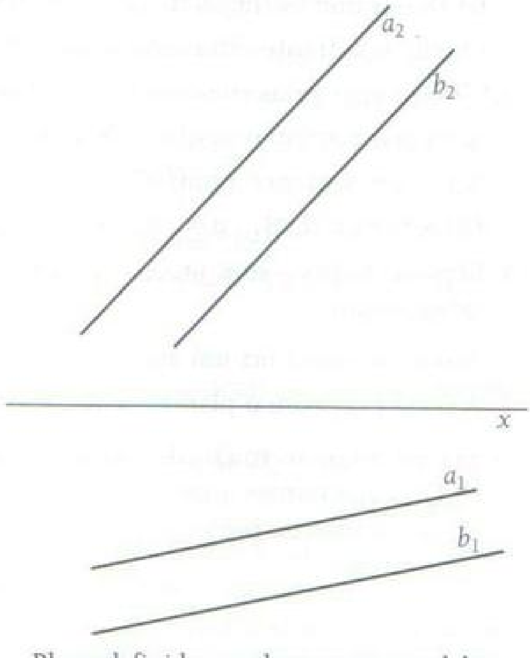
No entanto, poderá ser usada qualquer letra do alfabeto grego, estes são apenas exemplos.

Um plano pode ser definido de várias maneiras, nomeadamente:

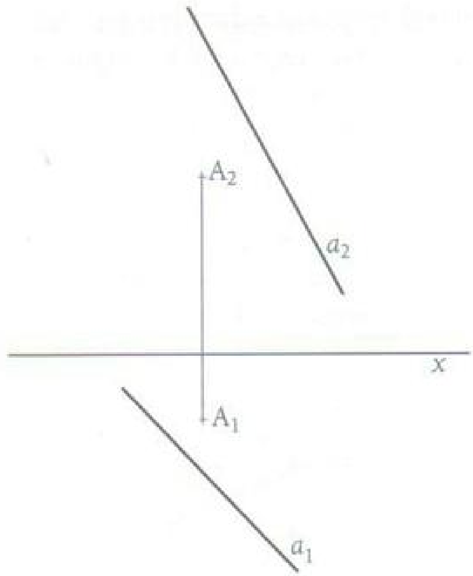
- Através de duas rectas concorrentes.
- Através de duas rectas paralelas.
- Através de uma recta e um ponto exterior a essa recta.
- Através de três pontos não colineares.
- Através dos seus traços.



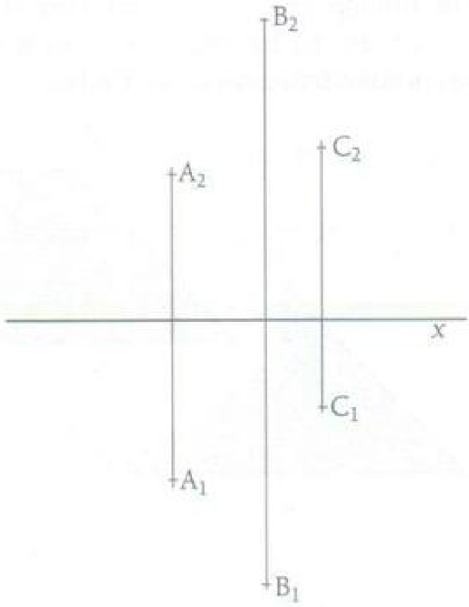
Plano definido por duas rectas concorrentes.



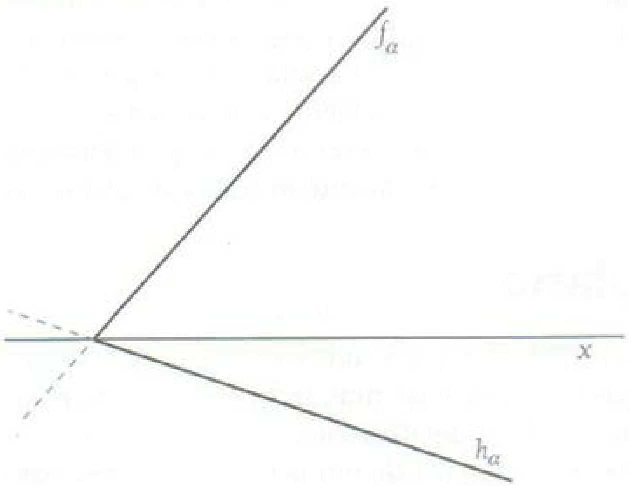
Plano definido por duas rectas paralelas.



Plano definido por uma recta
e um ponto exterior a essa recta.



Plano definido por três pontos
não colineares.



Plano definido pelos seus traços.

Sendo assim possível um plano ser definido por pontos e rectas, para a representação de um plano será necessário o conhecimento de projecções de pontos e rectas que o definem.

Na verdade, as diferentes formas de definição dum plano convergem em duas rectas, que tanto podem ser concorrentes como paralelas.

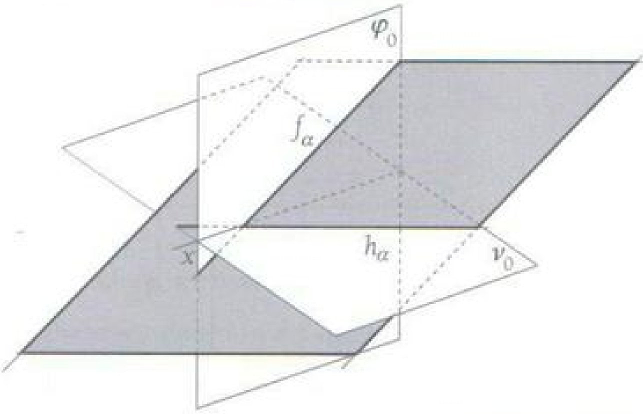
Traços de um plano

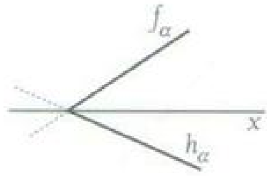
Os traços de um plano são linhas resultantes da intersecção desse plano com os planos ortogonais de projecção.

Quando um plano α, por exemplo, intersecta o plano frontal de projecção, o resultado é o seu traço frontal. Este traço designa-se pela letra minúscula do alfabeto latino, f, seguida de um índice da designação do plano. Por exemplo, f_α, se o plano for α.

Portanto, o traço frontal de um plano é o lugar geométrico em que todos os pontos desse plano têm afastamento igual a zero.

A linha de intersecção de um plano com o plano horizontal de projecção denomina-se traço horizontal desse plano. No caso de um plano α, por exemplo, a designação desse traço será h_α, lugar geométrico em que todos os pontos têm cota igual a zero.





Traços de um plano α.

A representação dos traços de um plano no plano do desenho é feita directamente, ou seja, não é necessário determinar as projecções das linhas que constituem esses traços.

Caso fosse necessário, a projecção frontal do traço frontal de um plano seria coincidente com o próprio traço, e a projecção horizontal desse traço seria coincidente com o eixo x.

Também a projecção horizontal do traço horizontal de um plano seria coincidente com o próprio traço e a projecção frontal seria igualmente coincidente com o eixo x.

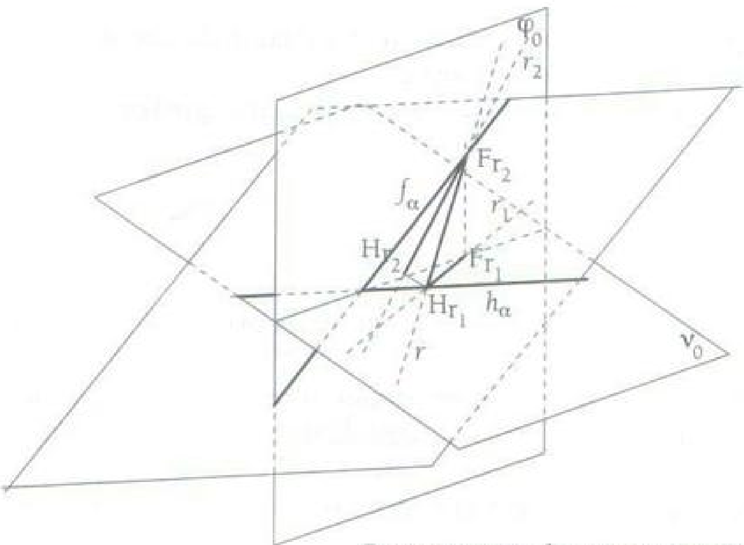
Como esse exercício não ajuda em nada para a resolução de problemas de Geometria Descritiva opta-se, como já tinha sido dito, por representar directamente os traços do plano, no plano do desenho.

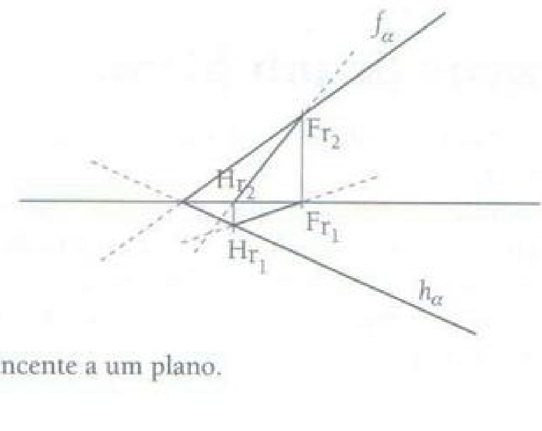
Rectas de um plano

Qualquer recta que pertence a um plano tem todos os seus pontos sobre esse plano.

Como é do seu conhecimento, os traços de uma recta nos planos ortogonais de projecção são pontos de intersecção dessa recta com os planos de projecção.

Sendo assim, o traço frontal de uma recta de um plano encontra-se sobre o traço frontal desse plano. De igual modo, o traço horizontal de uma recta de um plano situa-se sobre o traço horizontal desse plano.





Representação de uma recta pertencente a um plano.

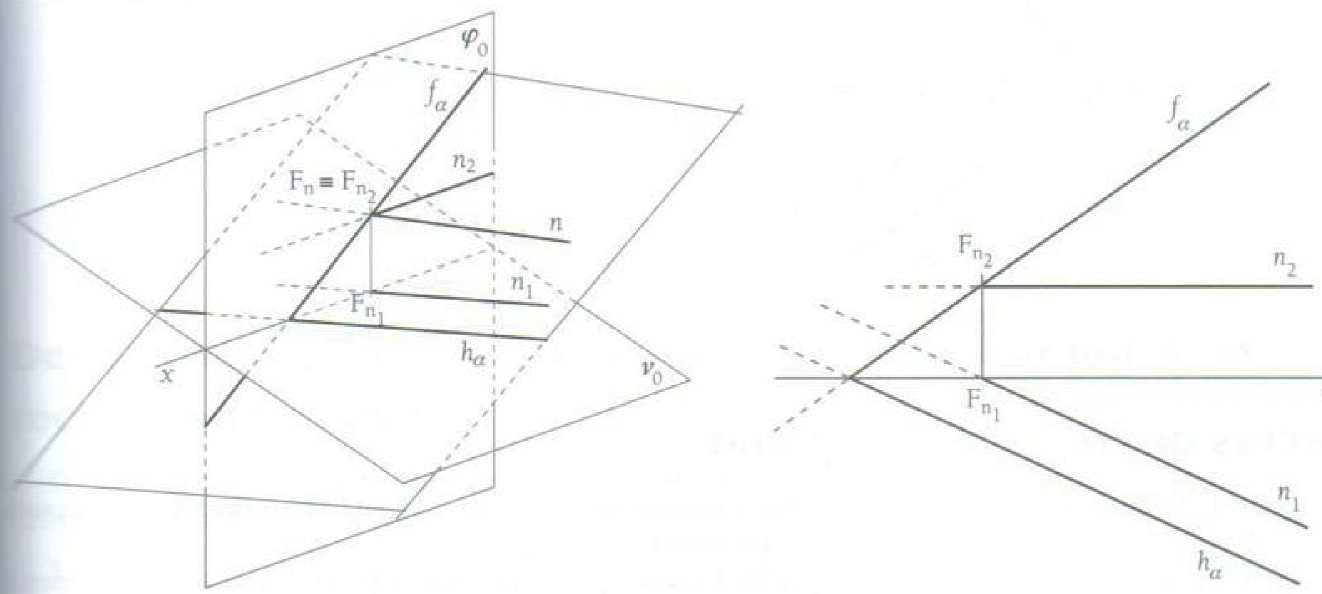
Rectas de nível de um plano

Rectas de nível, como já se disse aquando da abordagem do alfabeto da recta, são rectas paralelas ao plano horizontal de projecção; logo, não têm traço horizontal.

Por esta razão, as rectas de nível de um plano são paralelas ao traço horizontal desse plano, ou seja, não intersectam o traço horizontal do plano que as contém.

Sendo a recta de nível paralela ao traço horizontal do plano, pode-se concluir que esse traço é uma recta de nível desse plano de cota nula.

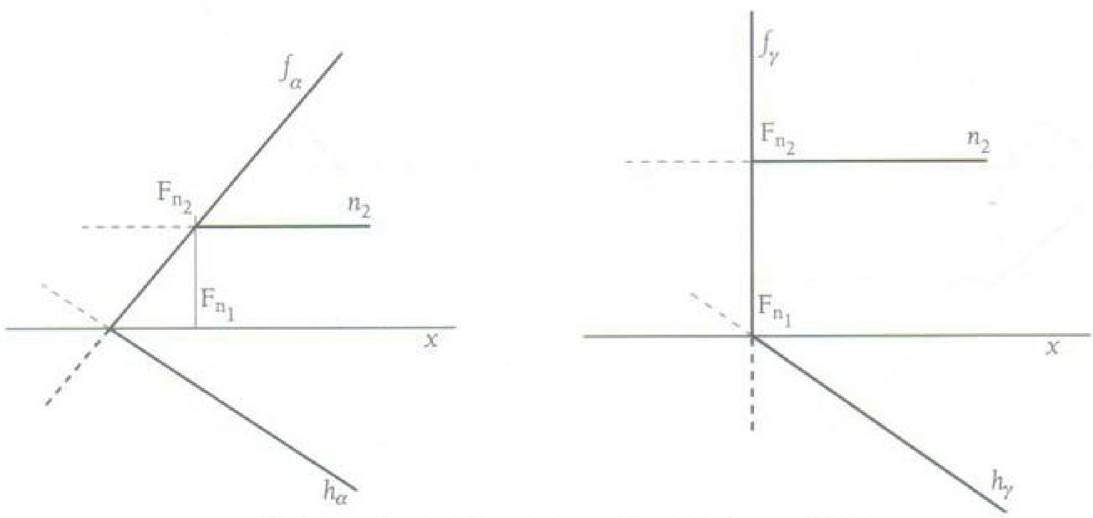
Porque uma recta de nível não intersecta ν_0, terá apenas um traço, o frontal, que se situa sobre o traço frontal do plano.



Recta de nível de um plano.

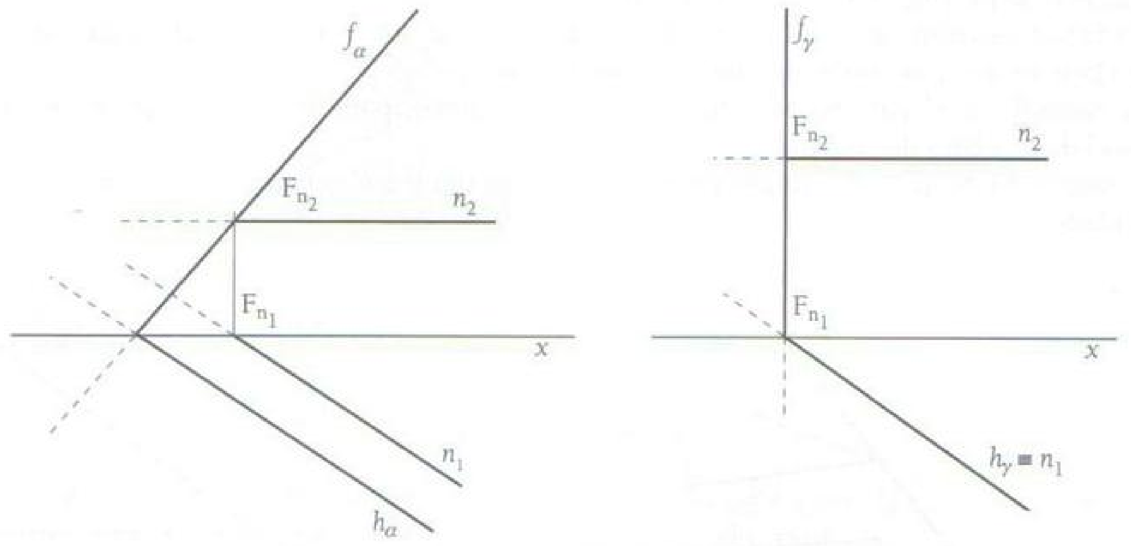
Como é óbvio, no plano do desenho, uma recta ***n***, de nível, de um plano α, tem a projecção frontal do seu traço frontal F_2, sobre f_α, o traço frontal do plano que a contém. Por F_2 traça-se uma linha paralela ao eixo *x*, n_2, projecção frontal da recta ***n***.

Porque F é um ponto do plano frontal de projecção, a sua projecção horizontal, F_1, localiza-se no eixo *x*.



Projecção frontal de uma recta de nível de um plano.

A projecção horizontal de uma recta de nível de um plano é sempre paralela ou coincidente ao traço horizontal do plano que a contém. É coincidente com o traço horizontal do plano quando o plano for perpendicular ao plano horizontal de projecção.



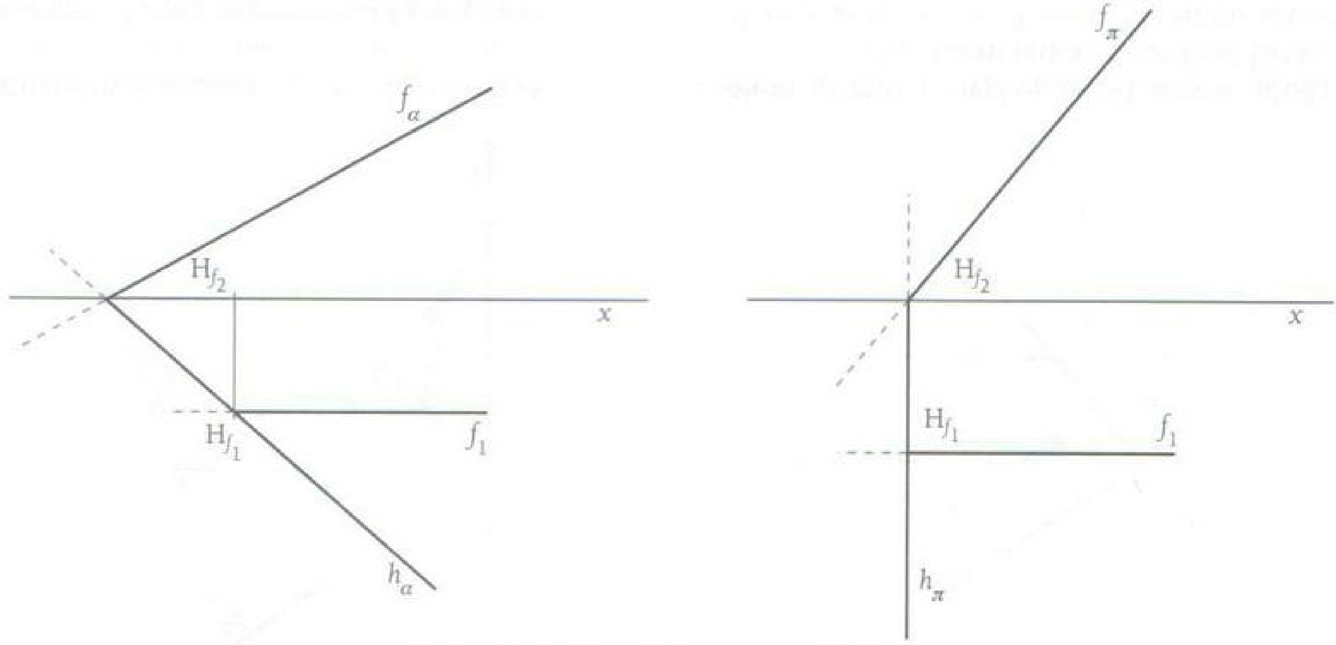
Projecções de uma recta de nível de um plano.

Rectas de frente de um plano

Rectas de frente são rectas paralelas ao plano frontal de projecção. Por esta razão, não se intersectam com o plano frontal de projecção, isto é, não possuem traço frontal.

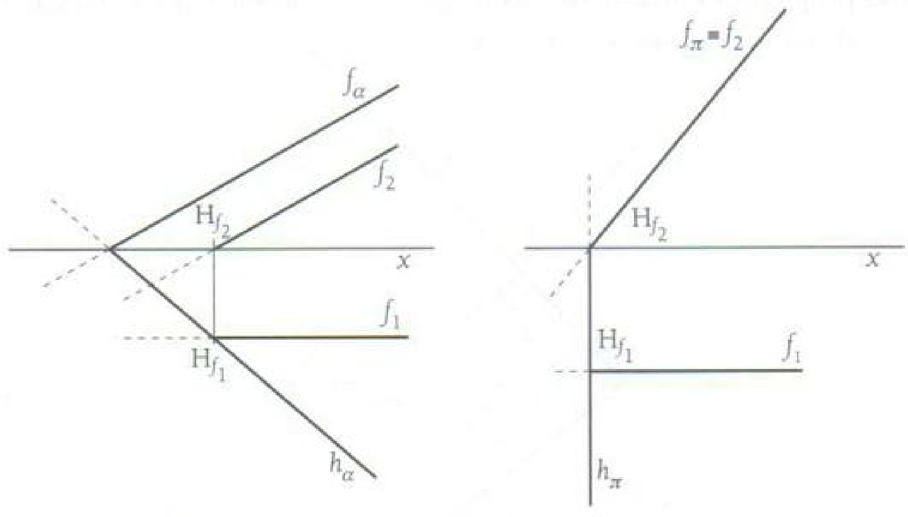
Uma recta de frente de um plano é sempre paralela ao traço frontal desse plano, ou seja, o traço frontal de um plano que contém uma recta de frente é uma recta de frente de afastamento nulo desse plano.

O traço horizontal de uma recta de frente, H_1, único traço que tem sobre os planos de projecção, situa-se sobre o traço horizontal do plano que a contém, e a sua projecção horizontal é sempre paralela ao eixo x.



Projecção horizontal de uma recta de frente.

A projecção frontal de uma recta de frente é sempre oblíqua ao eixo x e paralela ou coincidente com o traço frontal do plano que a contém.



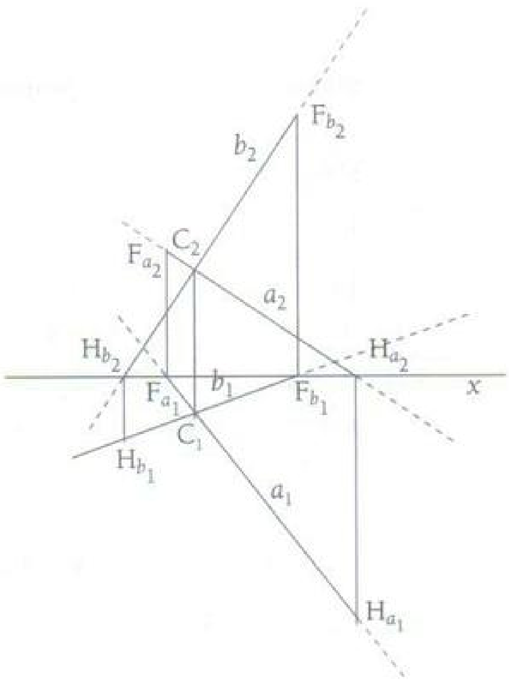
Projecções de uma recta de frente de um plano.

Determinação dos traços de um plano definido por duas rectas concorrentes

Dadas duas rectas a e b, concorrentes oblíquas no ponto C, determinemos os traços do plano β, definido por essas duas rectas.

1.º passo

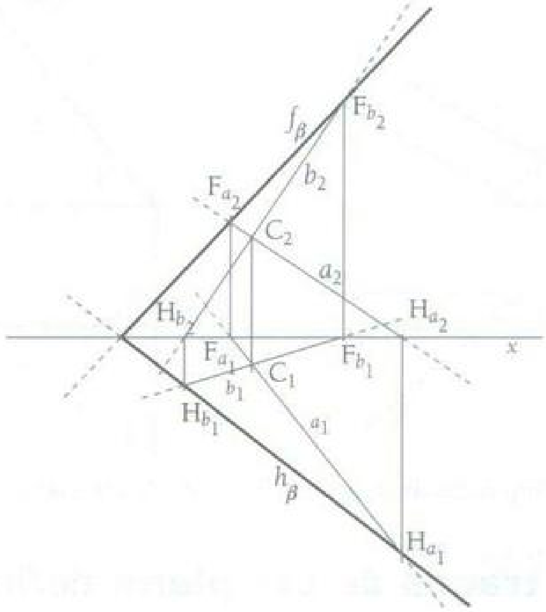
Considerando as rectas dadas, concorrentes em C, determinam-se em primeiro lugar os seus traços sobre os planos de projecção, F_a, F_b, H_a e H_b.



Projecções dos traços das rectas concorrentes que definem o plano.

2.º passo

Unem-se as projecções frontais dos traços frontais das rectas de modo a obter-se o traço frontal do plano, f_β. A união das projecções horizontais dos traços horizontais das rectas resulta em h_β, traço horizontal do plano.



Traços do plano definido pelas duas rectas concorrentes.

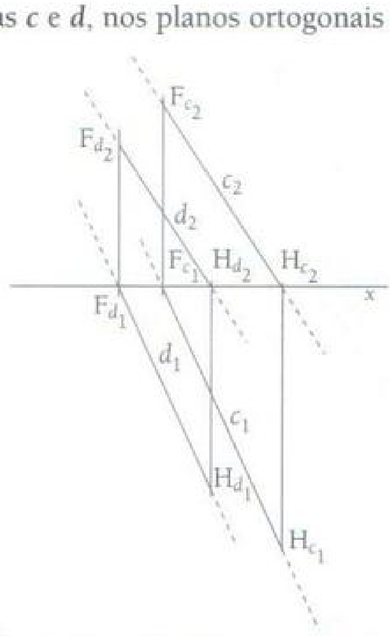
Determinação dos traços de um plano definido por duas rectas paralelas

Como se sabe, duas rectas paralelas podem definir um plano.

Consideremos duas rectas paralelas, *c* e *d*, que definem um plano γ. Determinemos o plano pelos seus traços.

1.º passo

Determinam-se os traços das rectas *c* e *d*, nos planos ortogonais de projecção, no caso, F_c, F_d, H_c e H_d.

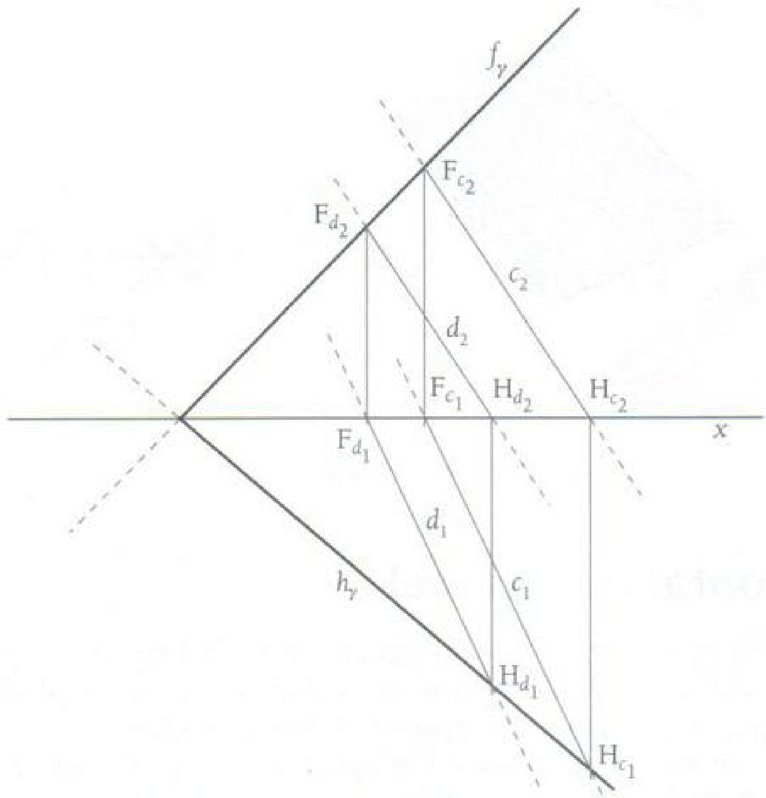


Traços das duas rectas.

2.º passo

Unem-se as projecções frontais dos traços frontais das rectas *c* e *d*, designadamente F_{c2} e F_{d2}, dando-se origem ao traço frontal do plano, f_γ.

A união das projecções horizontais dos traços horizontais das duas rectas paralelas dá origem ao traço horizontal do plano, h_γ.



Traços de um plano definido por duas rectas paralelas.

Estes são apenas alguns exemplos da representação, pelos seus traços, de um plano definido por duas rectas paralelas ou concorrentes. Há vários casos particulares, que serão analisados ao longo da resolução de exercícios e também depois da abordagem do alfabeto do plano; por exemplo, planos definidos por:

1. Duas rectas de topo.
2. Duas rectas verticais.
3. Uma recta de topo e outra de frente.
4. Uma recta de nível e outra de topo, etc.

Nestes casos particulares, nem sempre será possível encontrar os dois traços de cada uma das rectas que definem o plano, como vimos no caso das rectas de nível e de frente, entre outros.

Alfabeto do plano

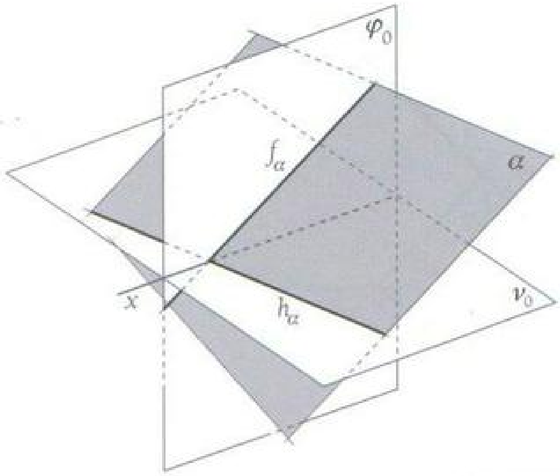
Um plano pode tomar várias posições em relação aos planos ortogonais de projecção. A essas diferentes posições que um plano toma no espaço chama-se *alfabeto do plano*.

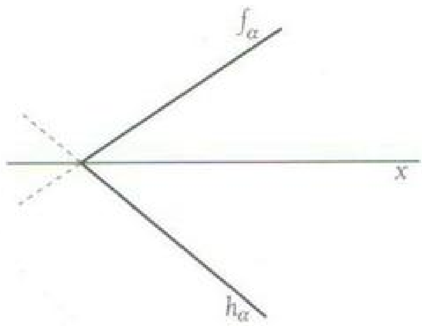
Em seguida, apresentamos os diferentes tipos de planos, em relação à sua localização espacial.

1. Plano oblíquo

Este plano é oblíquo em relação aos dois planos de projecção e ao eixo x.

No plano do desenho, os seus traços são oblíquos em relação ao eixo x.





Plano oblíquo.

2. Plano horizontal ou de nível

Este plano é paralelo ao plano horizontal de projecção, isto é, todos os seus pontos têm a mesma cota.

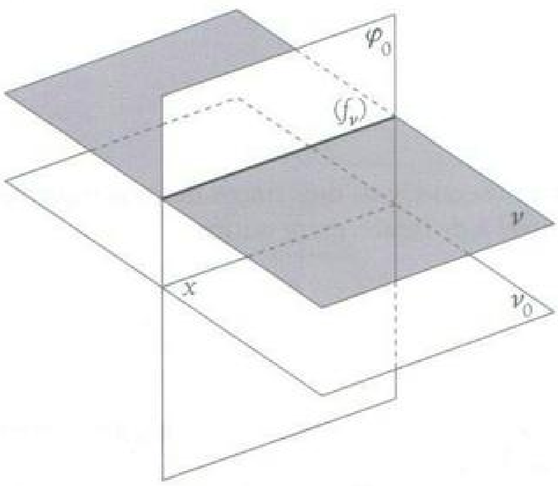
Por ser paralelo a ν_0, ele tem apenas um traço nos planos ortogonais de projecção, nomeadamente o frontal, que é a recta da sua intersecção com o plano frontal de projecção.

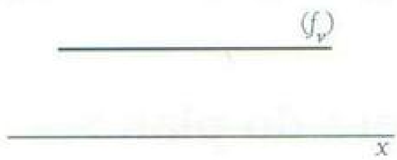
Sendo um plano com um único traço, a sua designação fica entre parêntesis: (f_ν).

Este plano pode atravessar dois diedros de projecção, nomeadamente o primeiro e o segundo, se a sua cota for positiva. Neste caso, no plano do desenho, o seu traço situa-se para cima do eixo x.

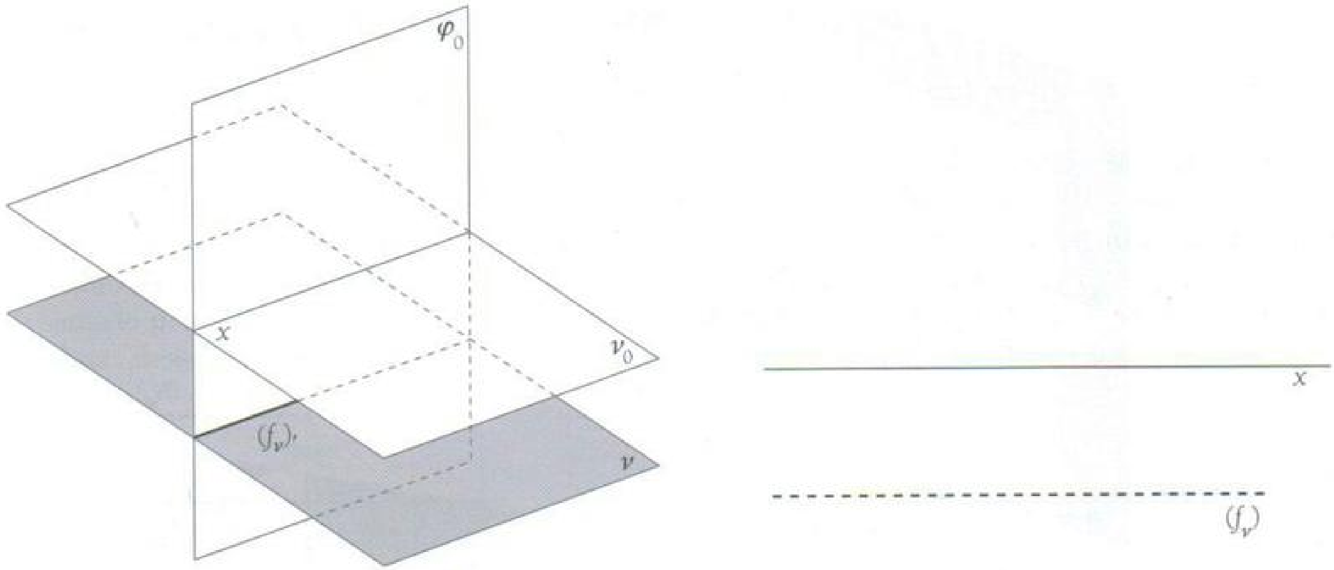
Caso o plano de nível tenha cota negativa, estará a atravessar os terceiro e quarto diedros de projecção. No plano do desenho, este plano representa-se por uma linha paralela ao eixo x, situando-se para baixo desta.

As figuras assentes no plano de nível têm projecção horizontal à sua verdadeira grandeza, isto é, a projecção horizontal de uma figura de nível é igual a si própria.





Plano de nível de cota positiva.



Plano de nível de cota negativa.

3. Plano de frente

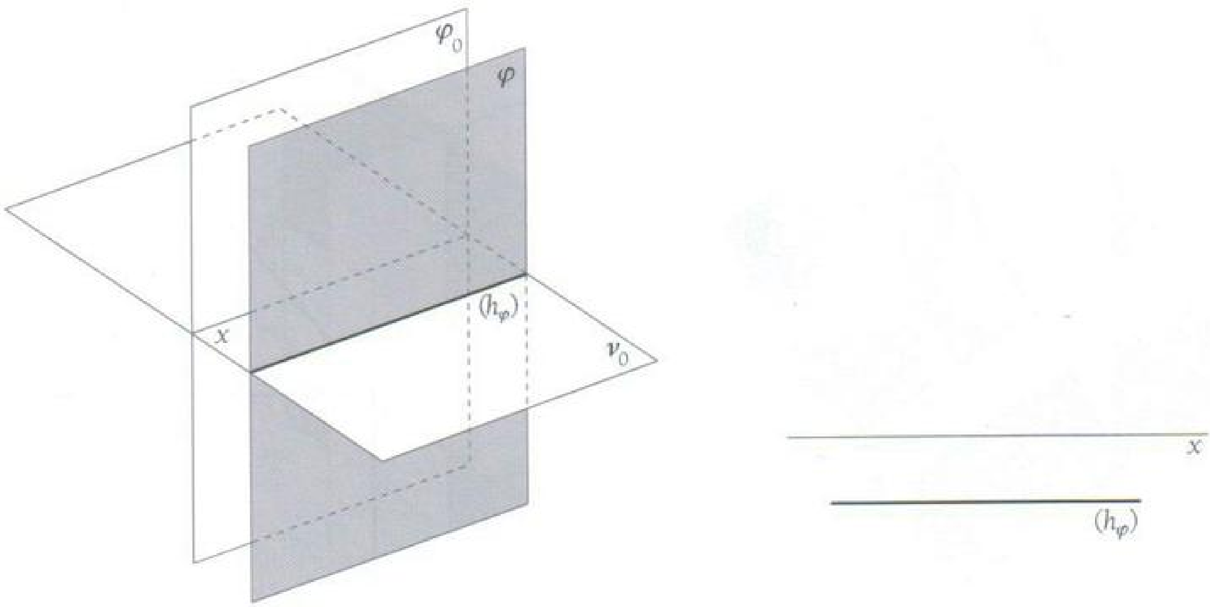
O lugar geométrico onde todos os pontos têm afastamentos iguais é um plano de frente porque este é paralelo ao plano frontal de projecção.

Tem um único traço e, por conseguinte, a sua designação é feita entre parêntesis: $(\boldsymbol{h}_\varphi)$.

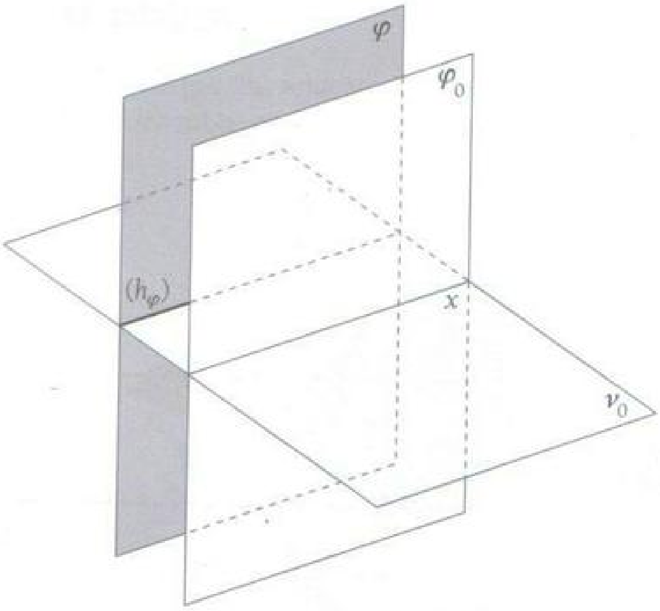
Qualquer figura situada neste tipo de plano encontra em projecção frontal a sua verdadeira grandeza, ou seja, encontra uma figura igual a si própria.

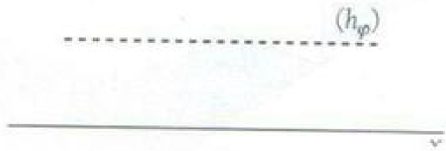
Um plano de frente pode atravessar o I e IV diedros de projecção, isto quando o seu afastamento for positivo. No plano do desenho, o seu traço localiza-se para baixo do eixo x.

Se um plano atravessa os II e III diedros de projecção, é porque tem afastamento negativo. Neste caso, no plano do desenho, o seu traço, lugar onde se encontram as projecções horizontais de todos os seus pontos, é uma linha paralela ao eixo x que se situa para baixo deste.



Plano de frente de afastamento positivo.





Plano de frente de afastamento negativo.

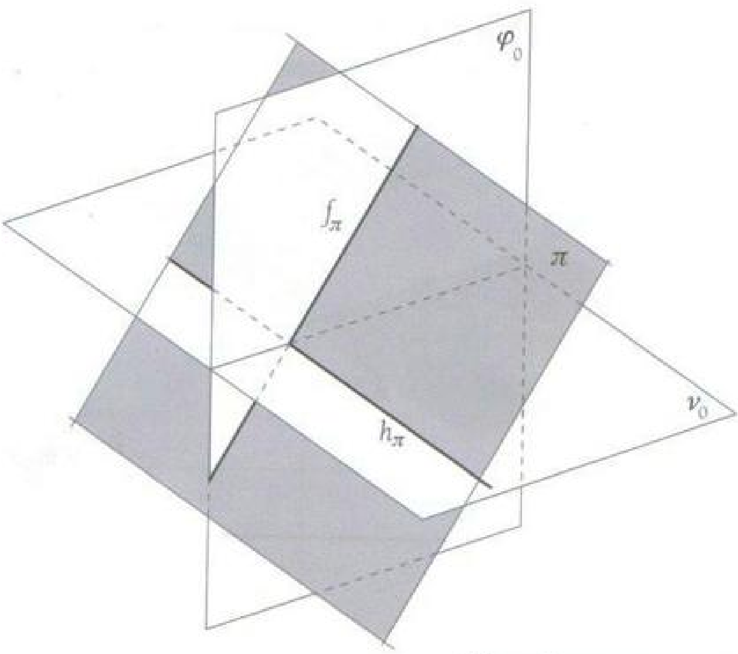
4. Plano de topo ou projectante frontal

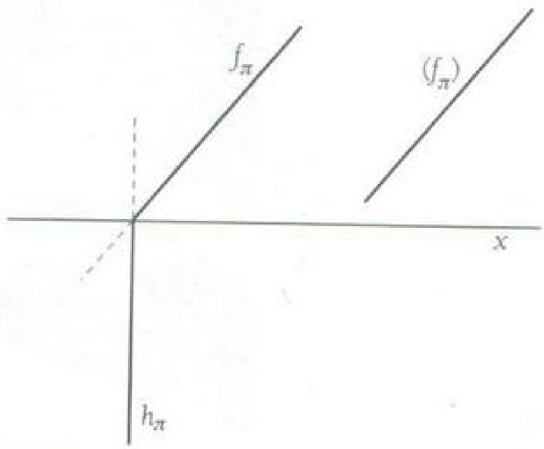
Este plano é perpendicular ao plano frontal de projecção e oblíquo em relação ao plano horizontal de projecção.

É chamado projectante frontal porque todos os seus pontos são projectados para o plano frontal por rectas desse plano e, sendo assim, essas projecções encontram-se sobre o seu traço frontal.

Para conhecê-lo basta apenas sabermos a amplitude do ângulo diedro que ele faz, em relação ao plano horizontal de projecção. Esta amplitude, no plano do desenho, é obviamente determinada pelo eixo x e o traço frontal do plano.

O traço horizontal de um plano de topo é sempre perpendicular ao eixo x e, pelo facto, pode-se omiti-lo, representando apenas o traço frontal entre parêntesis: (f_π).





Plano de topo ou projectante frontal.

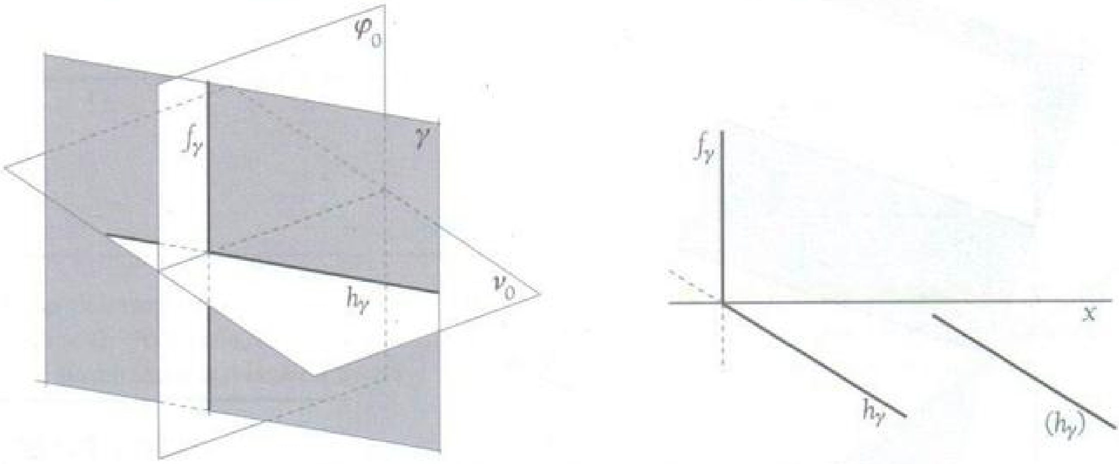
5. Plano vertical ou projectante horizontal

É um plano perpendicular ao plano horizontal de projecção e oblíquo em relação ao plano frontal de projecção.

Para conhecê-lo, basta saber a amplitude do ângulo que ele faz em relação ao plano frontal de projecção, amplitude esta que no plano do desenho é determinada pelo seu traço horizontal e o eixo x.

Tendo em conta que o seu traço frontal é sempre perpendicular ao eixo x, pode-se dispensá-lo, sendo representado apenas pelo traço horizontal, cuja designação fica entre parêntesis: (h_γ).

É chamado projectante horizontal porque todos os seus pontos são projectados para o plano horizontal por rectas desse plano e, sendo assim, encontram-se sobre o seu traço horizontal.

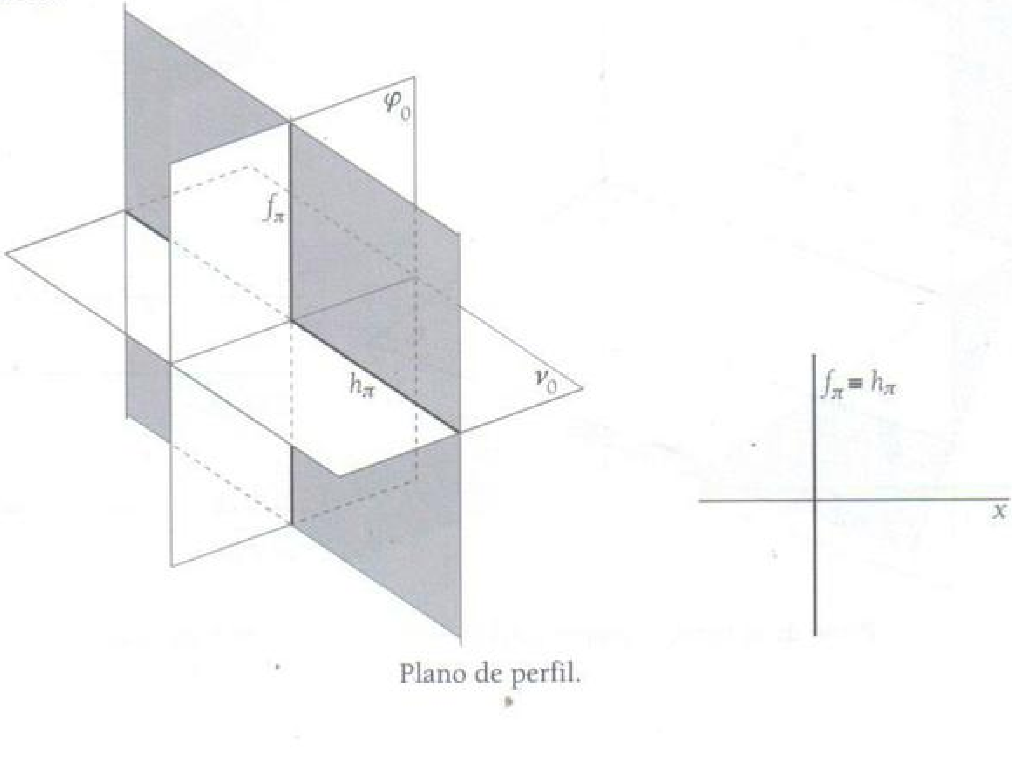


Plano vertical ou projectante horizontal.

6. Plano de perfil

Este plano é ao mesmo tempo perpendicular aos dois planos de projecção e também ao eixo x, o que faz com que no plano do desenho, os seus traços sejam coincidentes e perpendiculares ao eixo x.

Sendo um plano duplamente projectante, isto é, projectante frontal e projectante horizontal, todas as figuras nele assentes têm as suas projecções situadas sobre a linha perpendicular ao eixo x, e os seus traços são coincidentes.

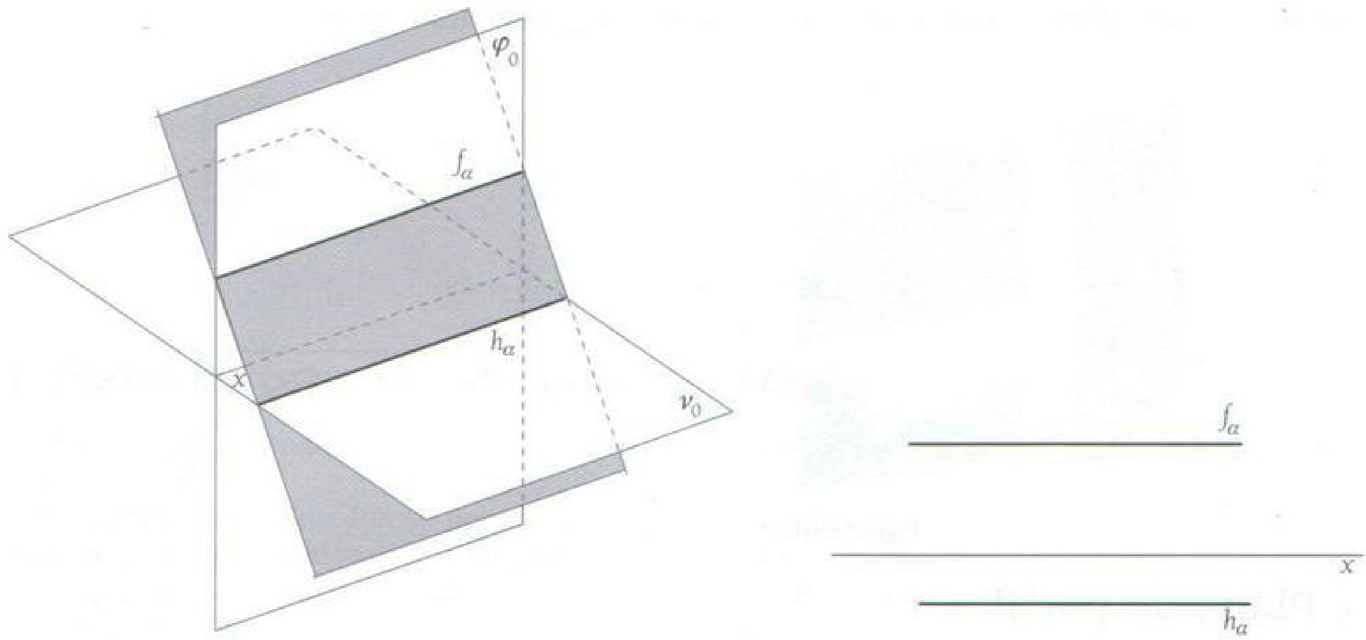


Plano de perfil.

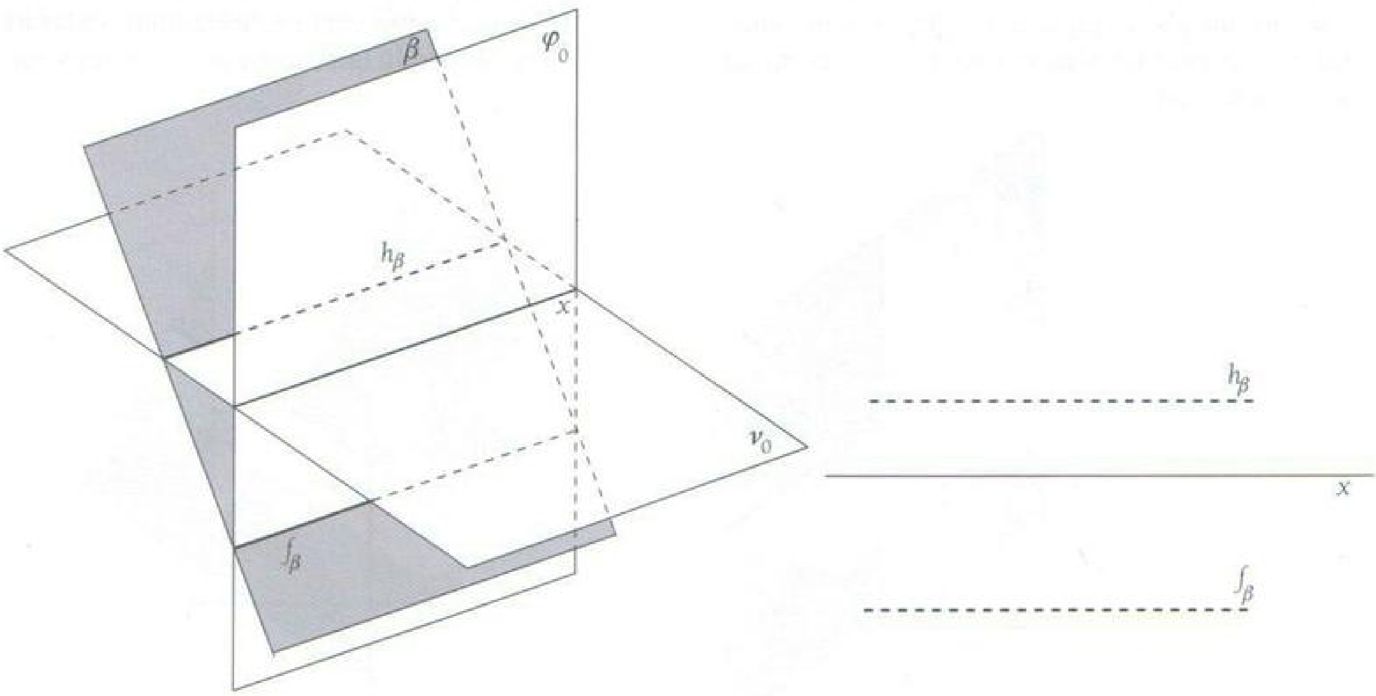
7. Plano de rampa

Tal como o plano oblíquo, o plano de rampa é oblíquo em relação aos dois planos de projecção, distinguindo-se desse pelo facto de ser paralelo ao eixo x. O plano de rampa atravessa sempre três diedros de projecção.

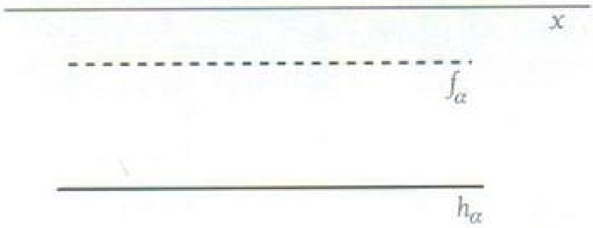
Os seus traços também são paralelos ao eixo x, tanto podem estar para cima do eixo x ou para baixo do mesmo, bem como um pode estar para cima e outro para baixo ou até coincidentes, dependendo dos diedros que o plano atravessa e dos ângulos que ele faz com os planos ortogonais de projecção.



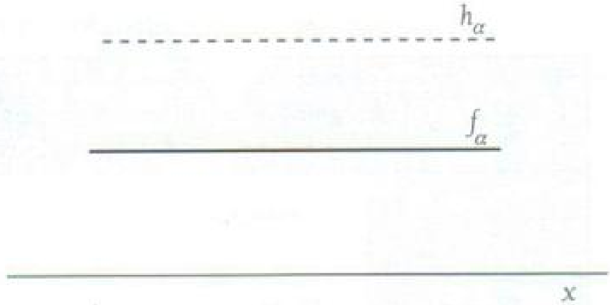
Plano de rampa que atravessa os II, I e IV diedros de projecção.



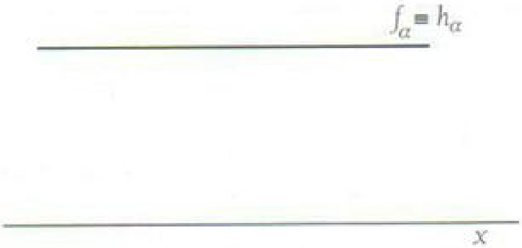
Plano de rampa que atravessa os II, III e IV diedros de projecção.



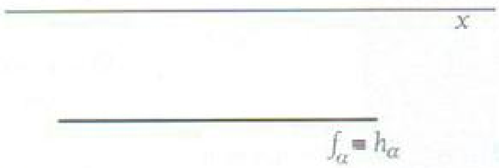
Plano de rampa que atravessa os I, IV e III diedros de projecção.



Plano de rampa que atravessa os I, II e III diedros de projecção.



Plano de rampa que atravessa os I, II e III diedros de projecção, estando igualmente inclinado em relação a φ_0 e ν_0.



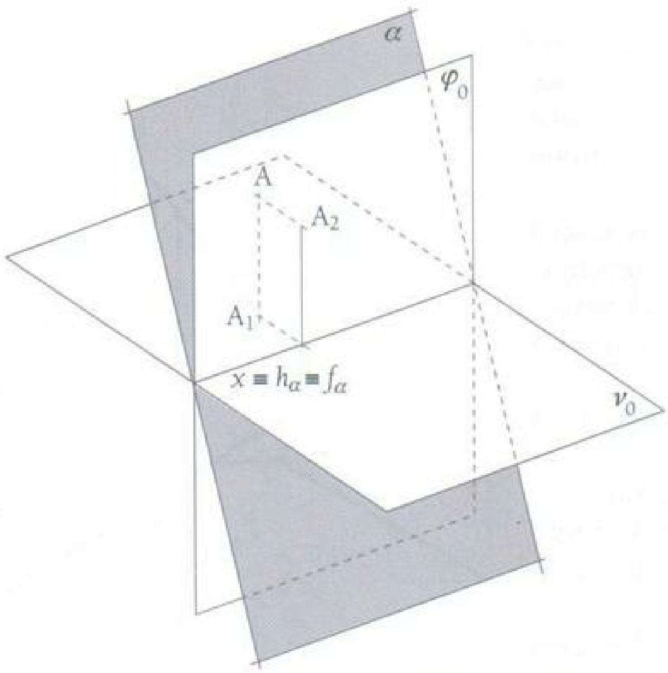
Plano de rampa que atravessa os I, IV e III diedros de projecção, estando igualmente inclinado em relação a φ_0 e ν_0.

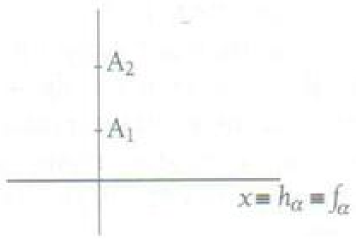
Plano passante

É um plano oblíquo aos dois planos de projecção, tal como o plano de rampa. A diferença com o de rampa reside no facto de este conter o eixo x e, consequentemente, situar-se em apenas dois diedros de projecção.

Os seus traços são coincidentes com o eixo x e, sendo assim, eles, só por si, não podem defini-lo. Este plano poderá ser definido pelos seus traços e um seu ponto exterior ao eixo x.

Os planos bissectores, $\beta_{1/3}$ e $\beta_{2/4}$, também são planos passantes.





Plano passante.

Quadro: Resumo do alfabeto do plano

Designação do plano			Posição no espaço: Em relação a φ_0 e υ_0	Posição no espaço: Em relação ao eixo x	Traços
Planos	Oblíquo		$\angle$ a φ_0 $\angle$ a ν_0	$\angle$ a x	h $\angle$ a x v $\angle$ a x
	De rampa		$\angle$ a φ_0 $\angle$ a ν_0	// a x	h // a x v // a x
	Passante		$\angle$ a φ_0 $\angle$ a ν_0	Contém x	$h \equiv$ como x $f \equiv$ como x
Planos projectantes	Horizontal	Vertical	$\angle$ a φ_0 $\angle$ a ν_0	$\angle$ a x	h $\angle$ a x $f \perp$ a x
		Frontal ou de frente	// a φ_0 $\perp$ a ν_0	// a x	h // a x f não existe
	Duplamente projectante	De perfil	$\perp$ a φ_0 $\perp$ a ν_0	$\perp$ a x	$h \perp$ a x $f \perp$ a x
	Frontal	De topo	$\perp$ a φ_0 $\angle$ a ν_0	$\angle$ a x	$h \perp$ a x f $\angle$ a x
		De nível ou horizontal	$\perp$ a φ_0 // a ν_0	// a x	h não existe f // a x

// – paralelo
$\perp$ – perpendicular
$\equiv$ – coincidente

h – traço horizontal do plano
f – traço frontal do plano

x – eixo x ou linha de terra
$\angle$ – oblíquo

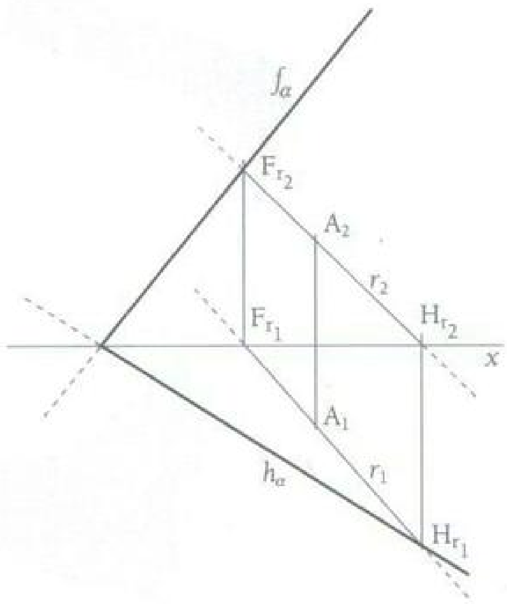
Ponto pertencente a um plano

Considera-se que um ponto pertence a um plano se este estiver contido numa recta pertencente a esse plano. Assim, o ponto A pertence ao plano α, porque está contido na recta r cujos traços se encontram sobre os traços do mesmo nome do plano.

Seja dado um plano β, oblíquo, cujos traços frontal e horizontal fazem com o eixo x respectivamente, ângulos de 60° e 30°, de abertura para a direita. Determinemos as projecções do ponto A (1,5; 3,5) que lhe pertence.

Para a determinação das projecções do ponto A do plano β, há necessidade de se recorrer a rectas de frente e de nível desse plano, pois através da recta de frente com afastamento igual ao do ponto pode-se facilmente encontrar a projecção horizontal do ponto.

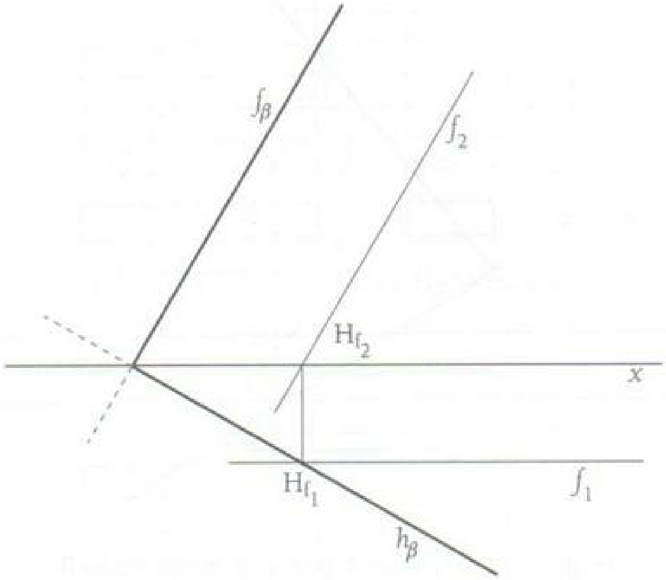
Para encontrar a projecção frontal do ponto, uma recta de nível com a cota do ponto é fundamental.



Ponto A pertencente ao plano α.

1.º passo

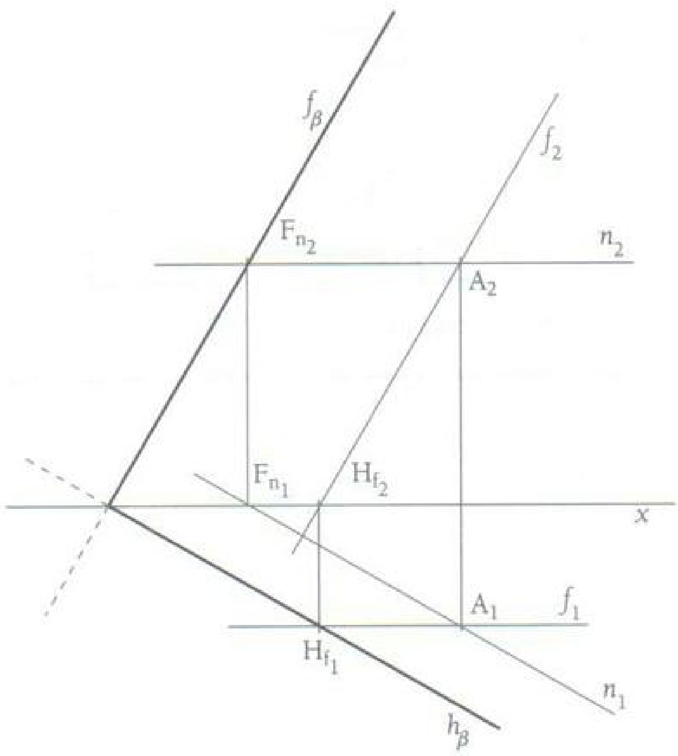
A uma distância de 1,5 cm para baixo do eixo x, traça-se uma linha paralela a esse eixo, f_1 cuja intersecção com h_β, origina H_{f_1}, traço horizontal da recta de frente pertencente ao plano β. H_{f_2}, projecção frontal do traço horizontal da recta f, situa-se no eixo x e, por ele, traça-se f_2, paralelo a f_β.



2.º passo

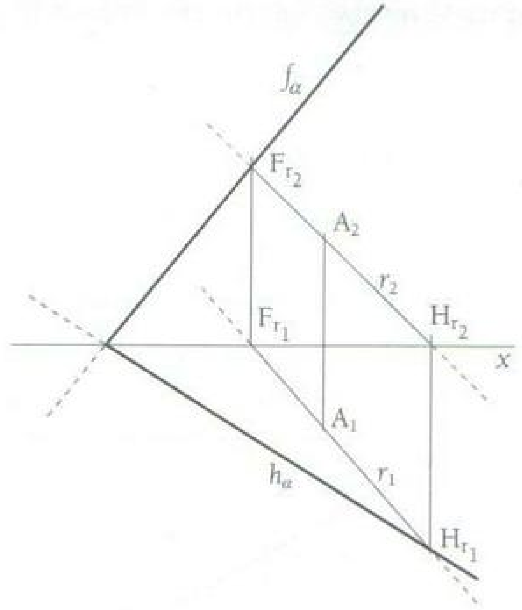
Traça-se uma linha auxiliar paralela ao eixo x, com cota igual a 3,5 cm, a cota do ponto procurado. A intersecção dessa recta com f_β origina H_{n_2}, projecção frontal do traço frontal duma recta de nível desse plano.

A projecção horizontal de F_n, F_{n_1}, situa-se no eixo x e, por ele, determina-se a projecção horizontal de n, n_1, paralela ao traço horizontal do plano, h_β.



3.º passo

O ponto de intersecção de n_2 com f_2 é A_2, projecção frontal do ponto procurado, cuja projecção horizontal A_1 localizar-se-á no ponto de intersecção de n_1 com f_1.



Projecções do ponto **A** pertencente ao plano β.

Estes procedimentos serão os mesmos para determinar as projecções de um ponto pertencente a um plano definido por duas rectas concorrentes.

Exercícios propostos

1. Quantas e quais são as formas como um plano pode ser definido?

2. Quando é que se diz que uma recta pertence a um plano?

3.* Dadas as rectas *a*, oblíqua e *b*, de frente, concorrentes no ponto C, determine os traços do plano α, que elas definem:

   O ponto C tem abcissa, afastamento e cota iguais a 0 cm, 3,5 cm e 2 cm respectivamente;
   Para além do ponto C, a recta *a* é também definida pelo ponto A (–2,5; 0,5; 5);
   A projecção frontal da recta *b* faz, com o eixo *x*, um ângulo de 75° de abertura para a direita, e o seu traço horizontal tem 3,5 cm de afastamento.

4. Um plano β, é definido por duas rectas frontais, *e* e *f*, paralelas, e que formam ângulos de 30° com o plano horizontal de projecção, de abertura para a direita. A recta *e* contém o ponto A (0; 2; 1) e a recta *f* contém o ponto B (4; 3; 3).
   Determine os traços do plano β.

5. Assinale com ✓ as afirmações verdadeiras.

   A. O plano oblíquo é perpendicular aos planos ortogonais de projecção.
   B. O plano de rampa é oblíquo em relação aos dois planos de projecção.
   C. Um plano de nível pode atravessar I, II e III diedros de projecção.
   D. O plano de frente é o lugar geométrico em que todos os pontos têm afastamentos iguais.
   E. Um plano de topo é perpendicular ao plano frontal de projecção.
   F. A um plano paralelo ao eixo *x* chama-se plano de rampa.
   G. O traço horizontal de qualquer plano de topo é perpendicular ao eixo *x*.
   H. O plano projectante horizontal pode ser representado apenas pelo seu traço horizontal com a designação entre parêntesis.
   I. Todos os pontos de um plano de nível têm a mesma cota.
   J. O plano de perfil é ortogonal aos planos de projecção.
   K. Todos os pontos de um plano de perfil têm a mesma abcissa.
   L. O plano de nível é perpendicular a ν_0.
   M. Qualquer figura assente no plano de topo tem a sua projecção frontal coincidente com o traço frontal do plano.
   N. Todas a figuras assentes num plano de frente têm a sua projecção frontal igual a si própria.
   O. O traço do plano de frente designa-se entre parêntesis porque é o único traço.
   P. As projecções horizontais de figuras assentes em planos de nível apresentam-se na sua verdadeira grandeza.

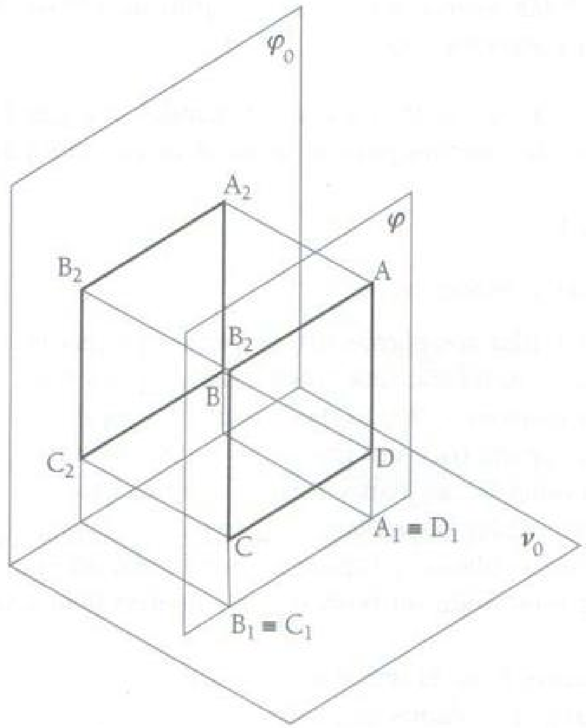
6.* Dado um plano oblíquo, cujos traços frontal e horizontal fazem, respectivamente, ângulos de 45° e 60° de abertura para a direita, determine as projecções do ponto K (4; 4,5) desse plano.

7. Considere um ponto A (4; 3,5) e por ele faça passar um plano:

   a) Vertical, fazendo um ângulo de 45° com ν_0, de abertura para a direita.
   b) Horizontal ou de nível.
   c) Oblíquo.
   d) De perfil.

Processos geométricos auxiliares

A projecção de um segmento de recta ou de uma figura plana sobre um plano ao qual é paralelo, apresenta-se em verdadeira grandeza. Ou seja, se um quadrado [**ABCD**] for paralelo ao plano frontal de projecção, a sua projecção sobre esse plano, [$A_2B_2C_2D_2$] é geometricamente igual ao quadrado [**ABCD**]. Uma projecção de um segmento de recta ou duma figura plana apresenta-se em verdadeira grandeza também se estiver contido num dos planos de projecção.



Neste caso, a figura no espaço é igual à sua projecção frontal.

Se uma figura plana ou um segmento de recta não estiverem contidos num dos planos de projecção ou num plano paralelo a um dos planos de projecção, as suas projecções estarão deformadas em ambos os planos de projecção. Essa deformação poderá ser maior ou menor, de acordo com os ângulos que o plano que contém o segmento de recta ou figura plana, faz com os planos de projecção.

A *deformação máxima* num segmento de recta acontece quando a sua projecção fica reduzida a um ponto. Trata-se da projecção frontal de um segmento de topo e da projecção horizontal dum segmento vertical.

No caso de uma figura plana, a *deformação máxima* acontece quando a sua projecção fica reduzida a um segmento de recta, nomeadamente se estiver contida num plano perpendicular a um dos planos de projecção.

É nas circunstâncias em que nenhuma das projecções se apresenta em verdadeira grandeza que se recorre aos *processos ou métodos geométricos auxiliares*, de modo a que se conheça a verdadeira grandeza da figura, tornando-a paralela ou coincidente com um dos planos de projecção.

Portanto, recorre-se aos pocessos ou métodos geométricos auxiliares para dar ao objecto (segmento de recta ou figura plana), uma posição mais adequada para um determinado estudo.

Os processos geométricos auxiliares são três, nomeadamente:

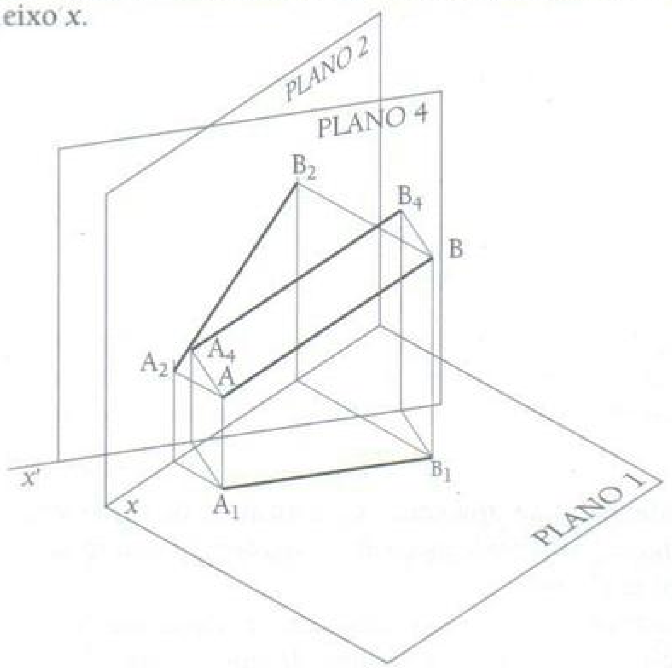
1. Mudança do diedro de projecção ou mudança de planos.
2. Rotação.
3. Rebatimento.

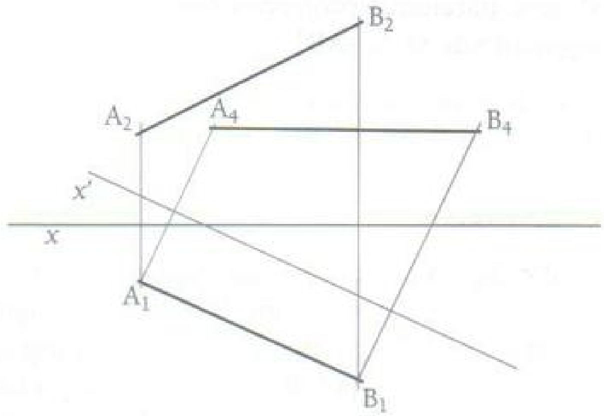
Mudança do diedro de projecção ou mudança dos planos de projecção

A *mudança do diedro de projecção* consiste em introduzir novos planos em substituição dos já existentes, de modo a colocá-los numa posição mais conveniente para um determinado estudo. A mudança dos planos de projecção implica também a mudança de diedros, mantendo sempre a ortogonalidade (perpendicularidade) entre os dois planos de projecção.

Se se mudar a posição do plano frontal de projecção, mantêm-se as projecções horizontais, mudam-se os afastamentos e mantêm-se as cotas.

No caso de se mudar a posição do plano horizontal de projecção, as projecções frontais mantêm-se, mudam-se as cotas e mantêm-se os afastamentos. É de destacar que, neste processo todo, a ortogonalidade entre os planos mantém-se. Na mudança da posição de um plano de projecção, muda também a posição do eixo *x*.

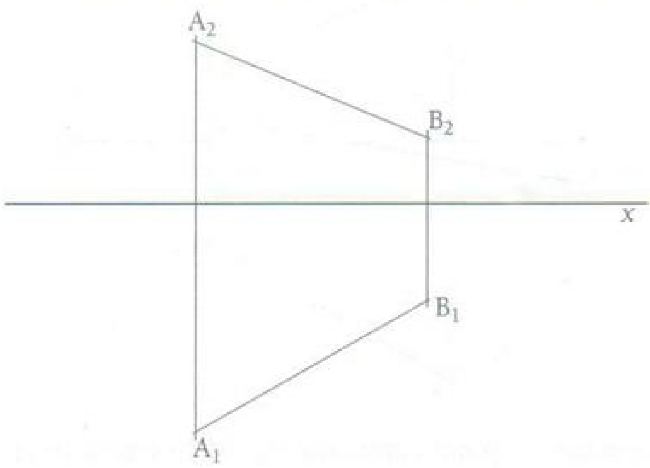




Mudança de um plano frontal em representação tridimensional e bidimensional.

Passemos a analisar alguns exemplos da aplicação deste método na resolução de exercícios, começando por determinar a verdadeira grandeza (V.G.) de um segmento de recta oblíquo.

Um segmento de recta oblíquo, no espaço, é também oblíquo em relação aos dois planos de projecção, pelo que nenhuma das suas projecções se apresenta em verdadeira grandeza.

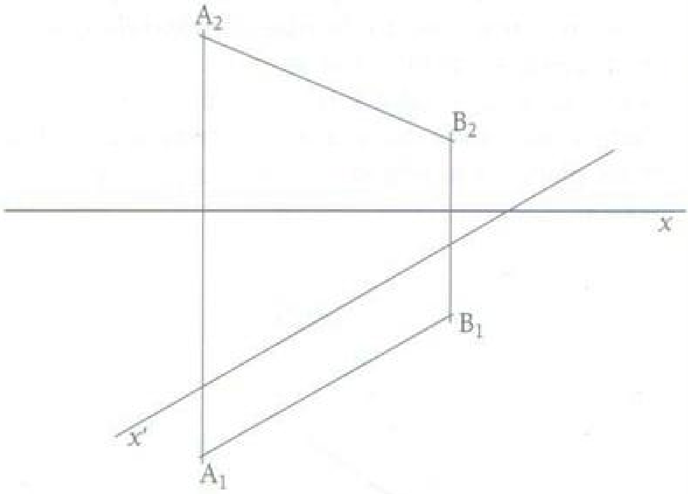


Para se determinar a sua verdadeira grandeza, é necessário mudar a posição de um dos planos de projecção, de modo a torná-lo paralelo ao segmento de recta. Como sabe, uma projecção apresenta-se em verdadeira grandeza no plano de projecção paralelo ao objecto.

No plano do desenho, uma recta oblíqua tem as suas projecções oblíquas em relação ao eixo **x**. Para torná-la paralela a um dos planos de projecção, por exemplo ao plano frontal de projecção, torná-la de frente, é necessário em primeiro lugar visualizar, não só a posição da recta de frente no espaço, mas também as posições das suas projecções no plano do desenho.

Em relação ao eixo *x*, a projecção frontal da recta de frente é oblíqua e a projecção horizontal é paralela.

Na base deste conhecimento, que diz respeito ao alfabeto da recta, pode-se, muito facilmente, determinar a verdadeira grandeza do segmento de recta [**AB**], oblíquo.



1.º passo

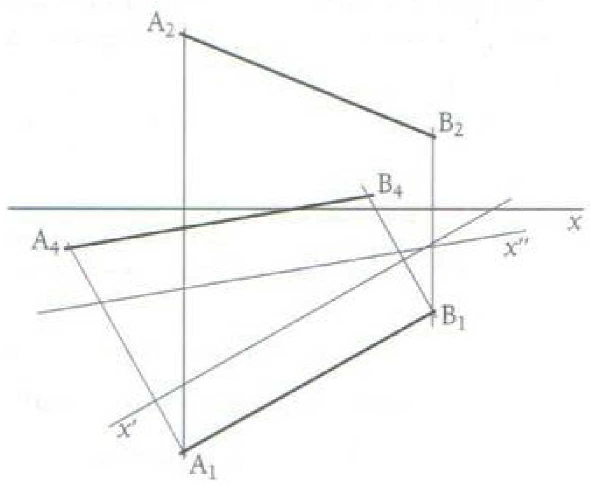
Iremos tornar o plano frontal paralelo ao segmento de recta, o que significa que o novo eixo *x*, *x'*, será paralelo à projecção horizontal [$\mathbf{A_1B_1}$], do segmento de recta [**AB**].

2.º passo

Por A_1 e B_1, traçam-se linhas de chamadas perpendiculares ao novo eixo *x*, sobre as quais se determinam as novas projecções frontais [A_4B_4], do segmento de recta [**AB**], onde as cotas se mantêm, pois a relação dos pontos **A** e **B** com o plano horizontal de projecção não se alterou.

Nota: em princípio, tratando-se duma projecção num terceiro plano de projecção, as designações A_4 e B_4, deveriam ser com índice 3, mas tal não acontece porque parte-se do princípio de que o índice 3 é usado para a projecção no plano referencial de perfil, π.

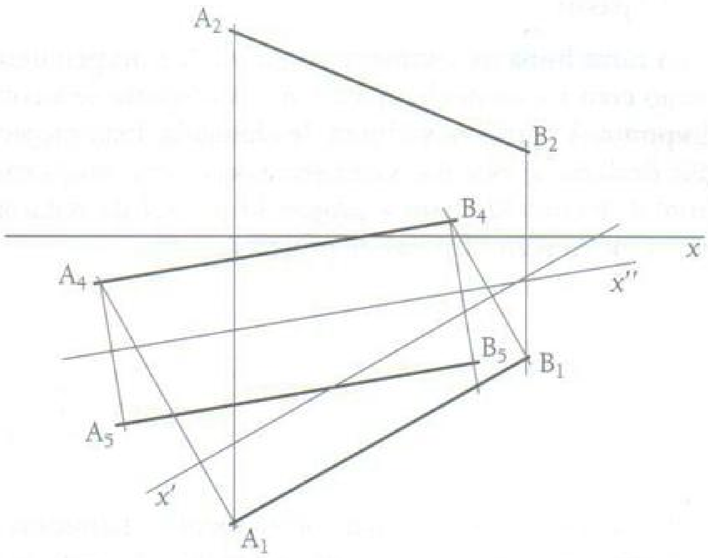
Se se pretendesse tornar fronto-horizontal, esse mesmo segmento de recta era só uma questão de traçar um outro novo eixo, *x''*, paralelo à nova projecção frontal [A_4B_4], do segmento de recta [**AB**].



Determinação da nova projecção frontal do segmento [AB]

3.º passo

Seguidamente, traçam-se linhas de chamada a partir de A_4 e B_4, perpendiculares ao eixo x'', sobre as quais se marcam os afastamentos desses dois pontos, que são os mesmos e de igual distância, sendo as suas designações A_5 e B_5.



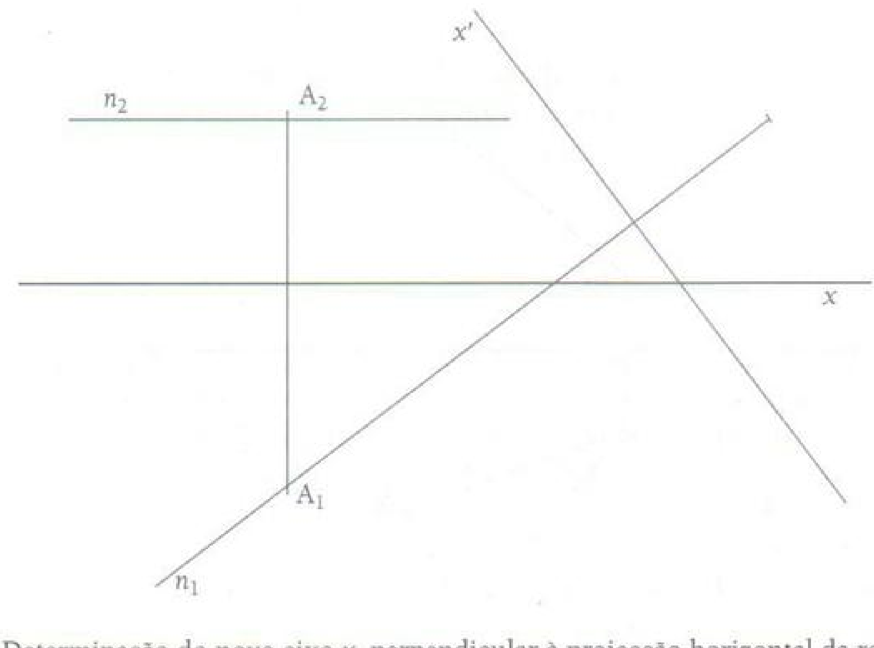
Determinação da nova projecção horizontal do segmento [AB]

Transformemos uma recta de nível em recta de topo. Como sabe, tanto a recta de nível como a de topo são paralelas ao plano horizontal de projecção, pelo que, para transformar uma recta de nível em recta de topo, basta mudar a posição do plano frontal de projecção e torná-lo perpendicular à recta.

1.º passo

Deste modo, mantêm-se as projecções horizontais da recta e as cotas dos pontos da recta, e alteram-se a projecção frontal da recta e os afastamentos dos seus pontos.

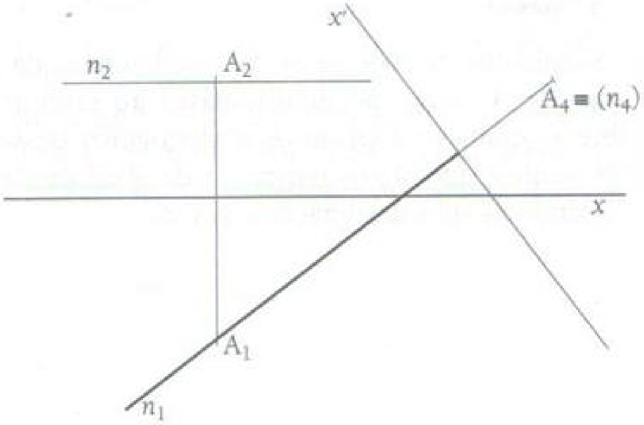
Traça-se um novo eixo x, x', perpendicular à projecção horizontal n_1, da recta dada e marca-se um ponto da recta, neste caso o ponto A, o qual servirá de referência para o traçado da nova projecção frontal da recta n.



Determinação do novo eixo x, perpendicular à projecção horizontal da recta n.

2.º passo

A nova linha de chamada do ponto A é perpendicular ao eixo x e coincidente com n_1. Transporta-se a cota do ponto A para a nova linha de chamada. Esta projecção designa-se por A_4, visto ser a sua nova projecção frontal, e coincide com a projecção frontal da recta n, n_4, no novo plano frontal de projecção.



Passemos à transformação de elementos definidores de planos.

Para obter uma recta ou um segmento de recta num novo diedro de projecção é necessário obter, em primeiro lugar, as projecções de um ou dois dos seus pontos, nos novos planos de projecção.

Com base nesse conhecimento, pode-se, através dum raciocínio lógico, efectuar as transformações de planos.

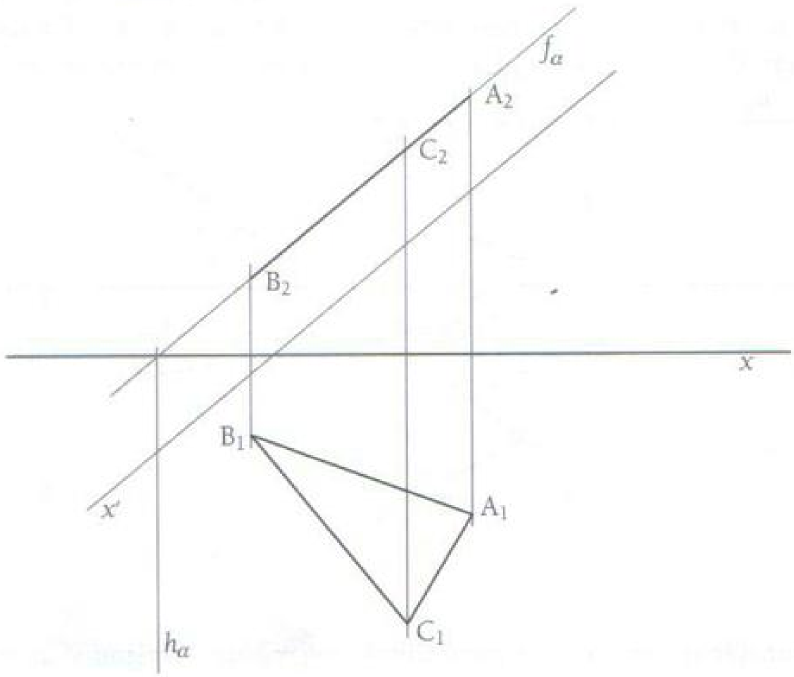
Dado um triângulo escaleno, contido num plano de topo, determinemos a sua verdadeira grandeza. Vamos usar, para tal, o processo de mudança de planos de projecção.

Para determinar a verdadeira grandeza do triângulo, é necessário que o plano frontal de projecção ou o plano horizontal de projecção seja paralelo ao plano que o contém.

1.º passo

O plano de topo é perpendicular ao plano frontal de projecção, pelo que é projectante frontal, ou seja, todos os seus pontos têm a sua projecção frontal sobre o seu traço frontal. Sendo projectante frontal, para que seja paralelo a um dos planos de projecção, a via mais rápida é torná-lo de nível, pois o plano de nível é também um plano perpendicular ao plano frontal de projecção, distinguindo-se do outro pelo facto de ter todos os seus pontos à mesma distância do plano horizontal de projecção, sendo-lhe paralelo.

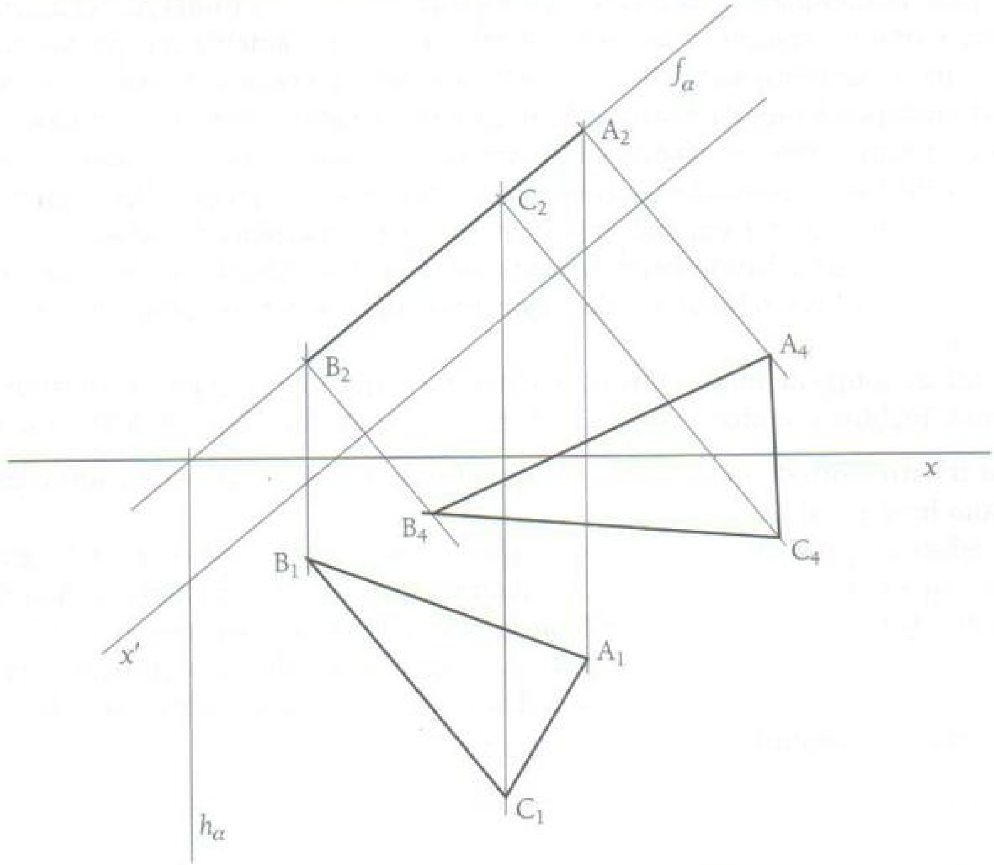
Portanto, transformemos o plano de topo em plano de nível, traçando em primeiro lugar um novo eixo x, x', paralelo ao traço frontal f_α, do plano de topo, α.



2.º passo

Traçam-se as linhas de chamadas perpendiculares a x', partindo das projecções frontais dos vértices do triângulo, A_2, B_2 e C_2.

Transportam-se os afastamentos dos três vértices para as novas linhas de chamada, ou seja para o novo plano horizontal de projecção e designam-se A_4, B_4 e C_4. A união das projecções desses três pontos no novo plano horizontal de projecção é a verdadeira grandeza do triângulo.



Verdadeira grandeza (V.G.) do triângulo [ABC] pelo método de mudança de planos.

No novo diedro de projecção, mantêm-se as projecções frontais dos pontos e o traço frontal do plano α (manteve-se o plano frontal de projecção), mantendo-se também os afastamentos dos vértices do triângulo. Mudaram as suas cotas, que passaram a ser iguais entre si e iguais à cota do novo traço frontal do plano.

Rotação

A rotação tem o mesmo objectivo que a *mudança de diedro de projecção*, que é a de colocar o objecto numa posição mais conveniente para o estudo a efectuar, distinguindo-se do processo anterior pelo facto de neste processo ser o objecto que muda de posição, mantendo-se fixos os planos ortogonais de projecção.

Este processo geométrico auxiliar consiste em rodar o objecto em torno de uma recta (eixo de rotação ou charneira) de modo a que tome a posição desejada.

Quanto a este processo, não iremos desenvolver o seu estudo nesta classe. Apenas quisemos dar uma informação generalizada de modo a saber que afinal os processos geométricos são três e quais são os seus objectivos e as suas principais características.

Rebatimento

O rebatimento, tal como a rotação, também consiste em rodar um objecto (segmento de recta ou figura plana) em torno dum eixo de rotação (charneira de rebatimento), mantendo igualmente fixos os planos de projecção.

A diferença entre os dois processos, rotação e rebatimento, reside no facto de no rebatimento o eixo de rotação pertencer ao mesmo plano que o objecto e na rotação o eixo ser uma recta exterior ao plano que contém o objecto. Portanto, como o *rebatimento* se efectua exclusivamente nos planos, tal acontece apenas com objectos *uni* e *bidimensionais*, diferentemente dos dois processos anteriores (mudança de diedro e rotação), que são independentes da natureza *bi* ou *tridimensional* do objecto projectado.

No processo de rebatimento, os planos giram em torno duma recta (charneira de rebatimento), de modo a torná-los paralelos ou coincidentes com um dos planos de projecção. Nesse processo, os arcos de rebatimento estão sempre contidos em planos perpendiculares à charneira do rebatimento.

Assim, um plano pode ser rebatido paralelamente sobre o plano frontal de projecção ou sobre o plano horizontal de projecção. E, em relação a cada plano para onde se rebate, pode ser rebatido para o lado direito ou esquerdo.

No nosso estudo ao longo de todo o Ensino Secundário Geral iremos tratar de rebatimentos de apenas planos projectantes, incluindo o plano de perfil. Comecemos pelo rebatimento de planos de topo.

Efectuemos o rebatimento de um plano de topo definido pelos seus traços e um triângulo nele contido, sobre o plano horizontal de projecção.

Pretendendo rebater o plano de topo γ, sobre o plano horizontal de projecção, tal significa que ele irá rodar sobre o seu traço horizontal h_γ, até coincidir com v_0. Portanto, h_γ é a charneira do rebatimento.

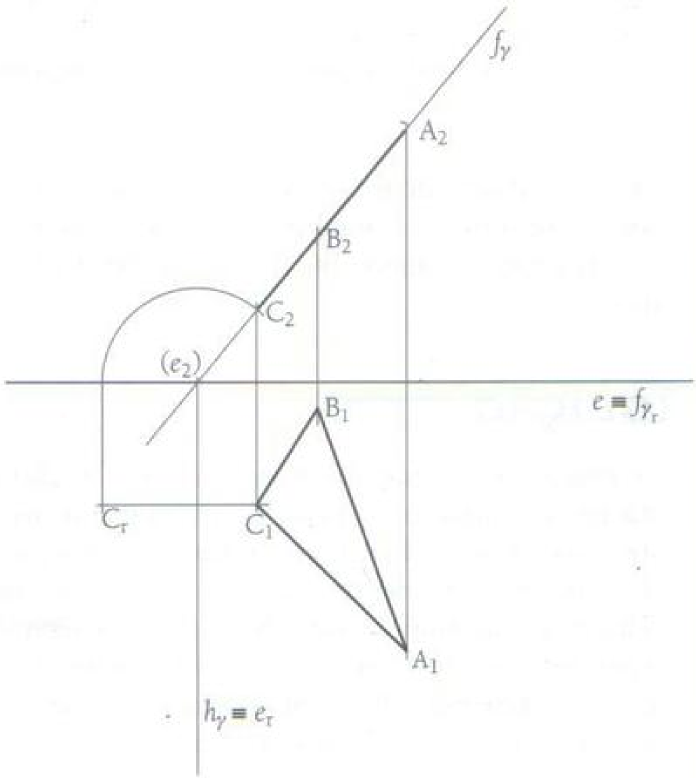
Quando o plano gira, os seus pontos também giram, incluindo o seu traço frontal, até coincidirem com o eixo x, $f_\gamma \equiv x$. Como pode ver, a designação do traço frontal rebatido é precedido pelo índice r, que significa rebatido. Deste modo, relativamente a todos os pontos e rectas rebatidos, a sua designação será precedida pela letra r, por exemplo, A_r, B_r, a_r, n_r, h_{α_r}, etc.

1.º passo

Os arcos de rebatimento, neste caso, estão contidos em planos frontais e, naturalmente, apresentam a sua verdadeira grandeza no plano frontal de projecção. Os arcos de rebatimento de cada um dos pontos que definem o triângulo [ABC] têm o seu centro sobre a charneira do rebatimento que coincide com o traço horizontal do plano γ. Todos os centros de rebatimento dos vértices do triângulo [ABC] têm a sua projecção frontal coincidente com a projecção frontal, (e_2), da charneira do rebatimento.

Para evitar muitas designações, as projecções dos centros de rebatimento de cada ponto serão dispensadas, ficando apenas a designação da charneira do rebatimento.

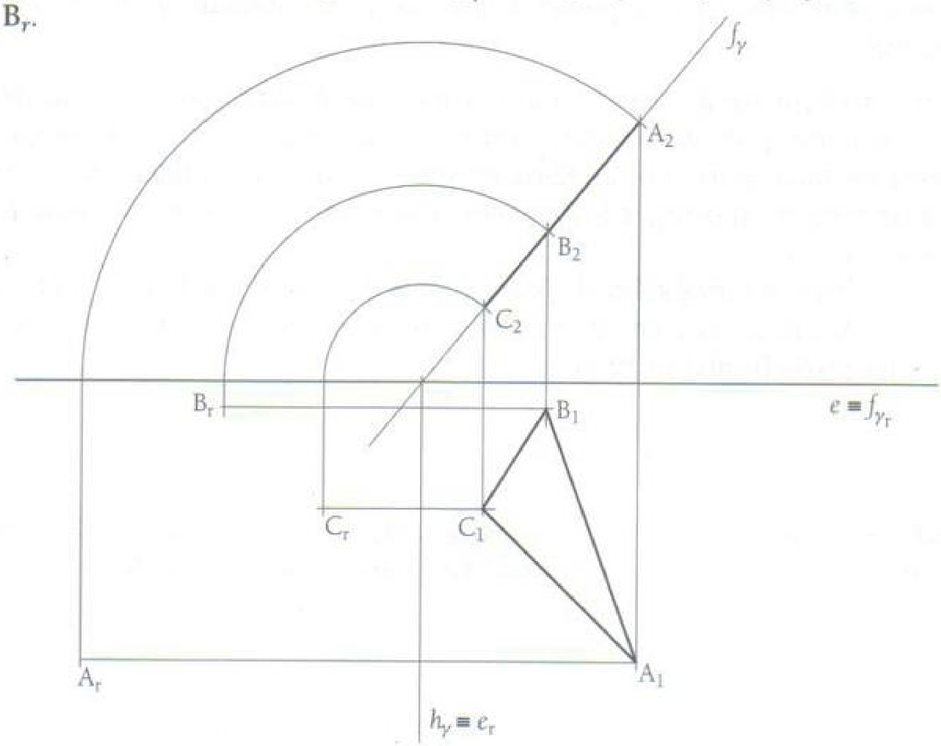
Com a ponta seca do compasso em (e_2), e abertura até à projecção frontal de um dos vértices do triângulo, neste caso, a projecção frontal do ponto C, traça-se um arco até ao eixo x e prolonga-se através duma semi-recta perpendicular a esse eixo.



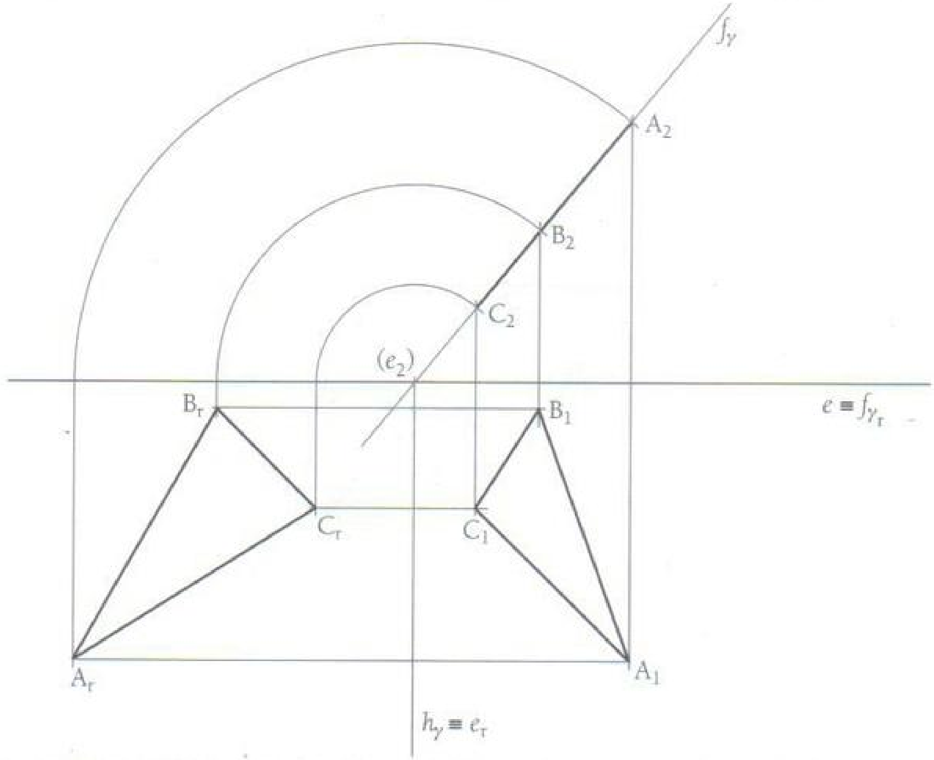
2.º passo

Por C_1, traça-se uma linha paralela ao eixo x, cuja intersecção com a semi-recta que se acabou de tra çar, origina C_r, ponto C rebatido. Essa linha paralela ao eixo x é a projecção horizontal do arco de rebat mento do ponto C, cuja projecção frontal é o arco que se traçou a partir de C_2 e com centro em (e_2).

Para efectuar o rebatimento dos pontos **A** e **B**, o procedimento é similar ao do ponto C. Com centr em (e_2) e abertura do compasso até A_2 ou B_2, traça-se um arco até $f_\gamma \equiv x$ e prolonga-se sob a forma d uma semi-recta, que se intersecta com a paralela a $f_\gamma \equiv x$, que passa pela projecção horizontal do mesm ponto, em A_r ou B_r.



Como vê, o triângulo [**ABC**] apresenta a sua verdadeira grandeza, [$A_rB_rC_r$], no plano horizontal d projecção.



Verdadeira grandeza do triângulo [ABC] pelo método de rebatimento.

Como dissemos anteriormente, o rebatimento pode ser efectuado sobre um plano de projecção ou sobre um plano paralelo a um dos planos de projecção.

Neste caso, consideremos os mesmos dados do exercício anterior e efectuemos o rebatimento do plano γ, sobre um plano paralelo ao plano horizontal de projecção, um plano de nível.

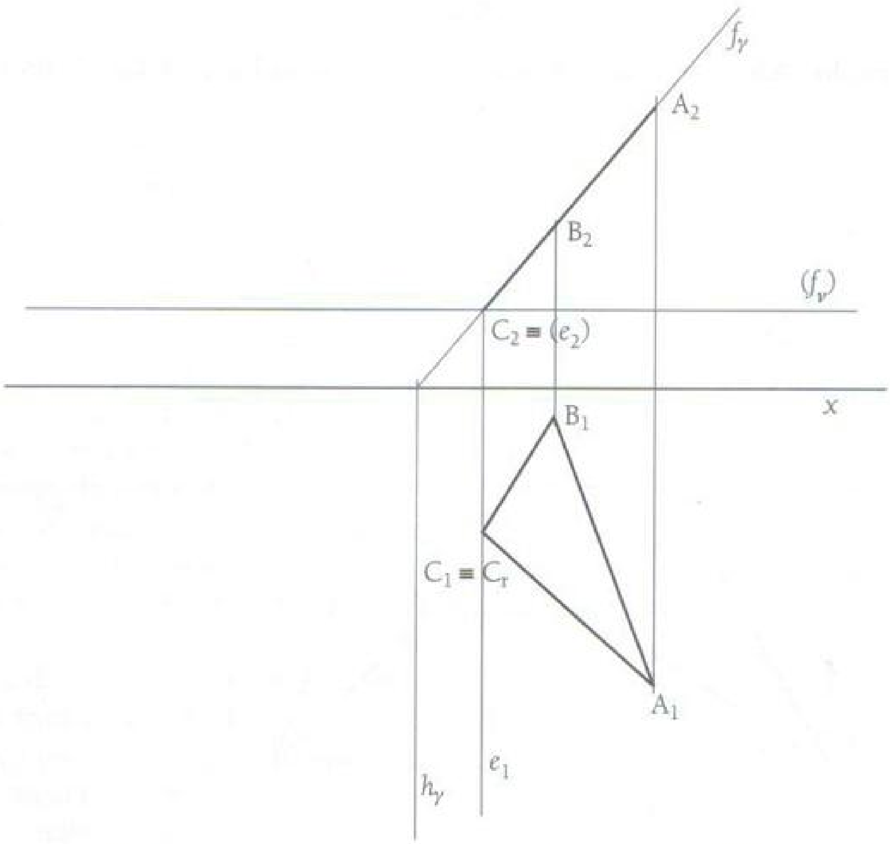
O rebatimento sobre o plano de nível apresenta vantagens se esse plano contiver um dos pontos a rebater, um dos vértices do triângulo [ABC]. Assim, reduzir-se-iam os traços, nomeadamente os que dizem respeito ao arco de rebatimento do ponto situado no plano auxiliar, de nível, sobre o qual se pretende rebater o triângulo.

Neste rebatimento, a *charneira do rebatimento* é a recta de intersecção do plano de nível, v, com o plano que contém o triângulo, γ. O plano γ é de topo e o plano v é de nível. A intersecção desses dois planos origina uma recta de topo; portanto, a charneira do rebatimento é uma recta de topo. A projecção frontal do charneira do rebatimento (e_2) é logicamente um ponto e situa-se no ponto de intersecção dos traços frontais dos planos γ e v.

O ponto situado na charneira gira sobre si próprio, isto é, $C \equiv C_r$, pelo que serão traçados arcos de rebatimento dos pontos A e B. Esses arcos de rebatimento situam-se em planos de frente cuja verdadeira grandeza se encontra no plano frontal de projecção.

1.º passo

Em primeiro lugar, representa-se, através do seu traço, (f_v), o plano de nível sobre o qual pretendemos efectuar o rebatimento do plano de topo. O plano de nível contém o ponto C, logo $C_1 \equiv C_r$.

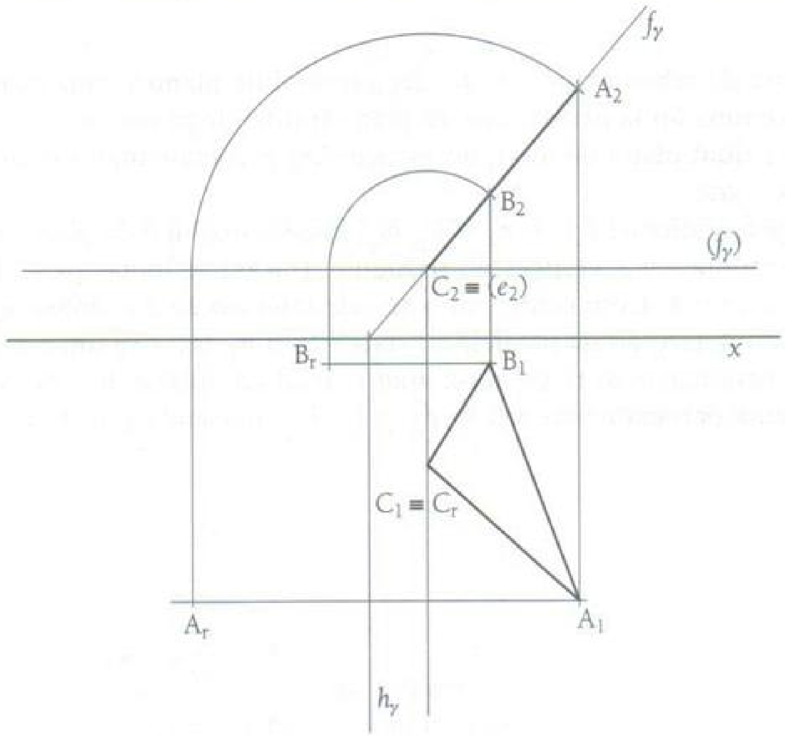


Representação do plano de nível v, que irá funcionar como charneira do rebatimento do plano de topo.

2.º passo

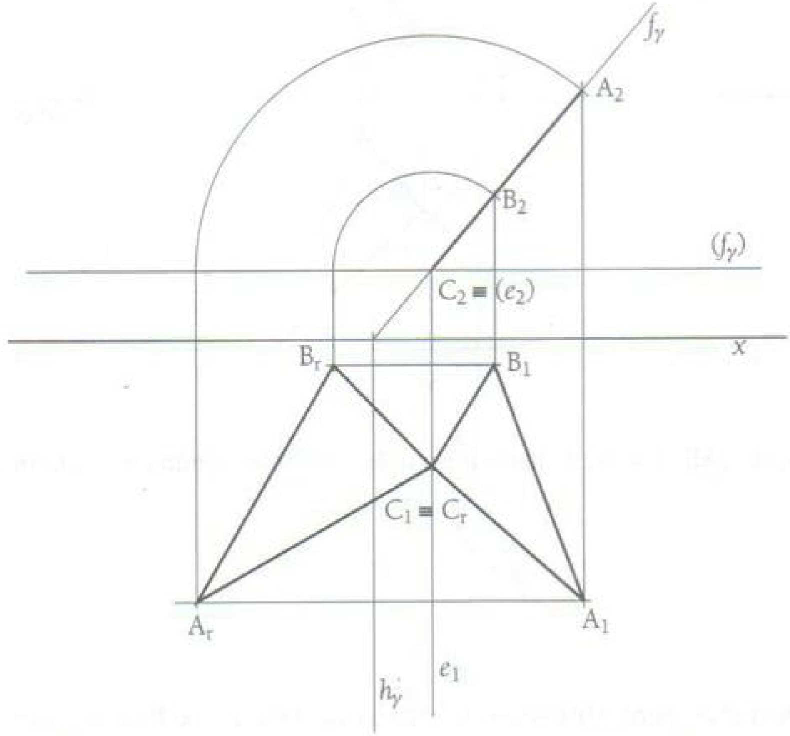
Os procedimentos seguintes são os mesmos que foram seguidos no rebatimento sobre o plano horizontal de projecção, bastando, para isso, fazer de conta que x é (f_v).

Assim, com centro em (e_2) e abertura do compasso até A_2, traça-se um arco até (f_v), que se prolonga em semi-recta. Por A_1, traça-se uma paralela a (f_v), cuja intersecção com a semi-recta origina o ponto procurado, A_r.



3.º passo

Seguem-se os mesmos procedimentos para se obter B_r.
Unindo A_r, B_r e C_r, obtém-se a verdadeira grandeza do triângulo [ABC].



Rebatimento de triângulo [ABC] sobre um plano auxiliar.

O plano de topo também pode ser rebatido sobre o plano frontal de projecção ou sobre um plano paralelo ao plano frontal de projecção.

Tratemos de considerar o triângulo e o plano do caso anterior e efectuemos o rebatimento sobre o plano frontal de projecção.

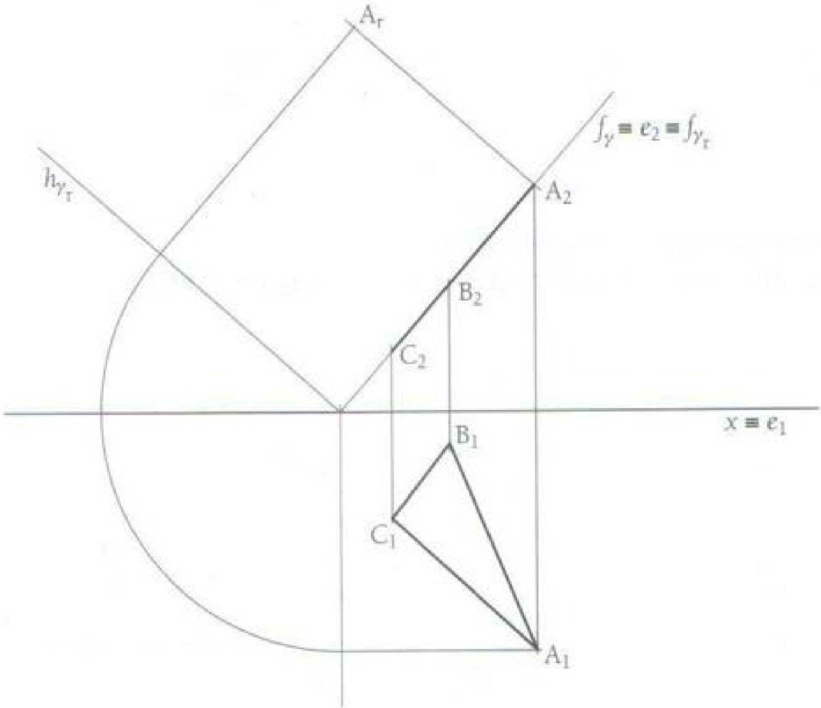
1.º passo

Neste caso a charneira do rebatimento será f_γ, traço frontal do plano γ, cuja projecção horizontal coincide com o eixo x, pois é uma linha pertencente ao plano frontal de projecção.

Como sabe, os traços dum plano de topo, no espaço, são perpendiculares entre si, logo na sua verdadeira grandeza também o são.

Traça-se uma linha perpendicular a $f_\gamma \equiv e_2 \equiv f_{\gamma_r}$, h_{γ_r}, traço horizontal do plano γ rebatido.

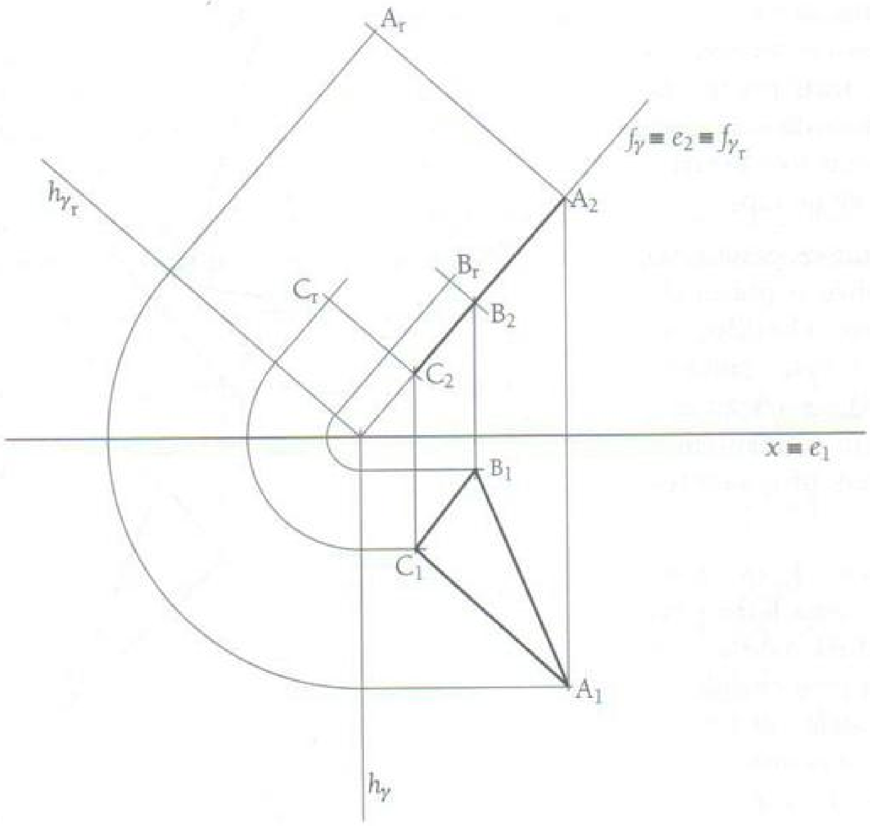
Pelas projecções horizontais dos vértices do triângulo, traçam-se linhas paralelas ao eixo x. Comecemos, neste caso, com o ponto A. Com centro no ponto de intersecção dos dois traços do plano de topo, e abertura até ao ponto de intersecção da paralela ao eixo x com h_γ, traça-se um arco até h_{γ_r}, que se prolonga numa semi-recta perpendicular ao traço horizontal rebatido do plano de topo. O ponto de intersecção dessa semi-recta com uma perpendicular a $f_\gamma \equiv e_2 \equiv f_{\gamma_r}$, h_{γ_r}, passando por A_2 é o ponto procurado, A_r, ponto A rebatido.



Rebatimento de triângulo [ABC] sobre o plano frontal de projecção, tendo como charneira de rebatimento γ.

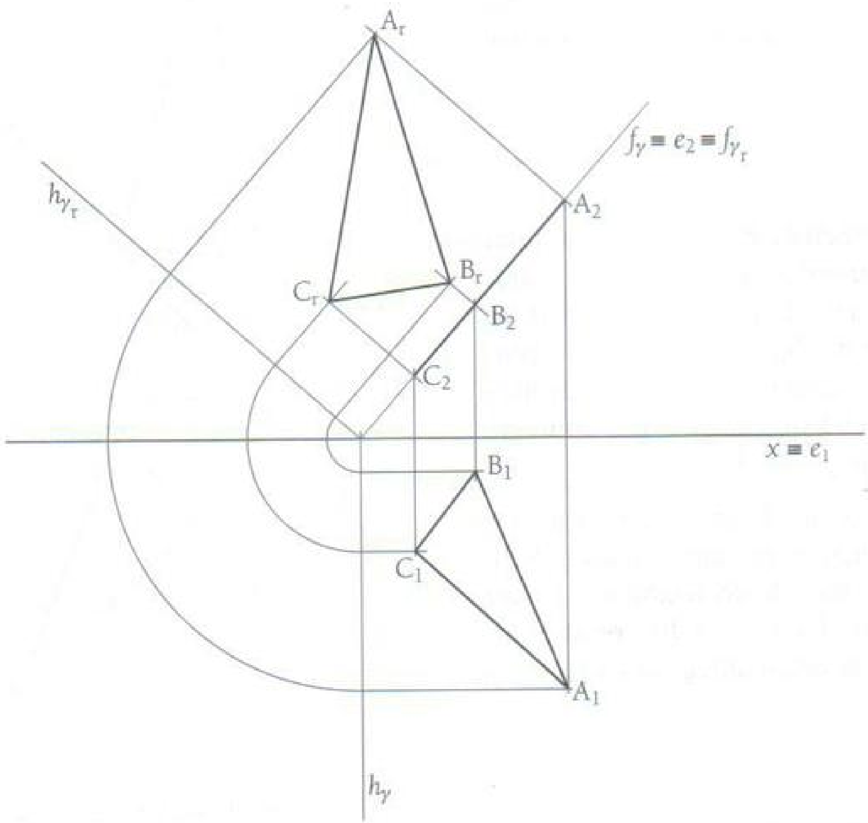
2.º passo

Repetindo os passos dados para obtenção do ponto A_r, obtêm-se B_r e C_r, como se pode verificar na figura da página seguinte.



3.º passo

O triângulo [$A_rB_rC_r$] é a verdadeira grandeza do triângulo [ABC], que se obteve através do rebatimento do plano que o contém, o plano de topo, sobre o plano frontal de projecção.

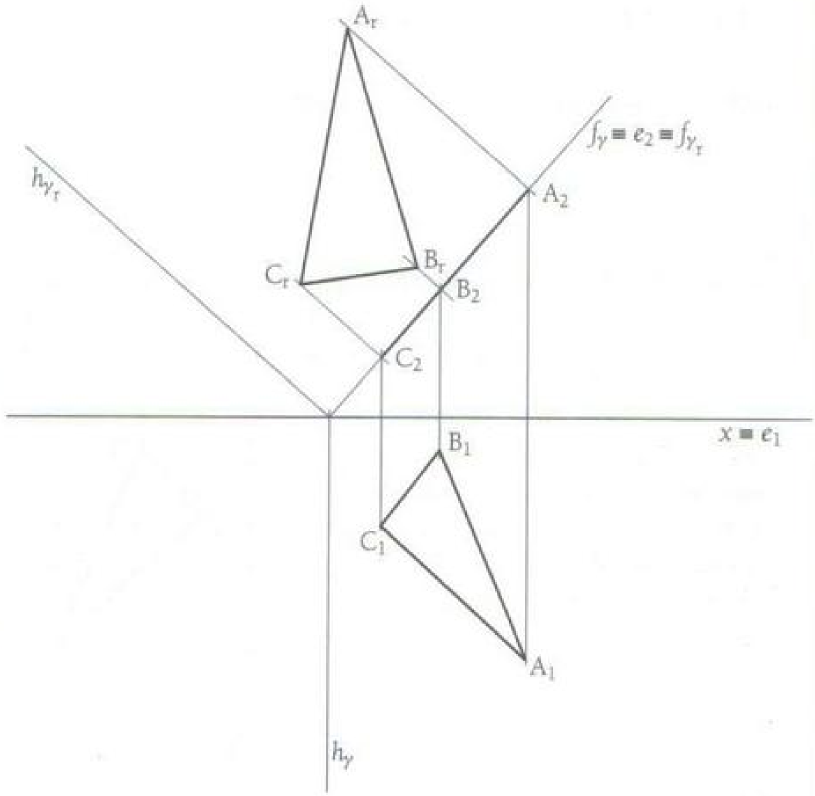


Rebatimento do triângulo e do plano de topo que o contém sobre o plano frontal de projecção.

Uma análise atenta permite-nos observar que o que está a acontecer no plano do desenho é transportar os afastamentos dos vértices do triângulo para as linhas perpendiculares ao traço frontal rebatido do plano de topo.

Ou seja, uma vez que os pontos no espaço se situam sobre o plano de topo, quando esse for rebatido, tal acontece com os pontos nele contidos, pelo que a distância da separação dos pontos com a charneira se mantém e situa-se sobre as linhas projectantes frontais.

A linha perpendicular a f_{γ_r} que contém A_r, por exemplo, é uma linha projectante frontal, rebatida, isto é, é a linha que determinou a projecção frontal de A, em φ_0. Sendo assim, podem-se dispensar algumas linhas auxiliares, passando-se ao transporte directo dos afastamentos para as projectantes frontais rebatidas.

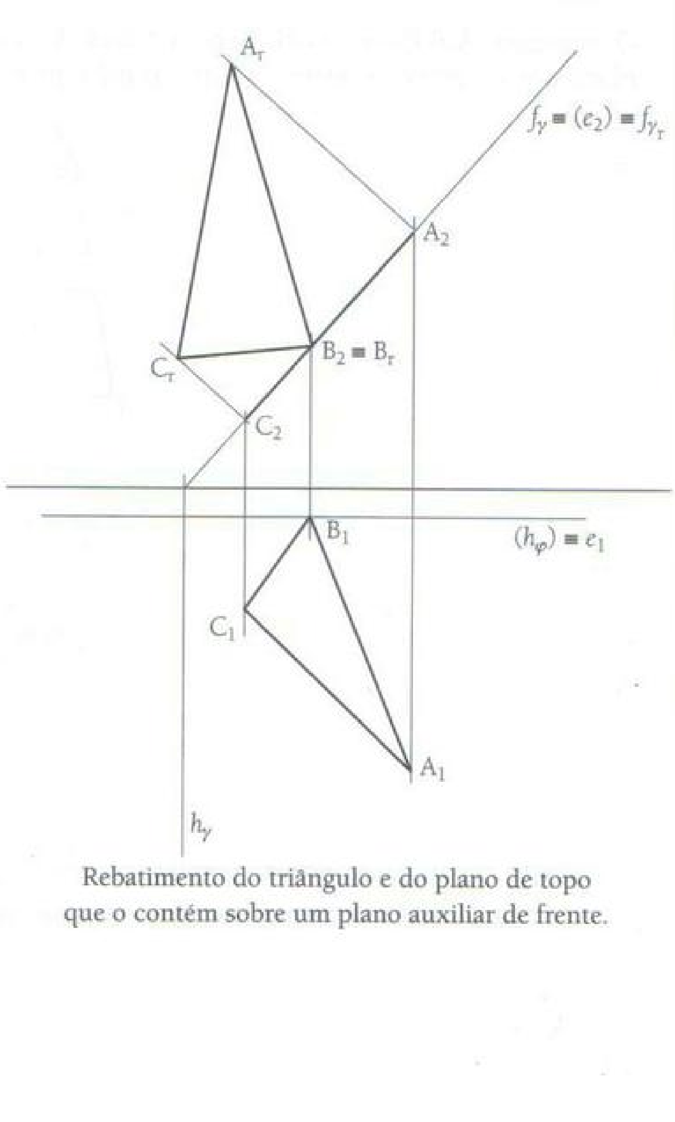


Determinemos a verdadeira grandeza do mesmo triângulo [ABC], contido no mesmo plano de topo, através do seu rebatimento sobre o plano de frente, φ.

1.° passo

Neste caso, a charneira do rebatimento é uma recta de frente, resultante da intersecção do plano de topo γ, com o plano de frente φ. O traço do plano auxiliar de frente, h_φ, coincide com a projecção horizontal da charneira, $h_\gamma \equiv e_1$, e a projecção frontal da charneira do rebatimento coincide com o traço frontal do plano, $f_\gamma \equiv e_2$.

Para simplificar a resolução em relação ao caso anterior, faremos com que o plano φ de frente contenha o vértice B do triângulo, e não só, transportando as distâncias dos pontos ao plano de frente para as perpendiculares a f_{γ_r}.



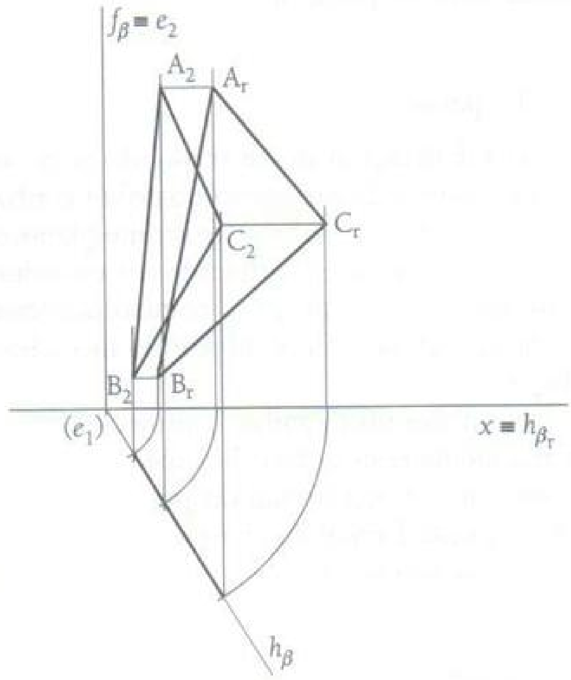
Rebatimento do triângulo e do plano de topo que o contém sobre um plano auxiliar de frente.

Tudo o que se efectuou com o plano de topo pode ser realizado com o plano vertical, usando o mesmo raciocínio. O plano vertical ou projectante horizontal pode ser rebatido sobre o plano frontal de projecção ou sobre o plano horizontal de projecção, ou ainda sobre planos paralelos aos planos de projecção.

Iremos dar apenas um exemplo para estabelecer uma comparação de modo a que se possa, a partir daí, resolver qualquer outro exercício ligado ao rebatimento do plano vertical.

Determinemos a verdadeira grandeza de um triângulo escaleno situado num plano vertical β, definido pelos seus traços, efectuando um rebatimento sobre o plano frontal de projecção.

A charneira do rebatimento, *e*, é uma linha do plano frontal de projecção e é perpendicular a v_0, ou seja, a charneira do rebatimento coincide com o traço frontal do plano vertical β, $f_\beta \equiv e_2$.



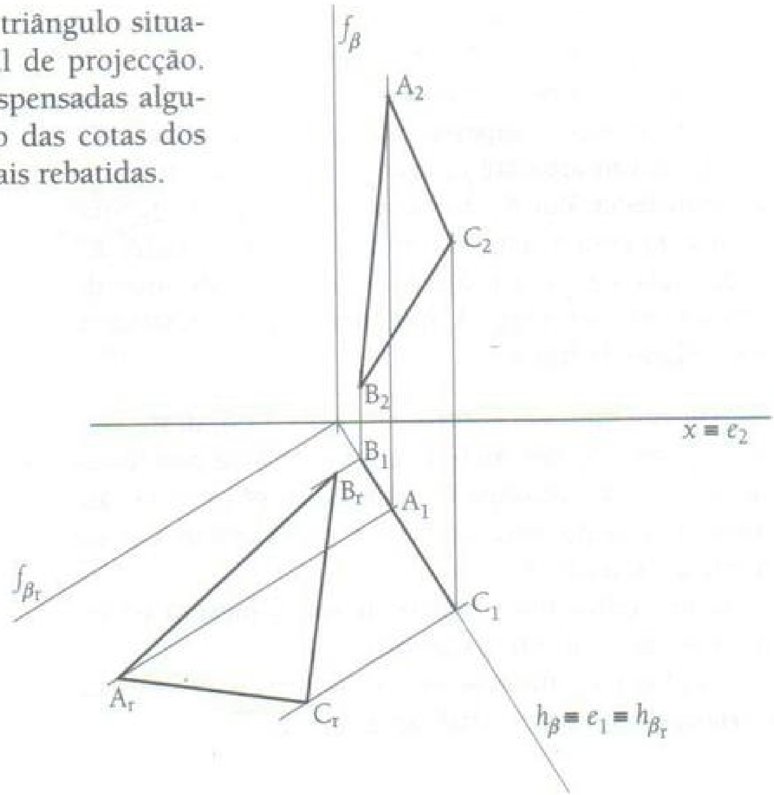
1.º passo

O plano rebatido tem o seu traço horizontal coincidente com o eixo *x*, $h_{\beta_r} \equiv x$. Os traços de um plano vertical rebatido são perpendiculares entre si, o que corresponde do seu relacionamento no espaço.

Comecemos por rebater o ponto A, fixando a ponta seca do compasso em (e_1), abrindo-o até A_1 e traçando um arco até h_{β_r}. Esse arco prolonga-se em semi-recta. Por A_2, traça-se uma paralela a h_{β_r}, cuja intersecção com a semi-recta origina A_r, o ponto procurado.

Faz-se o mesmo em relação aos pontos B e C, para obter os seus rebatimentos, designadamente B_r e C_r.

Veja-se como fica o rebatimento do mesmo triângulo situado no mesmo plano, sobre o plano horizontal de projecção. Pela mesma lógica do plano de topo, foram dispensadas algumas linhas auxiliares, passando-se à marcação das cotas dos vértices do triângulo, nas projectantes horizontais rebatidas.



Rebatimento de planos de perfil

No rebatimento do plano de perfil, a charneira é sempre uma recta perpendicular a um dos planos de projecção, quer se trate de rebatimento sobre os planos de projecção, quer se trate do rebatimento sobre planos paralelos aos planos de projecção, diferentemente do que acontece com os rebatimentos de planos de topo e verticais em que a charneira do rebatimento pode ser perpendicular ou oblíqua ao eixo x.

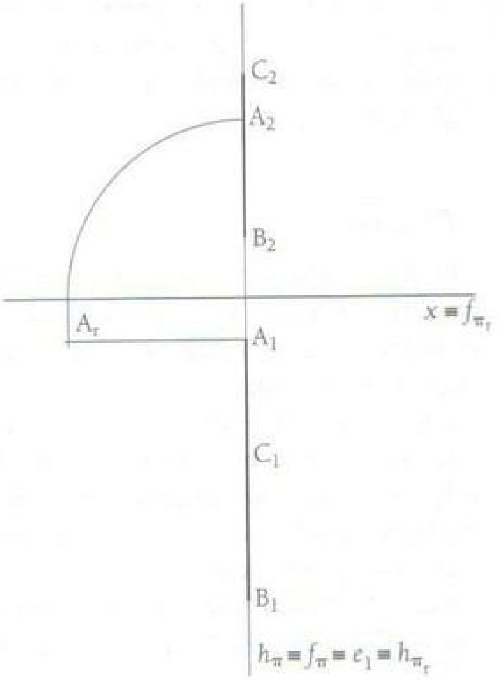
Vejamos um caso concreto de determinação da verdadeira grandeza de um triângulo [ABC] contido num plano de perfil, π.

1.º passo

O rebatimento desse triângulo pode ser efectuado sobre o plano frontal de projecção ou sobre o plano horizontal de projecção, neste caso sobre este último plano.

A charneira do rebatimento é o traço horizontal do plano, h_π, que gira sobre si próprio, coincidindo consigo próprio quando rebatido. O traço frontal rebatido fica coincidente com o eixo x, $h_{\pi_r} \equiv x$.

No plano do desenho, a projecção horizontal da charneira é coincidente com o traço horizontal do plano rebatido, que coincide com o traço frontal do plano, ou seja, $h_\pi \equiv f_\pi \equiv e_1 \equiv h_{\pi_r}$. A projecção frontal da charneira fica então reduzida a um ponto e situa-se no eixo x.



2.º passo

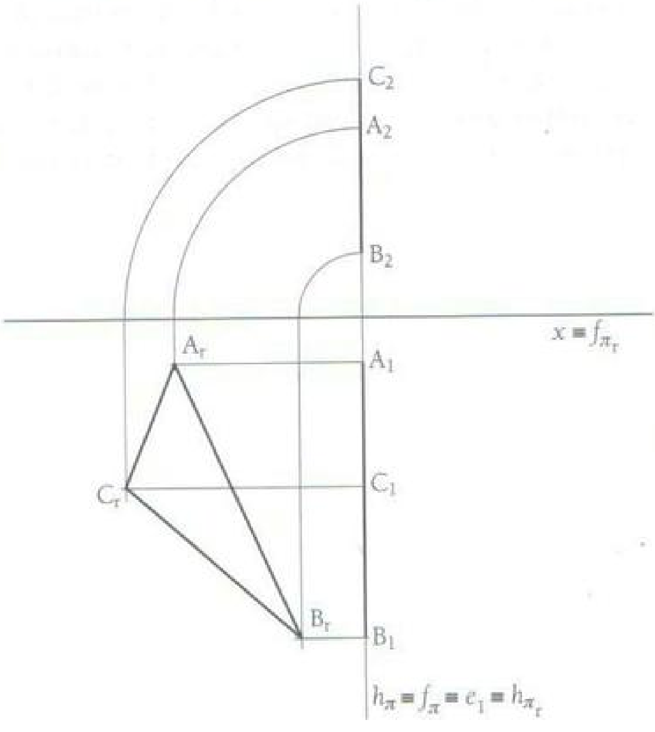
Os arcos de rebatimento que cada um dos pontos faz situam-se em planos de frente, perpendiculares à charneira e projectam-se em verdadeira grandeza sobre o plano frontal de projecção.

Comecemos pelo rebatimento do ponto A, fixando a ponta seca do compasso em (e_2). Com raio até A_2, traçamos um arco até f_{π_r} que se prolonga em forma de semi-recta. Por A_1, traça-se uma paralela à f_{π_r} que intersecta com a semi-recta no ponto procurado, A_r. A paralela à f_{π_r} é a projecção horizontal do arco de rebatimento do ponto A, que, como se disse, situa-se num plano de frente.

Novamente com centro em (e_2) e raio, desta vez, até C_2, traça-se um arco de circunferência que intersecta f_{π_r} e se prolonga em forma de semi-recta, até intersectar a paralela ao eixo x que contém C_1, no ponto procurado, C_r.

O procedimento é precisamente o mesmo relativamente ao ponto B, para obter o B_r.

Finalmente, unem-se os três pontos para se obter o triângulo na sua verdadeira grandeza.



Rebatimento de plano de perfil sobre ν_0.

Rebatimento da recta de perfil e projecções de pontos nela contidos

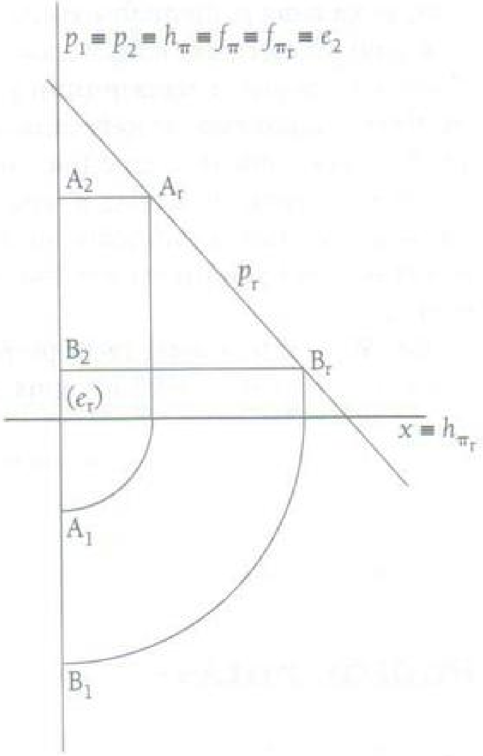
Como sabe, a recta de perfil tem as suas projecções coincidentes entre si e coincidentes com os traços do plano de perfil que a contém, numa recta que é perpendicular ao eixo x. Essa posição, no plano do desenho, não é favorável a uma percepção dos ângulos que a recta de perfil faz com os planos de projecção e a determinação das projecções dos pontos nela contidos.

Para ultrapassar essa limitação, pode-se recorrer ao processo de rebatimento do plano de perfil que contém a recta.

Dada uma recta de perfil p, definida pelos pontos A e B, efectuemos o seu rebatimento sobre o plano frontal de projecção. A charneira do rebatimento coincide com o traço frontal do plano. A projecção horizontal da charneira, (e_1), é um ponto situado no eixo x. Com a ponta seca do compasso em (e_1) e uma abertura até A_1, traça-se um arco até ao eixo x e prolonga-se em forma de semi-recta.

Por A_2 traça-se uma paralela ao eixo x cuja intersecção com a semi-recta que acabámos de traçar origina A_r, o ponto A rebatido.

Faz-se o mesmo em relação ao ponto B, para obter B_r. Unindo A_r com B_r, obtém-se p_r, a recta p rebatida.



Determinemos as projecções num ponto K, dessa recta de perfil, com uma dada cota.

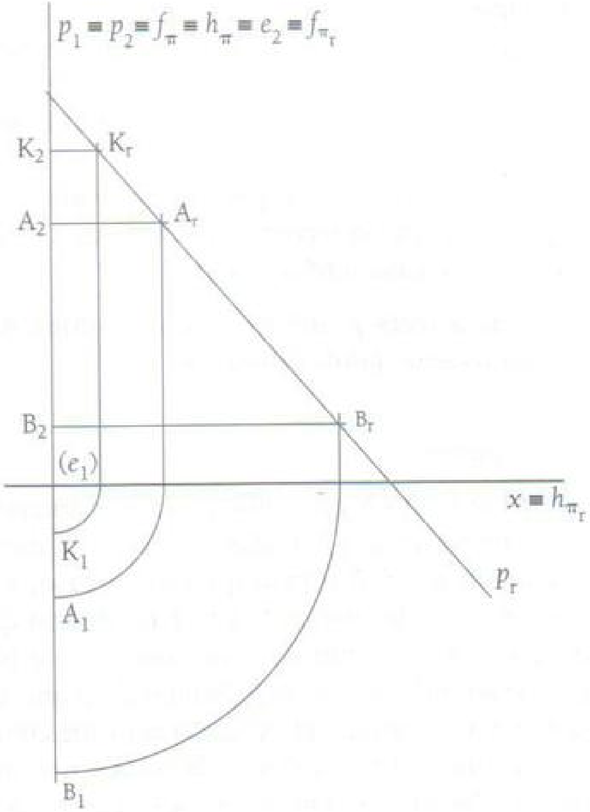
1.º passo

Marca-se para cima do eixo x a cota de K, que se designa por K_2.

Uma vez rebatida a recta p, por K_2, traça-se uma paralela ao eixo x, cuja intersecção com p_r, origina K_r, o ponto K rebatido.

A partir do ponto rebatido podem-se determinar as suas projecções efectuando a **inversão do rebatimento** ou **contra-rebatimento**, que consiste em efectuar o contrário do rebatimento.

Assim, a partir de K_r, trata-se uma perpendicular ao eixo x que se prolonga em arco de centro (e_1), até intersectar as projecções da recta em K_1, a projecção procurada.

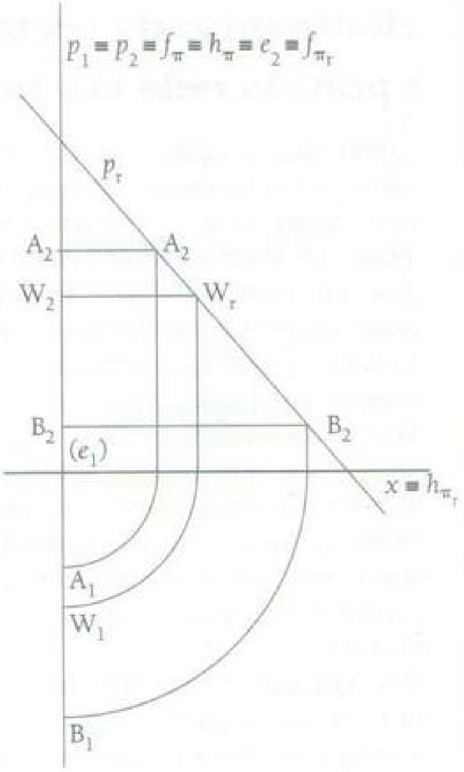


Se tivesse sido dado o afastamento do ponto K, o raciocínio seria o mesmo: efectuar o rebatimento da recta, encontrar o K rebatido e seguidamente efectuar o contra-rebatimento. Para não confundirmos os pontos, determinemos as projecções do ponto W, contido na recta **p**, do qual se conhece apenas o afastamento.

Como se efectuou para o caso anterior, em primeiro lugar é necessário conter a recta **p** num plano de perfil e seguidamente escolher a charneira do rebatimento. Vamos manter a charneira anterior, que coincide com o traço frontal do plano auxiliar.

Uma vez rebatida a recta **p**, com centro em (e_1) e raio até $\mathbf{W_1}$, traça-se o arco de rebatimento até ao eixo *x* e prolonga-se-lhe sob forma de uma semi-recta até intersectar p_r, em W_r, o ponto W rebatido.

Por W_r, traça-se uma recta perpendicular aos traços do plano auxiliar, π, cuja intersecção origina o ponto procurado, a projecção frontal de W, W_2.



Pontos notáveis de uma recta de perfil

Os pontos notáveis de uma recta são, como sabe, os seus traços sobre os planos ortogonais de projecção e sobre os planos bissectores.

A partir das projecções de uma recta de perfil não é possível determinar directamente os seus pontos notáveis, pois as suas projecções ficam reduzidas a uma linha perpendicular ao eixo *x*.

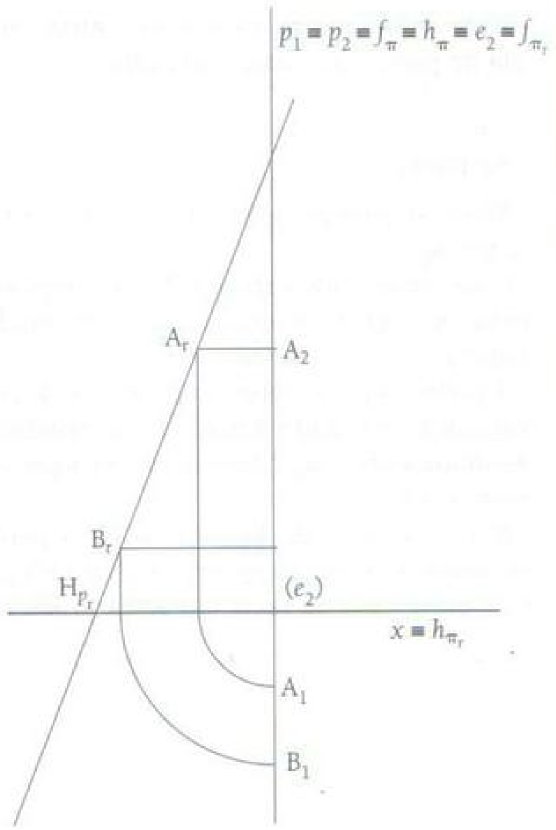
Para determinar os pontos notáveis de uma recta de perfil é necessário recorrer aos processos geométricos auxiliares, neste caso o rebatimento.

Dada a recta *p*, definida pelos pontos A e B, determinemos os seus pontos notáveis.

1.º passo

Em primeiro lugar, como nos casos anteriores, é necessário conter a recta num plano auxiliar de perfil e escolher a charneira do rebatimento que, neste caso, coincide com o traço frontal do plano. Assim, é necessário que haja clareza de que o rebatimento será efectuado para o plano frontal de projecção, pelo que o traço frontal do plano gira por si próprio e o traço horizontal rebatido coincide com o eixo *x*.

Efectua-se o rebatimento da recta e procuram-se os seus traços rebatidos. Comecemos por determinar os traços nos planos ortogonais de projecção.



O traço frontal de um plano é o lugar geométrico em que todos os pontos desse plano têm afastamento nulo. Assim, porque a recta p pertence ao plano π, o seu ponto de afastamento nulo situa-se sobre o traço frontal do plano. Portanto, o traço frontal rebatido da recta p, F_{p_r} situa-se no ponto de intersecção do traço frontal do plano π rebatido, f_{π_r}, com a recta p rebatida, p_r.

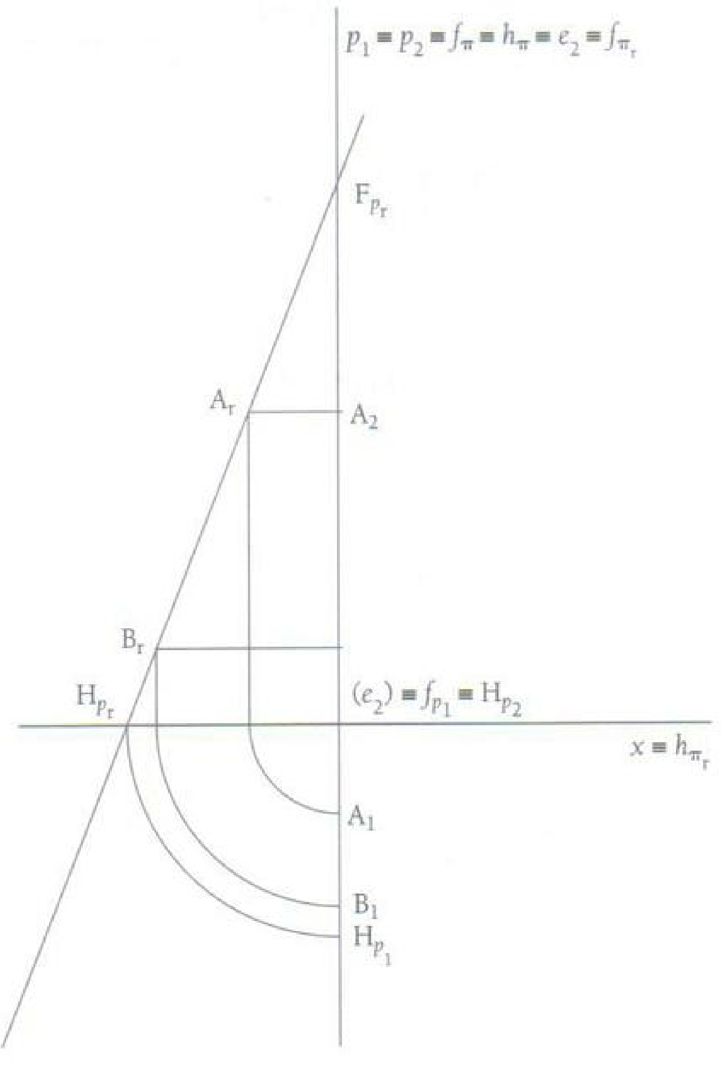
O traço horizontal de um plano é o lugar geométrico em que todos os seus pontos têm cota nula, pelo que uma recta que lhe pertence tem o seu traço horizontal sobre o traço horizontal do plano. O traço horizontal rebatido da recta p, H_{p_r} situa-se no ponto de intersecção da recta p rebatida, com o traço horizontal rebatido do plano π, f_{π_r}. Recorde que uma recta pertence a um plano quando esta tem os seus traços sobre os traços homónimos do plano.

2.º passo

Passa-se então à fase de efectuar o contra-rebatimento dos traços horizontal e frontal, para se obter as suas projecções nos planos ortogonais de projecção.

O traço frontal da recta p situa-se sobre o traço frontal do plano π, traço esse que gira sobre si próprio; logo, o traço frontal rebatido da recta coincide com o próprio traço e com a sua projecção frontal, ou seja, $F_{p_r} \equiv F_p \equiv F_{p_2}$. Sendo um ponto de afastamento nulo, a sua projecção horizontal, F_{p_1} situa-se no eixo x.

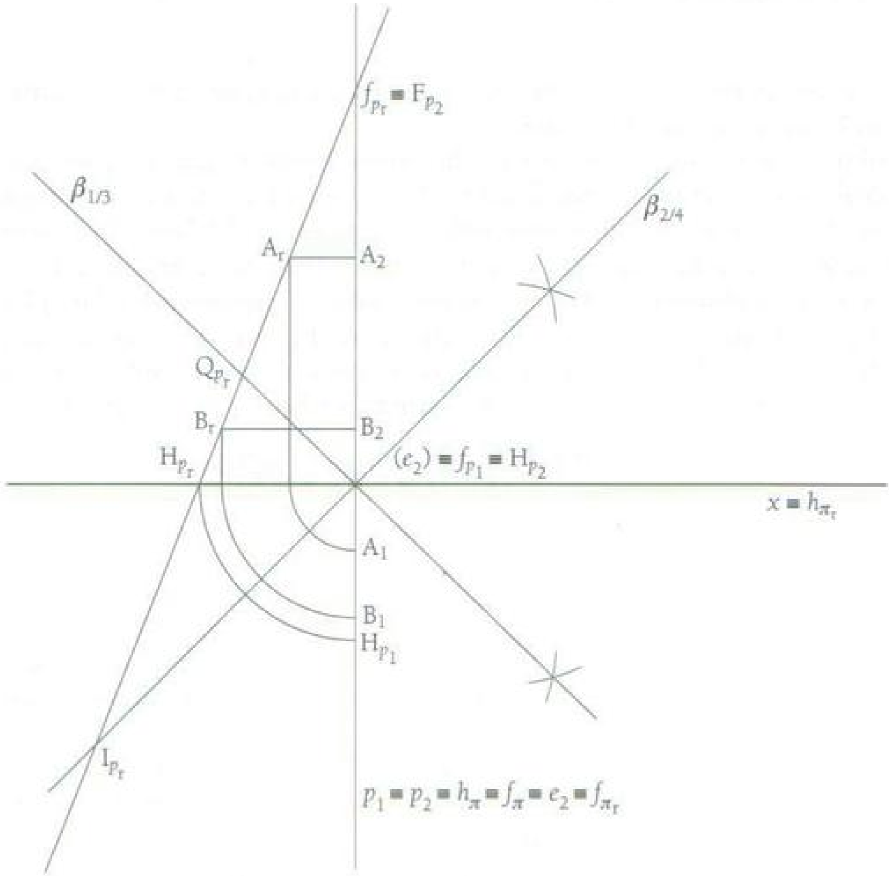
O traço horizontal rebatido da recta p, H_{p_r}, situa-se sobre o traço horizontal do plano rebatido, pelo que para determinar a projecção horizontal, H_{p_1}, que se situa sobre o traço horizontal do plano π, é necessário desenhar o seu arco de rebatimento, no sentido contrário, de h_{π_r} para h_π. A projecção frontal de H_p, H_{p_2} porque se trata de um ponto de cota nula, situa-se no eixo x e coincide com as projecção horizontal do traço frontal da recta e a projecção horizontal da charneira do rebatimento, ou seja, $H_{p_2} \equiv F_{p_1} \equiv (e_1)$.



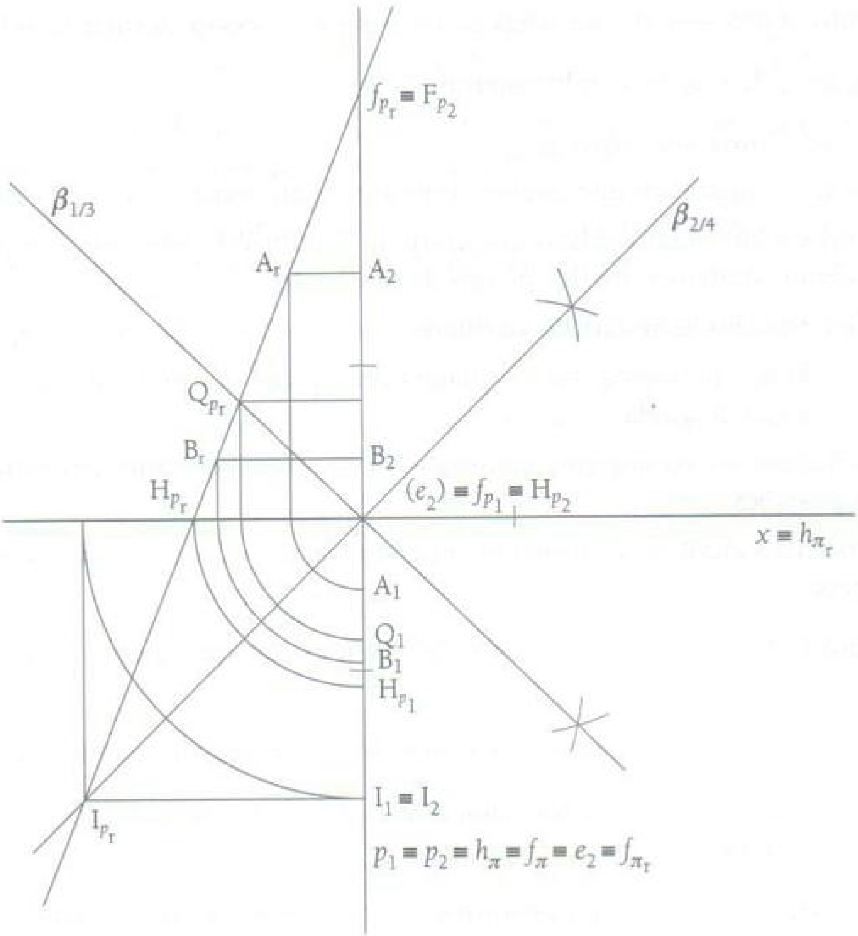
3.º passo

Os traços nos planos bissectores, nomeadamente Q_p, no $\beta_{1/3}$ e I_p, no $\beta_{2/4}$, encontram-se nos pontos de intersecção da recta com os respectivos planos bissectores. Traçam-se duas rectas, ***i*** e ***i'***, que bissectam os quatro ângulos formados pelos traços do plano rebatido, nomeadamente, h_{π_r} e f_{π_r}.

Considerando que os pontos A e B se situam no 1.º diedro, a recta i_r passa pelos quadrantes ímpares pelo que, no seu cruzamento com p_r, obtém-se Q_{p_r}, traço em $\beta_{1/3}$, da recta ***p***. O traço em $\beta_{2/4}$ situa-se no ponto de intersecção da recta ***p*** rebatida, p_r, com i'_r.



Passa-se a efectuar o contra-rebatimento dos pontos Q_{p_r} e I_{p_r}, para obter as suas projecções nos planos de projecção dos dois pontos, nomeadamente Q_{p_2}, Q_{p_1}, I_{p_2} e I_{p_1}.



Traços de recta de perfil.

Exercícios propostos

1. Quais são os processos geométricos auxiliares que conhece?
2. Em que é que consiste a mudança de planos?
3. Qual é a diferença entre o processo de mudança de planos e o processo auxiliar de rebatimento?
4. Em que é que a rotação se distingue do rebatimento.
5. Assinale com um ✓ as afirmações correctas.
   A. A mudança de planos consiste em movimentar um objecto até tomar a posição conveniente.
   B. O rebatimento consiste em rodar o plano que contém um objecto sobre um dos planos de projecção ou sobre um plano paralelo a um dos planos de projecção.
   C. A rotação é um dos métodos geométricos auxiliares.
   D. No processo de mudança de planos, são os planos ortogonais de projecção que se movimentam, até tomarem uma posição desejada.
   E. No processo de rebatimento, os objectos mantêm-se fixos e são os planos ortogonais de projecção que tomam novas posições.
   F. Os processos geométricos auxiliares consistem em manter fixos os planos ortogonais de projecção e os objectos no espaço.
6. Dada uma recta de nível, de 2 cm de cota, fazendo 30° com φ_0, de abertura para a esquerda, transforme-a em recta de topo.
7. Considere a recta de nível do exercício anterior e transforme-a em recta horizontal de frente.
8.* Considere uma recta oblíqua, definida pelos pontos A (0; 0,5; 1,5) e B (3,5; 1; 3). Transforme essa recta em horizontal de frente.
9. Considere a recta do exercício anterior e transforme-a, primeiro em recta de frente e depois em recta projectante horizontal.
10. É dada uma recta de frente com 2,5 cm de afastamento, que faz com o plano horizontal de projecção um ângulo 40°, de abertura para a direita. Transforme a recta de frente em recta vertical ou projectante horizontal.
11. Com o recurso ao processo de mudança de planos, determine a verdadeira grandeza do segmento de recta [AB], oblíquo. A (-5; 2; 2,5) e B (0,5; 5, 3,5).
12. Dado um plano projectante horizontal que faz um diedro de 30° com o plano frontal de projecção, de abertura para a direita, determine a verdadeira grandeza de um segmento de recta [AB], nele contido. A (1; 4) e B (2; 0).
13. Através do rebatimento, determine a verdadeira grandeza de um segmento de perfil, definido pelos pontos A (1; 6) e B (3; 1).
14. Com o recurso ao rebatimento, determine a verdadeira grandeza de um segmento de recta de perfil; definido pelos pontos, E (6,5; 2) e F (1,5).
15. Usando o processo de mudança de planos, determine a verdadeira grandeza do triângulo [ABC], situado num plano de topo, que faz com o plano horizontal de projecção um diedro de 45°, de abertura para a direita. As coordenadas dos pontos que definem o triângulo são: A (7; 2,5), B (0,5; 4) e C (4; 1,5).

Exercícios propostos

16. Mudando a posição do plano frontal de projecção, determine a verdadeira grandeza do triângulo [ABC], considerando os seguintes dados:

    O triângulo está contido num plano projectante horizontal, que faz com o plano frontal de projecção um diedro de 30°, de abertura para a direita.

    As coordenadas dos vértices do triângulo são **A** (2,5; 5), **B** (1; 3) e **C** (3,5; 0).

17.* Determine as projecções de um ponto **K** de afastamento igual a 4 cm, contido numa recta de perfil π. A recta de perfil é definida pelos pontos **C** (6; 2) e **D** (3; 2,5).

18. Dado um ponto **P** (3; 6), desenhe as suas projecções. Desenhe as projecções e escreva as coordenadas de um outro ponto R, simétrico ao ponto **P** em relação ao eixo *x*.

19. Determine os traços nos planos ortogonais de projecções de uma recta de perfil definida pelos pontos E (0,5; 5,5) e F (4,5; 1).

20. Determine os pontos notáveis de uma recta de perfil que contém o ponto **A** (2; 3) e que faz com o plano frontal de projecção um ângulo de 30°.

Representação diédrica de figuras planas

Figuras planas são aquelas que ocupam apenas duas dimensões, isto é, não têm altura. No nosso estudo de figuras planas, iremos tratar de polígonos e de círculos.

A projecção de figuras planas tem como base a projecção de pontos e de segmentos de rectas, pois um polígono não é mais do que um conjunto de segmentos de rectas com pontos comuns, enquanto o círculo é constituído por uma circunferência, que é também um conjunto de pontos, e o seu centro. Em ambas as figuras existe a respectiva superfície, que não é determinante para definir as projecções.

Quando uma figura plana está assente num plano de projecção ou num plano paralelo ao plano de projecção, a sua projecção nesse plano é igual a si própria, ou seja, a sua projecção nesse plano apresenta-se em *verdadeira grandeza*.

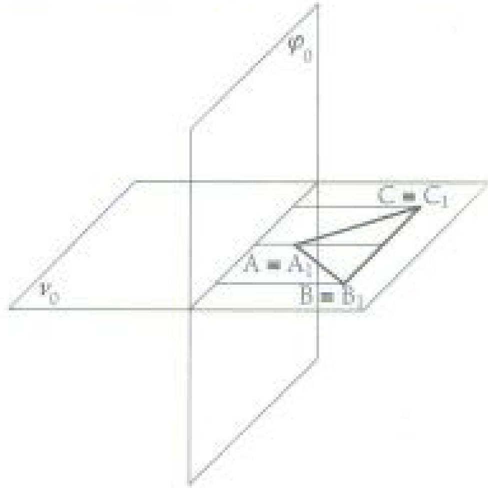
Para uma melhor compreensão do que se acabou de dizer, vamos seguidamente passar à representação diédrica de diferentes figuras planas, assentes em diferentes planos.

Polígonos assentes no plano horizontal de projecção

De acordo com os conhecimentos adquiridos nos capítulos anteriores, toda a figura assente em ν_0 tem cota igual a zero. Isto significa que todas as projecções frontais de qualquer figura nessas condições encontram-se no eixo *x* ou *linha de terra*.

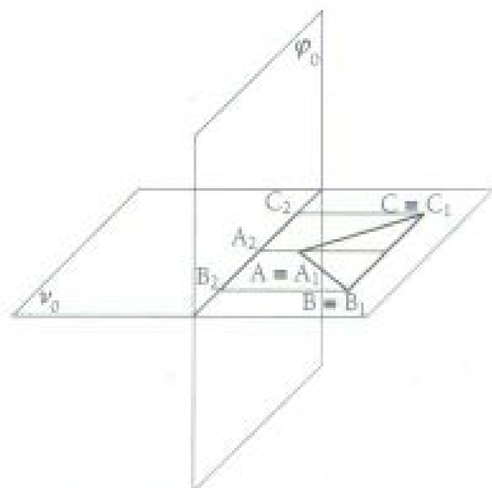
A projecção horizontal de qualquer figura assente no plano horizontal de projecção, é a sua verdadeira grandeza, ou seja, apresenta as proporções iguais às do objecto real sem sofrer nenhuma deformação, isto é, é igual a si própria.

Observemos agora no espaço o que acabámos de dizer. A projecção horizontal do triângulo [ABC] coincide, como podemos ver, com o próprio triângulo.



Projeccão frontal do triângulo [ABC].

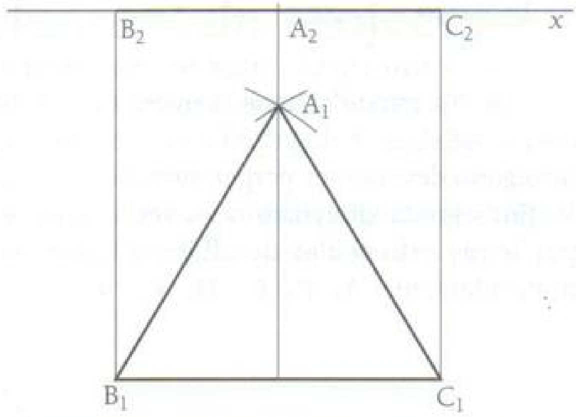
A projecção frontal do triângulo [ABC] situa-se no eixo *x*.



Projecção horizontal do triângulo [ABC].

Em seguida apresentamos no plano do desenho as duas projecções do triângulo que acabámos de ver.

Na resolução dos exercícios não designaremos os pontos no espaço, mas sim apenas as suas projecções.



Projecções do triângulo no plano do desenho.

Em seguida, representemos pelas suas projecções um hexágono regular assente no plano horizontal de projecção.

O hexágono está inscrito numa circunferência de raio igual a 2,5 cm. O afastamento do centro da circunferência circunscrita ao hexágono é de 3 cm e dois dos lados da figura são perpendiculares ao plano frontal de projecção.

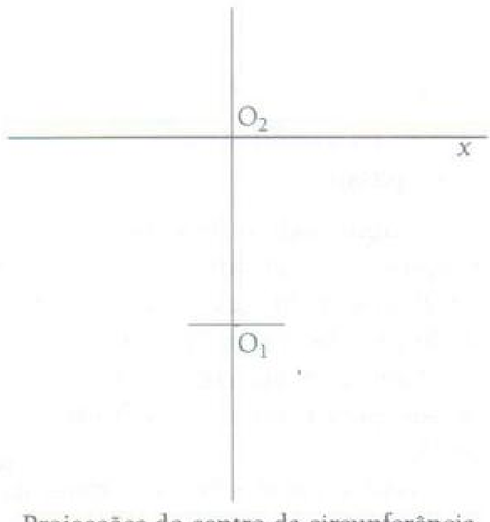
Para iniciarmos a resolução deste exercício devemos recordar-nos do que é um hexágono regular. Como é do seu conhecimento, o hexágono regular é uma figura plana constituída por seis lados iguais e seis ângulos internos também iguais.

Conhecendo a figura que se pretende projectar, seguem-se os passos da sua representação no plano do desenho.

1.º passo

Como em qualquer representação, através de projecções no plano do desenho começa-se por traçar o eixo x e uma linha de referência ou linha de chamada.

Sobre a linha de chamada marca-se o afastamento do centro igual a 3 cm e determina-se a sua projecção horizontal, O_1. Seguidamente, traça-se a sua projecção frontal O_2 que, naturalmente, estará sobre o eixo x e na mesma linha de chamada que O_1.

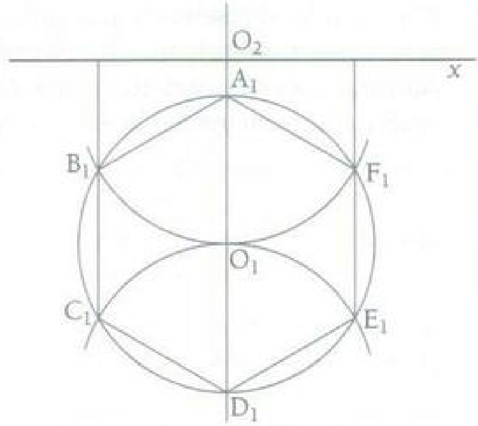


Projecções do centro da circunferência circunscrita ao hexágono.

2.º passo

Com centro em O_1, traça-se uma circunferência de raio igual a 2,5 cm. Na circunferência, constrói-se um hexágono, cuja posição deverá satisfazer o descrito no enunciado, ou seja, dois dos lados do hexágono deverão ser perpendiculares ao eixo x.

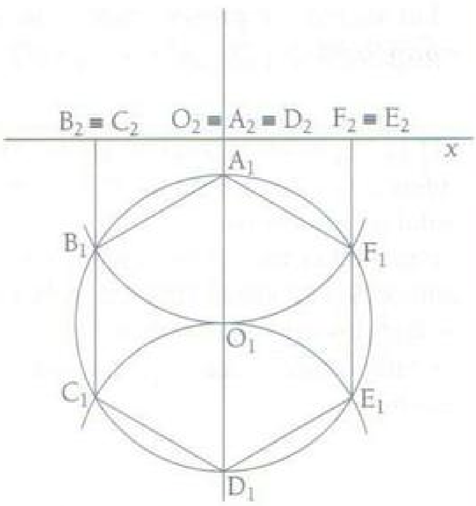
Em seguida, designam-se os vértices do hexágono, como é óbvio, por letras maiúsculas do alfabeto latino, seguidas pelo índice 1, nomeadamente, A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 e F_1.



Projecção horizontal do hexágono.

3.º passo

Fazendo passar pelas projecções horizontais do pentágono linhas perpendiculares ao eixo x, ou seja, linhas de referência, na sua intersecção com o referido eixo x, surgem as projecções frontais dos vértices da figura pretendida, A_2, B_2, C_2, D_2, E_2 e F_2.



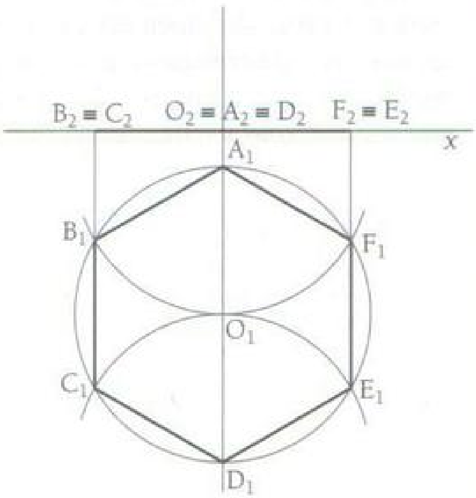
Projecções frontais e horizontais do hexágono.

4.º passo

Até aqui, todo o desenho foi feito a traço fino, exceptuando as designações, que foram representadas a traço médio. A partir desta parte do processo, vamos distinguir os traços do desenho de modo a facilitar a sua leitura.

Assim, as projecções do hexágono ficam representadas a traço grosso, pois trata-se da solução do nosso exercício, ou seja, o pedido.

O eixo x, como sempre, representa-se a traço médio e as linhas de chamada também são sempre representadas a traço fino, portanto, não é necessário voltar a passar o lápis sobre o traço fino.



Distinção, no traçado do desenho, da linha de contorno do polígono.

Círculos assentes no plano horizontal de projecção

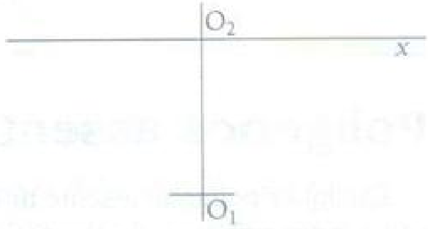
Dado um círculo, contido em ν_0, cujo raio mede 2 cm e cujo afastamento do centro O é igual a 2,5 cm, determine as suas projecções.

A resolução deste exercício requer o seguimento de alguns passos, sendo o primeiro aplicável em qualquer exercício em que se pretende representar algo pelas suas projecções no plano do desenho.

1.º passo

Representar a linha de terra ou eixo *x*, e a respectiva linha de chamada, que são perpendiculares entre si. De referir que a primeira linha de chamada que se traça deverá localizar-se mais ou menos ao meio do eixo *x*.

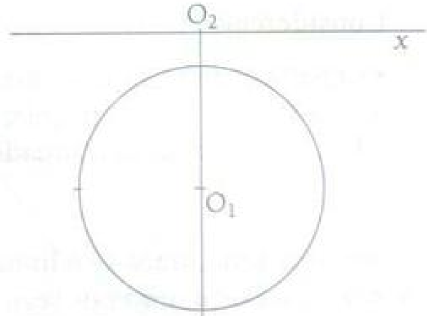
Determinar a projecção horizontal do ponto O, O_1, centro do círculo, a 2,5 cm abaixo do eixo *x*, sobre a linha de referência e a respectiva projecção frontal, O_2, que deverá localizar-se no ponto de intersecção da linha de referência com o eixo *x*. *Recorde-se que as projecções de um ponto encontram-se na mesma linha de chamada.*



Projecções do ponto O.

2.º passo

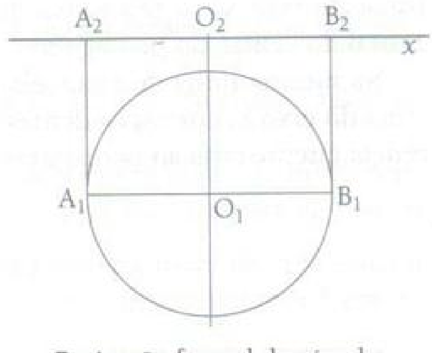
Fixar a ponta seca do compasso em O_1 e, com uma abertura igual a 4,5 cm, que é a medida do raio do círculo, traçar uma circunferência.



Projecção horizontal do círculo.

3.º passo

Traçar a projecção horizontal do diâmetro do círculo, paralelo ao eixo *x*. Pelos extremos A_1 e B_1 da projecção horizontal do diâmetro, traçam-se linhas de referência que, ao intersectarem o eixo *x*, determinam os extremos da projecção frontal do círculo A_2, e B_2.



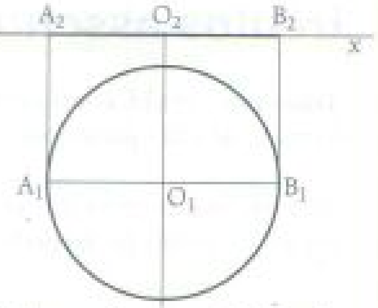
Projecção frontal do círculo.

4.º passo

Distinguir os traços do desenho, de modo a que a sua leitura seja clara.

Assim, o eixo *x* ou linha de terra fica a traço médio, bem como todas as designações do desenho. As projecções do círculo representam-se a traço grosso para poderem destacar-se, pois constituem a solução do exercício.

De ora em diante, a explicação deste último passo será omitida, pois qualquer desenho será considerado concluído depois da utilização devida de cada tipo de traço.



Distinção dos traços do desenho.

Polígonos assentes em planos de nível

Qualquer polígono assente num plano de nível tem a sua projecção horizontal em verdadeira grandeza, isto é, a sua projecção horizontal é igual ao próprio polígono.

A projecção frontal fica reduzida a um segmento de recta paralelo ao eixo x.

Neste estudo, há a necessidade de conhecer as posições que uma recta ocupa no espaço, pois alguns dados de exercícios farão referência a segmentos de rectas que constituem lados dos polígonos.

Por outro lado, é necessário rever as construções geométricas de polígonos, quer a partir do lado, quer a partir da circunferência nele circunscrita.

Consideremos o seguinte pentágono:

- O polígono está assente num plano de nível de cota igual a 2 cm.
- Está inscrito numa circunferência cujo raio mede 2,5 cm e o seu centro tem afastamento igual a 3 cm.
- Um dos seus lados, o situado mais à esquerda, é de topo.

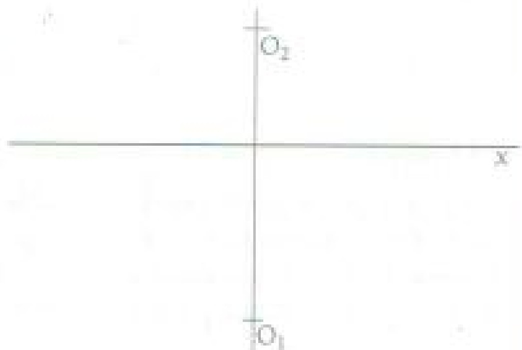
Antes de tudo, traça-se a linha de terra, ou eixo, x, e a respectiva linha de chamada ou de referência e, em seguida, executam-se os seguintes passos:

1.º passo

Antes de mais, ler atentamente todo o enunciado do exercício, de modo a visualizar a figura no espaço.

Seguir os dados, nomeadamente, a marcação de 3 cm para baixo do eixo x e a respectiva designação O_1, projecção horizontal do centro do pentágono.

Na mesma linha de chamada de O_1, marcam-se 2 cm para cima do eixo x, correspondentes à cota do centro da circunferência circunscrita ao pentágono, e designa-se O_2.

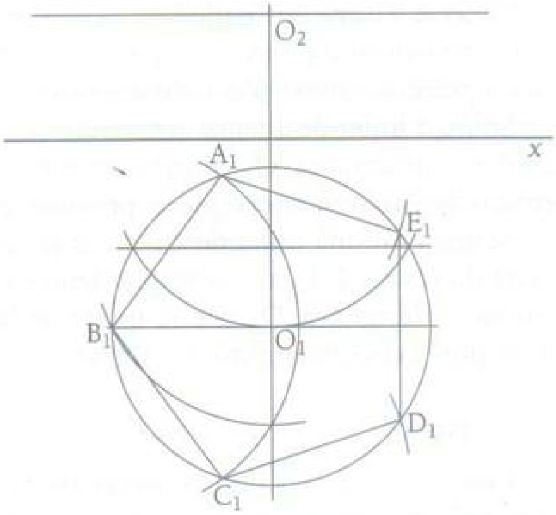


Projecções do centro do pentágono.

2.º passo

Abrir em 2 cm o compasso, medida do raio da circunferência circunscrita ao polígono que se pretende projectar. Sem alterar a abertura do compasso, fixar a ponta seca do mesmo em O_1 e traçar uma circunferência.

Efectuar a construção do pentágono respeitando a posição referida no enunciado deste exercício. Tratando-se da projecção horizontal da figura, as designações deverão ser seguidas pelo número 1, ficando A_1, B_1, C_1, D_1 e E_1. Unem-se os cinco vértices e obtém-se a projecção horizontal do pentágono desejado.



Projecção horizontal do pentágono.

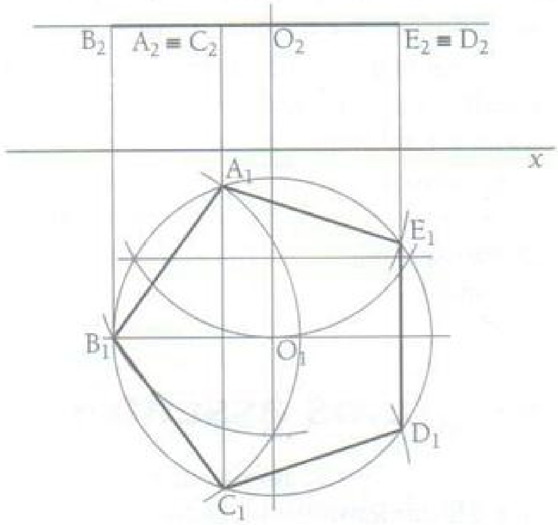
3.º passo

Traçar linhas de referência que passam pelas projecções horizontais dos cinco pontos e encontrar as respectivas projecções frontais a 2 cm de cota.

Recorde-se que as projecções de um ponto encontram-se na mesma linha de chamada. Assim, A_2 estará na mesma linha de chamada de A_1, B_2 na mesma linha de referência de B_1, e assim sucessivamente; e em seguida unem-se as projecções frontais dos pontos para dar origem à projecção frontal do pentágono.

Uma vez determinadas as duas projecções do polígono, para concluir o desenho distinguem-se os traços, ou seja, define-se a traço grosso a sua linha de contorno.

A partir do exercício que acabou de resolver e de todo o conhecimento já adquirido, poderá representar vários outros polígonos contidos em planos de nível.



Solução do exercício, com definição do contorno do polígono.

Círculos assentes em planos de nível

A projecção horizontal de qualquer figura plana contida num plano de nível apresenta-se na sua verdadeira grandeza.

Portanto, toda a projecção horizontal de um círculo contido em planos de nível é um círculo igual ao objecto real.

A diferença de projecções de um círculo contido em v_0, e um círculo contido num plano de nível, reside apenas no facto de a projecção frontal de círculos contidos neste último plano não se situar no eixo x.

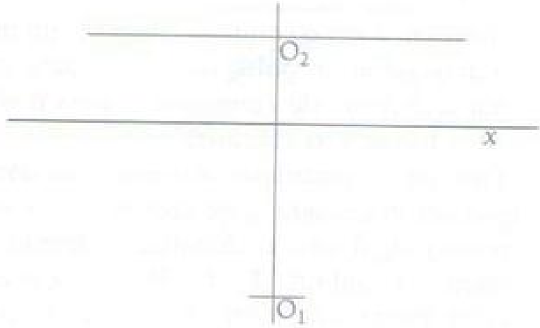
Vejamos em seguida um caso concreto: dado um círculo situado num plano de nível de cota igual a 1,5 cm e raio igual a 2 cm, determine as suas projecções, considerando que o seu centro tem 3 cm de afastamento.

1.º passo

Fazer a leitura dos dados do exercício para, em primeiro lugar, visualizar a figura no espaço e, seguidamente, iniciar a sua representação no plano do desenho.

Sobre a linha de chamada marcam-se 3 cm para baixo do eixo x e designa-se O_1, projecção horizontal do ponto O, centro da circunferência que se pretende projectar.

Sobre a mesma linha de chamada de O_1, marcam-se para cima do eixo x 1,5 cm, correspondentes à cota do centro do círculo e designa-se O_2. Deste modo, já foram efectuadas as duas projecções do centro do círculo.



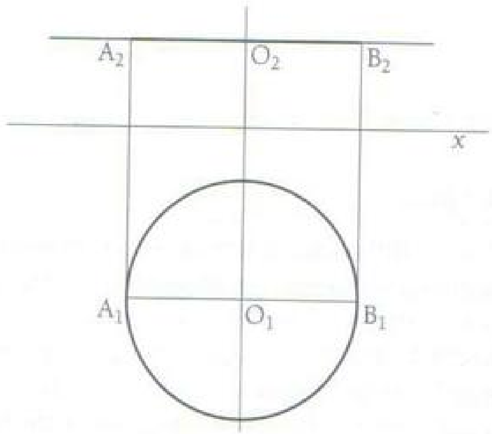
Projecções do centro do círculo.

2.º passo

Fixar a ponta seca do compasso em O_1, abri-lo 2 cm correspondentes ao raio do círculo e traçar a circunferência. Assim, fica determinada a projecção horizontal do círculo.

Determinar a projecção frontal do círculo, através da marcação de um diâmetro fronto-horizontal, cujos extremos são os pontos A e B, obtendo-se, deste modo, A_2 e B_2.

As regras de uma boa representação gráfica exigem que o desenho seja finalizado com a distinção dos seus traçados. Assim, relembramos que o contorno do círculo representa-se a traço grosso, o eixo x representa-se a traço médio e as restantes linhas a traço fino, exceptuando as designações, que deverão ser marcadas com o mesmo traço do eixo x, ou seja, traço médio.



Projecções do círculo.

Polígonos assentes no plano frontal de projecção

É do seu conhecimento que qualquer elemento geométrico contido no plano frontal de projecção tem o seu afastamento nulo. Todos os elementos geométricos que tenham afastamento igual a zero têm a sua projecção horizontal sobre o eixo x.

A projecção frontal de qualquer figura geométrica pertencente a v_0 coincide consigo própria; sendo assim, pode-se afirmar que *a projecção frontal de qualquer figura geométrica contida em φ_0 apresenta-se na sua verdadeira grandeza.*

O mesmo já não se pode dizer em relação à projecção horizontal de figuras planas contidas no plano frontal de projecção, porque fica reduzida a um segmento de recta.

No entanto, é necessário que nos recordemos de que as duas projecções ajudam a compreender melhor de que objecto se trata, pois, neste caso concreto, a projecção horizontal é que clarifica que se trata de uma figura plana, isto é, que o objecto não tem a terceira dimensão.

Só através de recursos gráficos se pode comunicar melhor quando se trata de abordagem de conteúdos desta área de conhecimentos. Portanto, passemos para um caso concreto.

Representemos pelas suas projecções um triângulo isósceles, considerando os seguintes dados:

O triângulo pertence ao plano frontal de projecção.

A sua base [AB] é paralela ao plano horizontal de projecção, mede 4 cm e dista do eixo x também 4 cm.

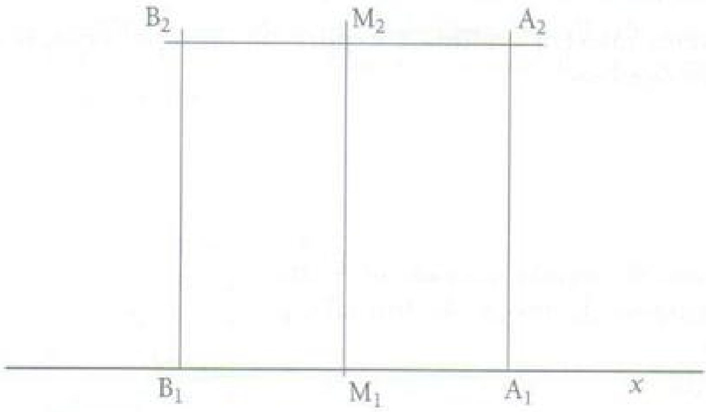
O vértice do triângulo, o ponto C, encontra-se no lugar geométrico onde todos os pontos têm cota nula.

1.º passo

Marcam-se 4 cm na linha de chamada, para cima do eixo x, e designa-se a projecção desse ponto, M_2. Em seguida, traça-se uma linha paralela ao eixo x.

Considerando que a base do triângulo mede 4 cm, marcam-se para a esquerda e para a direita de M_2, sobre a linha paralela ao eixo x, a metade da medida da base, ou seja, 2 cm, originando A_2 e B_2, projecções frontais dos extremos da base do triângulo.

Por A_2 e B_2 passam-se linhas de chamada que ao intersectarem o eixo x originam as suas respectivas projecções horizontais, A_1 e B_1.



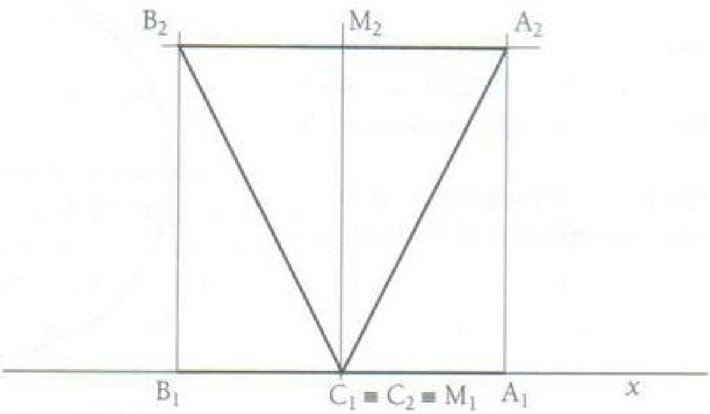
Determinação das projecções da base do triângulo.

2.º passo

Para completar as projecções do triângulo falta um ponto, que é neste caso o ponto C, o vértice do triângulo. De acordo com os dados deste exercício, o ponto C pertence, simultaneamente, ao plano frontal de projecção e ao plano horizontal de projecção, estando contido no eixo x.

O ponto C tem cota e afastamento iguais a zero; logo, as suas projecções são coincidentes entre si e são coincidentes com o próprio ponto.

Estando projectados os pontos suficientes para definir o triângulo descrito no enunciado do exercício, resta apenas uni-los e usar adequadamente cada tipo de traço, para considerar o exercício concluído.



Projecções ortogonais do triângulo isósceles.

Círculos assentes no plano frontal de projecção

Os círculos do plano frontal de projecção coincidem com a sua projecção frontal; logo, encontram-se nessa projecção na sua verdadeira grandeza.

Representemos pelas suas projecções um círculo assente no plano frontal de projecção.

O círculo tem o seu centro com 4 cm de cota e o diâmetro mede 6 cm.

Inicialmente, faz-se a leitura de todo o enunciado do exercício, como em qualquer outro. Seguidamente, prepara-se o espaço bidimensional para a sua resolução, nomeadamente o traçado do eixo x e da primeira linha de referência. Depois, seguem-se os passos seguintes da resolução do exercício.

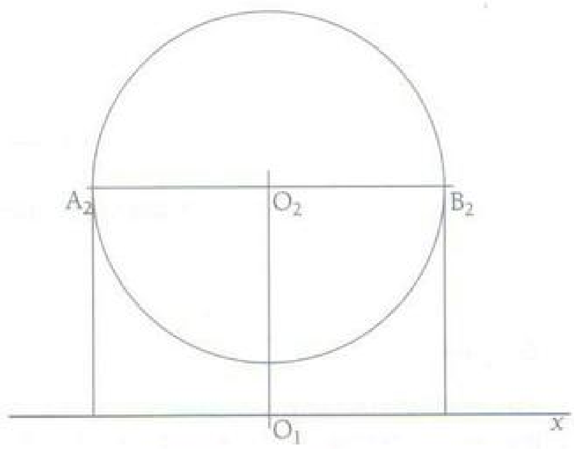
Nota: Nos próximos exercícios será omitida a explicação da representação dos primeiros elementos, que são comuns a todos os exercícios.

1.º passo

Sobre a linha de chamada já traçada marcam-se 4 cm para cima do eixo x e designa-se O_2, projecção frontal do ponto O, centro do círculo.

Na intersecção da linha de chamada de O_2 com o eixo x, obtém-se a projecção horizontal do mesmo, O_1.

Dado que o diâmetro do círculo é igual a 6 cm, abre-se o compasso 3 cm, fixa-se a ponta seca em O_2 e traça-se a circunferência que determina o contorno do círculo. Esta será a projecção frontal do círculo.

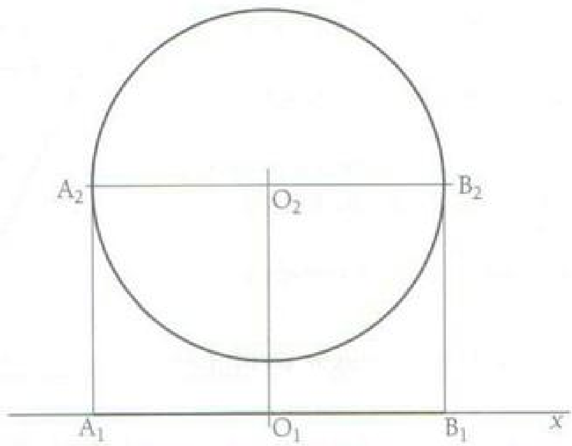


Projecção frontal do círculo.

2.º passo

Por O_2, traça-se o diâmetro paralelo ao eixo x e pelos seus extremos traçam-se linhas de chamada que, ao intersectarem o eixo x, determinam a projecção horizontal do círculo.

Como já sabemos, devem agora distinguir-se os tipos de traços do desenho, para se considerar o desenho totalmente concluído.



Projecções do círculo, distinguindo-se o seu contorno aparente.

Polígonos assentes em planos de frente

Todo o polígono contido num plano de frente tem a sua projecção frontal em verdadeira grandeza. A projecção horizontal é sempre um segmento de recta paralelo ao plano frontal de projecção.

Desenhemos as projecções de um rectângulo com os seguintes dados:

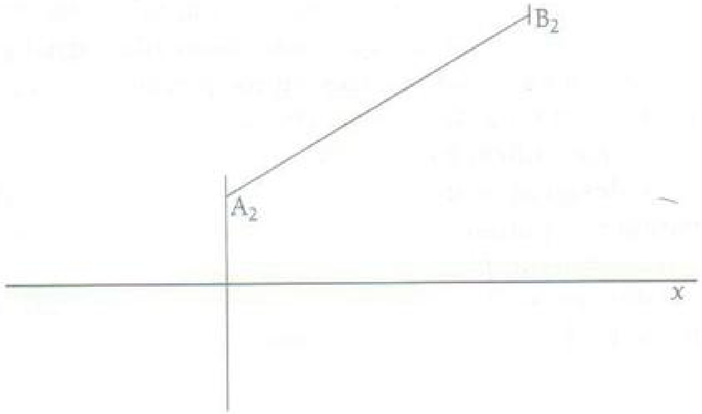
- O rectângulo localiza-se no primeiro diedro de projecção e está contido num plano α, de frente, que dista 2 cm de φ_0;
- Os lados de maior comprimento fazem com v_0 ângulos de 30°, de abertura para a direita;
- Os lados de maior comprimento medem 6 cm e os de menor comprimento medem 3,5 cm;
- O vértice **A**, o de menor cota, dista 1,5 cm do plano horizontal de projecção.
- A resolução deste exercício é simples:

1.° passo

Sobre uma linha de chamada marcam-se 3 cm para baixo do eixo x, e por esse ponto traça-se uma linha paralela ao eixo x, traço horizontal do plano α, de frente, que contém o rectângulo, h_α.

Determinam-se as projecções do ponto **A** que, conforme os dados, tem cota e afastamento iguais a 1,5 cm e 3 cm, respectivamente.

A partir de A_2 e para cima dessa projecção, traça-se uma linha que faz um ângulo de 30° com o eixo x, com abertura para a direita. Sobre esta linha, e a partir de A_2, marcam-se para a direita 6 cm, obtendo-se B_2, projecção frontal do vértice **B**.



Projecções do lado [AB].

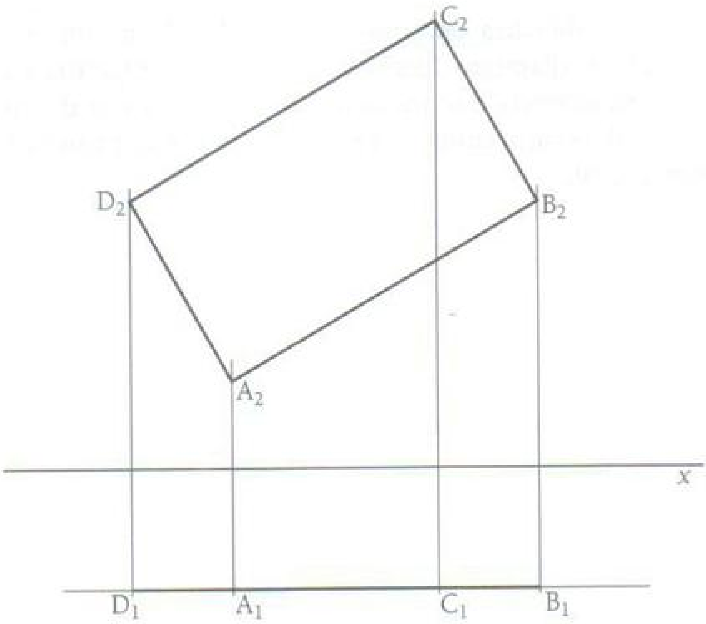
2.° passo

A partir das projecções frontais do lado [**AB**] constrói-se a projecção frontal do rectângulo, da seguinte maneira:

Por A_2 e B_2 traçam-se linhas perpendiculares ao lado [**AB**].

Sobre as perpendiculares, e a partir de A_2 e B_2, marcam-se 3,5 cm correspondentes aos lados de menor comprimento. Obtêm-se, deste modo as projecções frontais dos outros dois vértices, **C** e **D** e determinam-se as suas projecções horizontais. Como é óbvio, estas projecções situam-se sobre o traço do plano que os contém.

Unindo-se esses quatro pontos entre si e distinguindo os traços do desenho está concluído o exercício.



Projecções do rectângulo.

Círculos assentes em planos de frente

Tratando-se de círculos assentes em planos paralelos ao plano frontal de projecção, as suas projecções frontais serão invariavelmente iguais ao objecto real, isto é, em verdadeira grandeza, e as projecções horizontais serão sempre segmentos de recta.

Vamos efectuar as projecções de um círculo respeitando as seguintes características:

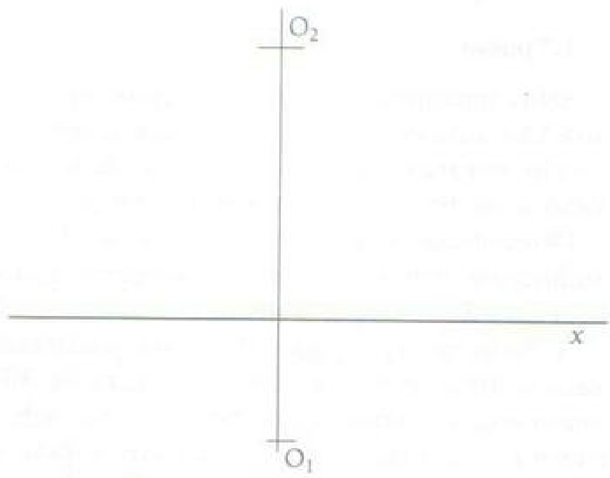
- O círculo situa-se no primeiro diedro de projecção e todos os seus pontos encontram-se à mesma distância do plano frontal de projecção.
- O centro do círculo é o ponto O (1,5; 3,5).
- O diâmetro do círculo é de 4 cm.

1.º passo

Determinam-se as projecções do ponto O, tendo em conta que o afastamento do centro do círculo é igual ao afastamento de todos os seus outros pontos, 1,5 cm, e traça-se por O_1 uma linha paralela ao eixo x, o traço do plano que contém o círculo, h_φ.

A designação do traço desse plano estará entre parênteses porque se trata de um plano que tem um único traço nos planos ortogonais de projecção (h_φ).

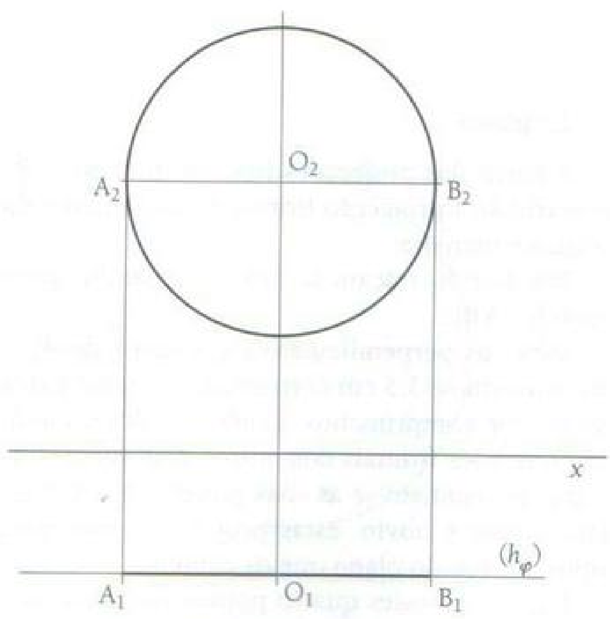
Marcam-se 3,5 cm para cima do eixo x, sobre a linha de chamada de O_1 e designa-se O_2.



Projecções do centro do círculo.

2.º passo

Com abertura do compasso igual a 2 cm, ou seja, metade do diâmetro, fixa-se a ponta seca em O_2 e traça-se a circunferência que irá determinar o contorno do círculo, determinando-se em seguida a sua projecção horizontal.



Projecções ortogonais do círculo, sendo visível a sua linha de contorno.

Projecções de polígonos assentes em planos de perfil

Um plano de perfil é um plano simultaneamente perpendicular a φ_0 e a ν_0.

De acordo com o que se aprendeu até aqui, *uma figura plana assente num plano perpendicular a um plano de projecção tem a sua projecção nesse plano de projecção reduzida a um segmento de recta.*

Ou seja, uma figura plana contida num plano perpendicular a φ_0 tem a sua projecção frontal reduzida a um segmento de recta que se encontra sobre o traço frontal do plano que a contém.

Qualquer figura plana que esteja contida num plano perpendicular a ν_0 tem a sua projecção horizontal em forma de um segmento de recta situado sobre o traço horizontal do plano que a contém.

Na base do que se acabou de afirmar, pode-se concluir que, sendo o plano de perfil perpendicular aos dois planos de projecção, as projecções de figuras planas nele contidas são dois segmentos de recta perpendiculares ao eixo x, sendo um no plano frontal de projecção e outro no plano horizontal de projecção.

Sendo assim, na maior parte dos casos, para determinar as projecções de um polígono será necessário recorrer a um método geométrico auxiliar, quando a construção directa se revelar impossível ou imprecisa.

Representemos pelas suas projecções um triângulo equilátero, que a seguir se descreve:

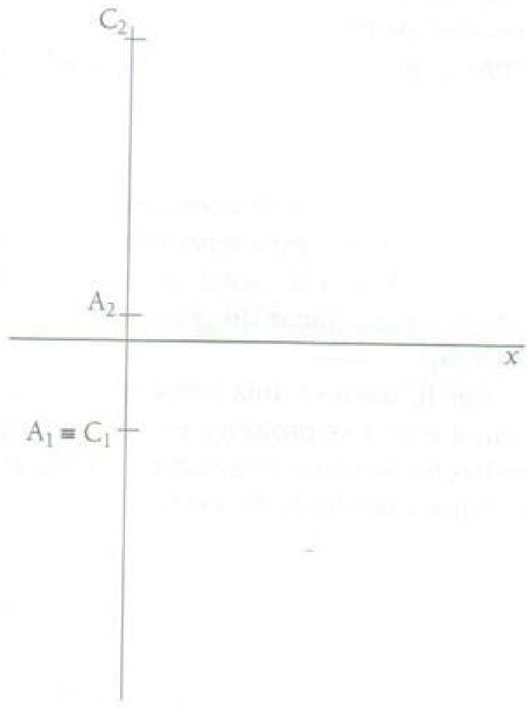
- O triângulo pertence ao plano de perfil π e situa-se no primeiro diedro de projecção.
- O lado [AC] do triângulo, o mais próximo de φ_0, é paralelo ao traço frontal do plano de perfil π e dista dele 1,5 cm.
- O vértice A, o mais próximo de ν_0, dista dele 0,5 cm.
- O vértice C, o mais distante de ν_0 situa-se a 5 cm desse plano.

1.º passo

Representa-se o plano de perfil π, através dos seus traços, que no plano do desenho são sempre coincidentes, $h_\pi \equiv f_\pi$, e perpendiculares ao eixo x.

Marcam-se sobre os traços do plano, para cima do eixo x, 0,5 cm e 5 cm, respectivamente cotas dos pontos A e C, e designa-se A_2 e C_2.

Dado que o lado [AC] é paralelo a φ_0, e dista dele 1,5 cm, marcam-se 1,5 cm para baixo do eixo x, afastamento desse lado, e designa-se $A_1 \equiv C_1$.



Projecções dos vértices A e C.

2.º passo

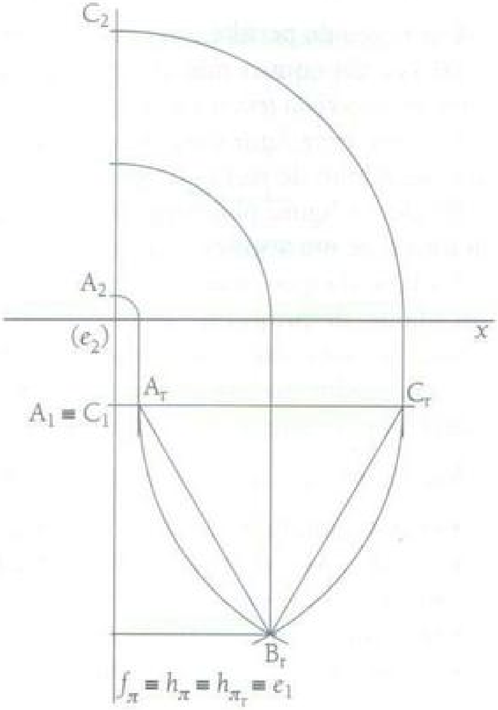
Para a determinação das projecções do ponto B, é necessário recorrer a um método geométrico auxiliar que, neste caso, é o rebatimento do plano de perfil, sobre o plano horizontal de projecção.

Assim, a charneira de rebatimento é o traço horizontal do plano de perfil e, portanto, é o traço frontal do plano que roda. As projecções frontais dos pontos e todos os pontos do plano rodam para o plano horizontal de projecção e, neste caso, $x \equiv f_{\pi_r}$, $h_\pi \equiv e_1$. Assim, e_1 é a projecção horizontal da charneira cuja projecção frontal, (e_2), se situa no eixo x.

Agora, com a ponta seca do compasso no ponto de intersecção dos traços do plano com o eixo x, (e_2), traçam-se arcos a partir de A_2 e C_2, até intersectarem o eixo x.

Pelos pontos de intersecção dos arcos com o eixo x, traçam-se perpendiculares ao eixo x, para baixo do mesmo. Seguidamente, por $A_1 \equiv C_1$, traça-se uma linha paralela ao eixo x, cujo cruzamento com os prolongamentos dos arcos permite obterem-se A_r e C_r, os pontos A e C, rebatidos.

A partir do lado [AC] rebatido, constrói-se o triângulo, iniciando-se esta parte do procedimento com a fixação da ponta seca do compasso em A_r e abertura até C_r, e traçando-se um arco. Com a ponta seca desta vez em C_r e abertura até A_r traça-se outro arco que intersecta o primeiro em B_r, cuja união com A_r e C_r origina o triângulo [ABC], rebatido.

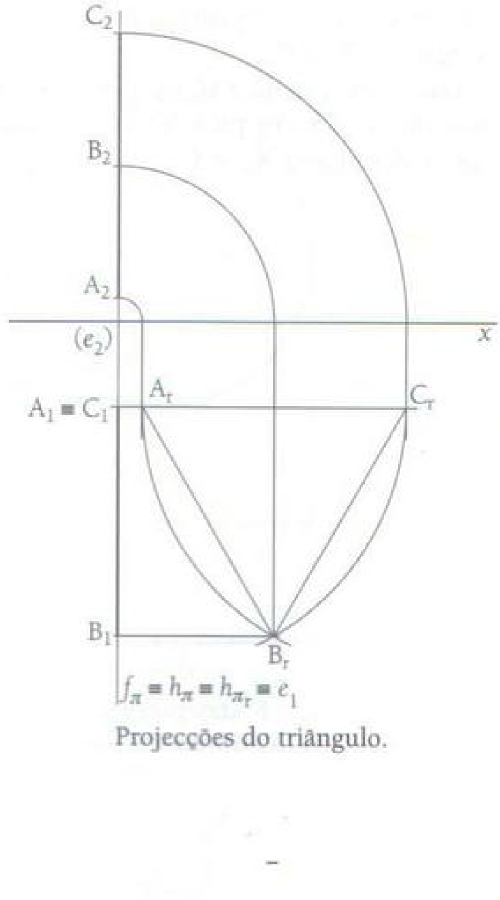


Triângulo [ABC] rebatido.

3.º passo

Para obter as projecções do triângulo é agora apenas necessário efectuar o contra-rebatimento ou inversão do rebatimento do ponto B. Por B_r, traça-se uma paralela ao eixo x, a qual, ao intersectar os traços do plano determina a projecção horizontal de B, B_1.

Por B_r traça-se uma perpendicular ao eixo x cuja intersecção com o eixo x se prolonga em arco de centro (e_2), até intersectar os traços do plano originado a projecção frontal de B, B_2. Assim termina a resolução do exercício.



Projecções do triângulo.

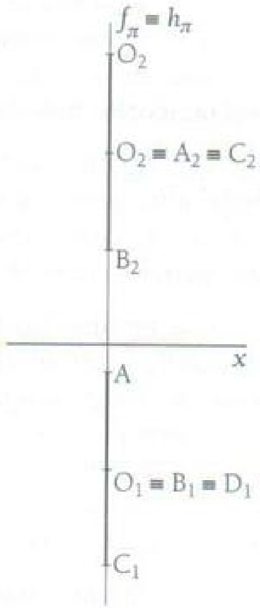
Círculos assentes em planos de perfil

As projecções de um círculo contido num plano de perfil ficam reduzidas a dois segmentos de recta iguais, estando um em cada um dos planos de projecção.

Como se pode ver, as duas projecções, por si só, não são suficientes para definir a figura projectada.

Para que a figura esteja suficientemente definida será necessário dar uma outra posição ao plano de perfil, isto é, será necessário usar um método geométrico auxiliar.

O método geométrico auxiliar permite que a figura seja construída numa posição paralela ou coincidente com os planos de projecção, ou seja, facilita a construção da figura.



Projecções de um círculo assente num plano de perfil.

Vamos resolver um exercício de projecção de um círculo assim posicionado:

- O círculo pertence a um plano π, de perfil.
- O seu centro é o ponto O, que se situa a 3 cm de φ_0 e pertence a $\beta_{1/3}$.
- A circunferência do perímetro do círculo tem 2,5 cm de raio.

1.º passo

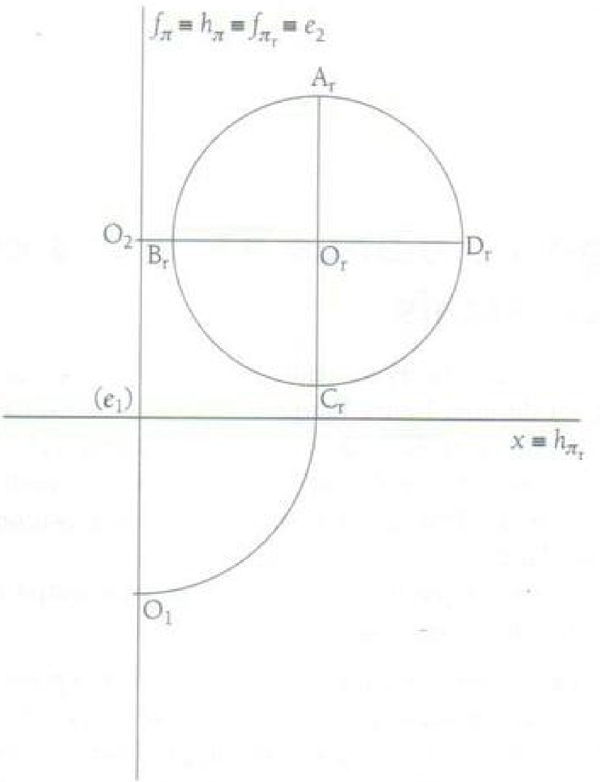
Determinam-se as projecções do ponto O, cujo afastamento e cota são iguais a 3 cm, pois é um ponto do $\beta_{1/3}$. Como se pode ver, embora seja possível projectar directamente o círculo, para o seu traçado é necessário usar um método geométrico auxiliar, neste caso o rebatimento.

O rebatimento do plano π pode ser feito sobre o plano frontal de projecção ou paralelamente a ele ou sobre o plano horizontal de projecção ou paralelamente a ele.

Neste caso, optamos por rebater sobre o plano frontal de projecção e para o lado direito.

Com a ponta seca do compasso no ponto de intersecção dos traços do plano com o eixo x, e abertura do compasso até O_1, traça-se um arco para a direita até intersectar o eixo x. A projecção horizontal de O gira simultaneamente com o traço horizontal do plano. Sendo assim, o traço horizontal do plano rebatido, h_{π_r} vai coincidir com o eixo x, $h_{\pi_r} \equiv x$.

Pelo ponto de intersecção do arco com o eixo x traça-se uma perpendicular ao eixo x para cima dele. Por O_2 traça-se uma paralela ao eixo x cuja intersecção com a linha auxiliar que se traçou anteriormente origina o ponto O rebatido, O_r.



Traçado do círculo rebatido.

Com a ponta seca do compasso em O_r e abertura igual ao raio da circunferência, traça-se a circunferência que determina o contorno do círculo.

De modo a facilitar os passos seguintes é conveniente designar quatro pontos diametralmente opostos, além do centro. Assim, além de O_r, teremos A_r, B_r, C_r e D_r.

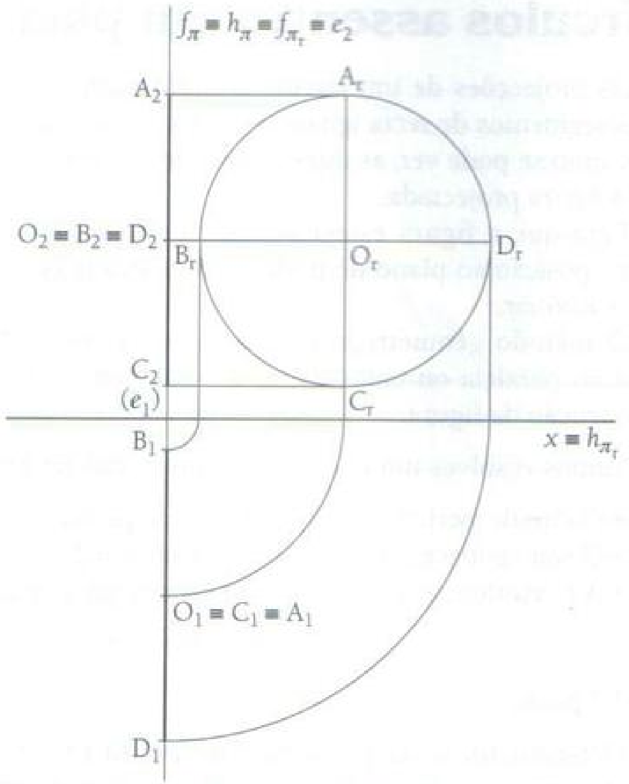
2.º passo

O processo que se segue é voltar o plano de perfil à sua posição anterior, ou seja, efectuar o contra-rebatimento. Esta operação consiste em fazer exactamente o inverso do rebatimento.

Pelos quatro pontos rebatidos traçam-se linhas perpendiculares aos traços do plano de perfil, cuja intersecção com estes origina as projecções frontais dos quatro pontos, A_2, B_2, C_2 e D_2.

Pelos mesmos quatro pontos rebatidos, traçam-se perpendiculares ao eixo x até intersectá-lo. Com a ponta seca do compasso no ponto de intersecção dos traços do plano com o eixo x traçam-se arcos de circunferência que, ao intersectarem os traços do plano de perfil, permitem determinar as projecções A_1, B_1, C_1 e D_1.

Deste modo, estão já terminadas as projecções do círculo pretendido, concluindo-se o exercício com a representação das mesmas a traço grosso.



Projecções do círculo.

Figuras planas assentes em planos de topo e verticais

As figuras planas assentes em planos projectantes têm uma projecção correspondente à deformação máxima de uma figura plana, isto é, uma projecção reduzida a um segmento de recta. A outra projecção fica com uma deformação cujo valor está entre 0° e 90°.

Pelo facto de nenhuma das projecções apresentar a sua verdadeira grandeza, em certos casos poderá haver necessidade de recorrer aos métodos geométricos auxiliares para construir as projecções de uma figura plana.

No caso do plano de topo, a projecção frontal duma figura plana é um segmento de recta situado no traço frontal desse plano.

A projecção horizontal de qualquer figura plana assente num plano de topo ou projectante frontal fica deformada, ou seja, não apresenta a sua verdadeira grandeza.

No caso do círculo, a sua projecção horizontal será sempre uma elipse. A sua projecção frontal, como qualquer figura plana nessas condições, fica reduzida a um segmento de recta contido no traço frontal do plano de topo que contém o círculo.

Relativamente ao plano projectante horizontal, todas as figuras planas nele contidas têm projecções horizontais reduzidas a segmentos de recta, e as projecções frontais assemelham-se à própria figura, com uma certa deformação.

Polígonos assentes em planos de topo

As projecções de polígonos assentes em planos de topo, como se disse, requerem a aplicação de vários conhecimentos, incluindo, na maioria das vezes, os métodos geométricos auxiliares.

A projecção frontal de qualquer polígono assente num plano de topo é, invariavelmente, um segmento de recta que se situa no traço frontal do plano que o contém.

A projecção horizontal duma figura assente num plano projectante frontal é essa mesma figura com uma certa deformação que varia de acordo com o ângulo que o plano faz com v_0.

As projecções horizontais de polígonos assentes em planos de topo mantêm o mesmo número de lados, mas alguns deles e, muitas da vezes todos, diminuem de comprimento em relação às medidas reais.

Em projecção frontal, na maioria dos casos, as projecções dos lados dum polígono assente num plano de topo sobrepõem-se e situam-se no traço frontal desse plano. Em certos casos, alguns lados em projecção frontal ficam reduzidos a um ponto, aqueles que se apresentam em verdadeira grandeza em projecção horizontal, ou seja, os lados de topo.

Construamos as projecções de um rectângulo, conhecendo os seguintes dados:

- O rectângulo está assente num plano projectante frontal que faz um ângulo de 40° com v_0, de abertura para a esquerda.
- Os lados de maior comprimento medem 5 cm e são paralelos ao plano horizontal de projecção.
- O lado de maior comprimento, mais distante do plano horizontal de projecção, situa-se a 4 cm deste.
- O lado de menor comprimento mede 3,5 cm, e o mais próximo do plano frontal de projecção dista deste 1 cm.

A leitura do enunciado deste exercício permite perceber que dois lados do rectângulo são de topo, e os outros dois são de frente.

Os segmentos de topo apresentam-se na sua verdadeira grandeza em projecção horizontal.

Os segmentos de frente têm a sua verdadeira grandeza em projecção frontal.

Sendo assim, o uso de métodos geométricos auxiliares para a resolução deste exercício é desnecessário, pois a construção é directa.

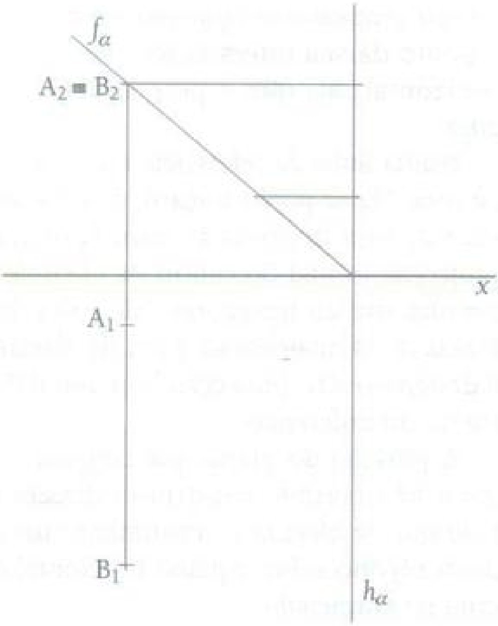
1.º passo

Traça-se uma linha, que deve fazer 40° em relação ao eixo x, de abertura para a esquerda; este é o traço frontal do plano de topo que contém o rectângulo, f_α.

Seguidamente, traça-se o traço horizontal do plano α, h_α, recta perpendicular ao eixo x.

Numa linha de chamada marcam-se 4 cm de cota e determina-se a projecção frontal do lado de maior cota, $A_2 \equiv B_2$. Para baixo do eixo x, na linha de chamada de A e B, marca-se 1 cm de afastamento e designa-se A_1, projecção horizontal do ponto A.

De A_1, marcam-se para baixo 5 cm correspondentes ao comprimento dum lado de maior comprimento e designa-se B_1.



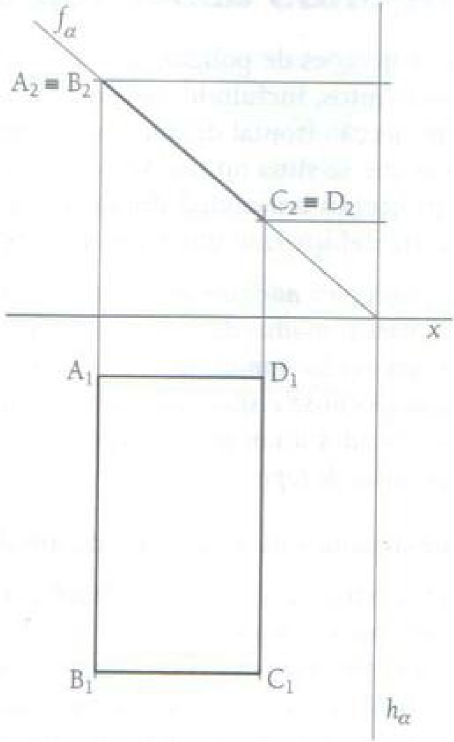
Projecções de um dos lados de maior comprimento.

2.º passo

Sobre o traço frontal do plano α, a partir de $A_2 \equiv B_2$, marcam-se para a esquerda 3,5 cm, que correspondem ao comprimento dos lados de menor comprimento e designa-se $C_2 \equiv D_2$.

Seguindo os passos anteriores, determina-se a projecção horizontal dos dois pontos, C_1 e D_1, com os mesmos afastamentos de A e B.

A união dos quatro pontos em cada uma das projecções determina as projecções do rectângulo.



Traçado das projecções do rectângulo.

Efectuemos agora as projecções de um hexágono regular situado no primeiro diedro, sabendo que:

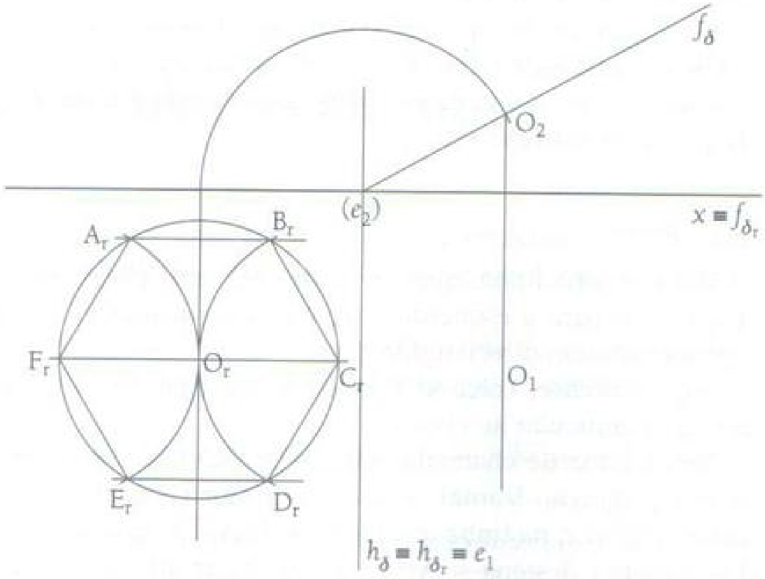
- O polígono está contido num plano projectante frontal que faz um ângulo de 30º com o plano horizontal de projecção, de abertura para a direita.
- Está inscrito numa circunferência de centro O (3; 1,5).
- O raio da circunferência circunscrita ao hexágono mede 2,5 cm.
- Dois dos lados do hexágono são de frente.

Passemos para a resolução do exercício:

1.º passo

Representa-se o plano de topo pelos seus traços, no plano do desenho, traçando uma linha que faz 30º com o eixo x, de abertura para a direita, traço frontal, f_δ, cujo ponto do seu cruzamento com esse eixo é também o ponto da sua intersecção com o seu traço horizontal, h_δ, que é perpendicular a esse eixo.

Numa linha de referência marca-se 1,5 cm de cota. Nesse ponto traça-se uma paralela ao eixo x, cuja intersecção com f_δ origina O_2 projecção frontal do centro da circunferência circunscrita ao hexágono. Na linha de referência de O, marcam-se 3 cm de afastamento e designa-se O_1, projecção horizontal do centro da circunferência.



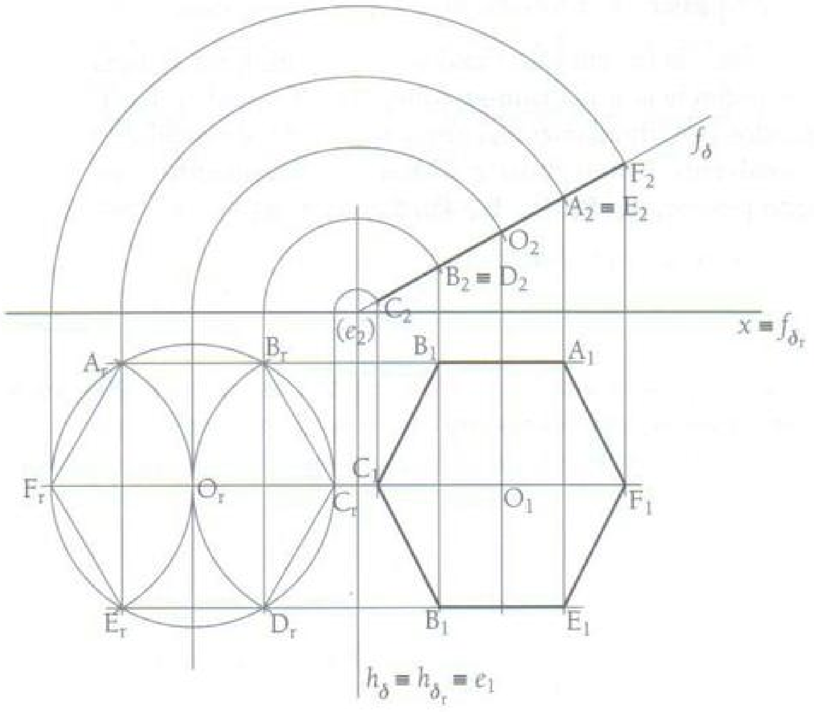
Traçado do hexágono rebatido.

A posição do plano que contém o hexágono não permite construí-lo directamente, pelo que se efectua o rebatimento do centro do hexágono sobre o plano horizontal de projecção e constrói-se o polígono, tendo em conta a posição descrita no enunciado.

Traça-se uma circunferência de raio igual a 0,5 cm. Contrói-se o hexágono com dois lados paralelos ao eixo x e designam-se os seis vértices, nomeadamente, A_r, B_r, C_r, D_r, E_r e F_r.

2.º passo

Em seguida, efectua-se a inversão do rebatimento dos seis pontos para obter as suas projecções, unem-se as projecções do mesmo nome e distinguem-se os traços do desenho.



Hexágono rebatido e projecções do polígono.

Círculos assentes em planos projectantes frontais

Vamos desenhar as projecções de um círculo situado no I D, assim posicionado:

- O círculo situa-se num plano α de topo, que faz um diedro de 60º com v_0, de abertura para a direita.
- O centro do círculo tem cota igual a 4 cm e afastamento igual a 2,5 cm.
- O raio mede 2 cm.

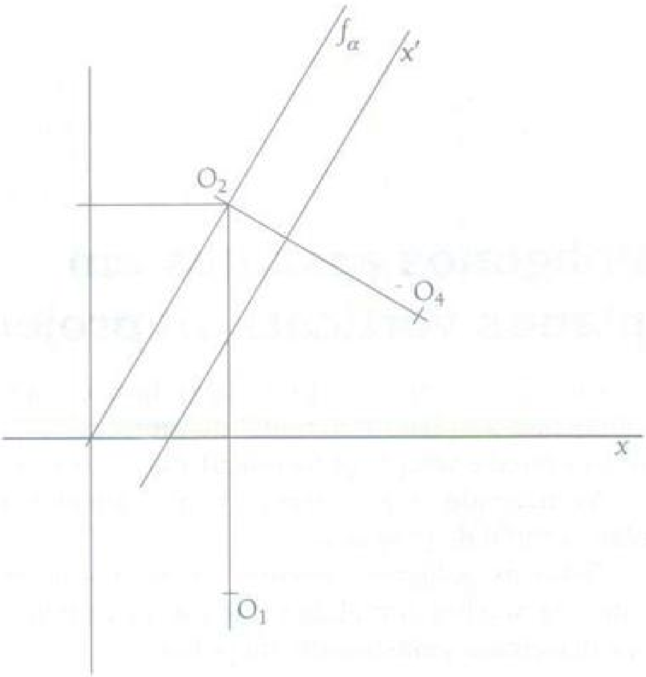
1.º passo

Representam-se os traços do plano de topo que faz 60º com o plano horizontal de projecção, de abertura para a direita e determinam-se as projecções do ponto O, o centro do círculo.

Determina-se a projecção frontal do ponto O, O_2, tendo em consideração a sua cota, igual a 5 cm.

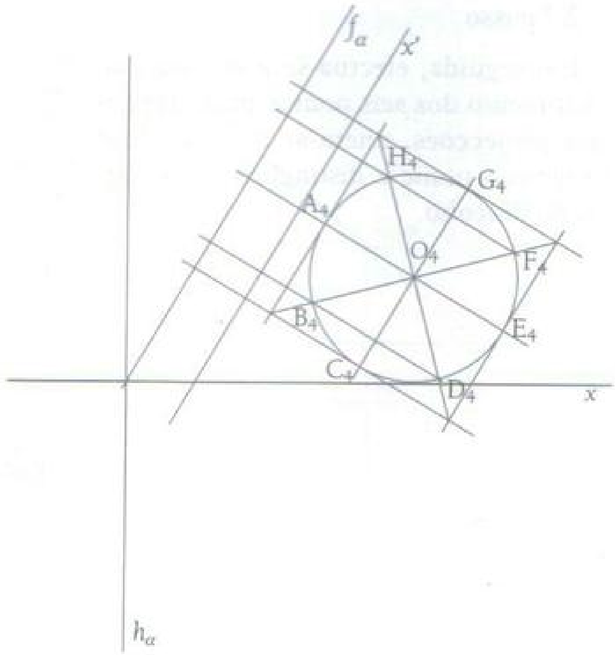
Para a construção da circunferência será necessário recorrer-se um método geométrico auxiliar, neste caso a mudança do plano horizontal de projecção, em que mudam as cotas dos pontos do círculo e mudam também as projecções horizontais, mantendo-se as projecções frontais e os afastamentos.

Para o efeito, traça-se o novo eixo x, x', paralelo ao traço frontal do plano α, e traçam-se linhas de chamada perpendiculares a esse novo eixo; sobre elas marca-se então, o afastamento do centro O e designa-se O_4.



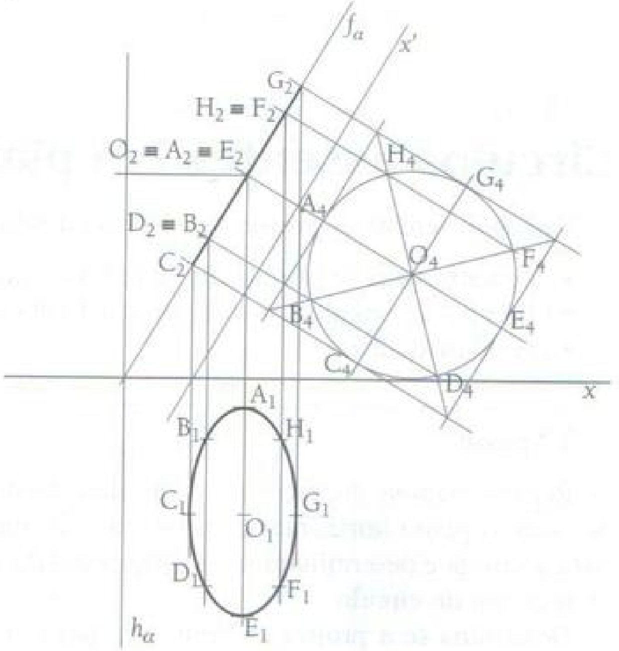
2.º passo

Com centro em O_4, e raio igual a 2 cm, traça-se uma circunferência e marcam-se sobre ela oito pontos distribuídos equilibradamente, com o auxílio de um quadrado envolvente, como mostra o desenho. Designam-se os oito pontos, A_4, B_4, C_4, D_4, E_4, F_4, G_4, e H_4.



3.º passo

Em seguida, traçam-se linhas de chamada perpendiculares ao eixo x_1, cuja intersecção com o traço frontal do plano α origina as projecções frontais dos oito pontos, A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, F_2, G_2, e H_2. Traçando linhas de chamadas perpendiculares ao eixo x, marcam-se sobre elas os afastamentos dos oito pontos e designa-se A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, G_1, e H_1. Finalmente, unem-se os pontos das projecções do mesmo nome.



Projecções do círculo de topo.

Polígonos assentes em planos verticais ou projectantes horizontais

Um plano vertical ou projectante horizontal é, como já se disse no alfabeto do plano, um plano perpendicular ao plano horizontal de projecção e oblíquo em relação ao plano frontal de projecção. O seu traço frontal é sempre perpendicular ao eixo x e o seu traço horizontal é oblíquo em relação ao eixo x.

Assim sendo, o que varia entre os diferentes planos verticais é o ângulo que eles fazem em relação ao plano frontal de projecção.

Todos os polígonos assentes em planos projectantes horizontais têm as suas projecções horizontais sobre o traço horizontal do plano que os contém. Assim sendo, ficam reduzidas a segmentos de recta, isto é, à deformação máxima de um polígono.

A projecção frontal de um polígono contido num plano vertical ou projectante horizontal é uma deformação do objecto real. A deformação acentuar-se-á tanto mais quanto maior for o ângulo que o plano que contém o polígono faz com o plano frontal de projecção.

À medida que o ângulo for maior, menor se torna a abcissa dos pontos que determinam os seus vértices; estará próxima de um segmento de recta quando o plano for quase de perfil.

Desenhemos pelas suas projecções um quadrado, considerando o seguinte:

- O polígono está assente num plano vertical, que faz um ângulo de 70° de abertura para a direita.
- Um dos lados do quadrado tem cota nula e outro tem afastamento nulo.
- O seu lado mede 4,5 cm.

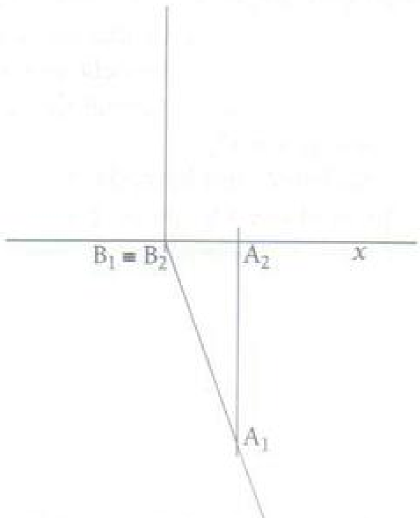
Na resolução deste exercício será dispensado o uso de um método geométrico auxiliar, pois, pelo facto de dois lados do quadrado serem de frente, a sua projecção horizontal estará em verdadeira grandeza. Por outro lado, porque os outros dois lados são de topo e, assim, as suas projecções frontais apresentam-se em verdadeira grandeza.

1.° passo

Como é óbvio, antes de projectar o quadrado, representa-se pelos seus traços o plano que o contém.

No ponto de intersecção dos traços do plano α representa-se $\mathbf{B_1}$, projecção horizontal de um dos extremos do lado $[\mathbf{AB}]$ situado no plano horizontal de projecção.

A partir de $\mathbf{B_1}$, e sobre h_α, marcam-se 4,5 cm correspondentes ao comprimento do lado do quadrado e representa-se $\mathbf{A_1}$. Determinam-se então, as projecções frontais dos dois pontos que, como se disse, têm cota nula.

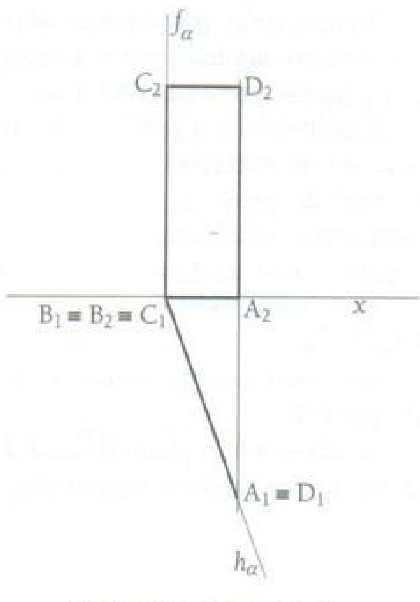


Projecções do lado de cota nula.

2.° passo

A partir de $\mathbf{B_1}$, e sobre f_α, marcam-se 4,5 cm para cima do eixo x e representa-se $\mathbf{C_2}$, cuja projecção horizontal $\mathbf{C_1}$ é coincidente com $\mathbf{B_1}$.

Por $\mathbf{A_1}$, prolonga-se a linha de chamada, marcam-se 4,5 cm de cota e representa-se $\mathbf{D_2}$, cuja projecção horizontal $\mathbf{D_1}$ é coincidente com a projecção horizontal $\mathbf{A_1}$.



Projecções do quadrado.

Desenhemos também as projecções de outro polígono, no caso, um pentágono regular localizado no primeiro diedro de projecção, tendo em consideração o seguinte posicionamento no espaço:

- O polígono está assente num plano δ, projectante horizontal, que faz um diedro de 40° com o plano frontal de projecção, tendo 40° de abertura para a esquerda.
- O centro do pentágono é um ponto O (4; 5).
- O raio da circunferência circunscrita ao pentágono mede 4,5 cm.
- Um dos lados do pentágono, o de maior cota, é de nível.

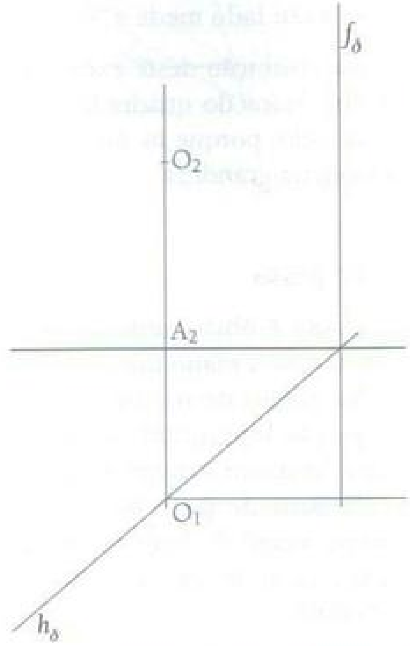
1.º passo

Traça-se uma linha que faz um ângulo de 40° com o eixo *x*, de abertura para a esquerda, traço horizontal do plano projectante horizontal pretendido, h_δ.

Traça-se o traço frontal do plano δ, f_δ, que é perpendicular ao eixo *x* e cruza-se com h_δ nesse eixo.

Numa linha de chamada, marcam-se 4 cm de afastamento e traça-se uma linha paralela ao eixo *x*, cuja intersecção com h_δ origina a projecção horizontal do centro da circunferência circunscrita ao pentágono, O_1.

Na linha de chamada do centro, marcam-se 5 cm de cota e representa-se O_2, projecção frontal do centro da circunferência circunscrita ao pentágono.



Projecções do centro da circunferência circunscrita ao pentágono.

2.º passo

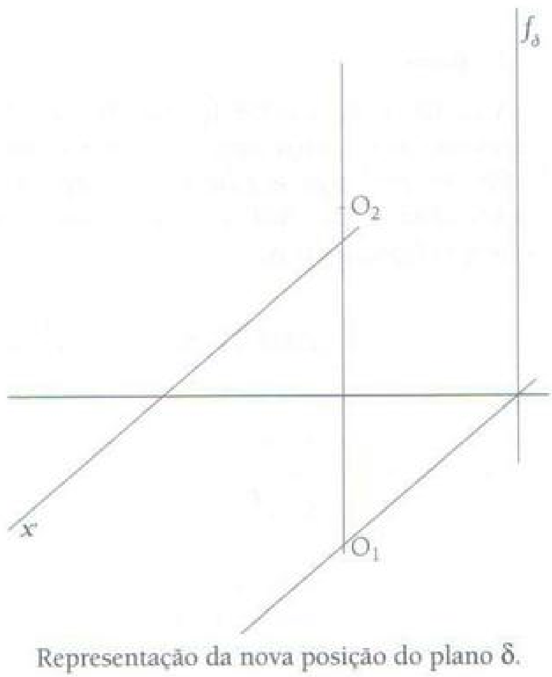
A partir deste passo é necessário recorrer-se a um método geométrico auxiliar para se proceder à construção do pentágono que se pretende projectar.

Escolhamos a mudança de planos para encontrarmos a solução do exercício. Neste caso será a mudança do plano frontal de projecção, o que significa que as projecções horizontais vão manter-se fixas, mudando apenas os afastamentos e mantendo também as cotas.

Neste caso, o plano δ será paralelo ao plano frontal de projecção.

Traça-se um novo eixo *x*, *x'*, paralelo ao traço horizontal do plano δ.

Sendo assim, o plano δ passará a ser de frente e, portanto, definido por um único traço (h_{δ_1}).

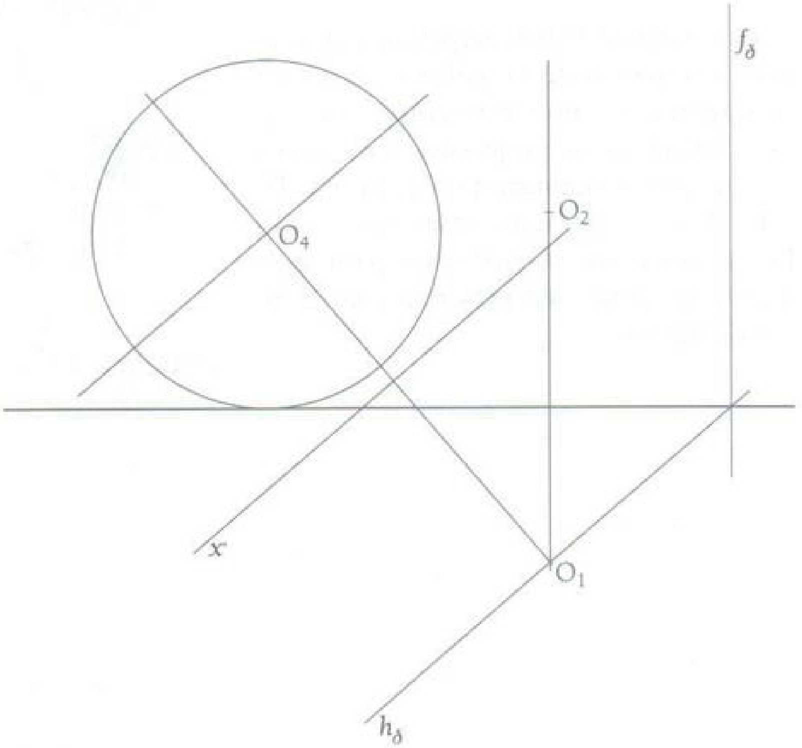


Representação da nova posição do plano δ.

3.º passo

Por O_1 traça-se uma linha perpendicular do eixo x', marca-se a cota desse ponto, 5 cm e designa-se O_4 (a nova projecção frontal de O).

Por O_4 traça-se a circunferência de raio igual a 4,5 cm, conforme os dados que constam do enunciado deste exercício.

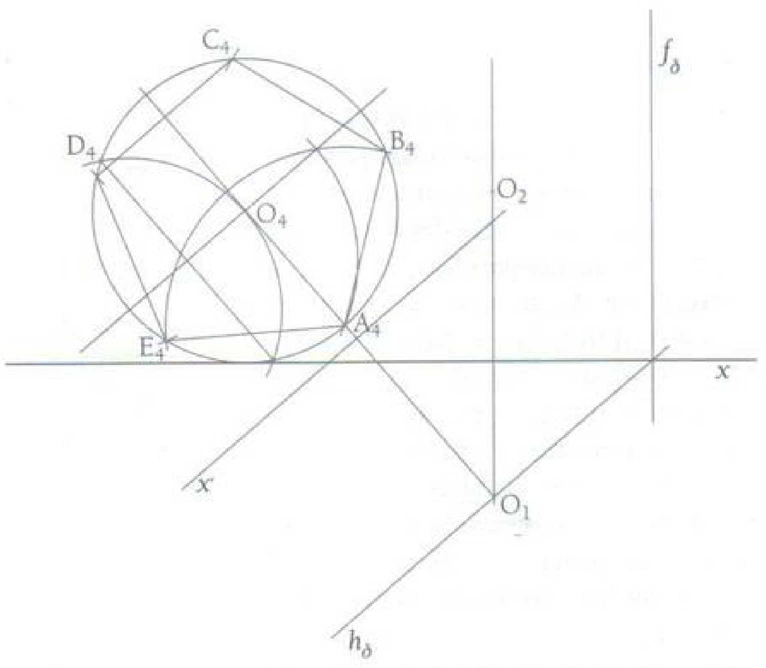


Traçado da circunferência circunscrita ao pentágono.

4.º passo

Constrói-se o pentágono, posicionando-o de modo a que o lado de maior cota seja paralelo ao plano horizontal de projecção, ou seja, que os pontos que o definem tenham a mesma cota.

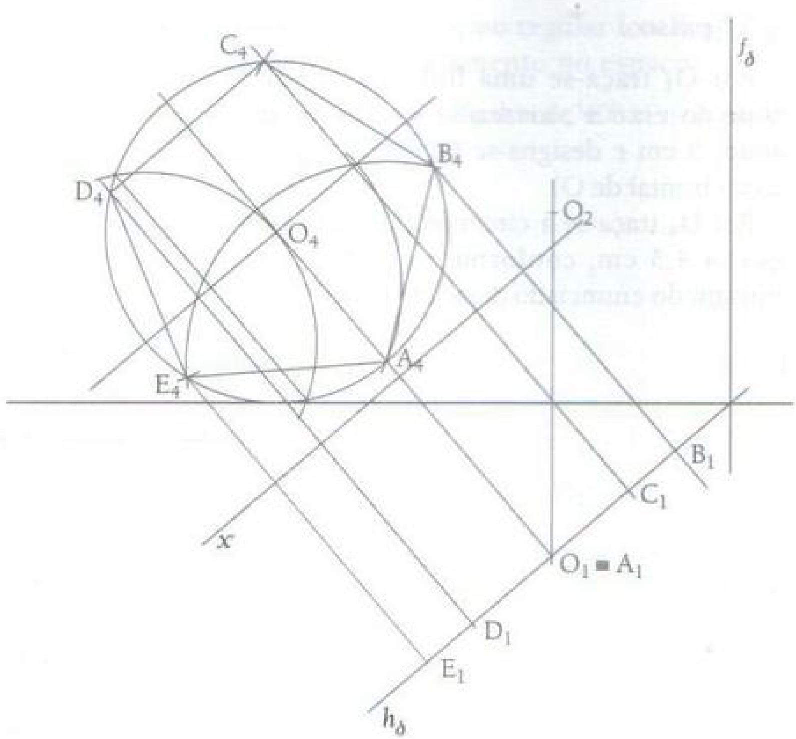
Seguidamente, representam-se os cinco vértices do pentágono, nomeadamente A_4, B_4, C_4, D_4 e E_4, sendo o lado [CD], o lado paralelo ao plano horizontal de projecção. Unem-se então os vértices, de modo a obter-se o pentágono na sua verdadeira grandeza.



Projecções frontais dos vértices do polígono.

5.º passo

Traçando-se linhas perpendiculares ao eixo x' e passando-se pelos vértices do pentágono, ao intersectarem-se com h_δ, determinam-se as projecções horizontais dos vértices do pentágono, A_1, B_1, C_1, D_1 e E_1. Como dissemos, essas projecções horizontais não se deslocam para sítio algum; portanto, são projecções horizontais definitivas.



Projecções frontais dos vértices do pentágono no novo plano frontal de projecção e respectivas projecções horizontais dos vértices.

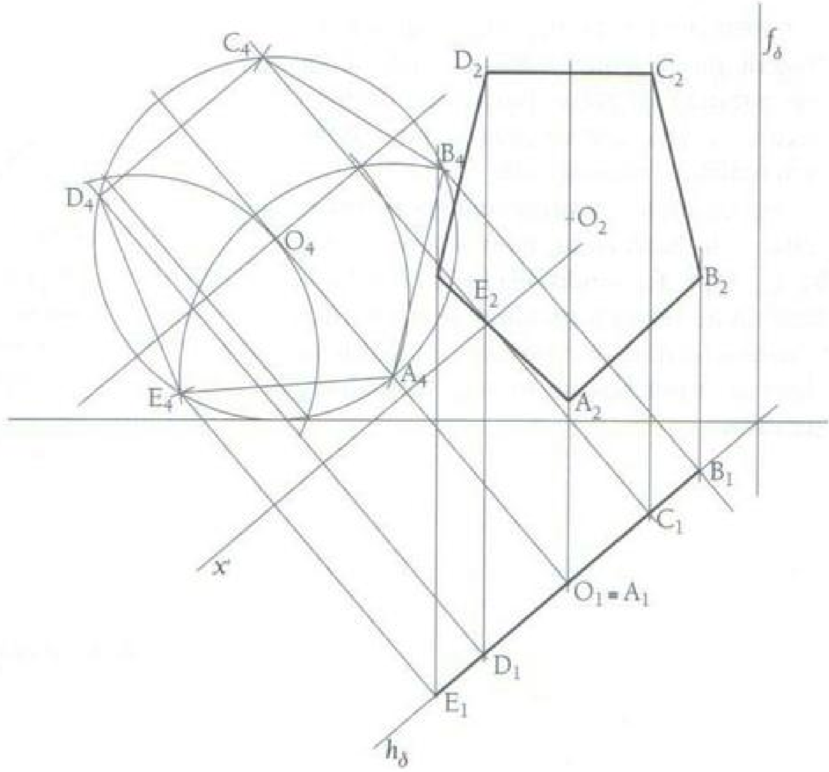
6.º passo

Pelas projecções horizontais dos cinco vértices, traçam-se linhas perpendiculares ao eixo x e marcam-se as respectivas cotas que, como dissemos, não mudam. Por outras palavras, mede-se a distância de A_4 ao eixo x', cota do ponto A, e transporta-se para a posição inicial do plano, obtendo-se, assim, a projecção frontal do ponto A, A_2.

Este processo de transporte das cotas dos vértices do pentágono repetir-se-á até se completarem os vértices; em seguida, procede-se às respectivas representações, nomeadamente, B_2, C_2, D_2 e E_2.

Unindo as projecções do mesmo nome obtêm-se as projecções do pentágono.

Como se sabe, é necessário estar-se atento ao uso adequado dos traços, de modo a que haja a necessária clareza na leitura do desenho.

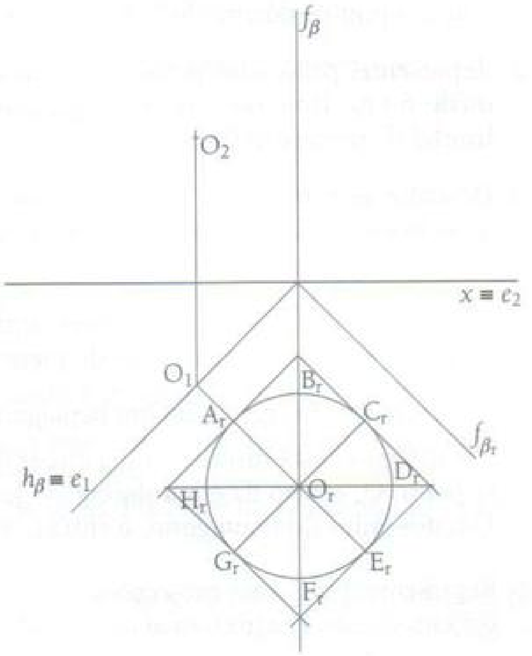


Projecções finais do pentágono, distinguindo-se a linha de contorno da figura.

Círculos assentes em planos projectantes horizontais

Os círculos contidos em planos projectantes horizontais têm as suas projecções horizontais situadas no traço horizontal do plano, reduzindo-se, portanto, a um segmento de recta. A projecção frontal de um círculo contido neste tipo de elipses é sempre uma elipse.

Construamos as projecções de um círculo situado no primeiro diedro de projecção, assente num plano vertical que faz um ângulo de 40° com φ_0, de abertura para a esquerda. O centro do círculo tem cota e afastamento iguais a 4 cm e 2,5 cm, respectivamente. O raio do círculo mede 2,5 cm.



Traçado do círculo rebatido.

1.º passo

Representa-se o plano vertical pelos seus traços e sobre h_β determina-se O_1, projecção horizontal do centro da circunferência, ao que se segue a determinação da sua projecção frontal O_2.

Escolhe-se um método geométrico auxiliar para construir o círculo, neste caso o rebatimento do plano vertical sobre o plano horizontal de projecção.

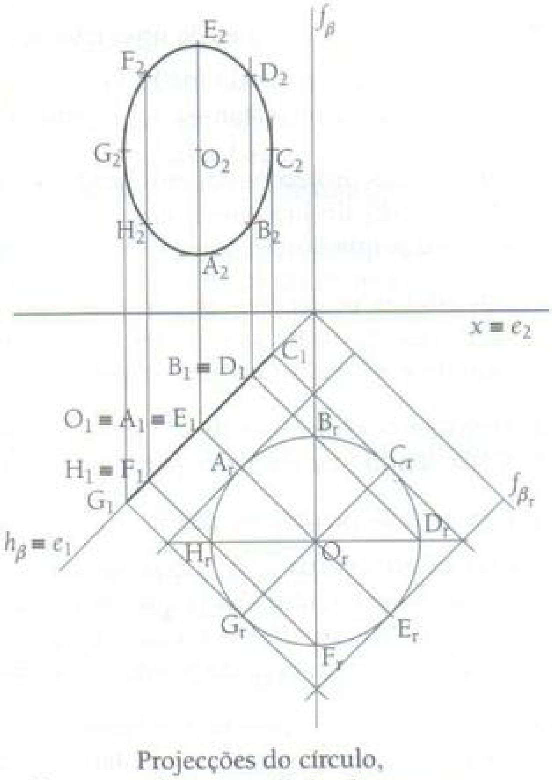
Pelo ponto de intersecção dos traços do plano com o eixo x, traça-se uma perpendicular a h_β e designa-se f_{β_r}, traço vertical do plano β rebatido. Como o plano β gira sobre o seu traço horizontal, esse traço não se desloca para sítio algum, sendo a charneira do rebatimento e.

Por O_1 traça-se uma perpendicular a h_β, na qual se marcam 4 cm a partir desse traço, correspondentes à cota, e designa-se O_r, centro rebatido do círculo. Por O_r, traça-se uma circunferência, que se envolve num quadrado, no qual se traçam diagonais e medianas, que determinam os oito pontos da circunferência.

2.º passo

Pelos oito pontos traçam-se perpendiculares a h_β, cuja intersecção com esse traço origina as projecções horizontais desses pontos, nomeadamente G_1, $F_1 \equiv H_1$, $A_1 \equiv E_1$, $B_1 \equiv D_1$ e C_1. Pelas linhas de chamada desses pontos determinam-se as suas projecções frontais, registando-se a distância do ponto rebatido a h_β e marcando como cota desse ponto.

A união dos pontos em cada uma das projecções resulta em projecções do círculo pretendido.



Projecções do círculo, distinguindo-se a sua linha de contorno.

Exercícios propostos

1. Represente pelas suas projecções um círculo contido no semiplano horizontal anterior, sabendo que:

   O seu raio é de 5 cm.
   Um dos pontos do círculo tem afastamento nulo.

2. Represente, pelas suas projecções, um quadrado contido no semiplano horizontal anterior, cujo lado mede 6 cm. Dois dos lados do quadrado são de topo, e os seus extremos mais próximos do plano frontal de projecção distam dele 2 cm.

3. Desenhe as projecções de um pentágono regular inscrito numa circunferência de 4,5 cm de raio, assente em ν_0. O centro da circunferência tem 5 cm de afastamento, e o lado do pentágono mais distante de φ_0 é paralelo ao eixo x.

4. Represente, pelas suas projecções, um triângulo equilátero assente em ν_0. Os lados do triângulo medem 8 cm e o mais próximo do plano frontal de projecção é paralelo ao mesmo, distando dele 3 cm.

5. Determine as projecções de um heptágono regular assente no semiplano horizontal anterior, sabendo-se:

   O heptágono está inscrito numa circunferência de raio igual a 5 cm.
   O ponto O, centro da circunferência, dista 6 cm do plano frontal de projecção.
   Um dos lados do heptágono, o situado mais à direita, é de topo.

6. Represente, pelas suas projecções, um círculo de nível, cuja cota é igual a 4 cm. O raio do círculo mede 6,5 cm, e o seu centro tem afastamento igual a 7 cm.

7. Represente as projecções de um círculo situado no primeiro diedro de projecção, considerando os seguintes dados:

   O círculo está contido num plano de nível de cota igual a 2,5 cm.
   O centro do círculo dista 6 cm do plano frontal de projecção.
   O raio da circunferência que determina o contorno do círculo é de 4,5 cm.

8.* Construa as projecções de um quadrado situado num plano de nível de 2,5 cm de cota. Dados:

   A diagonal do quadrado mede 5 cm.
   As diagonais intersectam-se num ponto de 3 cm de afastamento e um deles é de topo.

9. Construa as projecções de um hexágono regular de nível considerando os seguintes dados:
   O lado [AB] do hexágono tem 6 cm de cota, mede 4 cm, é fronto-horizontal e pertence ao plano bissector dos quadrantes impares.

10. Desenhe as projecções de um pentágono regular de nível, cujo centro O da circunferência nele circunscrita apresenta as seguintes coordenadas: O (6,5; 3,5). O raio da circunferência é de 4,5 cm, e o lado de menor afastamento do pentágono é horizontal de frente.

11. Desenhe as projecções de um quadrado pertencente ao plano frontal de projecção, cujos lados medem 6 cm, sendo que um deles pertence ao eixo x. O quadrado situa-se no semiplano vertical superior.

12. Construa as projecções de um pentágono regular tendo em conta os seguinte dados:

    O pentágono situa-se no lugar geométrico onde todos os pontos têm afastamento nulo.
    O centro da circunferência circunscrita ao pentágono é o ponto O (0; 7).
    O raio da circunferência mede 5,5 cm.
    O lado de menor cota do pentágono é paralelo à ν_0.

13. Desenhe as projecções de um hexágono regular, cujos vértices têm afastamentos nulos. Dois dos lados do hexágono são paralelos ao plano horizontal de projecção e medem 4,5 cm. O centro do hexágono é o ponto O de 5,5 cm de cota.

Exercícios propostos

14. Construa as projecções de um triângulo isósceles, considerando os seguintes dados:

    O triângulo tem a base vertical;
    Os extremos A e B da base têm as seguintes coordenadas: A (0; 0; 7) e B (0; 0; 1);

15. Construa as projecções de um círculo de frente, tendo em conta os dados que se seguem:

    O círculo situa-se num plano de frente β de afastamento igual a 3,5 cm.
    O centro do círculo é um ponto do $\beta_{1/3}$.
    O raio do círculo mede 3 cm.

16. Construa as projecções de um triângulo equilátero situado no primeiro diedro e contido num plano de frente. Dois dos lados do triângulo estão igualmente inclinados em relação ao eixo x, e o outro lado é o mais distante de ν_0. Sabe-se também que o centro da circunferência circunscrita ao pentágono é o ponto O (4,5; 5) e que o raio mede 4,5 cm.

17. Represente pelas suas projecções um heptágono regular situado num plano δ de frente, sabendo que:

    O centro da circunferência circunscrita ao heptágono é um ponto que dista 4,5 cm do plano frontal de projecção e pertencente ao plano bissector dos quadrantes ímpares.
    O raio da circunferência circunscrita ao heptágono mede 4 cm. Dois dos lados do polígono são de topo.
    O lado mais à esquerda do pentágono é vertical.

18. Construa as projecções de um octógono regular contido num plano de perfil. O octógono situa-se no I D, distanciando-se o seu centro, 6 cm de ν_0. O afastamento do centro é igual a 4,5 cm e o raio da circunferência circunscrita ao octógono é igual a 4 cm. Dois dos lados do polígono são de topo.

19.* Construa as projecções de um círculo com as seguintes características:

    O círculo está assente num plano de topo que faz com ν_0 um diedro de 60° de abertura para a esquerda.
    O raio do círculo é igual a 4 cm.
    O círculo pertence ao I D e tem um ponto em ν_0 e outro em φ_0.

20. Construa as projecções de um triângulo isósceles, situado no primeiro diedro de projecção, tendo em conta que:

    O triângulo está contido num plano γ de topo, que faz um diedro de 45° com ν_0, de abertura para a esquerda. A base do triângulo mede 6 cm, é de frente e dista 8 cm do plano frontal de projecção. O vértice do triângulo tem 3 cm de cota e pertence ao plano bissector dos diedros ímpares.

21. Represente, pelas suas projecções, um pentágono regular situado no I D, assente num plano de topo que faz um ângulo de 30° com ν_0, de abertura para a esquerda. O centro da circunferência circunscrita ao pentágono é o ponto O (4; 3), e o raio da circunferência mede 3,5 cm. O lado mais distante de ν_0 é de topo.

22. Construa as projecções dum círculo, sabendo que:

    O círculo está contido num plano vertical que faz com φ_0 um diedro de 30° de abertura para a esquerda.
    O centro tem afastamento e cota iguais a 2 cm e 5 cm, respectivamente.
    O raio do círculo mede 3,5 cm.

23. Represente, pelas suas projecções, um triângulo equilátero situado no primeiro diedro de projecção e assente num plano projectante horizontal, que faz um ângulo de 45° de abertura para a esquerda. Dois dos lados do triângulo estão igualmente inclinados em relação ao eixo x, e o de nível é o de menor cota. O centro do triângulo é o ponto O (4; 6), e o raio da circunferência circunscrita ao polígono mede 5 cm.

Intersecção de dois planos

A intersecção de dois planos resulta numa recta, que é comum aos dois planos.

Caso geral

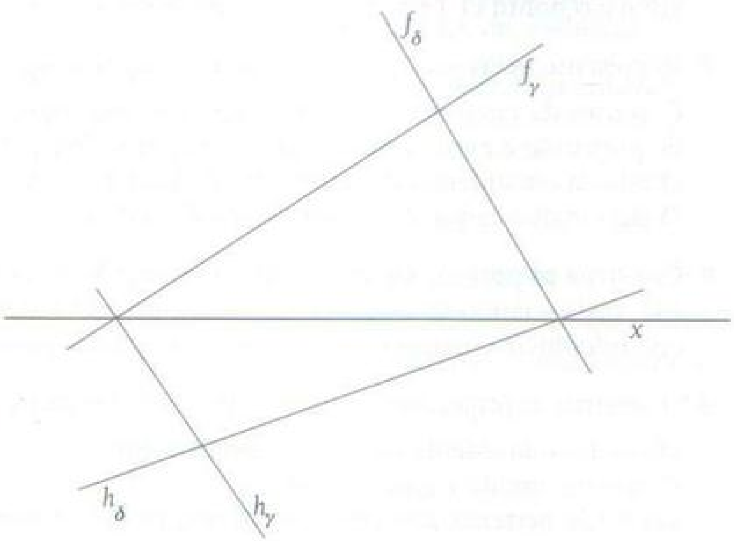
Os traços de uma recta pertencente a um determinado plano situam-se sobre os traços homónimos desse plano.

No *caso geral*, a determinação da recta de intersecção de um plano definido pelos seus traços consiste em identificar os pontos de intersecção dos traços do mesmo nome dos dois planos. Em seguida, tendo como base essa identificação, determinar a recta de intersecção.

O ponto de intersecção dos traços frontais de dois planos é a projecção frontal do traço frontal da recta de intersecção desses dois planos, cuja projecção horizontal situa-se no eixo x, pois é um ponto do plano frontal de projecção.

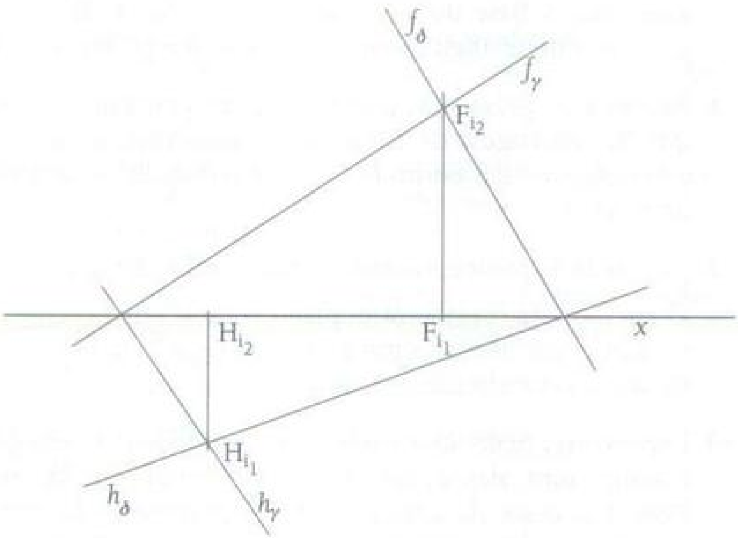
O ponto de intersecção dos traços horizontais dos dois planos, é o a projecção horizontal do traço horizontal da recta de intersecção dos dois planos, cuja projecção frontal situa-se no eixo x, já que se trata de um ponto de cota igual a zero.

Dados os planos γ e δ oblíquos, definidos pelos seus traços, determinemos a recta i, da sua intersecção.

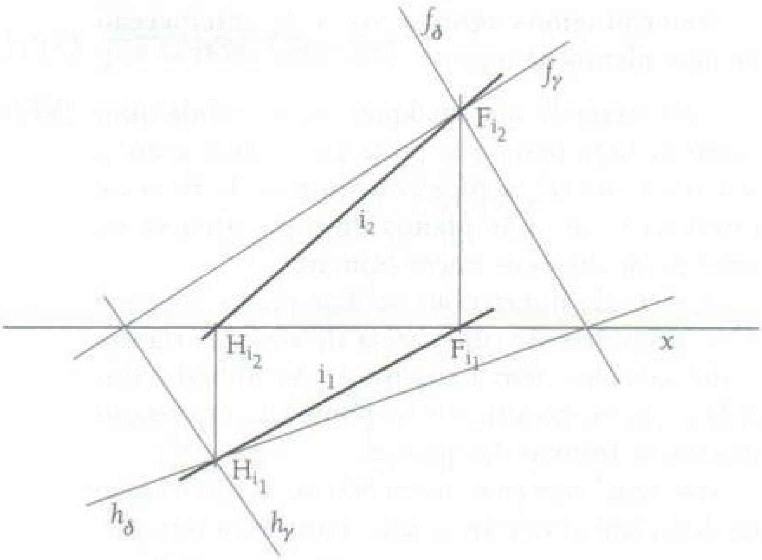


O ponto de intersecção de f_γ com f_δ é a projecção frontal do traço frontal da recta de intersecção dos planos γ e δ, F_{i_2}. A projecção horizontal de F_i, tendo em conta que é um ponto do plano frontal de projecção, situa-se no eixo x.

A intersecção de h_γ com h_δ, é projecção horizontal do traço horizontal da recta i, de intersecção dos planos γ e δ, H_{i_1}. A projecção frontal do ponto H, H_{i_2}, tendo em conta que é um ponto do plano horizontal de projecção, situa-se no eixo x.



Unindo F_{i_2} com H_{i_2} obtém-se i_2, projecção frontal da recta de intersecção dos planos γ e δ, cuja projecção horizontal i_1 resulta da união de F_{i_1} com H_{i_1}.



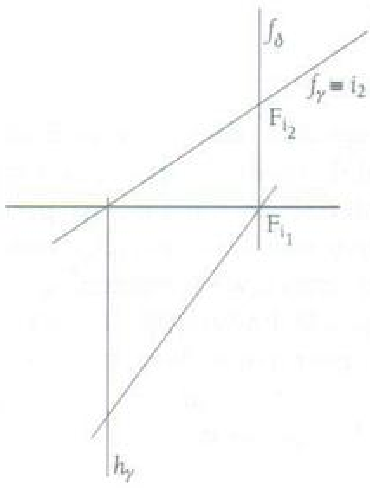
Intersecção de dois planos oblíquos.

Intersecção entre planos projectantes

Determinemos a recta de intersecção de dois planos projectantes, o plano γ, projectante frontal e o plano δ, projectante horizontal.

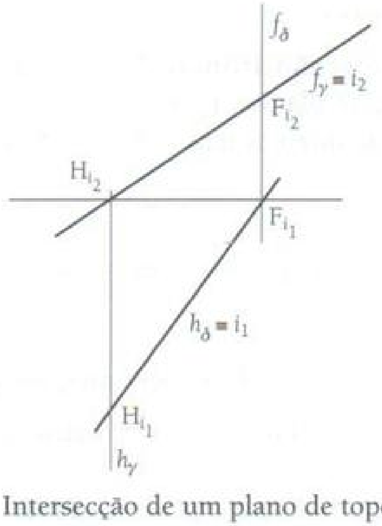
1.º passo

A projecção frontal da recta f_i, de intersecção dos planos δ e γ, é coincidente com o traço frontal do plano de topo, $F_\gamma \equiv i_2$, uma vez que todas as rectas pertencentes a um plano de topo têm a sua projecção frontal sobre o seu traço frontal.



2.º passo

A projecção horizontal da recta i, i_1, coincide com o traço horizontal do plano, h_δ, $h_\delta \equiv i_1$, pois todas as rectas dum plano projectante horizontal têm a sua projecção horizontal coincidente com o traço horizontal desse plano.



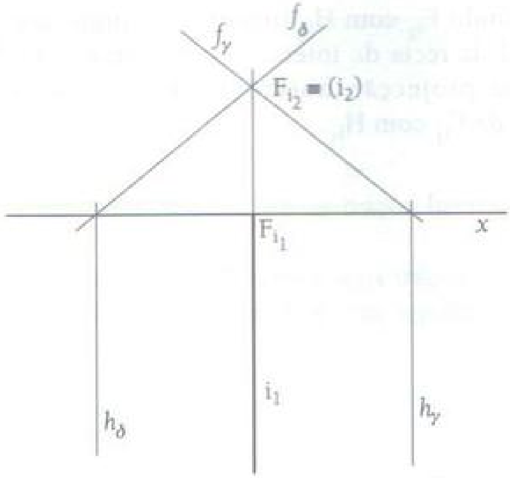
Intersecção de um plano de topo com um plano vertical.

Determinemos agora a recta de intersecção de dois planos de topo.

Considerando que qualquer recta contida num plano de topo tem a sua projecção frontal sobre o seu traço frontal, a projecção frontal da recta de intersecção de dois planos de topo situa-se na intersecção dos seus traços frontais.

A recta de intersecção de dois planos de topo é, invariavelmente, uma recta de topo; portanto, como sabemos, tem a sua projecção frontal reduzida a um ponto situado no ponto de intersecção dos traços frontais dos planos.

(De igual maneira, acrescente-se, a intersecção de dois planos verticais resulta numa recta vertical).



Intersecção de dois planos de topo.

Passemos à determinação da recta de intersecção de um plano vertical, π, com um plano de frente, φ.

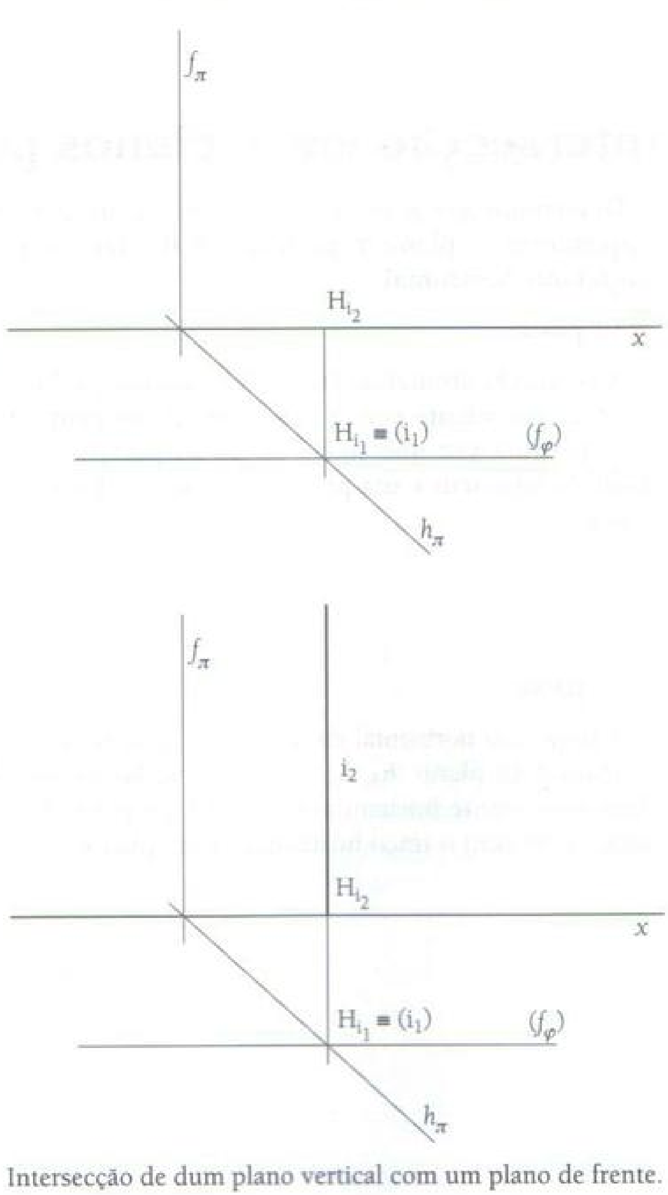
1.º passo

Estes são dois planos perpendiculares ao plano horizontal de projecção, pelo que a recta resultante da sua intersecção é uma recta perpendicular ao plano horizontal de projecção, isto é, uma recta vertical ou projecção horizontal, *i*.

A projecção horizontal, (i_1), da recta de intersecção de π e φ coincide com o ponto de intersecção do traço do plano de frente com o traço horizontal do plano vertical.

2.º passo

A projecção frontal da recta de intersecção desses dois planos, i_2, é uma linha perpendicular ao eixo *x*, que contém o ponto H, seu traço horizontal.



Intersecção de dum plano vertical com um plano de frente.

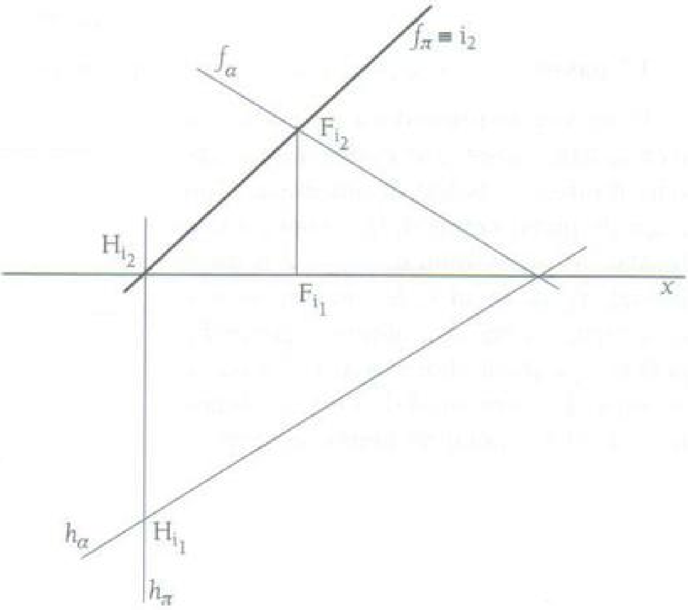
Intersecção entre um plano projectante e um plano não projectante

Consideremos dois planos que se intersectam: um deles, π, de topo e o outro, α, oblíquo.

1.º passo

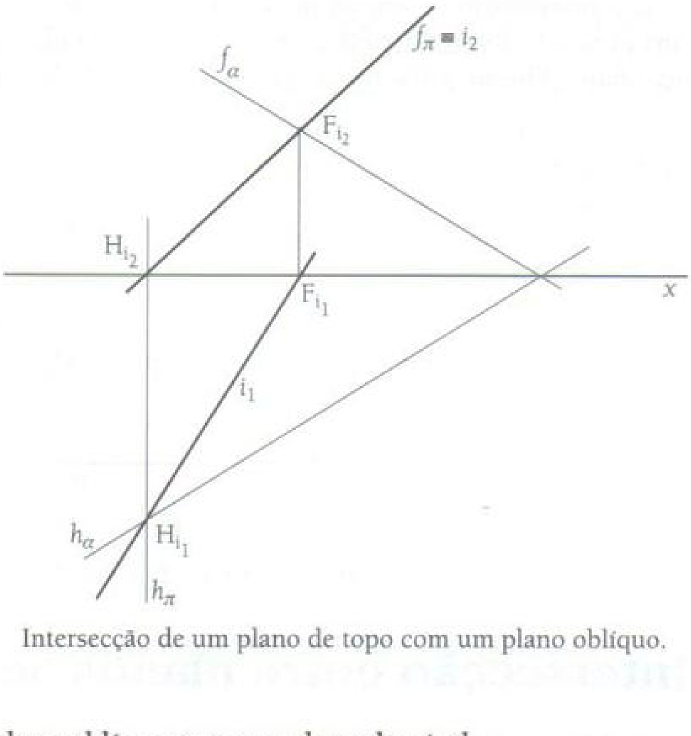
A recta *i*, de intersecção desses dois planos, tem a sua projecção frontal coincidente com v_π, porque, como já é sabido, uma recta de um plano de topo tem a sua projecção frontal sobre o traço frontal desse plano.

A projecção horizontal da recta *i* carece da determinação de pontos que a definem. Assim, com o recurso ao caso geral, determinam-se os traços da recta *i*, nomeadamente; H_i, que se situa no ponto de intersecção dos traços horizontais dos dois planos dados, e F_i, que se situa no ponto de intersecção dos traços frontais dos planos π e α.



2.º passo

Unindo as projecções horizontais dos traços horizontais da recta, obtém-se a sua projecção horizontal; por fim, distinguem-se os diferentes traços do desenho, salientando a recta de intersecção obtida.



Intersecção de um plano de topo com um plano oblíquo.

Determinemos desta vez a intersecção de um plano oblíquo com um plano de nível.

A projecção frontal da recta de intersecção dos dois planos situa-se sobre o traço frontal do plano de nível, pois um plano de nível é um plano projectante frontal.

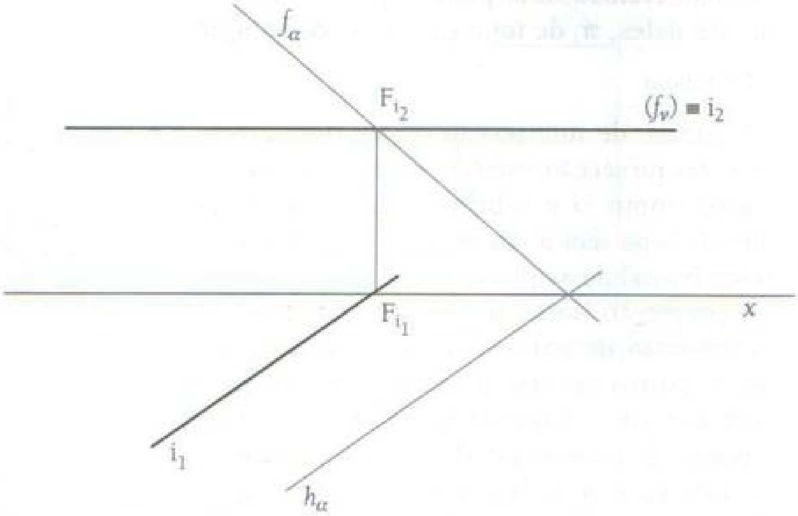
Como se pode depreender, a projecção frontal da recta *i*, i_2, é paralela ao eixo *x*; portanto, é uma recta paralela ao plano horizontal de projecção.

Ora, como sabemos, uma recta pertencente a um plano oblíquo, e paralela ao plano horizontal de projecção, é uma recta de nível.

As rectas de nível que pertencem a um plano oblíquo têm a sua projecção horizontal paralela ao traço horizontal desse plano.

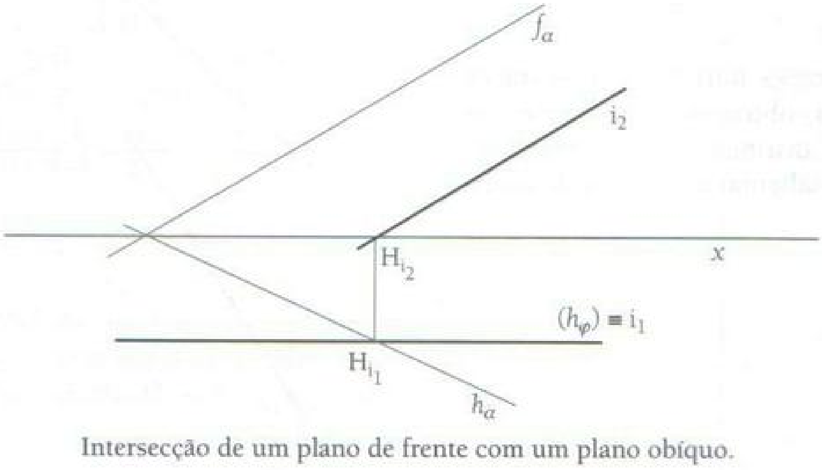
1.º passo

Uma vez conhecida a direcção da recta *i*, basta neste caso conhecer um dos seus pontos. O ponto de intersecção do traço do plano de nível, (f_ν), com o traço frontal do plano oblíquo, (f_α), é o traço frontal, F_i, da recta *i*, de intersecção dos dois planos. Uma vez obtido o ponto F_i, pela sua projecção horizontal F_{i_1}, traça-se a projecção horizontal de *i*, i_1, paralela a h_α, traço horizontal do plano oblíquo.



Intersecção de um plano de nível com um plano obíquo.

Já a intersecção de um plano de frente com um plano oblíquo tem como resultado uma recta de frente cuja projecção frontal é paralela ao traço frontal do plano oblíquo, porque, como sabemos, rectas de frente de um plano oblíquo têm a sua projecção frontal paralela ao traço frontal desse plano oblíquo.



Intersecção de um plano de frente com um plano obíquo.

Intersecção entre planos de rampa

A intersecção entre dois planos de rampa origina necessariamente uma recta fronto-horizontal.

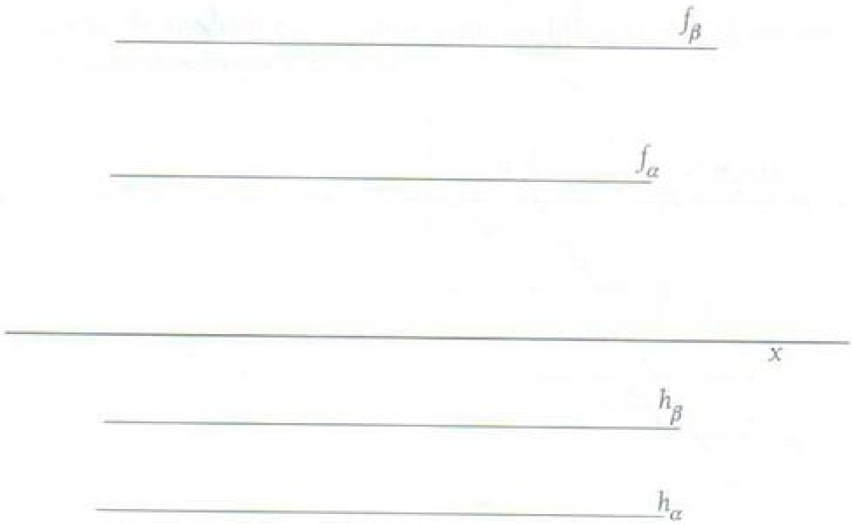
Considerando que os traços dos planos de rampa se intersectam num ponto impróprio, os traços da recta da sua intersecção também se situam no mesmo ponto.

Sendo assim, para determinar a recta de intersecção de dois planos de rampa, basta conhecer um dos seus pontos, uma vez que já se conhece a sua direcção.

Para se conhecer esse ponto é necessário recorrer-se a um plano auxiliar que contenha duas rectas não paralelas, pertencentes também a cada um dos planos de rampa. A intersecção dessas duas rectas origina um ponto I, comum aos três planos e, portanto, comum aos dois planos de rampa. De modo a que se simplifiquem os traçados, é conveniente que o plano auxiliar seja projectante.

Pelo ponto I, traça-se a recta fronto-horizontal, comum aos dois planos de rampa.

Dados os planos α e β, ambos de rampa, determinemos a recta *i*, da sua intersecção.

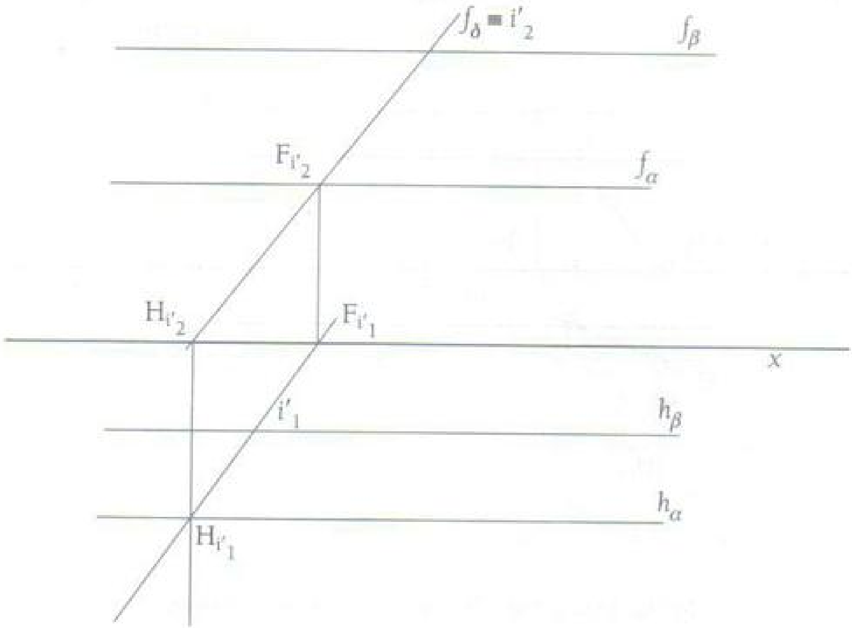


1.º passo

Em primeiro lugar, recorre-se a um plano auxiliar, neste caso, δ, de topo, para se encontrar o ponto I, na base do qual se traça a recta de intersecção de α e β.

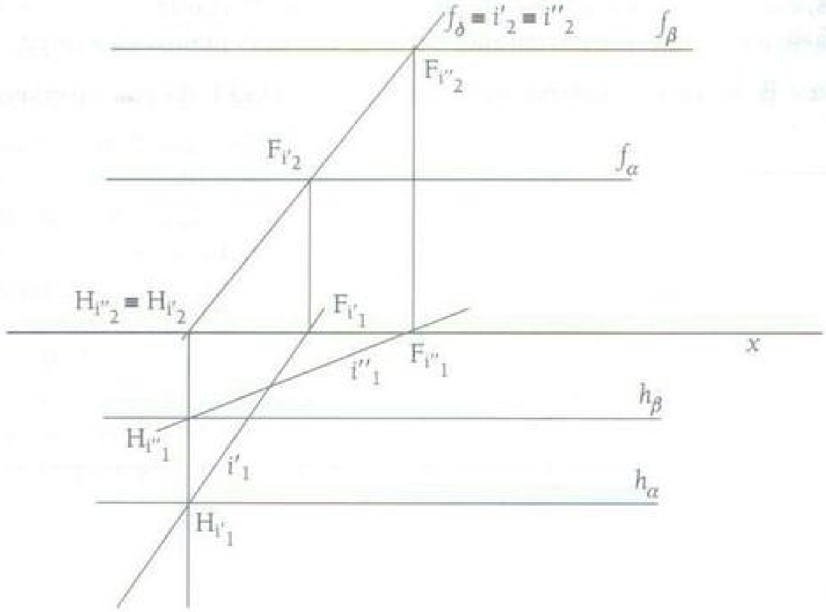
Recorrendo-se ao caso geral, determina-se a recta i', de intersecção dos planos α e δ. O ponto de intersecção de ν_α com ν_δ, traços frontais de α e δ, é a projecção frontal, $F_{i'_2}$, do traço frontal da recta de α e δ, cuja projecção horizontal, $F_{i'_1}$, por se tratar dum ponto do plano frontal de projecção, se situa no eixo x.

A intersecção dos traços horizontais dos planos α e δ origina o $F_{i'_1}$, projecção horizontal do traço horizontal da recta da sua intersecção, cuja projecção frontal, $H_{i'_2}$, se situa no eixo x, pois trata-se dum ponto do plano horizontal de projecção.



2.º passo

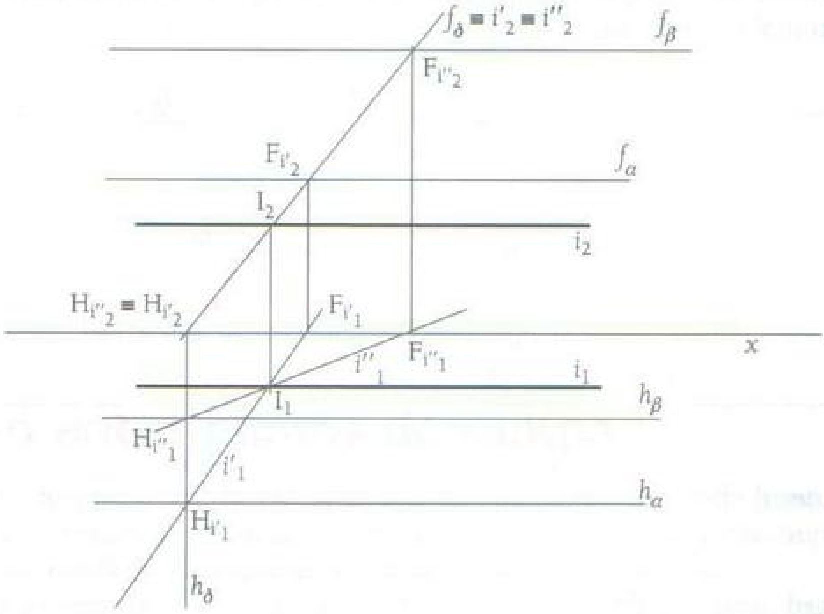
Seguindo o mesmo raciocínio, determinam-se as projecções da recta i'', de intersecção dos planos β e δ.



3.º passo

O ponto de intersecção de i'_1 com i''_1, é o ponto I_1, cuja projecção frontal se situa sobre as projecções frontais das duas rectas, que são coincidentes com o traço frontal do plano auxiliar v_δ, $\equiv i'_2 \equiv i''_2$. O ponto I é um ponto comum aos dois planos dados e ao plano auxiliar.

Por I_2 traça-se i_2, paralela ao eixo x, projecção frontal da recta i, e por I_1 traça-se i_1, projecção horizontal da recta fronto-horizontal, de intersecção dos dois planos dados.

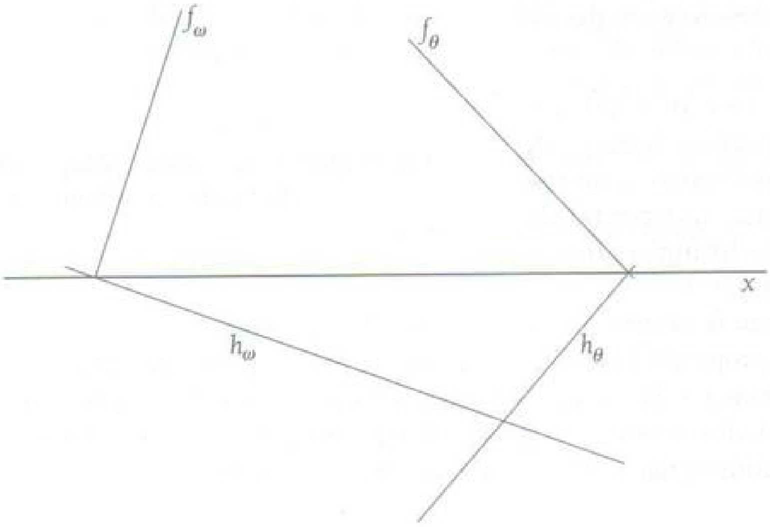


Recta de intersecção de dois planos de rampa.

Intersecção entre planos oblíquos cujos traços não se cruzam nos limites do desenho

Por vezes, mesmo que os traços do mesmo nome de dois planos não sejam paralelos, a sua intersecção pode não se encontrar dentro dos limites do desenho. Podem ser os traços frontais, horizontais ou ambos a não se intersectarem dentro dos referidos limites do desenho.

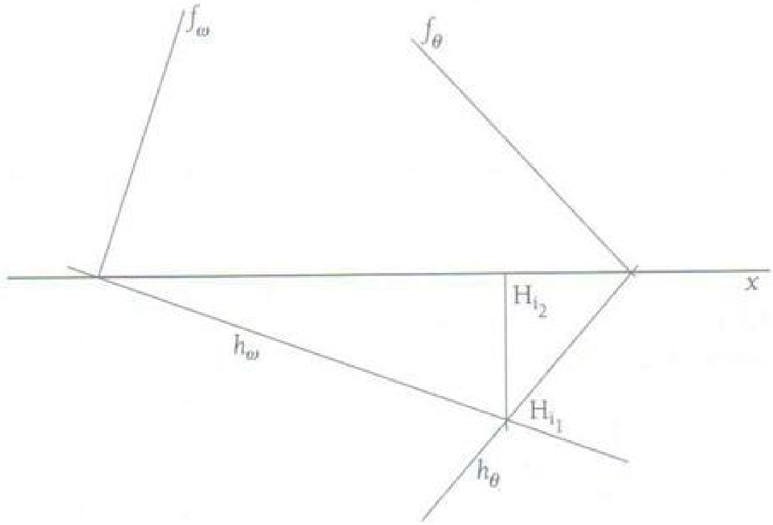
Analisemos uma situação de intersecção de dois planos oblíquos, ω e θ, em que os seus traços frontais não se intersectam dentro dos limites do desenho.



1.º passo

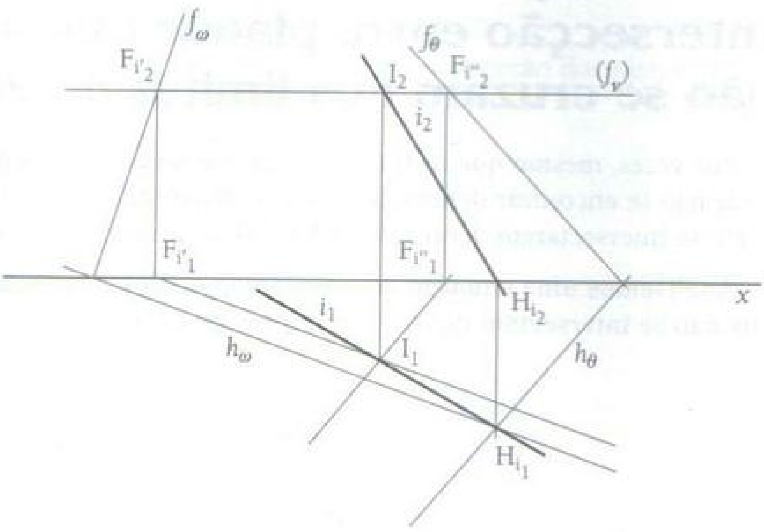
O recurso ao caso geral permite-nos determinar directamente o traço horizontal da recta de intersecção dos dois planos oblíquos.

O ponto de intersecção dos traços horizontais dos dois planos, H_i, é o traço horizontal da recta $\boldsymbol{i}$, de intersecção dos dois planos, cuja projecção horizontal coincide com o próprio ponto do espaço e cuja projecção frontal, H_{i_2} se situa no eixo x.



2.º passo

Temos apenas um ponto determinado na base da aplicação do caso geral. O outro ponto não é de determinação directa. Assim sendo, é necessário recorrer a um plano auxiliar, tal como aconteceu com a intersecção dos planos de rampa. Para este caso, o plano auxiliar será preferencialmente de nível, porquanto a sua intersecção com o plano oblíquo resulta numa recta de nível, por um lado, e, por outro lado, os seus traços intersectam-se dentro dos limites do desenho.



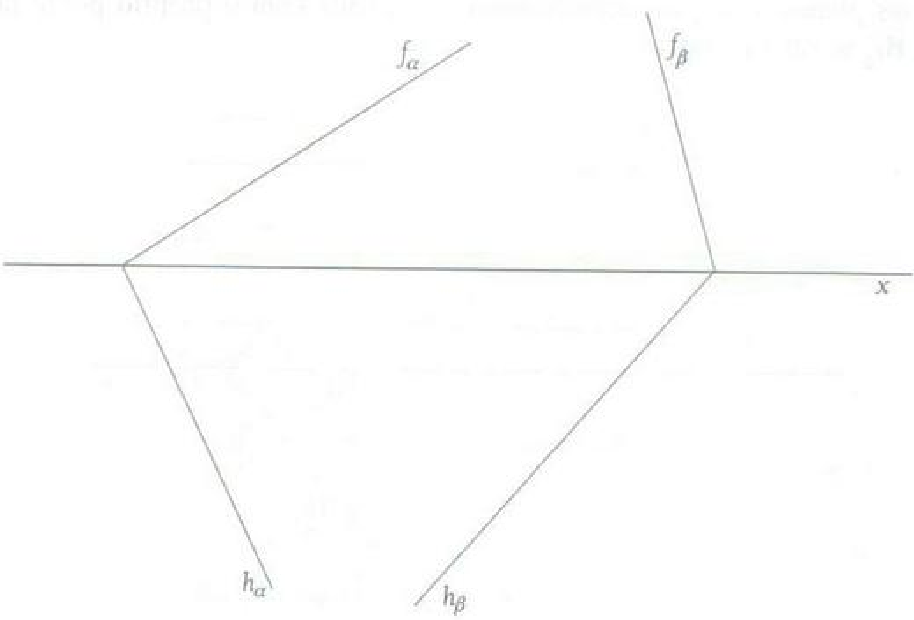
Intersecção de dois planos oblíquos cujos traços frontais se cruzam fora dos limites do desenho.

A intersecção do plano ν, de nível com o plano ω, oblíquo, origina a recta *i'*, de nível, cuja projecção horizontal, como se sabe, é paralela ao traço horizontal do plano ω, e a projecção frontal coincide com o traço do plano de nível.

A intersecção de ν com θ, origina a recta *i''*, de nível, cuja projecção horizontal é igualmente paralela ao traço horizontal de θ. A projecção frontal, como qualquer recta desse plano, situa-se sobre o seu traço frontal.

A intersecção das rectas *i'* e *i''* é o ponto **I**, que procurávamos obter, ou seja, o segundo ponto comum entre os planos ω e θ, dados. Unindo os pontos **H** e **I**, obtemos a recta de intersecção destes dois planos oblíquos, cujos traços frontais não se cruzam dentro dos limites do desenho.

Analisemos uma situação de intersecção de dois planos oblíquos, sendo que, desta vez ambos os traços não se intersectam dentro dos limites do desenho.



Neste caso, a aplicação do caso geral não tem lugar, pois quer os traços frontais quer os traços horizontais não se cruzam dentro dos limites do desenho.

Assim sendo, logo à primeira vista percebemos que é necessário recorrer a planos auxiliares, que podem ser preferencialmente de nível ou de frente, ou de nível e de frente.

Portanto, a opção fez-se por planos auxiliares de frente, sendo o raciocínio idêntico ao do exercício anterior.

1.º passo

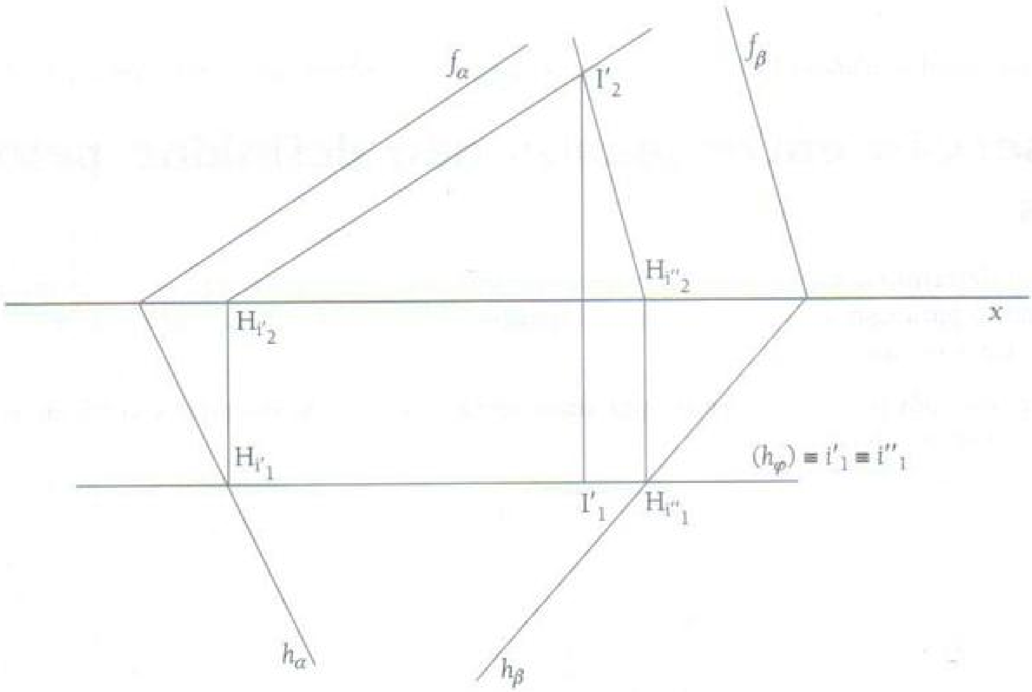
Analisemos portanto a aplicação, na prática desta forma de resolução do problema.

Dados os planos α e β, oblíquos, cujos traços não se encontram dentro dos limites do desenho, em primeiro lugar recorre-se a um plano auxiliar, que como se disse, a opção foi por um plano de frente.

Determina-se a recta *i'*, de intersecção dos planos α, oblíquo, com o plano auxiliar φ, de frente. Recorda-se, certamente, de que a recta de intersecção de um plano de frente com um plano oblíquo é uma recta de frente cuja projecção frontal é paralela ao traço frontal do plano oblíquo e a projecção horizontal é coincidente com o traço do plano de frente.

Procede-se da mesma forma para a obtenção de *i''*, recta de intersecção do plano β com o mesmo plano auxiliar φ.

A intersecção de *i'* com *i''*, origina o ponto *I'*, o primeiro ponto de intersecção dos planos α e β, oblíquos.



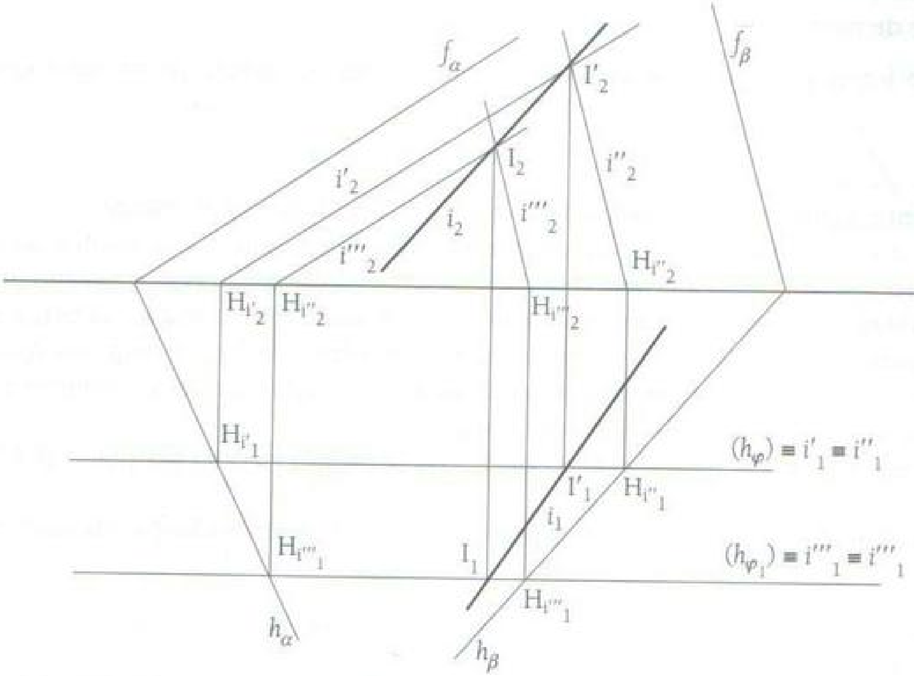
O ponto I, por si só, não é suficiente para determinar as projecções da recta *i*, de intersecção dos dois planos dados, pois para a definição de uma recta são necessários dois pontos, ou um ponto e uma direcção.

Como não se sabe qual será a direcção da recta que se procura, é necessário encontrar um outro ponto, o ponto I', de intersecção dos dois planos dados.

Optemos por mais um plano de frente, φ_1. A intersecção de α com φ_1 é uma recta *i'''*, de frente; a intersecção de β com φ_1 resulta igualmente numa recta de frente, cuja intersecção com a anterior é o ponto I', o segundo ponto da recta de intersecção dos planos α e β, dados.

1.º passo

Unindo os pontos I e I′, obtém-se a recta de intersecção dos dois planos dados.

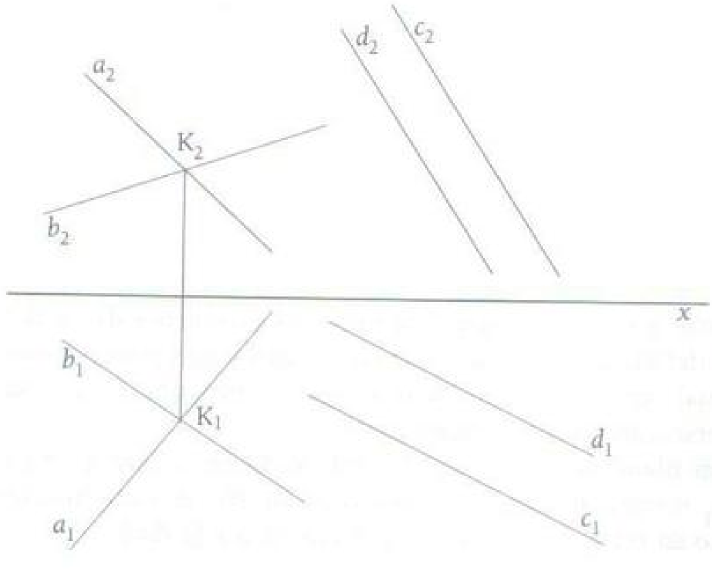


Intersecção dos dois planos oblíquos, α e β, cujos traços não se intersectam dentro dos limites do desenho.

Intersecção entre planos não definidos pelos seus traços

É possível determinar as projecções da recta de intersecção de dois planos não definidos pelos seus traços, bastando para isso recorrer aos conhecimentos que acabámos de adquirir e às rectas de um plano definido por duas rectas.

Consideremos um plano δ, definido por duas rectas *a* e *b*, concorrentes, e o plano γ, definido por duas rectas, *c* e *d*, paralelas.



O recurso a planos auxiliares, particularmente de nível ou de frente, como aconteceu nos casos anteriores, é uma via para encontrar a solução deste exercício.

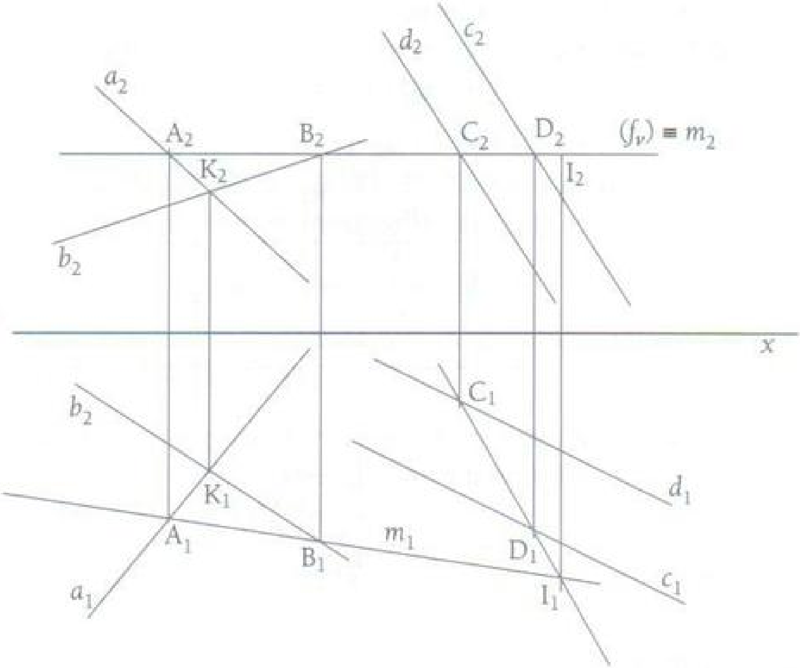
1.º passo

Utilizemos um plano de nível, ν, como plano auxiliar.

A intersecção do plano de nível, ν, com o plano δ, definido pelas rectas ***a*** e ***b***, origina a recta ***m***, definida pelos pontos A e B.

A recta ***n***, definida pelos pontos C e D, é a recta de intersecção entre o plano auxiliar ν, e o plano γ, definida por duas rectas paralelas, ***c*** e ***d***.

A intersecção das rectas ***m*** e ***n*** é o ponto I, o primeiro ponto da recta de intersecção dos planos δ e γ.

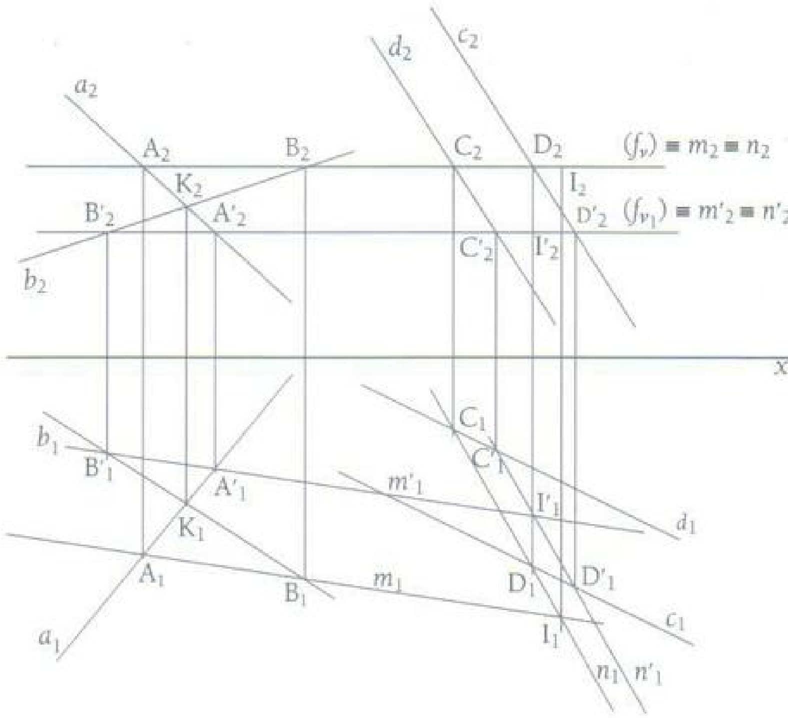


2.º passo

Como é fácil perceber, o ponto **I** não é suficiente para definir a recta ***i***, de intersecção dos dois planos dados. É necessário, tal como nos outros casos, utilizar um segundo plano auxiliar para encontrar o segundo ponto da recta de intersecção dos dois planos.

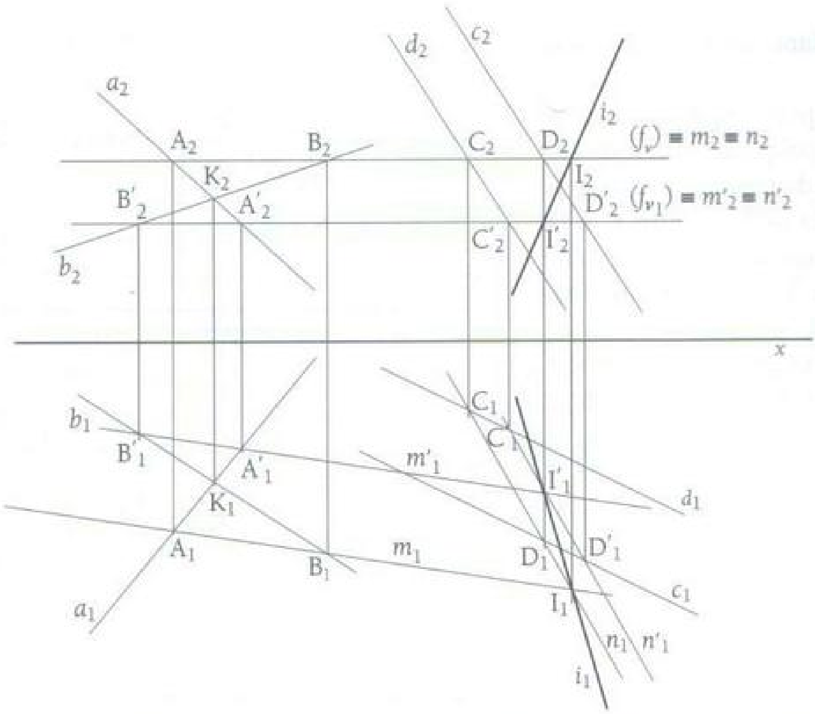
Utilizemos, igualmente, um outro plano de nível, ν_1, como o segundo plano auxiliar. A intersecção do plano ν_1, com o plano δ, origina a recta ***m′***, sendo que a intersecção entre os planos ν_1 e γ, tem como resultado a recta ***n′***.

O ponto I′, de intersecção das rectas ***m′*** com a recta ***n′***, é o segundo ponto da recta de intersecção dos planos δ e γ, dados.



3.º passo

Unindo os pontos I e I′, obtém-se a recta *i*, a pretendida recta de intersecção dos dois planos dados.



Intersecção de dois planos definidos por rectas concorrentes e paralelas.

Exercícios propostos

1.* Determine a recta resultante da intersecção de um plano de nível de 3 cm de cota com um plano de frente com 1,5 cm de afastamento.

2. Dados dois planos, sendo um de frente e o outro projectante horizontal, determine a recta da sua intersecção. O plano de frente dista 5 cm do plano frontal de projecção. O plano projectante horizontal faz com o plano frontal de projecção um ângulo de 60°, de abertura para a esquerda.

3. Considere dois planos de topo, assim posicionados. Um tem abertura para a direita, faz com ν_0 um diedro de 30°, e os seus traços cruzam-se num ponto de abcissa igual a 0 cm. O outro plano de topo tem abertura para a esquerda, fazendo 45° e os seus traços se cruzam num ponto de 5 cm de abcissa.

4. Determine a intersecção de um plano de topo com um plano de nível, sabendo que:

   O plano de topo faz com o plano horizontal de projecção, um ângulo de 60°, de abertura para a direita.
   O plano de nível dista 4 cm do plano horizontal de projecção.

5. Um plano oblíquo faz 30° e 60°, respectivamente com o plano horizontal de projecção e plano frontal de projecção, de abertura para a direita. Um outro plano, de frente, tem afastamento igual a 3 cm. Represente os planos acima descritos e determine a sua recta de intersecção.

6.* Determine a recta de intersecção entre um plano de rampa e um plano de topo, posicionados da seguinte maneira:

   O traço horizontal do plano de rampa dista 3 cm para baixo do eixo x, e o seu traço frontal dista 4 cm para cima do mesmo eixo x.
   O plano de topo tem abertura para a direita e faz com o plano horizontal de projecção um diedro de 60°.

7. Determine a recta de intersecção de um plano de rampa com um plano de nível, tendo em conta que:

   Os traços horizontal e frontal do plano de rampa têm, respectivamente, 3 cm de afastamento e 6 cm de cota.
   O plano de nível dista 4 cm do plano horizontal de projecção.

8. Determine a recta de intersecção entre um plano oblíquo e um plano de frente. Os traços horizontal e frontal do plano oblíquo fazem, respectivamente, com o eixo x, ângulos de 45° e 75°, de abertura para a direita. O plano de frente tem 3 cm de afastamento.

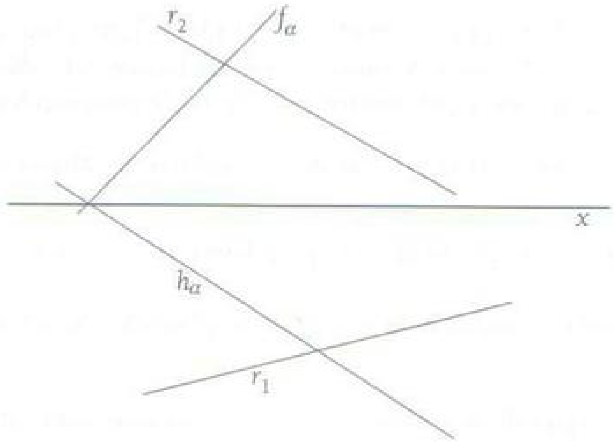
Intersecção de rectas com planos

Uma recta intersecta um plano num ponto. Esse ponto é um ponto do plano e também da recta, ou seja, é um elemento comum à recta e ao plano.

Em geral, a determinação do ponto de intersecção de uma recta com um plano segue os seguintes passos:

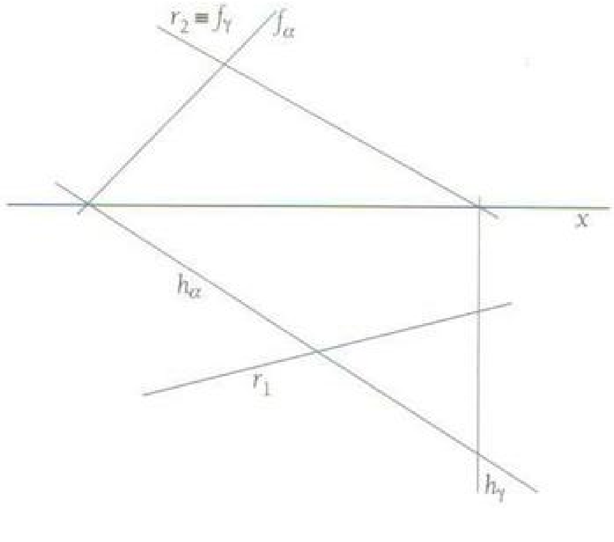
1.º Conter a recta num plano auxiliar (geralmente um plano projectante).
2.º Determinar a recta de intersecção do plano dado com o plano auxiliar.
3.º Determinar o ponto de intersecção da recta dada com a recta de intersecção dos dois planos, que é o ponto de intersecção procurado.

Dado um plano oblíquo, α, definido pelos seus traços, e uma recta oblíqua r, determinemos o ponto I, da sua intersecção.



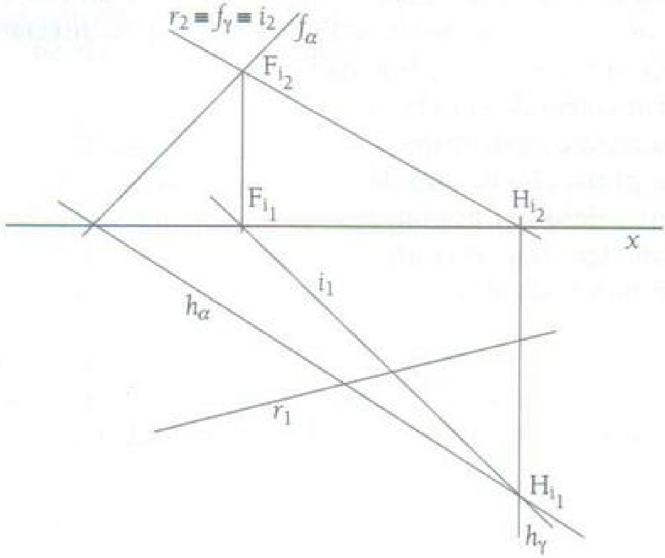
1.º passo

Em primeiro lugar, conduz-se pela recta ***r*** um plano auxiliar γ, projectante frontal. A preferência por um plano auxiliar projectante prende-se com o facto de a sua obtenção ser directa; ou seja, para que a recta dada pertença a um plano auxiliar projectante, não há necessidade de uso de muitos traços auxiliares, senão fazer coincidir o traço do plano auxiliar com uma projecção da recta onde o plano auxiliar é projectante. Por exemplo, se o plano auxiliar for projectante frontal, faz-se coincidir o seu traço frontal com a projecção frontal da recta. Se for projectante horizontal, faz-se coincidir o traço horizontal do plano com a projecção horizontal da recta.



2.º passo

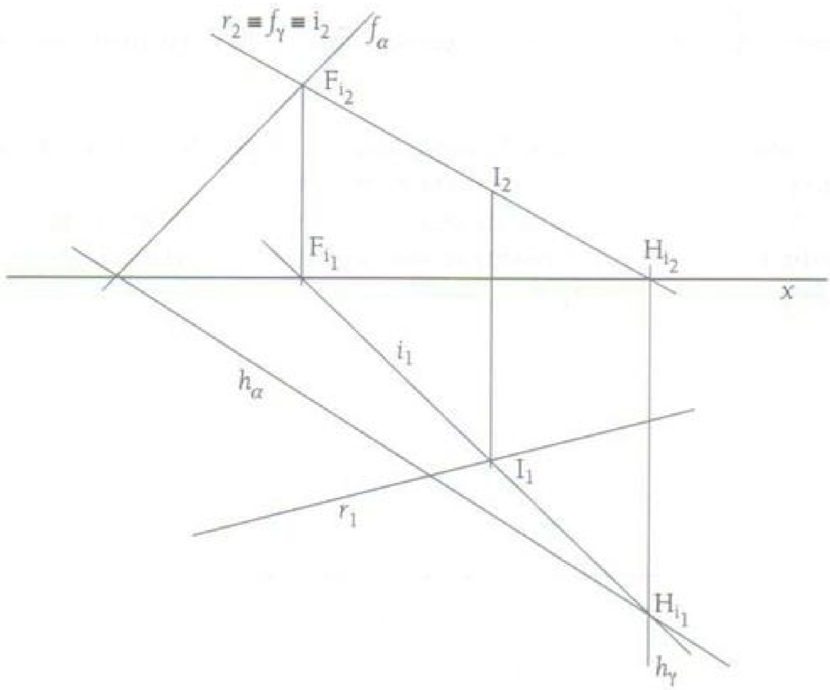
Determina-se a recta *i* de intersecção dos planos α e γ. Onde se intersectam os traços frontais dos planos obtém-se o traço frontal da recta de intersecção dos dois planos, cujo traço horizontal se encontra no ponto de intersecção dos traços horizontais dos dois planos.



Intersecção do plano dado α com o plano auxiliar γ.

3.º passo

Determina-se o ponto I, de intersecção da recta *r*, com a recta *i*, auxiliar. O ponto I é o ponto procurado, o ponto de intersecção da recta *r*, com o plano α.



Ponto de intersecção de uma recta com o plano α.

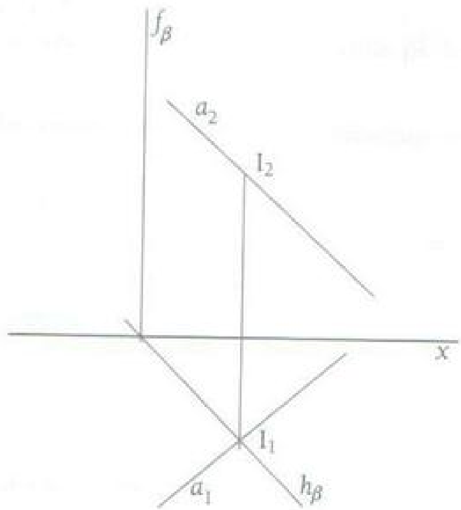
Por vezes, a determinação do ponto de intersecção de uma recta com um plano é directa, dispensando, deste modo, a aplicação do método geral, como acontece, por exemplo, com os casos que se seguem.

Determinemos o ponto I, de intersecção de uma recta a, oblíqua com um plano β, vertical, ou seja, um plano projectante horizontal.

1.º passo

O ponto de intersecção da recta *a* com o plano oblíquo obtém-se directamente, pois a intersecção do traço horizontal do plano com a projecção horizontal da recta origina directamente a projecção horizontal do ponto I, de intersecção da recta com o plano dado.

Uma vez que o ponto I, para além de pertencer ao plano também pertence à recta *a*, a sua projecção frontal situa-se sobre a projecção frontal da recta. Recorda-se, certamente, de que um ponto pertence a uma recta se o ponto tem as suas projecções sobre as projecções homónimas da recta.



Intersecção de uma recta oblíqua com um plano vertical.

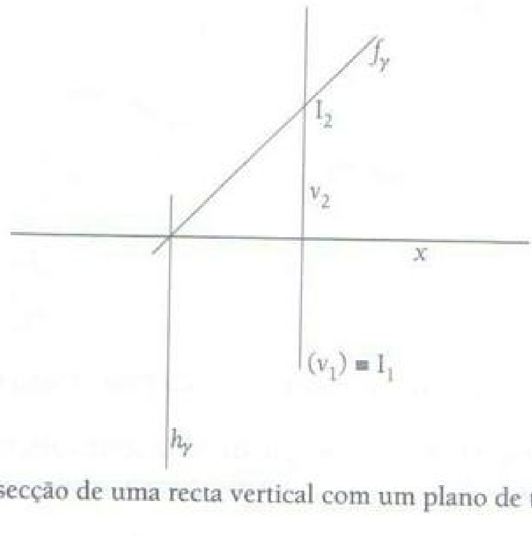
De igual modo, podem determinar-se as projecções do ponto de intersecção de uma recta com um plano projectante frontal.

Determinemos, desta vez, o ponto de intersecção de uma recta v, vertical, com um plano γ, de topo.

1.º passo

A intersecção de f_γ, traço frontal do plano de topo, com v_2, projecção frontal da recta vertical, origina a projecção frontal I_2, do ponto de intersecção da recta com o plano.

A projecção horizontal de todos os pontos de uma recta vertical coincide com a sua própria projecção horizontal, que fica reduzida a um ponto. Assim sendo, a projecção horizontal do ponto I coincide com a projecção horizontal da recta v, ou seja, $I_1 \equiv v_1$.



Intersecção de uma recta vertical com um plano de topo.

Exercícios propostos

1. Dados um plano de nível com 2,5 cm de cota e uma recta vertical (ou projectante horizontal), com 3 cm de afastamento, determine o ponto I, da sua intersecção.

2.* Determine o ponto I, de intersecção, de uma recta de nível com um plano projectante horizontal. A recta de nível tem cota igual a 3 cm, faz um ângulo de 45° com φ_0, de abertura para a direita, e o seu traço frontal tem 1 cm de abcissa. O plano projectante horizontal faz com o plano frontal de projecção um diedro de 30°, de abertura para a esquerda, e os seus traços cruzam-se num ponto de 7 cm de abcissa.

3. Determine o ponto I, ponto de intersecção de uma recta oblíqua com um plano projectante frontal. A recta oblíqua pertence ao $\beta_{1/3}$, é concorrente com o eixo x num ponto com −3 cm de abcissa e faz, com o plano frontal de projecção, um ângulo de 60°, de abertura para a esquerda. Os traços do plano de topo intersectam-se num ponto com 2 cm de abcissa e faz, com o plano horizontal de projecção, um diedro de 30°, de abertura para a esquerda.

4. Dado um plano de rampa, α e uma recta projectante horizontal, v, determine o ponto da sua intersecção, tendo em conta os dados que se seguem. Os traços horizontal e frontal do plano têm, respectivamente, 5 cm de afastamento e 3 cm de cota. A recta projectante horizontal tem 3 cm de afastamento.

5.* Sendo dados uma recta oblíqua e um plano de rampa, determine o ponto comum entre eles, tendo em conta que:

A recta contém o ponto A (4; 2) e a sua projecção horizontal faz com o eixo x um ângulo de 45°, de abertura para a esquerda.
O traço horizontal da recta tem −2,5 cm de afastamento.
Os traços do plano de rampa têm 4 cm de afastamento e 3 cm de cota, sendo respectivamente o traço horizontal e o traço frontal.

Projecções de sólidos geométricos

Invisibilidade

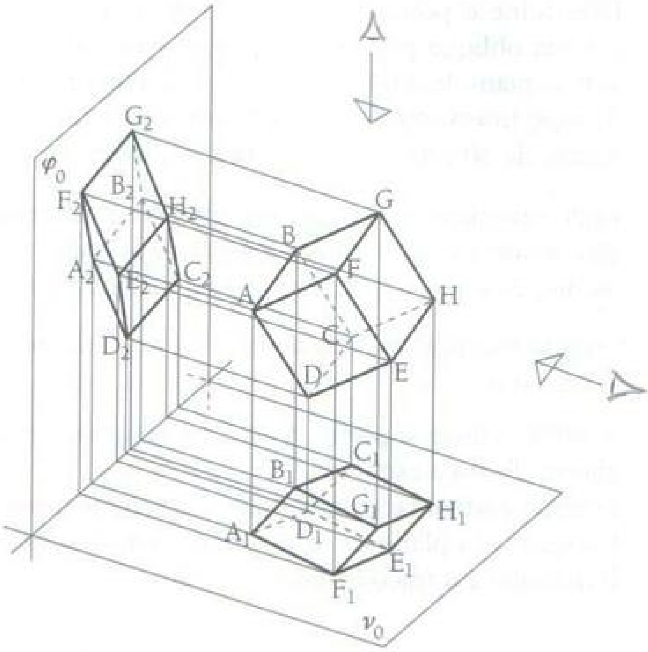
Todos os *contornos visíveis* de um objecto são representados a traço grosso e os *contornos invisíveis* a traço interrompido ou ponteado.

São invisíveis aqueles contornos ou partes de contornos que são cobertos por outros.

Dos pontos situados na mesma projectante horizontal, só é visível aquele que tiver maior cota, sendo, portanto, invisíveis todos os outros.

Todos os pontos situados na mesma projectante frontal são invisíveis, exceptuando aquele que estiver próximo do observador, o de maior afastamento.

Portanto, nas projecções de sólidos geométricos é necessário ter em conta as partes do contorno que façam parte da mesma projectante.



Contornos visíveis e invisíveis de um sólido.

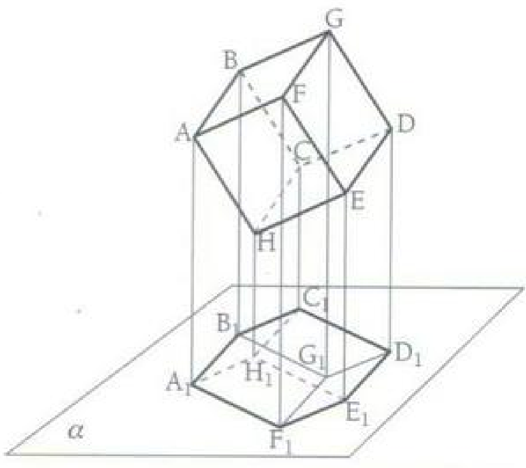
Contorno aparente

O *contorno* é a linha ou a superfície que delimita a forma de um objecto ou seja, que limita exteriormente um objecto.

O *contorno aparente*, numa dada projecção, é a linha que separa a parte visível da parte invisível dos objectos projectados.

O *contorno aparente horizontal* de um sólido geométrico é a linha que determina os limites dessa projecção, isto é, a linha que separa, em projecção horizontal, a parte visível da parte invisível do sólido.

O *contorno aparente frontal* de um sólido geométrico é a linha que em projecção frontal separa a parte visível da parte invisível do sólido, ou seja, a linha que determina os limites da projecção frontal.



Contorno aparente de um sólido, visível na sua projecção e no próprio sólido, no espaço.

Sólidos assentes em planos paralelos aos planos de projecção

No caso de sólidos geométricos que possuem bases assentes em planos paralelos aos planos de projecção, a sua base projecta-se em verdadeira grandeza no plano de projecção a que a base é paralela, sendo a altura do sólido perpendicular a esse plano de projecção.

Pirâmides

Uma pirâmide é um sólido geométrico constituído por uma base e por faces laterais que apresentam formas triangulares. Estas faces partem da base e convergem num ponto chamado vértice da pirâmide.

Se a base de uma pirâmide for um polígono regular, essa pirâmide é regular.

Uma pirâmide regular é aquela cuja linha que une o centro da base ao vértice é igual à altura, ou seja, é perpendicular à base. Designa-se por pirâmide regular recta e tem as faces laterais iguais.

Projecções de pirâmides assentes em planos horizontais ou de nível

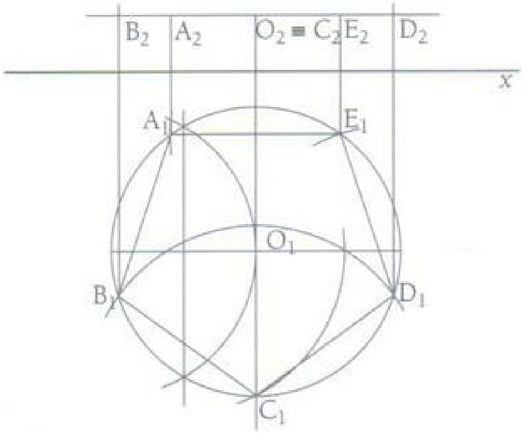
Uma pirâmide assente num plano de nível tem a projecção horizontal da sua base em verdadeira grandeza. A sua altura projecta-se em verdadeira grandeza no plano frontal de projecção.

Vamos determinar as projecções de uma pirâmide pentagonal regular recta, assente pela sua base num plano de nível de cota igual a 1 cm.

A base da pirâmide está circunscrita a uma circunferência de raio igual a 2,5 cm, cujo centro tem 3 cm de afastamento. O lado da base de menor afastamento é fronto-horizontal. O vértice da pirâmide tem cota igual a 6 cm.

1.º passo

Representa-se pelas suas projecções o pentágono regular, base da pirâmide. Este passo da resolução do exercício corresponde ao capítulo de projecções de figuras planas, que é certamente do seu domínio.



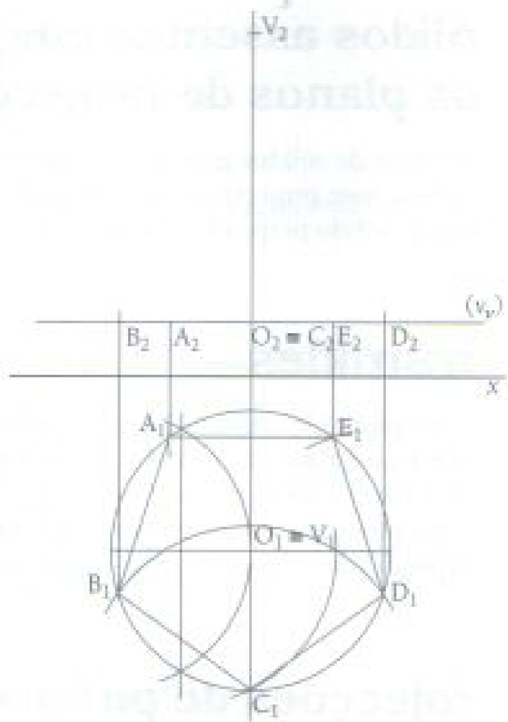
Projecção da base da pirâmide pentagonal.

2.º passo

Uma vez projectada a base do sólido, resta projectar o seu vértice, ao que se segue a união deste com os vértices da base.

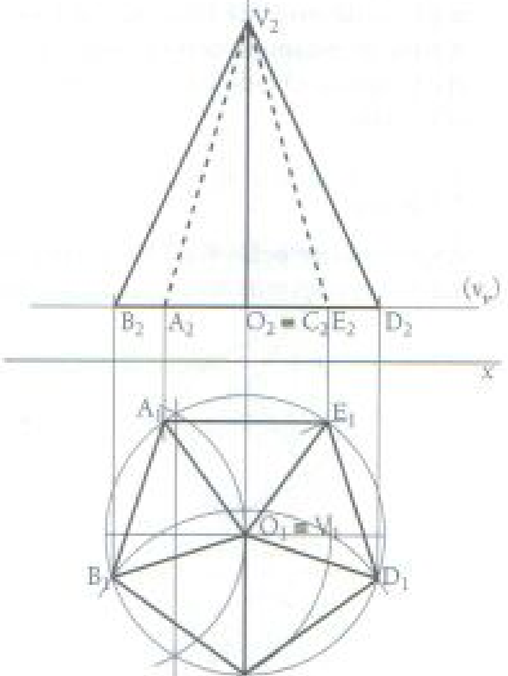
Considerando que se trata de uma pirâmide regular recta, o vértice situa-se numa linha perpendicular à base, que passa pelo centro desta. Sendo assim, este vértice encontra-se na mesma projectante horizontal que o centro da base; portanto, V_1 é coincidente com O_1.

Sobre a linha de chamada do centro do pentágono marcam-se 6 cm de cota e representa-se V_2, projecção frontal do vértice do pentágono.



3.º passo

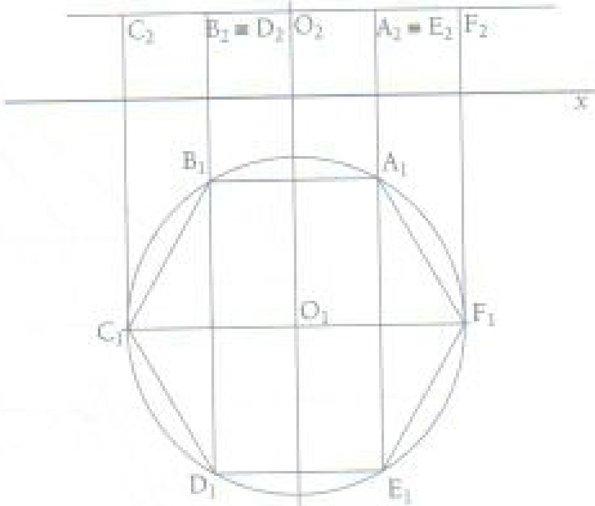
Para que as projecções da pirâmide sejam consideradas concluídas, resta apenas unir as projecções da base com as projecções do mesmo nome do vértice da pirâmide.



Projecções da pirâmide pentagonal, distinguindo-se o contorno aparente das suas projecções.

Resolvamos um outro exercício, que desta vez consiste em determinar as projecções de uma pirâmide hexagonal oblíqua situada no primeiro diedro de projecção:

- A pirâmide está assente pela base num plano de nível de 1,5 cm de cota.
- O centro da base tem 4 cm de afastamento, e o raio da circunferência circunscrita à base mede 3 cm.
- Duas das arestas da base são horizontais de frente.
- A altura da pirâmide é de 5,5 cm.
- A aresta lateral situada mais à direita é perpendicular à base.



Determinação das projecções dos vértices da base da pirâmide.

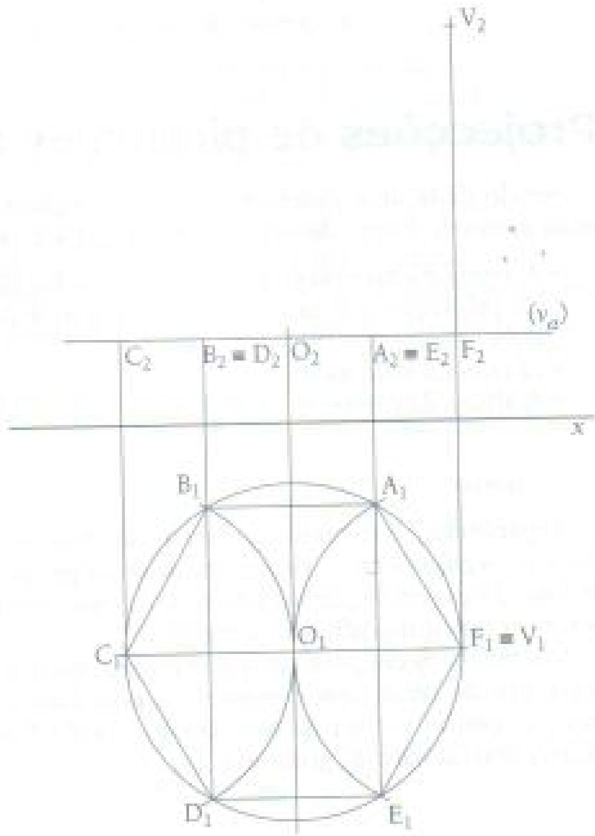
1.º passo

Em primeiro lugar, representa-se pelas suas projecções um hexágono regular, com as características acima descritas.

2.º passo

Seguidamente, marca-se a altura do sólido, pelo processo que é já do seu conhecimento, e que sabe encontrar-se numa linha perpendicular à base. Como a aresta lateral situada mais à direita é perpendicular à base, é sobre ela que se marca a altura do sólido, a partir do plano da base e para cima deste.

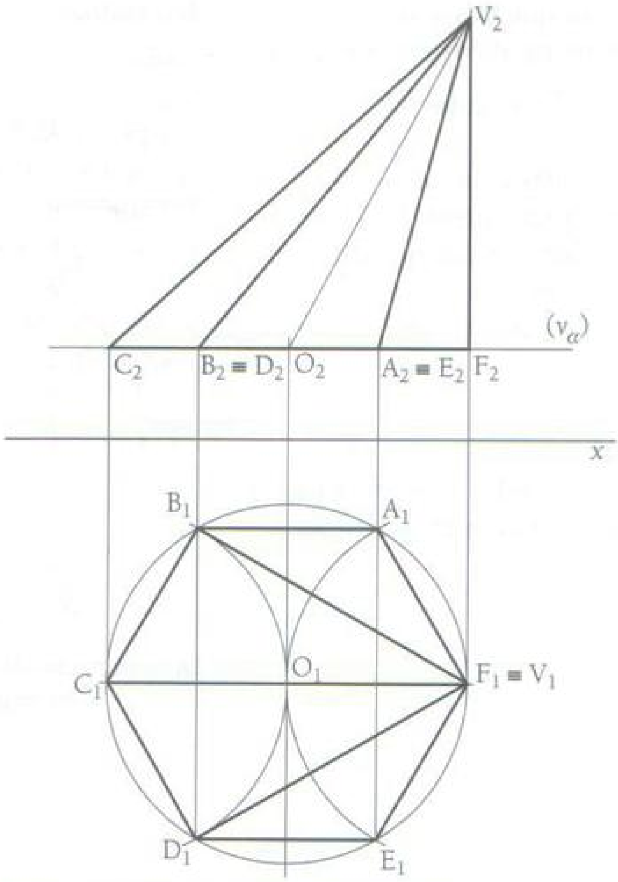
Assim, a cota do vértice é de 7 cm, medida correspondente a 1,5 cm da cota da base, mais 5,5 cm da altura da pirâmide.



Projecção da base da pirâmide hexagonal.

3.º passo

Finalmente, unem-se as projecções dos vértices da base com as projecções do mesmo nome do vértice da pirâmide, obtendo-se a projecção frontal do sólido, como podemos ver na figura da página seguinte.



Projecções da pirâmide hexagonal, distinguindo-se o contorno aparente.

Projecções de pirâmides assentes em planos de frente

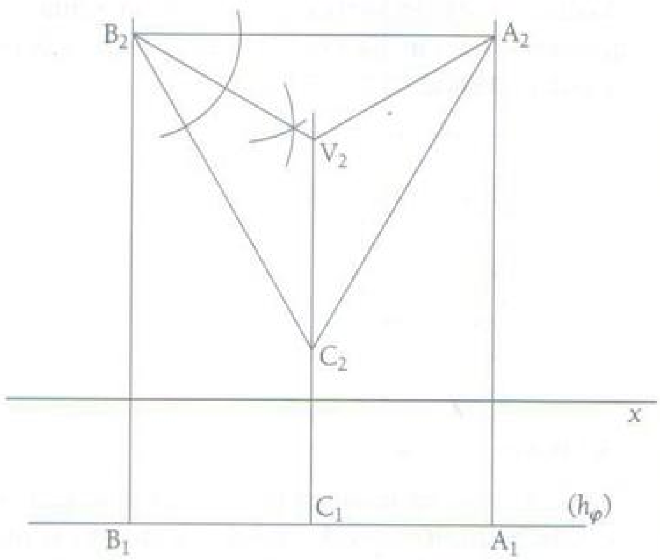
Sendo dada uma pirâmide triangular regular recta, situada no primeiro diedro de projecção, assente num plano de frente de afastamento igual a 2 cm, determinemos as suas projecções, sabendo que:

- A aresta da base mais distante do plano horizontal de projecção é fronto-horizontal e tem 6 cm de cota.
- O lado da base mede 6 cm.
- A altura da pirâmide é de 6 cm.

1.º passo

Representa-se o plano de frente através do seu traço e, seguidamente, determinam-se as projecções da base da pirâmide, de acordo com as características descritas no enunciado do exercício.

Marcam-se 6 cm para cima do eixo x e traça-se um segmento de recta, que é paralelo a esse eixo e que mede 6 cm de comprimento, sendo o lado fronto-horizontal da base da pirâmide.



Projecção da base da pirâmide triangular.

Com a ponta seca do compasso num dos extremos e depois no outro extremo do lado fronto-horizontal, e uma abertura igual à medida desse lado dado, traçam-se dois arcos para baixo desse lado. A intersecção dos arcos origina o terceiro vértice da base da pirâmide.

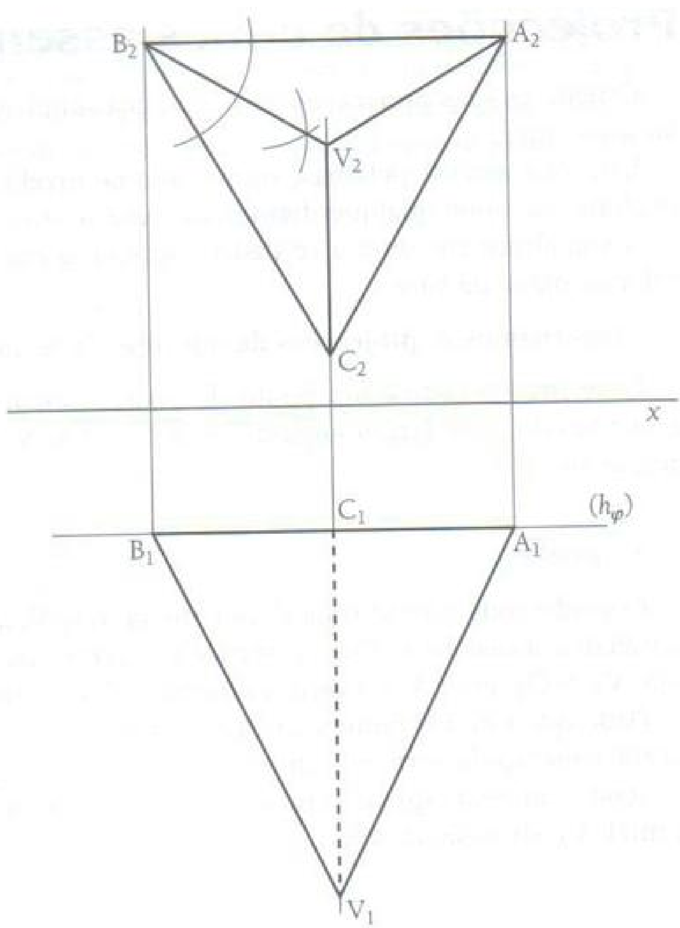
Os três vértices têm a sua projecção horizontal sobre o traço horizontal do plano, que se situa 2 cm para baixo do eixo x.

2.º passo

Traçam-se duas bissectrizes de dois dos ângulos do triângulo, cujo ponto de intersecção é a projecção frontal O_2, do centro da base da pirâmide e determina-se a projecção horizontal do mesmo, O_1.

A partir de O_1, marcam-se para baixo 6 cm e representa-se V_1, projecção horizontal do vértice da pirâmide. A projecção frontal do vértice da pirâmide, V_2, é coincidente com a projecção frontal do centro da base.

Unindo as projecções dos vértices da base às projecções do mesmo nome do vértice da pirâmide obtêm-se as projecções da pirâmide pretendida.



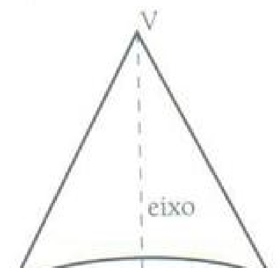
Projecções da pirâmide triangular, distinguindo-se o seu contorno aparente.

Cones

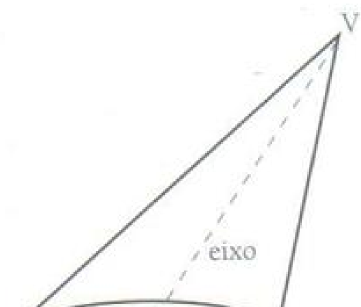
Um cone é um sólido geométrico limitado por uma base, um vértice e uma superfície lateral cónica.

Um cone pode ser recto (de revolução) ou oblíquo. Um *cone* é *recto* ou *de revolução* quando a linha que une o seu vértice ao centro da sua base circular é perpendicular a essa base, correspondendo portanto à sua altura.

Um *cone* é considerado *oblíquo* quando a linha que une o seu centro da base ao vértice for oblíqua em relação à base, não sendo igual à medida da altura.



Cone recto, ou de revolução.



Cone oblíquo.

Projecções de cones assentes em planos de nível

Quanto às suas projecções, um cone fica suficientemente definido através das projecções da sua base e do seu vértice.

Um cone assente pela base num plano de nível tem em projecção horizontal a verdadeira grandeza da sua base, tal como qualquer figura cuja base se situe num plano de nível.

A sua altura encontra a verdadeira grandeza em projecção frontal, que se marca sobre uma perpendicular ao plano da base.

Construamos as projecções de um cone de revolução situado no I D, assente num plano de nível.

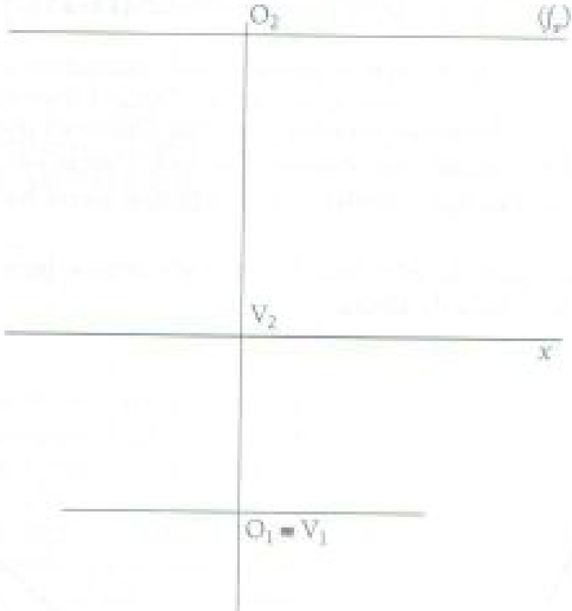
O vértice do cone é um ponto do plano horizontal de projecção e tem afastamento igual a 3 cm. As geratrizes do cone fazem ângulos de 60° com v_0, e um dos pontos da base pertence ao plano frontal de projecção.

1.° passo

Considerando que se trata dum cone de revolução, a linha que une o vértice ao centro da base é perpendicular a essa base; logo, o vértice e o centro da base têm as projecções horizontais coincidentes. Ou seja, $V_1 = O_1$, onde V é o vértice do cone e O é o centro da base.

Dado que um dos pontos da base pertence ao plano frontal de projecção, o seu raio é, portanto, igual ao afastamento do vértice, 3 cm.

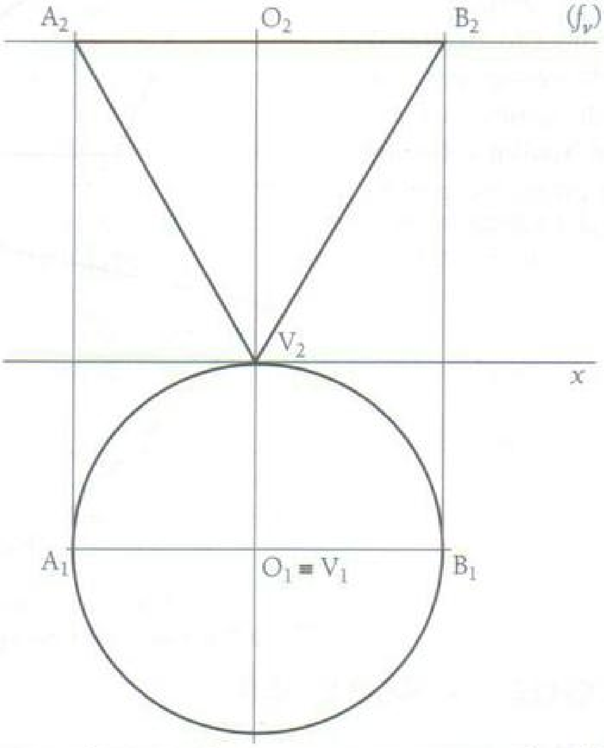
Tendo em conta que o vértice do cone é um ponto do plano horizontal de projecção, a sua projecção frontal, V_2, situa-se no eixo x.



Projecção do centro da base do cone e do seu vértice.

2.º passo

Tendo em conta que as geratrizes do cone fazem 60º com ν_0, por V_2 traçam-se duas linhas com essa amplitude em relação ao eixo x, uma de abertura para a direita e outra de abertura para a esquerda. Por A_1 e B_1, traçam-se linhas de chamada cuja intersecção com as linhas a 60º origina a cota do plano da base e, consequentemente, a projecção frontal da base do cone.



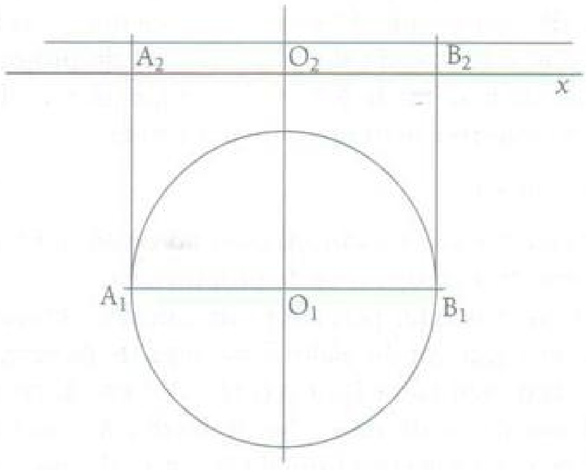
Projecções do cone, distinguindo-se o contorno aparente do sólido projectado.

Representemos um outro cone, desta feita oblíquo, sabendo que:

- O cone situa-se no I D e está assente pela base num plano de nível δ.
- O centro da base é o ponto O (0; 3,5; 0,5) e o raio mede 2,5 cm.
- O vértice do cone é o ponto V (–5; 2; 6).

1.º passo

Traça-se o plano da base, representam-se as projecções do ponto O, traça-se a circunferência e determina-se a sua projecção frontal.



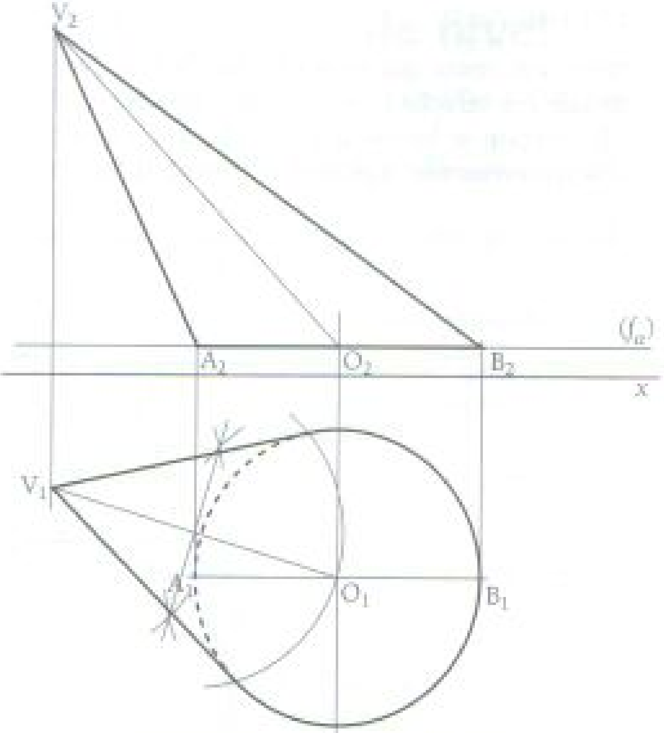
Projecções da base do cone.

2.º passo

Traça-se agora uma linha de chamada 5 cm à esquerda da linha de chamada do centro da base, marcando-se 2 cm de afastamento para obter V_1, projecção horizontal do vértice, e 6 cm de cota para obter V_2, projecção frontal do vértice.

Unindo os extremos da projecção frontal da base com a projecção frontal do vértice do cone, obtém-se a projecção frontal do cone, que também corresponde ao contorno aparente frontal.

Traçando duas tangentes à projecção por V_1, obtém-se a projecção horizontal do cone.



Projecções do cone oblíquo, distinguindo-se a linha de contorno aparente das suas projecções.

Projecções de cones assentes em planos de frente

A projecção horizontal de um cone de base de frente é invariavelmente um triângulo.

Se se tratar dum cone de revolução, a sua projecção frontal é um círculo. A projecção frontal de um cone oblíquo, cuja base é de frente, pode ser um círculo ou outra forma.

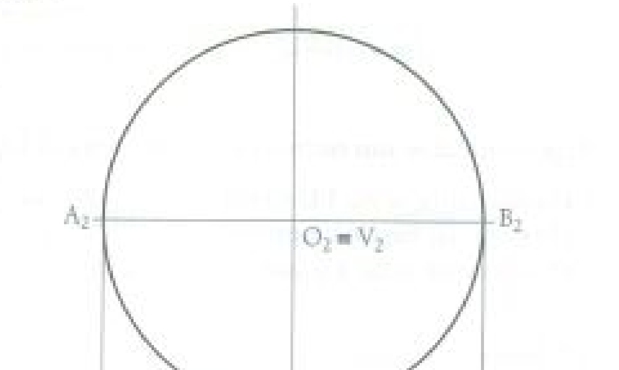
Construamos as projecções de um cone de revolução situado no primeiro diedro de projecção, de base de frente, com 4 cm de afastamento. O vértice do cone é um ponto do plano frontal de projecção. O raio da base mede 5,5 cm e é tangente a v_0. Indique o contorno aparente frontal do cone.

1.º passo

Determinam-se as projecções do centro da base e as respectivas projecções da própria base.

De referir que, pelo facto de um dos pontos da base do sólido ser do plano horizontal de projecção, a medida do seu raio é igual à cota do centro da base.

Tratando-se de um cone de revolução com base de frente, a projecção frontal do centro da base coincide com a projecção frontal do vértice do sólido.



Projecções do cone, distinguindo-se a linha de contorno aparente das projecções do sólido.

A projecção horizontal do vértice da pirâmide situa-se no eixo x, porque o vértice situa-se no plano frontal de projecção.

A projecção frontal do cone é o círculo, e a projecção horizontal é definida pelo triângulo que resulta da união dos dois extremos da projecção horizontal da base com a projecção horizontal do vértice.

Conclusão: o contorno aparente frontal do cone é a circunferência de centro O.

Prismas

Os prismas são sólidos geométricos limitados por duas *bases* poligonais paralelas entre si e por uma superfície lateral.

São constituídos por vértices correspondentes à soma dos números de lados de cada base, *arestas laterais* que unem os vértices de uma base à outra, superfícies laterais que também são polígonos e as *duas bases*, sempre paralelas entre si.

As superfícies laterais são chamadas *faces do prisma*.

Se as faces do prisma são perpendiculares às bases e se estas bases são polígonos regulares o *prisma é regular*.

Um prisma cujas faces são oblíquas em relação aos planos das bases e em que estas bases são polígonos regulares chama-se prisma *oblíquo de base regular*.

Tanto os prismas com faces perpendiculares à base como os prismas com as faces oblíquas em relação aos planos das bases, podem ter bases que são polígonos irregulares (como é o caso, por exemplo, de um rectângulo).

O *cubo* ou *hexaedro* é um caso particular dos prismas.

A altura de um prisma é a distância, medida na perpendicular, entre os planos das bases.

Projecções de prismas assentes em planos de nível

Os prismas regulares assentes em planos de nível têm as projecções horizontais das suas bases coincidentes.

Construamos as projecções de um prisma pentagonal regular situado no I D, de bases de nível, tendo em conta que:

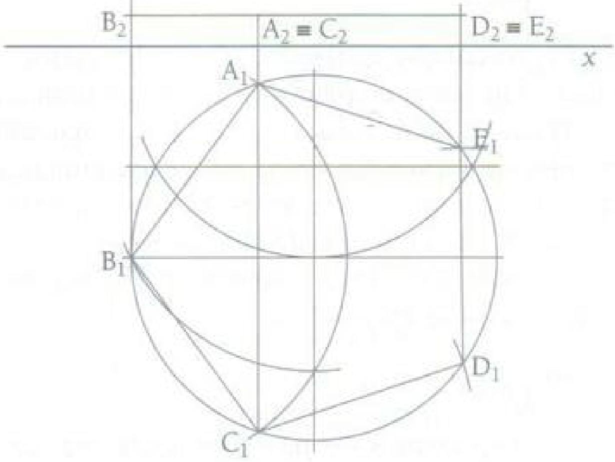
- O centro de uma das bases do prisma é o ponto O (3,5; 0,5).
- O raio da circunferência circunscrita às bases mede 3 cm, e a face situada mais à direita é de perfil.
- A outra base do prisma dista de ν_0 6 cm.

1.º passo

Determinam-se as projecções do ponto O, centro da circunferência circunscrita a uma das bases do prisma e representa-se o traço do plano da base de menor cota.

A aresta da base que contém a face de perfil é de topo, isto é, a sua projecção horizontal é um segmento de recta perpendicular ao eixo x.

Sendo assim, constrói-se o pentágono, tendo em conta que o lado situado mais à direita é de topo.

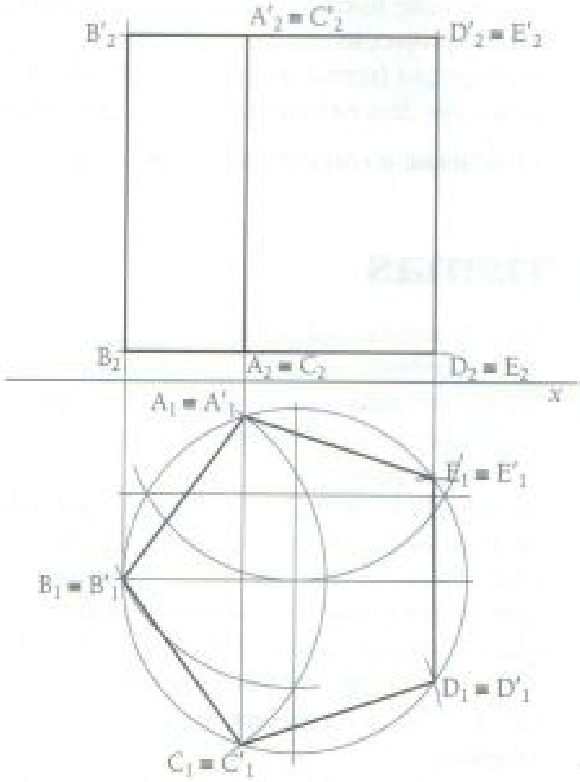


Projecções da base do prisma pentagonal.

2.º passo

Traça-se o segundo plano de base, paralelo ao primeiro, situado a 6 cm acima do eixo *x*.

Traçam-se agora perpendiculares ao eixo *x*, que partem da base de menor cota e terminam no plano da base de maior cota, determinando as projecções frontais dos vértices dessa base, unindo-se em seguida.



Projecções do prisma pentagonal, distinguindo-se o contorno aparente das suas projecções.

Um outro prisma, desta vez um prisma triangular oblíquo, situa-se no primeiro diedro de projecção.

O prisma está assente por uma das bases num plano de nível de cota igual a 1 cm. As bases são triângulos equiláteros de 4 cm de lado, os lados mais à esquerda são de topo, e o seus extremos mais próximos de φ_0 distam 1 cm deste. As arestas laterais são de frente, fazem com ν_0 ângulos de 60°, de abertura para a direita, e medem 6 cm.

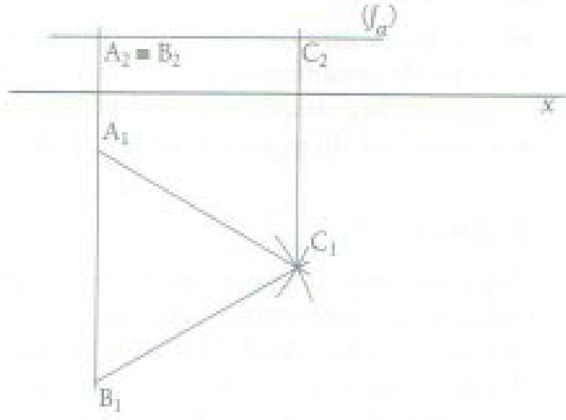
Represente pelas suas projecções o prisma acima descrito.

1.º passo

Representa-se o plano da base de menor cota que se situa 1 cm acima do plano horizontal de projecção.

Traça-se uma linha de chamada e marcam-se afastamentos de 1 cm e 5,5 cm (1 cm de afastamento mais 4 cm de lado) e representam-se as projecções horizontais dos pontos A e B, extremos do lado de topo.

A partir desse lado constrói-se o triângulo e determinam-se as suas projecções.



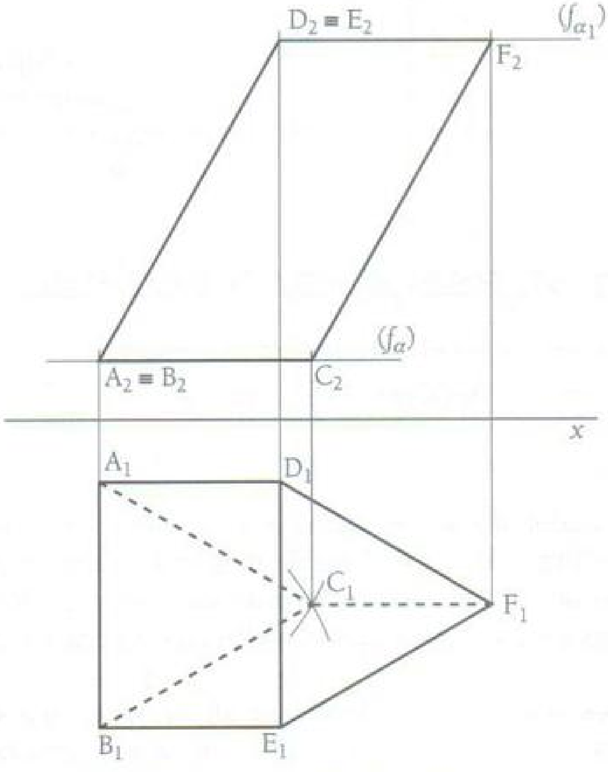
Projecções da base do prisma triangular oblíquo.

2.º passo

Como podemos ver na figura da página seguinte, por $A_2 \equiv B_2$ e C_2 traçam-se linhas, que fazem 60° de abertura para a direita e marcam-se 6 cm de comprimento das arestas laterais. A marcação é directa porque os segmentos de rectas de frente apresentam-se em verdadeira grandeza em projecção frontal.

Aos 6 cm de comprimento marcam-se os vértices da base superior, $D_2 \equiv E_2$ e F_2.

Por $A_1 \equiv B_1$ e C_1 traçam-se linhas paralelas ao eixo x que se intersectarão com as linhas de chamada dos vértices da base superior, originando as projecções D_1, E_1 e F_1. Para terminar distinguem-se as arestas visíveis das invisíveis.



Projecções do prisma triangular oblíquo.

Projecções de prismas assentes em planos de frente

O contorno aparente horizontal de qualquer prisma assente pela base num plano de frente é um quadrilátero. As duas bases reduzem-se a dois segmentos de recta em projecção horizontal.

A projecção frontal de um prisma regular de bases assentes em planos de frente constitui a projecção frontal das bases, que são coincidentes e constituem o contorno aparente frontal.

Um prisma pentagonal oblíquo situado no I D tem as suas bases assentes em planos de frente que distam entre si 5 cm. As bases são pentágonos regulares inscritos em circunferência de raio igual a 3 cm. A base de menor afastamento dista 0,5 cm de φ_0. As arestas laterais são de nível e fazem com φ_0 ângulos de 45° de abertura para a esquerda. A aresta lateral de menor cota está contida em ν_0, e a face a ela oposta é de nível.

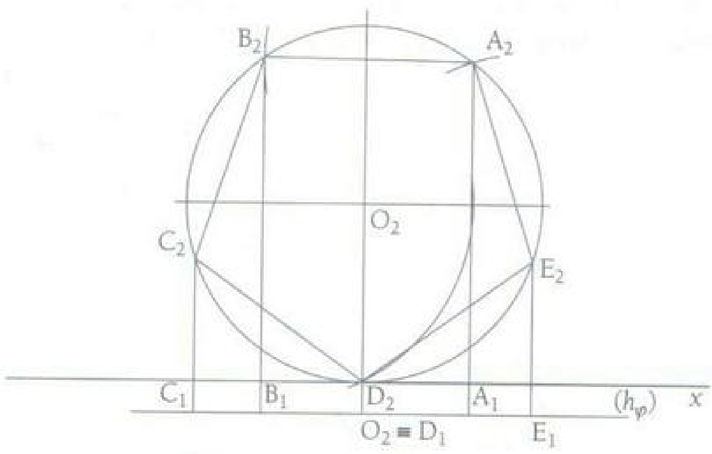
1.º passo

Traça-se o plano da base de menor afastamento com 0,5 cm de afastamento.

Dado que uma das arestas laterais, oposta a uma face de nível, pertence ao plano horizontal de projecção, a circunferência circunscrita à base é tangente, no plano do desenho, ao eixo x, logo, aos 3 cm de cota designa-se O_2. Por O_2 traça-se uma circunferência que toca o eixo x e constrói-se nela um pentágono com o lado de maior cota paralelo ao eixo x.

O referido lado de maior cota está contido na face de nível de maior cota descrita no enunciado deste exercício.

Seguidamente, determinam-se as projecções horizontais da base de menor afastamento do prisma oblíquo.



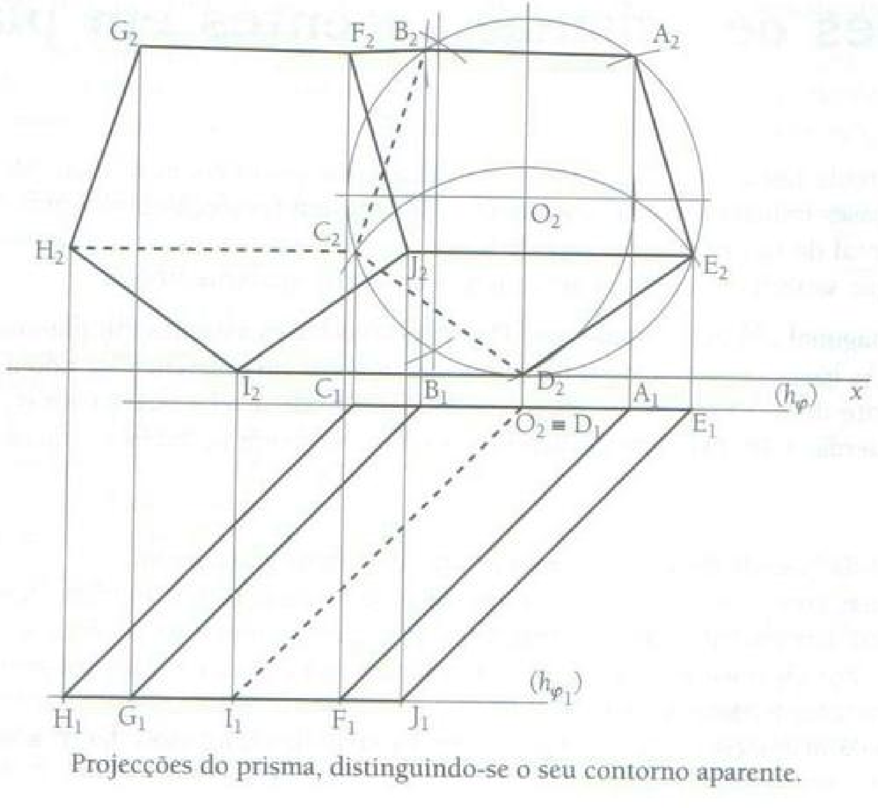
Projecções da base do prisma.

2.º passo

Traça-se o plano da base de maior afastamento, que dista do primeiro 5 cm.

Pelas projecções horizontais dos vértices da base de menor afastamento, traçam-se linhas, que fazem com o plano dessa base ângulos de 45°, de abertura para a esquerda, cuja intersecção com o plano da base de maior afastamento origina as projecções horizontais dos cinco vértices da base de maior afastamento do pentágono.

Pelas projecções frontais dos cinco vértices de menor afastamento, traçam-se para a esquerda linhas paralelas ao eixo x, cujas intersecções com as linhas de chamada dos vértices de maior afastamento originam as projecções frontais dos vértices de maior afastamento do prisma. Distinguem-se então as arestas visíveis, conforme se pode ver na ilustração, que definem o contorno aparente do sólido em projecções.



Projecções do prisma, distinguindo-se o seu contorno aparente.

Cilindros

Cilindros são sólidos geométricos formados por *duas bases* e por uma *superfície lateral cilíndrica.*

A superfície lateral cilindrica é dfinida por *geratrizes* que intersectam a base segundo uma linha *directriz*, a circunferência da base.

O *eixo do cilindro* é a linha que une os centros das duas bases.

Normalmente, a base é construída a partir do seu centro e conhecendo o seu raio ou diâmetro.

A altura de um cilindro mede-se na perpendicular aos planos da base.

Projecções de cilindros com bases de nível

As projecções horizontais das bases de nível de um cilindro são, invariavelmente, círculos. Estes círculos são coincidentes e correspondentes ao contorno aparente horizontal quando se tratar de cilindros de revolução, e não serão certamente coincidentes nos casos em que os cilindros são oblíquos.

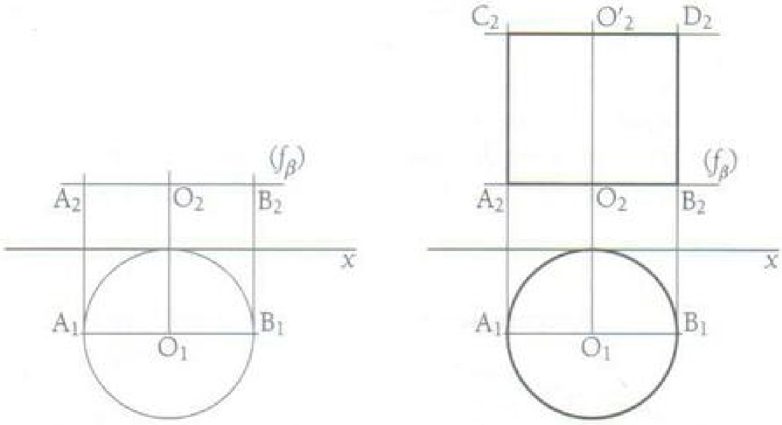
A projecção frontal de qualquer cilindro com bases de nível é um quadrilátero, que pode ser um rectângulo ou não.

Determinemos as projecções dum cilindro de revolução assente pela sua base de menor cota num plano de nível de 1,5 cm de cota.

O raio da base mede 2 cm, e uma das suas geratrizes é do plano frontal de projecção. O outro plano da base situa-se a 5,5 cm do plano horizontal de projecção.

O primeiro passo da resolução deste exercício consiste em representar o traço do plano da base de menor cota e determinar as projecções do centro dessa base, cujo afastamento é igual a 2 cm e cuja cota é igual a 1,5 cm.

Aos 5,5 cm de cota marca-se a altura do cilindro, traçando uma paralela ao eixo x, cuja intersecção com as linhas de chamada dos extremos das projecções da base de menor cota origina a projecção frontal do cilindro. A projecção horizontal da base de maior cota é coincidente com a projecção horizontal da base de menor cota.



Cilindro de bases de nível.

Representemos, pelas suas projecções, um outro cilindro, oblíquo, situado no I D e assente pela base no plano horizontal de projecção.

Sabemos que o centro da base de cota nula tem 2,5 cm de afastamento, e o raio dessa base é igual a 2 cm. As geratrizes do cilindro são de frente, fazem com v_0 ângulos de 75° de abertura para a esquerda e medem 4,5 cm.

1.° passo

Inicialmente, representa-se pelas suas projecções o centro da base descrita, cujo afastamento é igual a 2,5 cm e cota igual a 0 cm. Por O_1 traça-se uma circunferência de raio 2 cm, conforme nos diz o enunciado do exercício. Seguidamente, representa-se a projecção frontal do círculo, que se situa sobre o eixo x.

2.º passo

Traçam-se então duas geratrizes que partem dos extremos da projecção frontal da base de cota nula, com inclinação de 75° para a esquerda, em relação ao eixo *x*. Traça-se igualmente o eixo que parte da projecção frontal da base de cota nula com a mesma inclinação que as geratrizes.

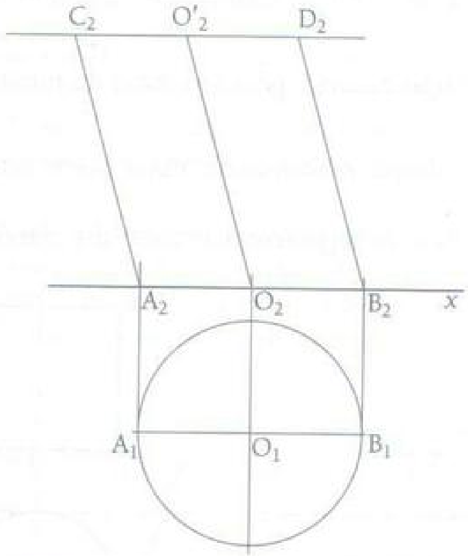
Sobre essas geratrizes e o eixo marcam-se 4,5 cm correspondentes ao seu comprimento. Deste modo, obtém-se a projecção frontal da outra base do cilindro.

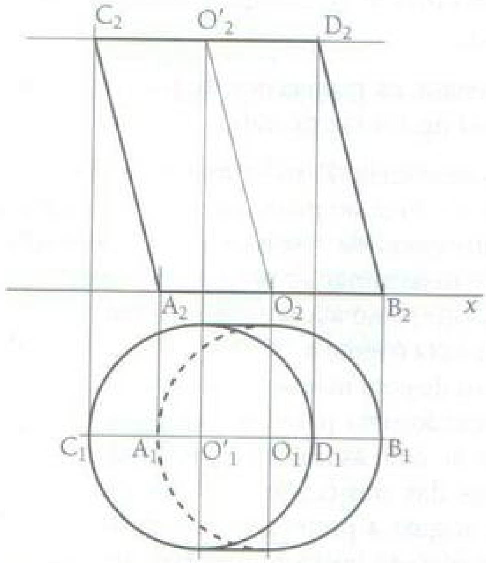
O ponto de intersecção da projecção frontal do eixo do cilindro com a projecção frontal da base de maior cota é O'_2, projecção frontal do centro da base de maior cota.

3.º passo

Tendo em conta que uma das geratrizes do cilindro pertence ao plano frontal de projecção, o raio da base é igual ao afastamento do centro, 2 cm. Deste modo, determinam-se as projecções da base de menor cota do cilindro. Assim, por O_1 traça-se uma paralela ao eixo *x*, cuja intersecção com a linha de chamada do centro de maior cota origina a projecção horizontal desse centro, O'_1.

Por O'_1 traça-se uma circunferência, cujo raio é igual ao da outra base. Seguidamente, unem-se as projecções do mesmo nome como ilustra o desenho.





Projecções de uma das bases do cilindro (à esquerda) e projecções do cilindro oblíquo, com o seu contorno aparente (à direita).

Projecções de cilindros com bases de frente

O contorno aparente da projecção horizontal de um cilindro com base de frente é um quadrilátero, ou seja, um paralelogramo. As projecções frontais das bases de frente de cilindros são círculos iguais. Se as projecções frontais forem coincidentes, trata-se de um cilindro de revolução; caso contrário, trata-se de um cilindro oblíquo.

Para uma visualização do que se acabou de dizer, convém que sejam resolvidos pelo menos dois exercícios, sendo um de um cilindro de revolução e outro de um cilindro oblíquo.

Determinemos as projecções de um cilindro oblíquo situado no I D e com bases de frente.

O eixo do cilindro é de nível e tem cota igual a 4 cm. Os afastamentos dos centros das bases são de 1 cm e 5 cm. As linhas de chamada dos centros das bases distam entre si 4 cm, e a base de menor afastamento situa-se mais à direita. O raio das bases do cilindro é de 3 cm.

1.º passo

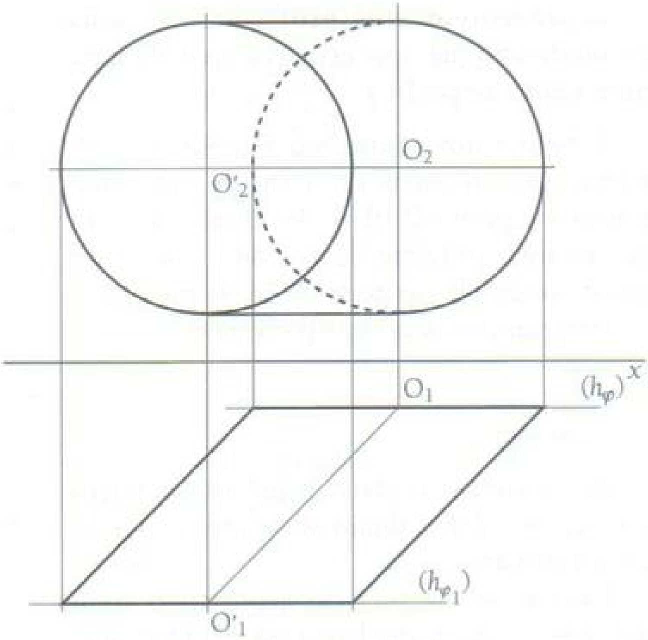
Representa-se pelas suas projecções o eixo do cilindro, de cota igual a 4 cm, e os seus extremos, com afastamentos de 5 e 1 cm. As linhas de chamadas dos extremos estão separadas a 4 cm.

Desenham-se as projecções de uma das bases do cilindro, neste caso a de maior afastamento, com raio igual a 3 cm.

2.º passo

Representa-se pelas suas projecções a base de menor afastamento.

Unem-se as projecções do mesmo nome das duas bases e distinguem-se os contornos visíveis das invisíveis em cada uma das projecções.



Projecções do cilindro oblíquo, sendo visível o seu contorno aparente.

Projecções de sólidos geométricos assentes em planos de perfil, de topo e verticais

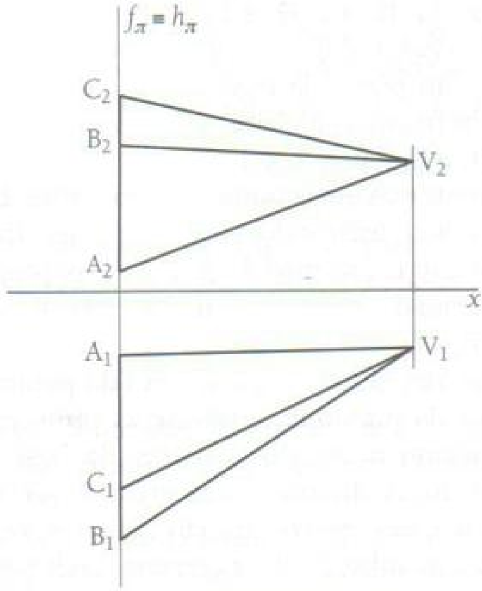
Conforme vimos na unidade temática sobre projecções de polígonos, os que estiverem contidos em planos de perfil, de topo e vertical não apresentam a sua verdadeira grandeza em nenhuma das projecções, pelo que na maioria dos casos é necessário recorrer aos processos geométricos auxiliares para a sua construção.

O mesmo acontece com a projecção de sólidos geométricos, pois as suas bases são polígonos, pelo que os processos geométricos auxiliares serão o recurso para a resolução de muitos dos problemas ligados a esta unidade temática.

Projecções de pirâmides assentes em planos de perfil

Os contornos aparentes frontais e horizontais de uma pirâmide com bases de perfil são invariavelmente triângulos.

As bases, como já se sabe, têm as suas projecções sobre os traços do plano, isto é, são dois segmentos de rectas que se encontram na mesma linha perpendicular ao eixo x.

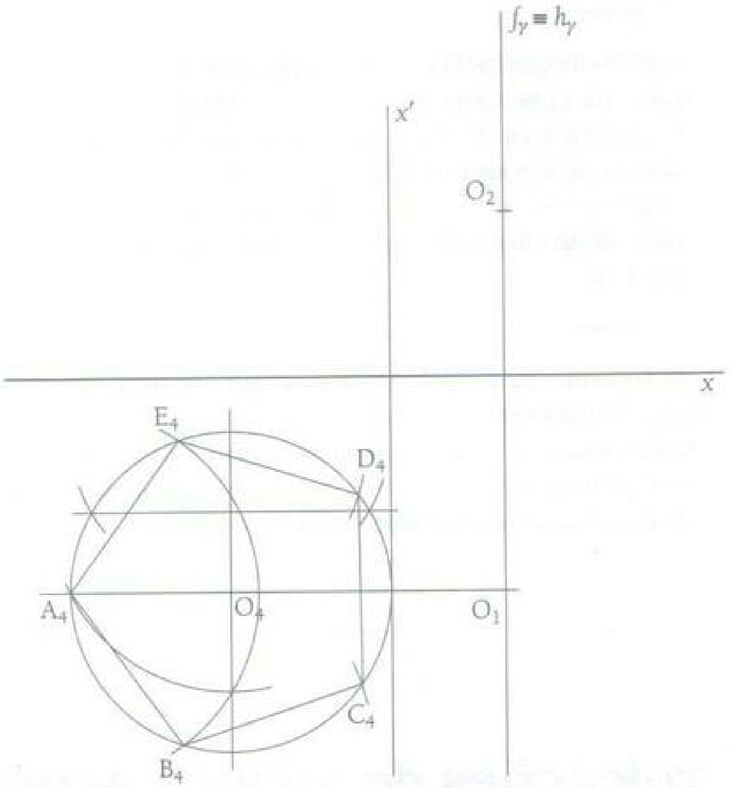


Projecções de uma pirâmide qualquer com base de perfil, sendo visível o seu contorno aparente.

Representemos as projecções de uma pirâmide oblíqua, que está assente pela base num plano de perfil γ.

A base é um pentágono regular inscrito numa circunferência de 3 cm de raio, cujo centro é o ponto O (0; 4; 3). O lado do pentágono mais próximo de v_0 é de topo. O vértice da pirâmide é o ponto V (6; 1; 5).

Determinemos as suas projecções.



1.º passo

Representa-se o plano γ pelos seus traços e sobre eles determinam-se as projecções do centro da base.

Escolhe-se um método geométrico auxiliar, neste caso a mudança do plano frontal de projecção.

Assim, o novo eixo x, x′ é perpendicular ao eixo x. No novo plano frontal de projecção mantém-se a projecção horizontal, O_1, do centro da base da pirâmide, muda o seu afastamento e mantém-se a sua cota.

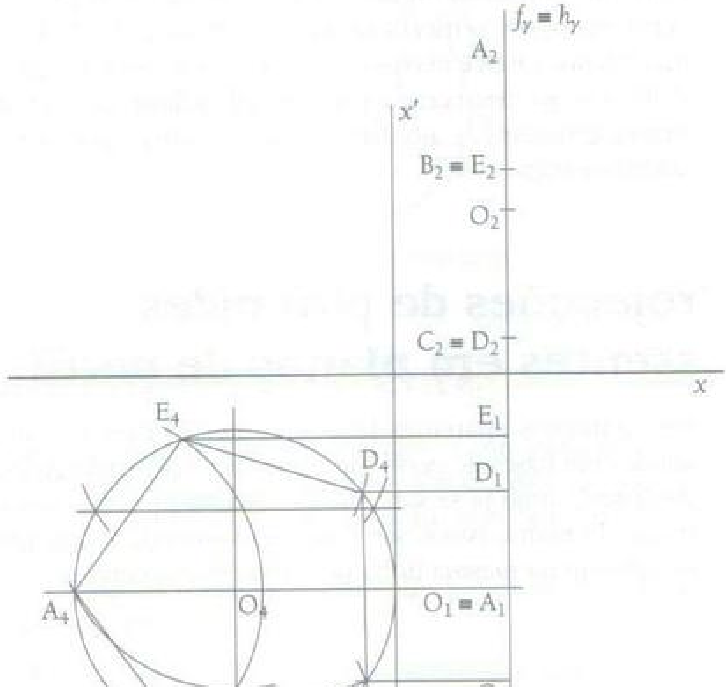
A partir de O_4 traça-se uma circunferência de 3 cm de raio e nele constrói-se um pentágono com o lado mais próximo de x′, paralelo a ele, e obtém-se A_4, B_4, C_4, D_4 e E_4.

2.º passo

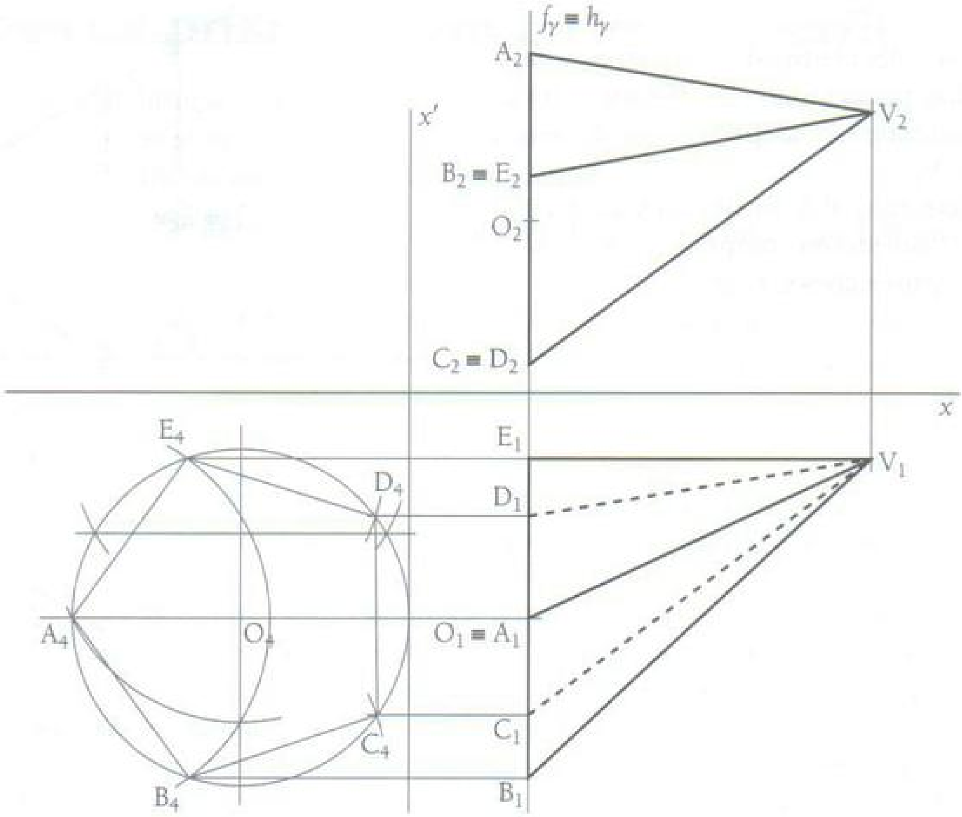
Por A_4, B_4, C_4, D_4 e E_4, traçam-se paralelas ao eixo x, cuja intersecção com $v_\gamma \equiv h_\gamma$, traços do plano da base, origina as projecções horizontais da base da pirâmide, A_1, B_1, C_1, D_1 e E_1 e unem-se-lhes.

Tirando as cotas do novo plano frontal de projecção e marcando-as sobre o plano frontal de projecção inicial, obtêm-se as projecções frontais dos vértices da base, A_2, B_2, C_2, D_2 e E_2.

Determinam-se as projecções do ponto V, vértice da pirâmide, e une-se às projecções do mesmo nome dos vértices da base do polígono. A distinção das arestas que são visíveis e das arestas que são invisíveis completa a resolução do exercício, definindo assim o seu contorno aparente, como podemos ver na figura da página seguinte.



Projecções da base da pirâmide, um pentágono.



Projecções da pirâmide oblíqua de base de perfil, distinguindo-se o contorno aparente do sólido.

Projecções de cones assentes em planos de perfil

Como é do seu conhecimento, para obter a verdadeira grandeza do círculo que constitui a base do cone é necessário recorrer a um método geométrico auxiliar.

No entanto, se apenas se pretender representar as projecções do cone, o uso de um método geométrico auxiliar pode ser dispensado, uma vez que a medida do diâmetro da base corresponde à medida de cada uma das projecções da base do cone, sendo o ponto médio de cada uma das projecções a projecção do respectivo centro.

Representemos pelas suas projecções um cone de revolução situado no I D com base de perfil.

Um ponto da base encontra-se no plano frontal de projecção e um outro no plano horizontal de projecção. O raio da base mede 2,5 cm e a altura é de 5 cm, estando o vértice do cone à direita da base.

1.º passo

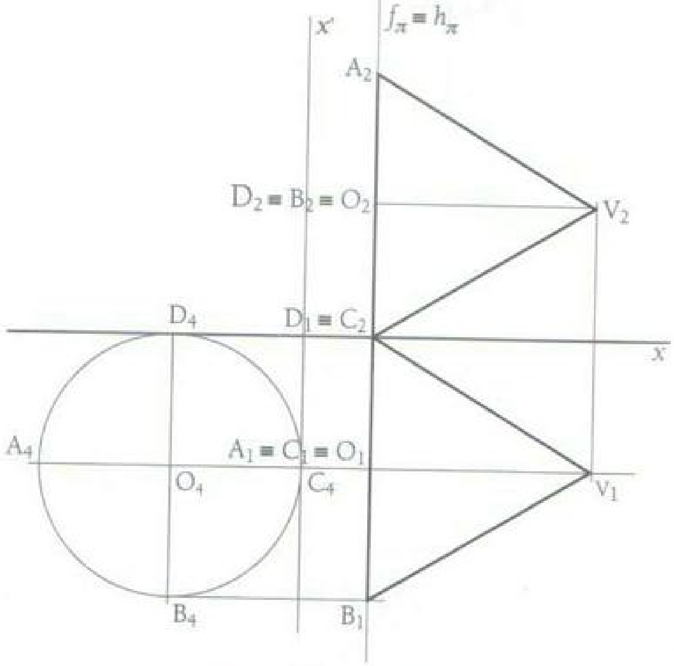
Representa-se pelas suas projecções o centro da base, tendo em conta que ela tem um ponto em ν_0 e outro em φ_0, e o raio mede 2,5 cm. Isto significa que a cota e o afastamento da base do cone são iguais e medem 2,5 cm.

O segmento, que parte do eixo x para cima dele, é a projecção frontal da base do cone. O segmento que parte do eixo para baixo do mesmo é a projecção horizontal da base do pentágono. O centro O, da base do cone, tem 2,5 cm de cota e também 2,5 cm de afastamento, isto é, pertence ao $\beta_{1/3}$.

2.º passo

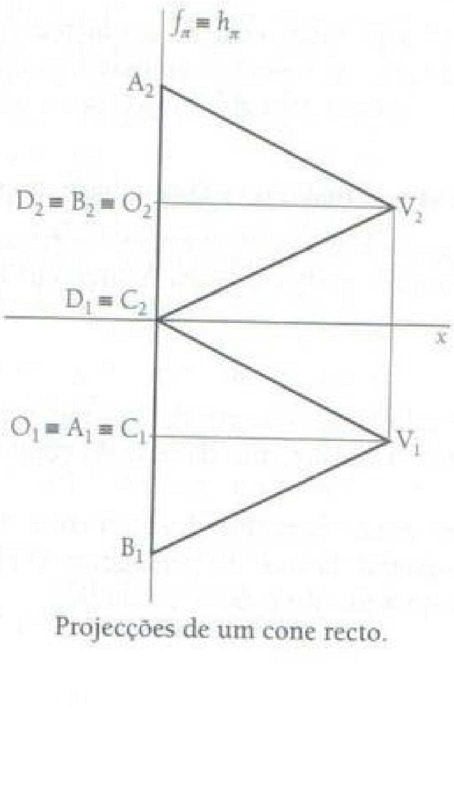
Pelas projecções do centro da base traçam-se para a direita linhas paralelas ao eixo x e aos 5 cm. Em seguida, representam-se as projecções do vértice do cone, V_1 e V_2.

Unindo os extremos das projecções da base com as projecções do mesmo nome do vértice do cone, obtêm-se as projecções do cone.

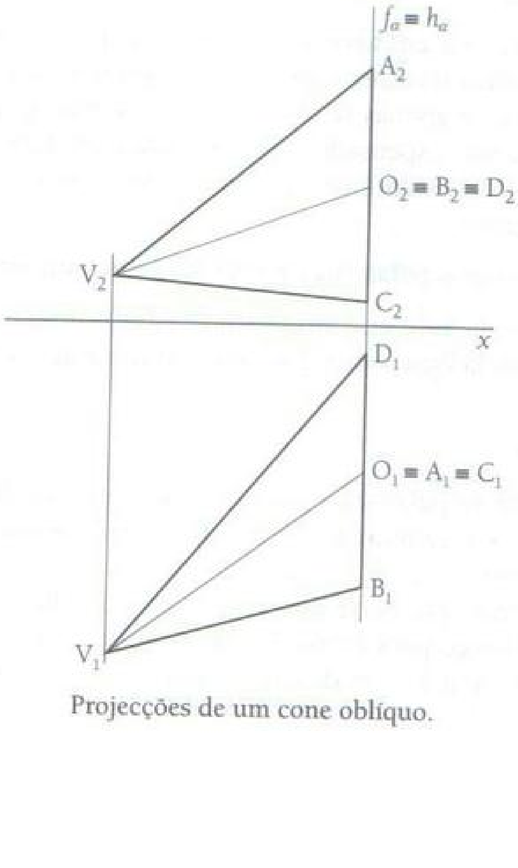


Projecções do cone.

Outra forma de resolver este exercício, para quem ainda não desenvolveu suficientemente a capacidade de visualizar as formas no espaço, consiste em usar um método geométrico auxiliar para efectuar a construção da base do cone e, seguidamente, determinar as suas projecções. Neste caso, escolheu-se a mudança de planos para construir a base em verdadeira grandeza.



Projecções de um cone recto.



Projecções de um cone oblíquo.

Projecções de prismas com bases de perfil

As características, constituição e os tipos de prismas são assuntos do nosso conhecimento.

O contorno aparente das projecções de um prisma de bases de perfil é, invariavelmente, um polígono quadrangular. Vamos ver um exemplo do que acabámos de afirmar:

Desenhe as projecções de um prisma hexagonal regular recto situado no I D, de bases de perfil, sabendo que:

- O centro da circunferência circunscrita à base situada mais à esquerda é o ponto O (3; 3,5).
- O lado da base mede 2,5 cm, e o plano da outra base dista 5 cm do plano da anterior.
- Dois dos lados da base são verticais.

1.º passo

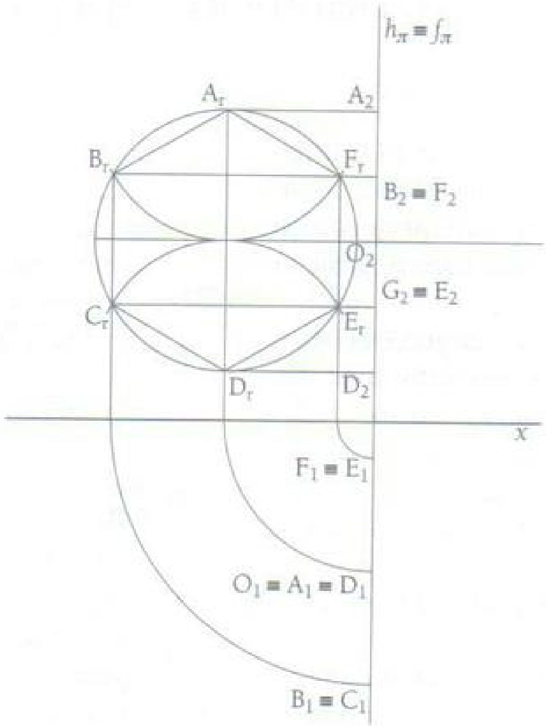
Para se executarem as projecções de uma das bases do prisma, é necessário recorrer a um método geométrico auxiliar. Para este exercício escolhemos o rebatimento do plano da base sobre o plano frontal de projecção.

Uma vez determinadas as projecções do ponto O, fixa-se a ponta seca do compasso no ponto de intersecção dos dois traços do plano com o eixo x, abre-se até O_1 e traça-se um arco até ao eixo x, prolongando-se através de uma perpendicular a esse eixo. Por O_2, traça-se uma paralela ao eixo x cuja intersecção com o prolongamento do arco origina O_r, o ponto O rebatido.

Por O_r traça-se uma circunferência de raio igual a 2,5 cm e constrói-se o hexágono respeitando a posição descrita no enunciado, ou seja, dois lados deverão ser paralelos ao traço frontal do plano, pois são lados verticais.

Efectua-se a inversão do rebatimento traçando paralelas ao eixo x, cuja intersecção com os traços do plano origina as projecções frontais dos vértices da base situada à esquerda.

Pelos vértices da base rebatida traçam-se perpendiculares ao eixo x que, a partir desse eixo, se prolongam em arco de circunferência. Por seu lado, a intersecção dessas perpendiculares com os traços do plano da base dá origem às projecções horizontais dos vértices da base.

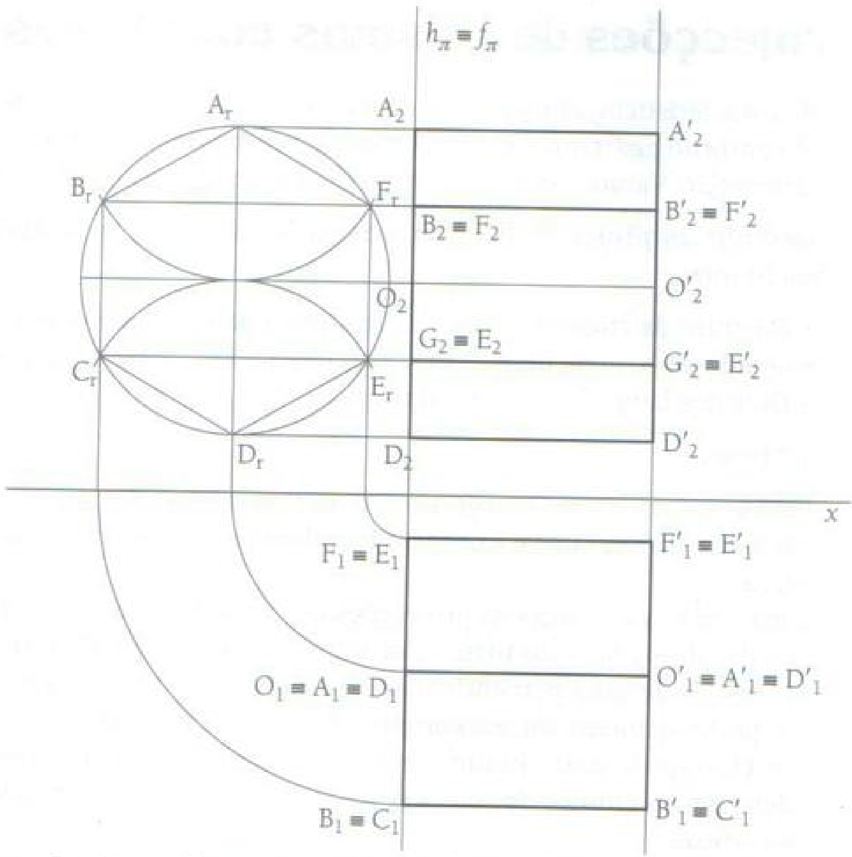


Projecções de uma das bases do prisma hexagonal.

2.º passo

Uma vez projectada a base situada mais à esquerda, traçam-se para a direita perpendiculares aos traços dos planos e, aos 5 cm, traça-se então o plano da segunda base. A intersecção das perpendiculares com os traços do primeiro plano da base com os traços do segundo plano da base dá origem às projecções ortogonais da segunda base.

Finalmente, distinguem-se, através das diferentes espessuras dos traços, as arestas visíveis das invisíveis.



Projecções do prisma, distinguindo-se o seu contorno aparente.

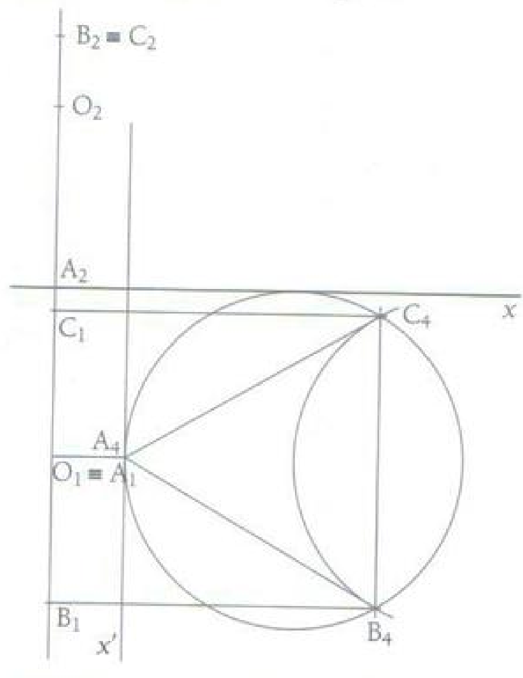
Um prisma triangular oblíquo situado no primeiro diedro de projecção tem as suas bases de perfil.

O centro de uma das bases é o ponto O (5; 3,5; 3,5) e o centro da outra base é o ponto O' (0; 5; 5). O raio da base mede 3,5 cm, e o lado de maior cota do triângulo equilátero é de topo.

1.º passo

Determinam-se as projecções do centro O, utilizando-se um método geométrico auxiliar que, neste caso, é a mudança do plano frontal de projecção e constrói-se a base do prisma, respeitando a posição descrita no enunciado.

Seguidamente, determinam-se as projecções ortogonais do triângulo equilátero, que constitui uma das bases do prisma triangular oblíquo.



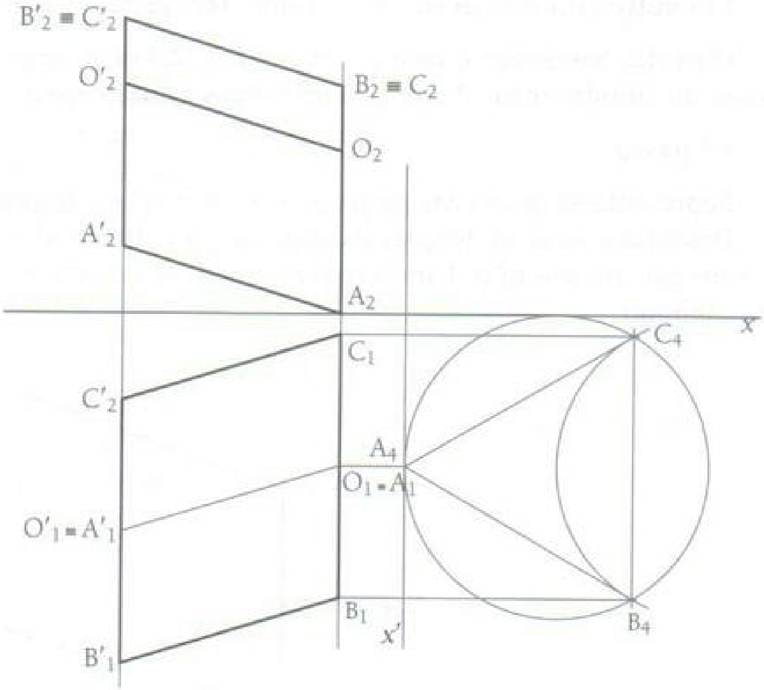
Projecções de uma das bases do prisma triangular.

2.º passo

Determinam-se as projecções do centro da base O', e por elas fazem-se passar os traços do segundo plano da base que, de acordo com os dados do enunciado, está à esquerda da primeira base.

Traça-se o eixo [OO'] em ambas as projecções. Partindo das projecções dos vértices da base de maior abcissa, traçam-se linhas paralelas ao eixo do prisma, cuja intersecção com os traços da base mais à esquerda determina as projecções da base que tem menor abcissa.

Por último, distinguem-se as arestas do sólido.



Projecções do prisma oblíquo.

Projecções de cilindros com bases de perfil

Nenhuma das projecções das bases de perfil de um cilindro apresenta a sua verdadeira grandeza. Pelo contrário, quatro segmentos de recta definem as projecções das duas bases de um cilindro.

Esses segmentos, num cilindro, têm sempre a mesma medida, a verdadeira grandeza do diâmetro da base. Por essa razão, conhecendo o centro da base e o seu raio, determinam-se directamente as suas projecções.

Tratemos de representar pelas suas projecções um cilindro de revolução situado no primeiro diedro de projecção, com as bases de perfil, de 2,5 cm de raio.

O centro de uma das bases do cilindro é o ponto O (3; 4) e a altura do cilindro mede 7 cm. Represente-o pelas suas projecções.

1.º passo

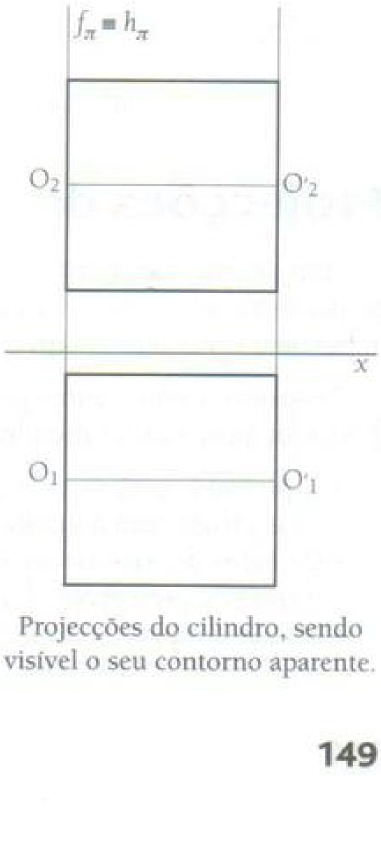
A resolução deste exercício não requer o uso de qualquer método geométrico auxiliar, pelo que basta determinar as projecções do centro e marcar para cima e para baixo, 2,5 cm de raio, o que irá dar origem a dois segmentos de 5 cm cada, correspondentes às projecções de uma das bases do cilindro em ambos os planos de projecção.

Representa-se o segundo plano de perfil a 5 cm do primeiro, onde se projectará a segunda base. Essa segunda base tanto poderá estar à direita como à esquerda, pois que, num ou noutro caso, a figura é a mesma.

Faz-se exactamente o mesmo que se fez com a primeira base para obter as projecções da segunda base do cilindro.

Finalmente, é apenas uma questão de unir entre si os extremos das projecções do mesmo nome das bases.

Como vê, as projecções de um cilindro de revolução situado no I D, com bases assentes em planos de perfil, são dois rectângulos iguais.



Projecções do cilindro, sendo visível o seu contorno aparente.

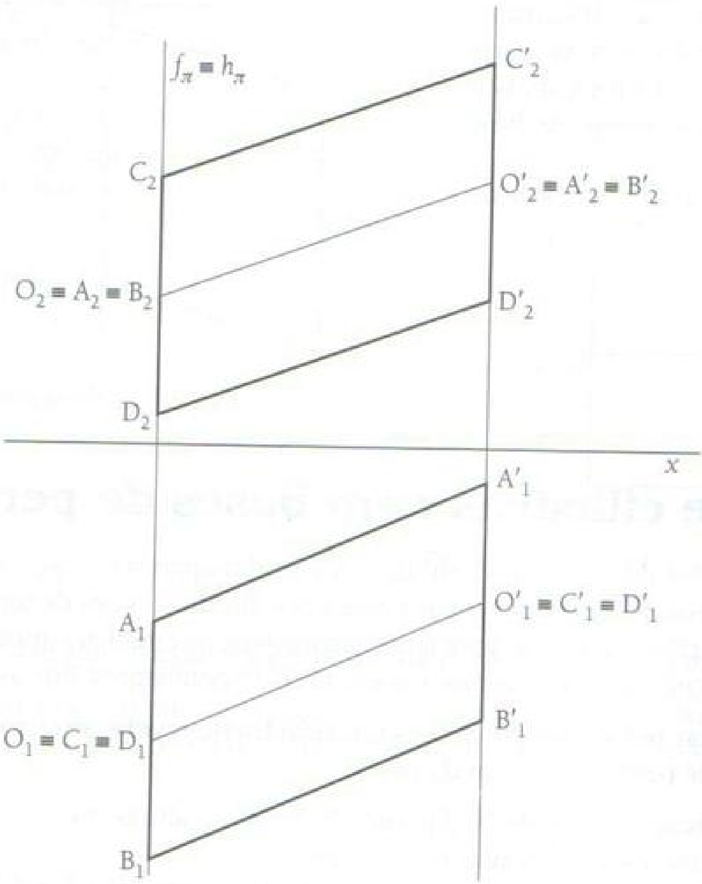
Um outro cilindro, desta vez oblíquo, tem as bases também de perfil.

Uma das bases tem o centro em O (0; 5; 2,5) e a outra tem centro em O′ (5,5; 2,5; 4,5). O raio das bases do cilindro mede 2 cm. Determinemos as projecções deste cilindro.

1.° passo

Representa-se pelas suas projecções o centro O e a respectiva base, como mostra a figura seguinte.

Desenham-se as projecções da segunda base do cilindro, de acordo com as coordenadas do seu centro e a medida do seu raio. Para terminar, unem-se os extremos das projecções do mesmo às bases do cilindro oblíquo.



Projecções do cilindro oblíquo, distinguindo-se o contorno aparente do sólido.

Projecções de pirâmides com bases de topo

Para determinar as projecções de uma pirâmide, basta projectar todos os pontos que a constituem, nomeadamente os vértices da base e o vértice superior da pirâmide. Unindo as projecções do mesmo nome desses vértices obtêm-se as projecções do sólido.

Passemos a representar pelas suas projecções uma pirâmide quadrangular recta, situada no primeiro diedro de projecção, sabendo que:

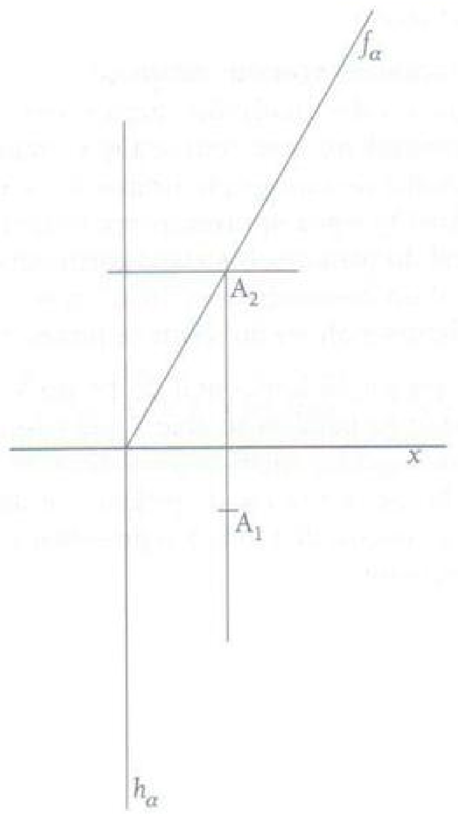
- A pirâmide está assente pela base num plano projectante frontal que faz um diedro de 60° com υ_0, de abertura para a direita.
- Os lados da base fazem 45° com φ_0, e o seu vértice A, de menor afastamento, dista 1 cm desse plano frontal de projecção e 3 cm do plano horizontal de projecção.
- O lado do quadrado mede 3,5 cm, e a altura da pirâmide mede 6 cm.

1.° passo

Representa-se o plano de topo pelos seus traços e determinam-se as projecções do vértice da base de menor afastamento. Este vértice da base tem cota igual a 3 cm. Portanto, para efectuar as suas projecções, começa-se por localizar um ponto de 3 cm de cota, sobre o traço frontal do plano de topo.

Recorde-se que todos os pontos de um plano projectante frontal têm as suas projecções frontais sobre o traço frontal do plano.

Seguidamente, determina-se a projecção horizontal desse vértice da base, ao que se segue a escolha de um método geométrico auxiliar para a construção do quadrado na sua verdadeira grandeza.

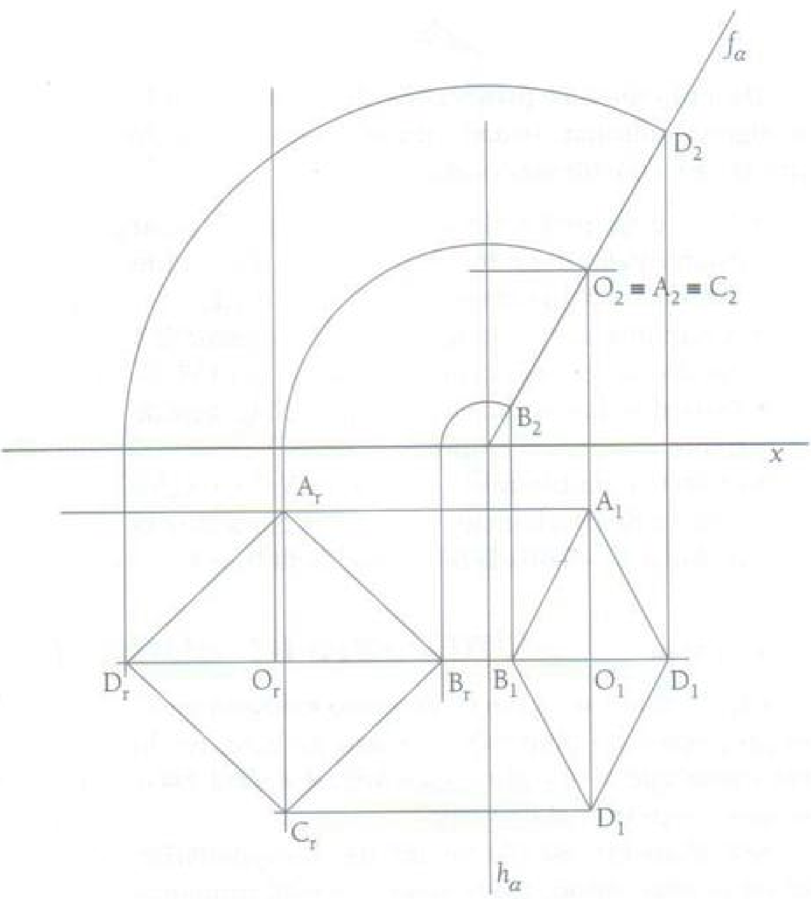


2.° passo

Escolhamos o rebatimento do plano de topo sobre o plano horizontal de projecção. Com centro no ponto de intersecção dos traços do plano da base e abertura do compasso até A_2, traça-se um arco até ao eixo x, que se prolonga através duma perpendicular a esse eixo. Essa perpendicular vai intersectar-se com uma paralela ao eixo x que passa por A_1, dando origem a A_r, ponto A rebatido.

Em seguida, traçam-se por A_r linhas que fazem 45° com o eixo x e medem-se os 3,5 cm do comprimento do lado do quadrado. Completa-se a construção do polígono e representam-se os seus três restantes pontos.

Efectua-se o contra-rebatimento, que é um processo de sentido inverso ao rebatimento e determinam-se as projecções da base da pirâmide.



Projecção da base da pirâmide quadrangular.

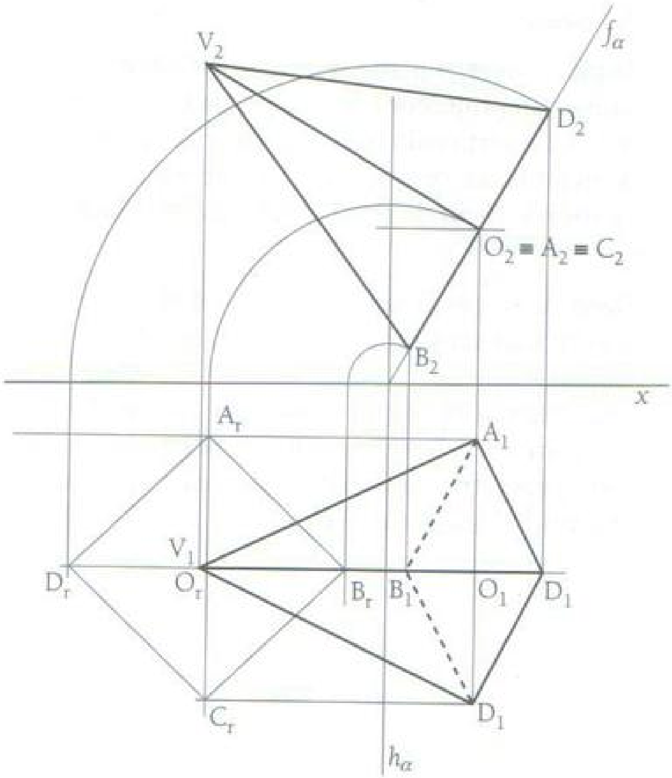
3.º passo

Traçam-se agora as projecções horizontais das diagonais do quadrado, para obter a projecção horizontal do seu centro O_1 e, seguidamente, determina-se a projecção frontal desse ponto.

Por O_2 traça-se uma perpendicular ao traço frontal do plano. Sobre ela, a partir dessa projecção frontal do centro da base, marcam-se 6 cm, correspondentes à altura do sólido, e representa-se V_2.

A projecção horizontal do ponto V encontra-se numa linha paralela ao eixo x que passa por O_1.

Em seguida, unem-se os vértices da base ao vértice do mesmo nome da pirâmide e distinguem-se os seus traços, de modo a representar o seu contorno aparente.



Projecções da pirâmide, distinguindo-se o seu contorno aparente.

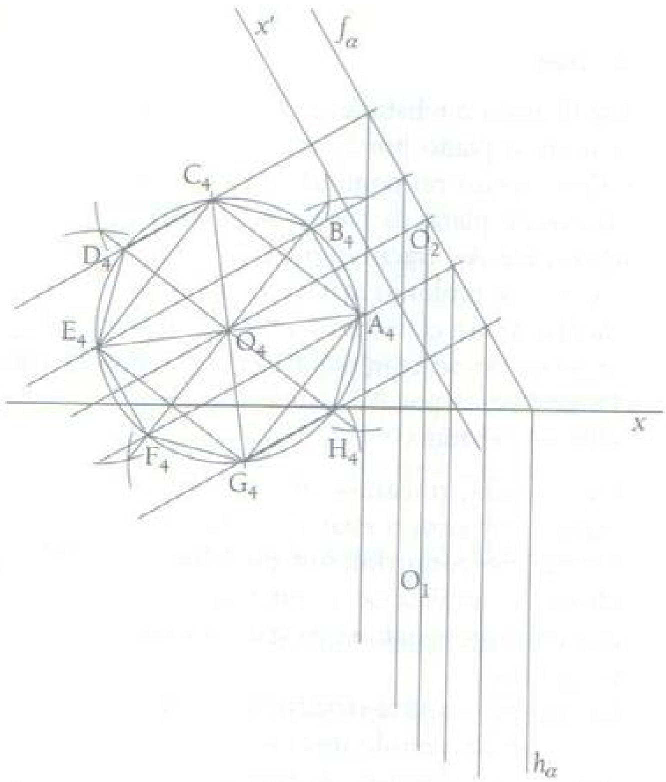
Desenhemos as projecções de uma pirâmide octogonal oblíqua, situada no primeiro diedro de projecção, considerando que:

- A base da pirâmide é um octógono regular assente pela base num plano de topo que faz um diedro de 60º, de abertura para a esquerda.
- A circunferência circunscrita à base mede 2,5 cm de raio e o seu centro é o ponto O (3; 3,5).
- Dois dos lados da base da pirâmide são de frente.
- O vértice da pirâmide é o ponto V (6,5; 0,5), cuja linha de chamada situa-se 5 cm à direita da linha de chamada do centro O da base.

1.º passo

Representam-se os traços do plano e desenham-se as projecções do ponto O, o centro da base, tendo em conta que a sua projecção frontal deverá estar sobre o traço frontal do plano.

Seguidamente, escolhe-se um método geométrico auxiliar cuja opção, neste caso, foi pela mudança do plano horizontal de projecção.



Projecções da base da pirâmide octogonal.

2.º passo

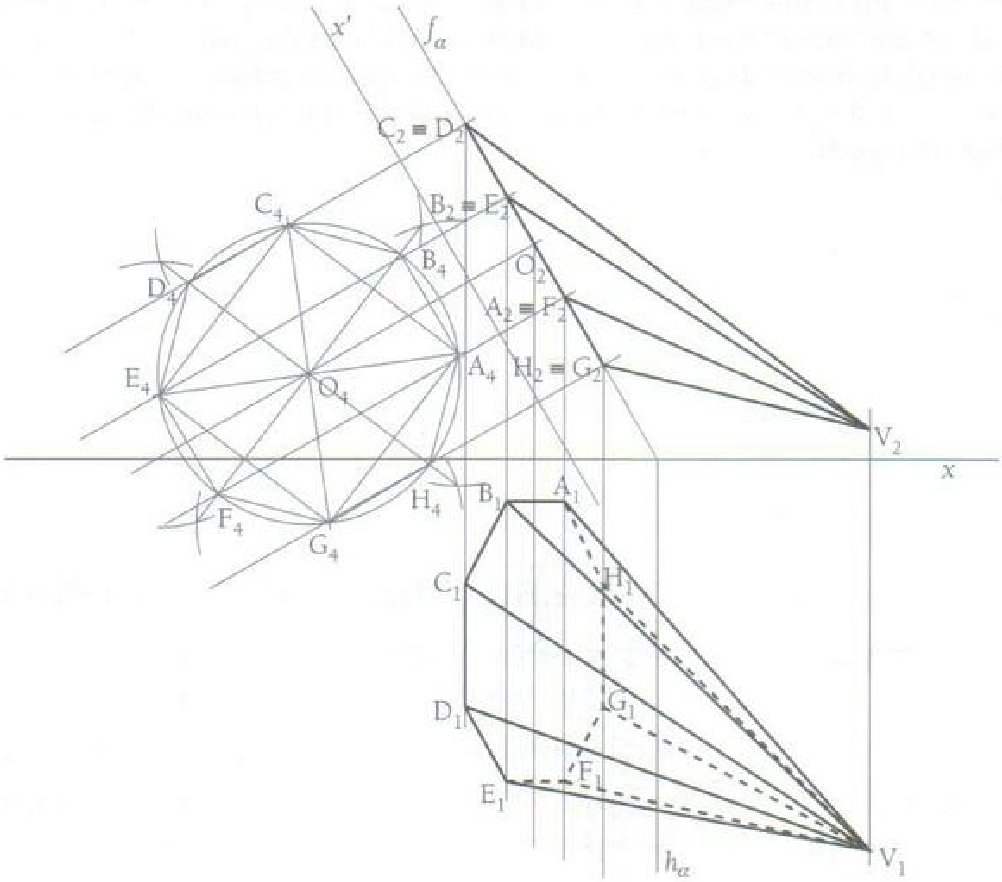
Mantém-se a projecção frontal do ponto O e obtém-se a sua projecção horizontal no novo plano horizontal de projecção, O_4, cujo afastamento se mantém igual a 3 cm.

Em seguida, traça-se a circunferência, com centro em O_4 e raio igual a 4 cm, e constrói-se o octógono com dois lados paralelos a x_1, ou seja, os seus lados de frente.

Efectua-se a projecção frontal do octógono, através do traçado de perpendiculares pelas projecções horizontais dos seus pontos no novo plano horizontal de projecção, cuja intersecção com o traço frontal do plano origina as projecções frontais dos pontos do octógono.

Determina-se a projecção horizontal da base da pirâmide, no plano horizontal inicial, transportando os afastamentos dos pontos da base do novo plano horizontal de projecção para o plano inicial.

Uma vez projectada a base da pirâmide, resta apenas representar o seu vértice pelas suas projecções e uni-los às projecções do mesmo nome da base. Finalmente, distinguem-se os traços do desenho.



Projecções da pirâmide, com o contorno aparente distinguido pelo traço grosso.

Pirâmides assentes em planos projectantes horizontais

A projecção de pirâmides com bases em planos projectantes horizontais pode ser feita na base do conhecimento que foi sendo desenvolvido até aqui.

O que acontece com a projecção horizontal de uma pirâmide com base de topo é exactamente o mesmo que acontece com a projecção frontal da mesma pirâmide com base projectante horizontal, no que respeita às suas deformações.

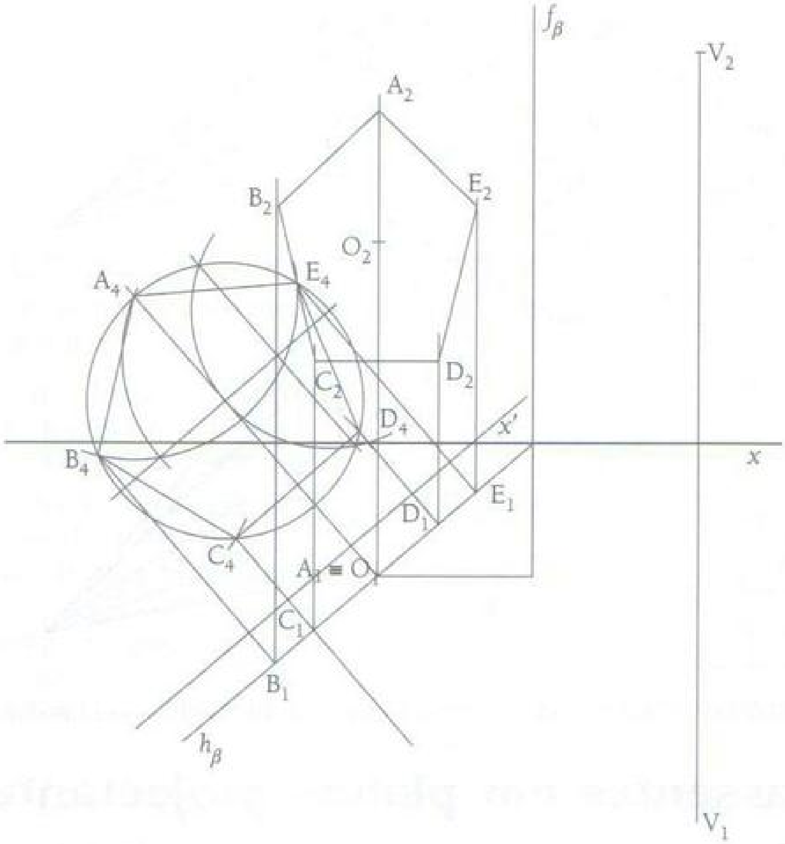
Nada melhor do que visualizar uma nova situação na prática, resolvendo um exercício, nomeadamente o da determinação das projecções de uma pirâmide pentagonal oblíqua, com os dados que em seguida apresentamos.

- A pirâmide situa-se no primeiro diedro de projecção, e a sua base é projectante horizontal, fazendo um ângulo de 40° com φ_0, de abertura para a esquerda.
- O seu centro da base pentagonal regular é o ponto O (2,5; 3), e o raio da circunferência a ela circunscrita mede 2,5 cm.
- A aresta de menor cota da base da pirâmide é de nível.
- O vértice da pirâmide é o ponto V, situado em $\beta_{1/3}$ com 6 cm de cota, cuja linha de referência se situa 6 cm à direita da linha de referência do centro da base.

1.º passo

Representa-se pelas suas projecções o centro da base e as respectivas projecções da base do sólido através de um método geométrico auxiliar que, neste caso, é a mudança do plano frontal de projecção.

Efectua-se a projecção frontal da base da pirâmide em verdadeira grandeza num novo plano frontal de projecção, na base da qual se volta ao plano frontal de projecção inicial, obtendo-se, deste modo, as projecções do pentágono regular.

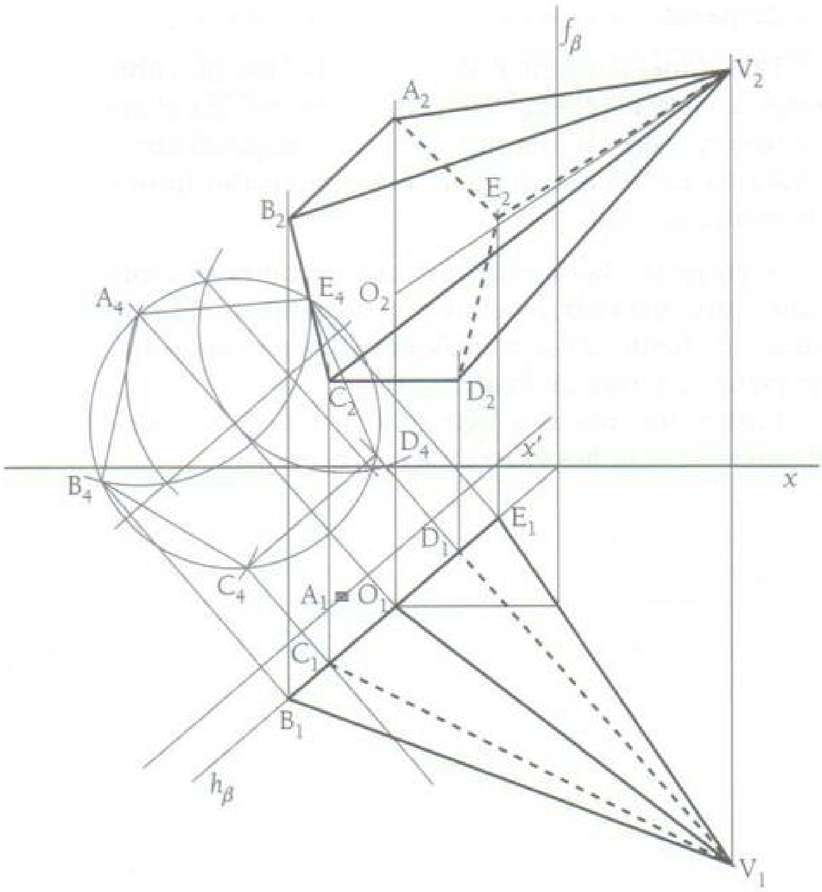


Projecções da base da pirâmide pentagonal oblíqua.

2.º passo

Traça-se uma linha de chamada, que diste 6 cm à direita da linha de chamada do centro da base da pirâmide e sobre ela marcam-se 10 cm de cota e afastamento do vértice da pirâmide.

Para concluir, unem-se as projecções da base com as projecções do mesmo nome do vértice do sólido e distinguem-se as arestas visíveis das invisíveis.



Projecções da pirâmide oblíqua, com os seu contorno aparente.

Projecções de cones com bases de topo

Como noutros casos, o desenvolvimento dos conteúdos é baseado na resolução de exercícios, de modo a que não se trate as situações de uma forma meramente abstracta.

Projectemos, neste caso, um cone de revolução de base de topo.

O plano da base faz um ângulo de 60º com v_0, abertura para a esquerda. O centro da base é o ponto O pertencente ao plano bissector dos quadrantes ímpares e tem afastamento igual a 3 cm. O raio da base mede 2,5 cm e a altura do cone é de 6 cm.

1.º passo

A resolução deste exercício segue os mesmos passos que os outros similares, que consistem em representar os traços do plano e a respectiva projecção do centro da base do sólido.

Escolheu-se o método de rebatimento que permitiu construir o círculo em verdadeira grandeza e encontrar na circunferência um número mínimo suficiente de pontos para definir as projecções dessa figura plana.

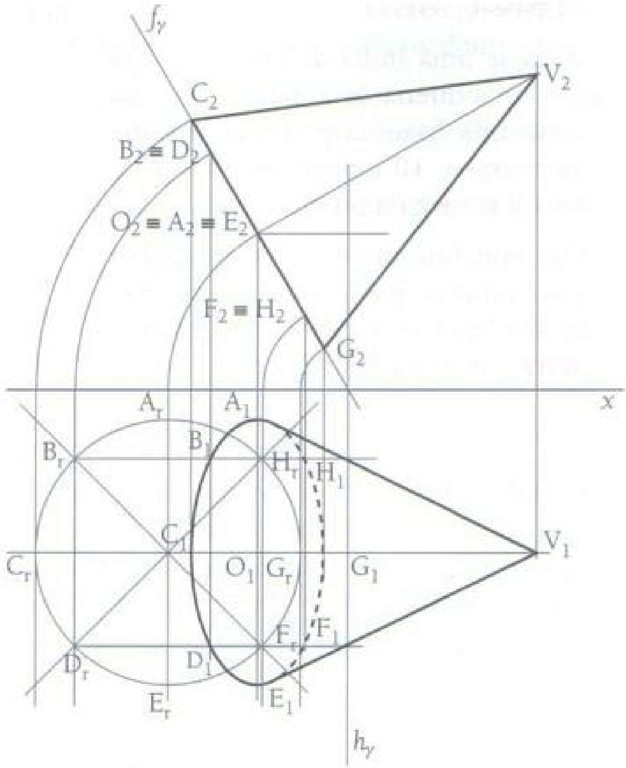
Assim, escolheu-se o rebatimento do plano de topo sobre o plano horizontal de projecção, para que se possa construir a circunferência da base na sua verdadeira grandeza e a posterior inversão do rebatimento obtendo, deste modo, as projecções da base do cone.

2.° passo

Pela projecção frontal do centro da base do cone, traça-se uma perpendicular ao traço frontal do plano da base e, sobre ela marcam-se 6 cm correspondentes à altura da pirâmide e designa-se V_2, projecção frontal do vértice do cone.

A projecção horizontal do cone encontra-se sobre uma linha paralela ao eixo x, porquanto o eixo do cone é de frente, ou seja, qualquer linha perpendicular ao plano de topo é de frente.

Finalmente, une-se a base ao vértice do cone e distinguem-se as linhas visíveis das invisíveis.



Projecções do cone de revolução, com o seu contorno aparente.

Passemos ao desenho das projecções de um cone oblíquo, com base assente num plano de topo.

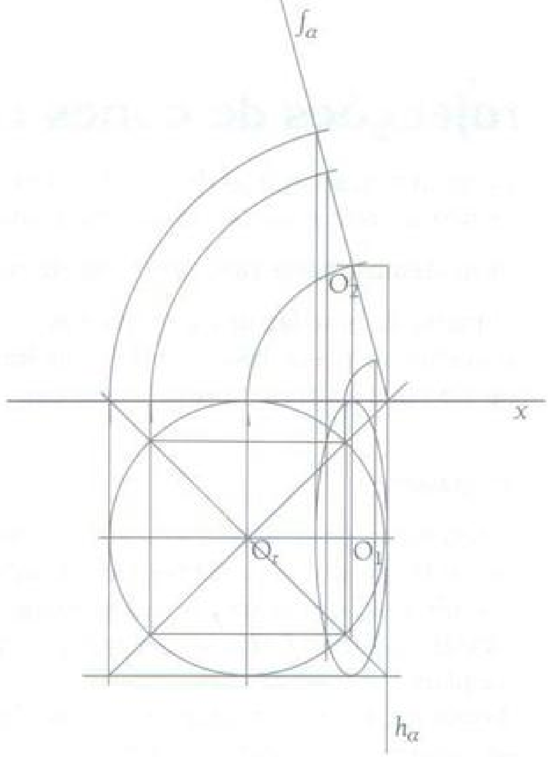
1.° passo

O plano de base faz um ângulo de 75° de abertura para a esquerda. O centro da base do cone tem cota igual a 3 cm. A base do cone tem um ponto no plano frontal de projecção e outro no plano horizontal de projecção. O vértice do cone é um ponto do eixo x e situa-se 5,5 cm à direita do ponto de cruzamento dos traços do plano da base.

Após a representação dos elementos básicos para iniciar a projecção do sólido, nomeadamente o eixo x, os traços do plano da base, determina-se a projecção frontal do centro da base.

O recurso ao método geométrico auxiliar é a via que vai permitir construir com uma certa precisão as projecções deste cone. Efectuemos o rebatimento do plano da base sobre o plano horizontal de projecção.

Traça-se a circunferência e marca-se sobre ela um certo número de pontos, suficientes para determinar as suas projecções na base do quadrado envolvente, as suas diagonais e medianas. Em seguida, efectua-se o contra-rebatimento para obter as projecções da circunferência.



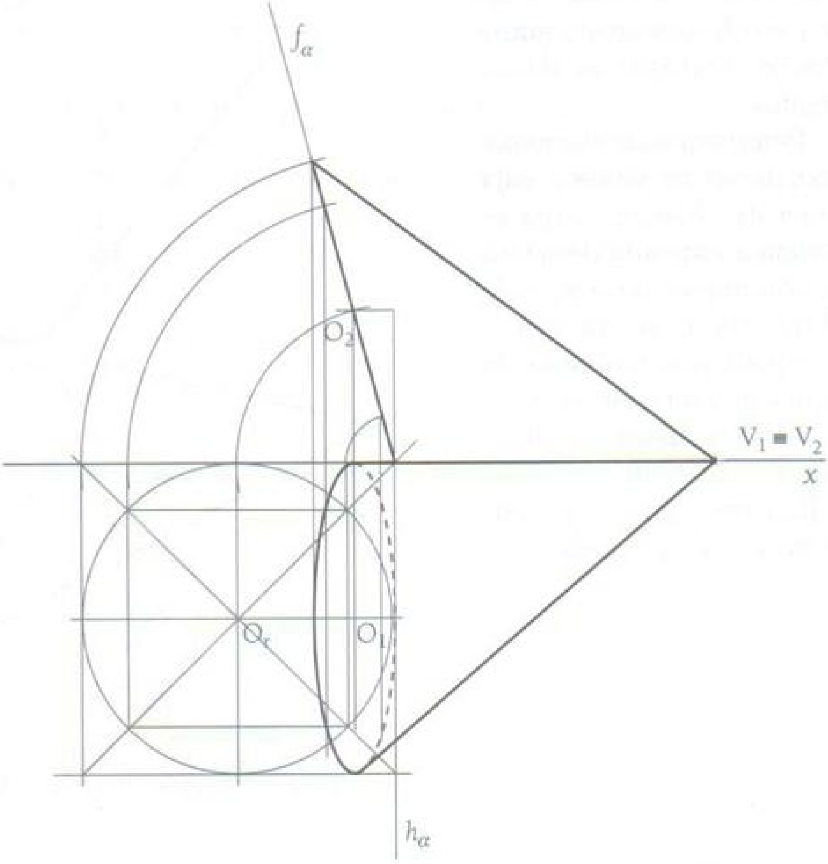
Projecções da base do cone oblíquo.

É necessário ter em conta que a medida do raio é igual à medida do afastamento do centro, uma vez que a circunferência tem um ponto no plano frontal de projecção. A circunferência também tem um ponto no plano horizontal de projecção, ou seja, tem um ponto no traço horizontal do plano.

2.° passo

No eixo x, a partir do ponto de cruzamento dos traços do plano, marcam-se 5,5 cm à direita e designam-se as projecções do vértice do cone, $V_1 \equiv V_2$. Finalmente, traçam-se tangentes à projecção horizontal da base do cone, a partir de $V_1 \equiv V_2$ e unem-se os extremos da projecção frontal da base com $V_1 \equiv V_2$.

A traço grosso representam-se os contornos aparentes frontal e horizontal e a traço interrompido será representada a parte da base não visível em projecção horizontal.



Projecções do cone oblíquo, com o seu contorno aparente.

Projecções de cones com bases assentes em planos verticais

Se girarmos a 180° graus uma folha de desenho com projecções de um cone de base de topo, obteremos projecções dum cone de base assente num plano projectante horizontal.

Isto significa que a projecção de cones de bases verticais não traz praticamente nada de novo em termos de conteúdos, trata-se apenas de mais uma oportunidade para aplicar os conhecimentos adquiridos na resolução de problemas concretos do dia-a-dia.

Para o efeito, nada melhor do que determinar as projecções de um cone oblíquo assente pela base num plano vertical situado no I D, tendo em consideração que:

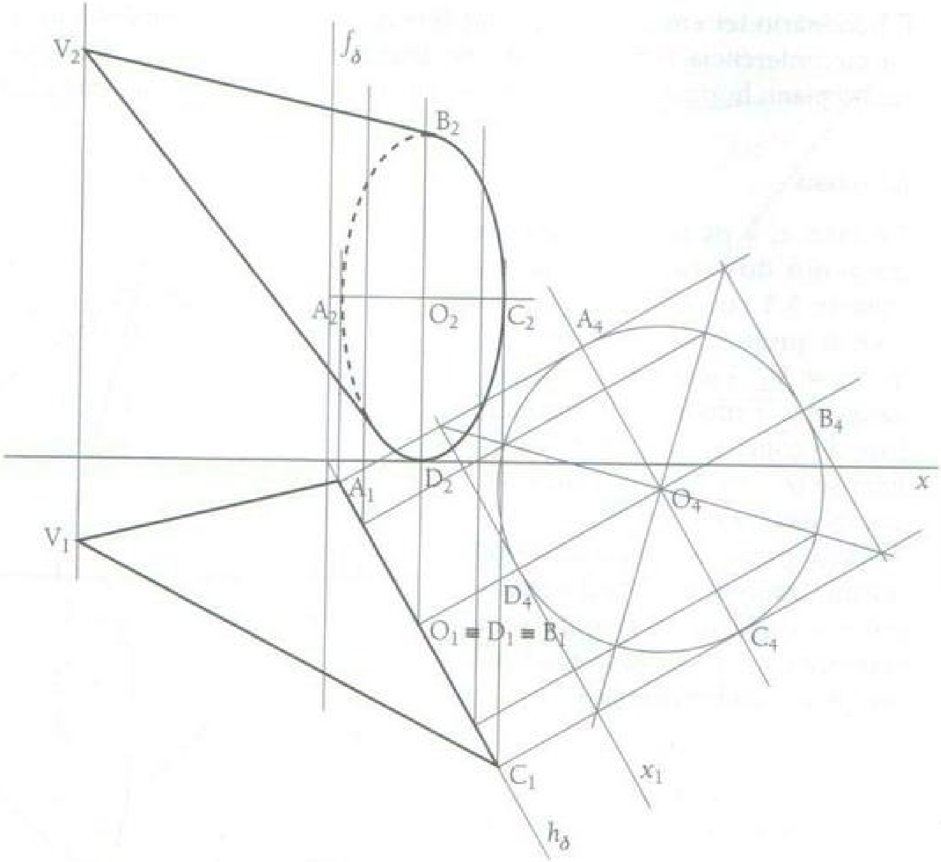
- O plano da base faz um ângulo diedro de 60° com φ_0 de abertura para a direita.
- O centro da base é o ponto O (3; 3) e o raio mede 3 cm.
- O vértice da base é o ponto V (1,5; 7,5), cuja linha de referência se situa 4,5 cm à esquerda do ponto de intersecção dos traços do plano da base.

1.° passo

Primeiramente, desenham-se as projecções da base do cone, com o recurso a um método geométrico auxiliar, que neste caso é a mudança do plano frontal de projecção.

Mantêm-se as cotas e mudam as projecções frontais. Em relação às projecções horizontais, como é do seu conhecimento, mantêm-se, mudando os afastamentos.

Determinam-se as projecções do vértice da base, cuja linha de chamada situa-se 4,5 cm à esquerda do ponto de cruzamento dos traços do plano da base do cone. Completa-se a resolução do exercício conforme se pode observar no desenho que se segue, não esquecendo de aplicar traço grosso no contorno visível do sólido.



Projecções do cone oblíquo, distinguindo-se o seu contorno aparente.

Projecções de prismas assentes em planos de topo

Já tem experiência em traçar projecções de prismas assentes em planos de projecção ou em planos a eles paralelos ou, ainda, em planos duplamente projectantes. Também já sabe determinar as projecções de polígonos contidos em planos projectantes frontais.

A associação desses conhecimentos, entre outros, permite-lhe resolver qualquer exercício relacionado com a projecção de prismas de bases de topo. É pois nas projecções de prismas de bases de topo que nos iremos deter em seguida.

Representemos pelas suas projecções um prisma octogonal regular recto situado no I D.

O sólido está assente por uma das bases num plano projectante frontal que faz com v_0 um ângulo de 40°, de abertura para a esquerda. O centro da base mais próxima de v_0 é o ponto O (4; 3,5) e o raio da circunferência circunscrita à base mede 4 cm. Duas das arestas da base de menor afastamento são de frente e a altura do prisma é de 6 cm.

1.º passo

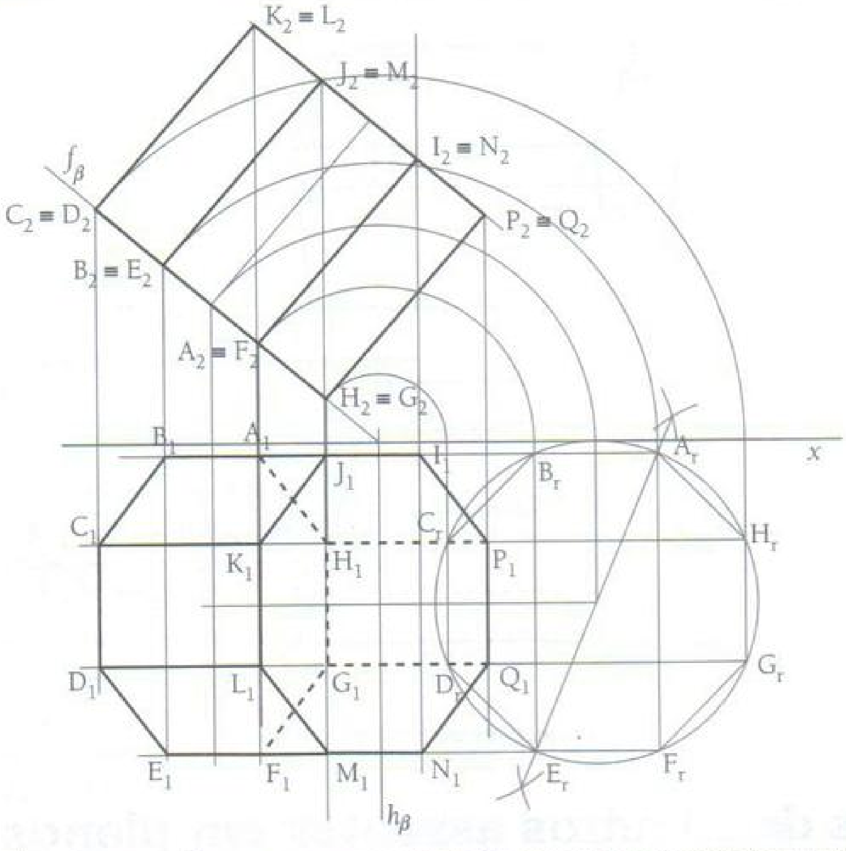
Representa-se pelas suas projecções o octógono regular, uma das bases do prisma que se pretende construir. Na construção do octógono, é necessário ter em consideração que dois dos seus lados deverão, em projecção horizontal, ser paralelos ao eixo *x*.

Efectua-se o rebatimento do centro da base, constrói-se a base, faz-se a inversão do rebatimento para se obterem as projecções dessa base do prisma.

Pelas projecções frontais dos oito vértices da base, traçam-se perpendiculares ao traço frontal do plano dessa base e, aos 6 cm correspondentes à altura do sólido, passa-se o segundo plano da base, logicamente paralelo ao primeiro, cuja intersecção com as perpendiculares determina as projecções frontais dos vértices da segunda base.

Tendo em conta que as arestas laterais do prisma são de frente porque são perpendiculares ao plano de topo, pelas projecções horizontais dos vértices da base mais próxima de v_0, traçam-se linhas paralelas ao eixo *x*. A intersecção destas paralelas com as linhas de chamada da segunda base origina as projecções horizontais dessa segunda base.

Resta apenas unir as projecções do mesmo das bases e dos seus pontos, com um traço de espessura adequada para concluir a resolução deste exercício.



Projecções do prisma regular, com a representação do seu contorno aparente a traço grosso.

Projecções de prismas assentes em planos projectantes horizontais

Como já estudámos casos suficientes para o entendimento deste tipo de projecções vamos directamente à projecção de um prisma pentagonal oblíquo, cujos dados a seguir se descrevem:

- O prisma tem as bases pentagonais regulares assentes em planos projectantes horizontais que fazem com o plano frontal de projecção ângulos diedros de 75° de abertura para a direita.
- O centro da base é o ponto O (3; 3,5), e o raio da base mede 3 cm.
- O lado mais próximo do plano horizontal de projecção, da base mais próxima do plano frontal de projecção, é de nível.
- As arestas laterais são horizontais de frente, e a altura do prisma é igual a 6 cm.

1.º passo

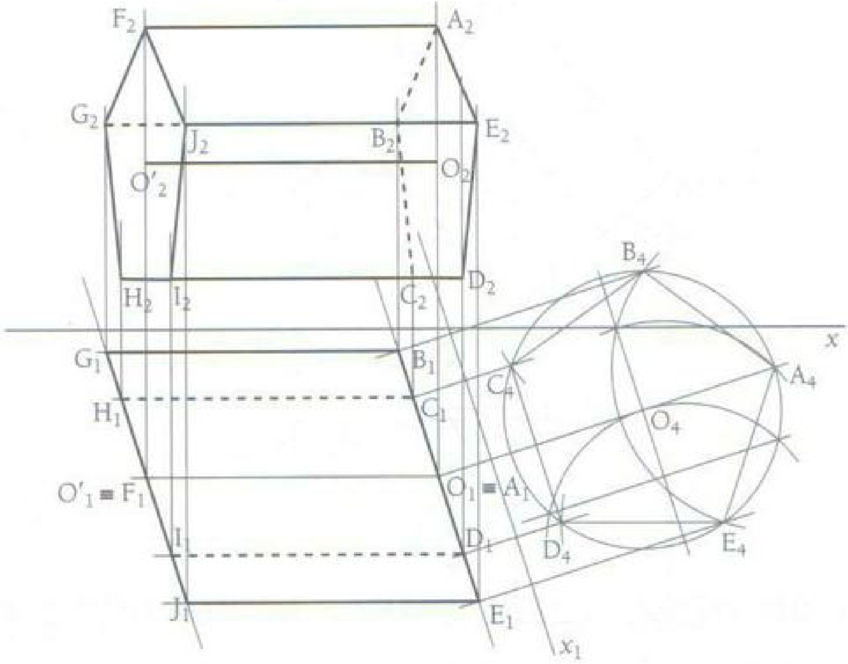
Uma vez que os dados relativos ao plano e ao centro da base estão claramente expressos, representam-se de imediato. Com recurso a um método geométrico auxiliar constrói-se o pentágono em verdadeira grandeza e, posteriormente, determinam-se as suas projecções.

Neste exercício a opção foi pela mudança do plano frontal de projecção, como se pode ver no desenho.

Na construção do pentágono, é necessário estar-se atento à sua posição descrita no enunciado, pois é a partir do segundo plano frontal de projecção que tudo é definido.

Pelas projecções horizontais dos vértices das bases traçam-se linhas paralelas ao eixo x, que se intersectarão com o segundo plano da base, que dista do primeiro 6 cm e que lhe é paralelo. Recorde-se que a distância entre dois planos paralelos mede-se através de uma linha recta perpendicular a ambos os planos.

As projecções frontais dos vértices da segunda base encontrar-se-ão em linhas paralelas ao eixo x e que partem das projecções frontais dos vértices da primeira base.



Projecções do prisma oblíquo.

Projecções de cilindros assentes em planos de topo

O cilindro é um sólido que já conhece perfeitamente, bem como conhece um plano de topo ou projectante frontal.

Logo à partida, sabemos que as projecções frontais das duas bases de topo de um cilindro são dois segmentos de recta que se ligam entre si através de outros dois segmentos de recta, as geratrizes do contorno aparente frontal do cilindro. O contorno aparente horizontal é constituído por outras duas geratrizes e dois arcos.

Para a visualização do que acabámos de descrever vamos determinar as projecções de um cilindro oblíquo, situado no I D, de bases de topo, sabendo que:

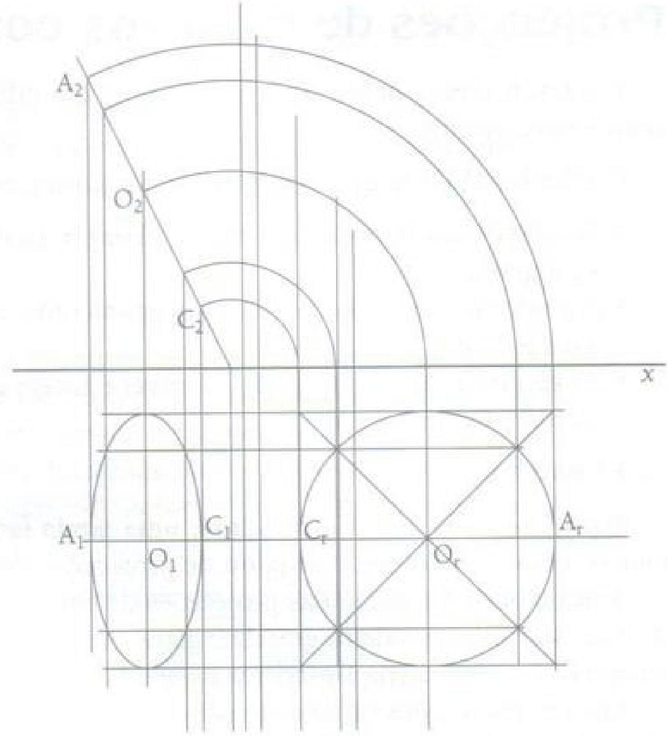
- O diâmetro de frente da base mais próxima de v_0 é o segmento de recta [AC], com as seguintes coordenadas: A (0; 3; 5) e C (2; 3; 1).
- A altura do cilindro é de 3 cm, e as projecções frontais das suas geratrizes são perpendiculares ao plano da base.

• As projecções horizontais das geratrizes do cilindro fazem com o eixo x ângulos de 45°.

1.° passo

As projecções do diâmetro da base mais próxima do plano horizontal de projecção permitem conhecer a amplitude dos ângulos diedros que os planos das bases fazem com o plano horizontal de projecção.

O ponto médio do diâmetro é o centro da circunferência, na base do qual ele é traçado, após o uso de um método geométrico auxiliar, que, neste caso, é o rebatimento.



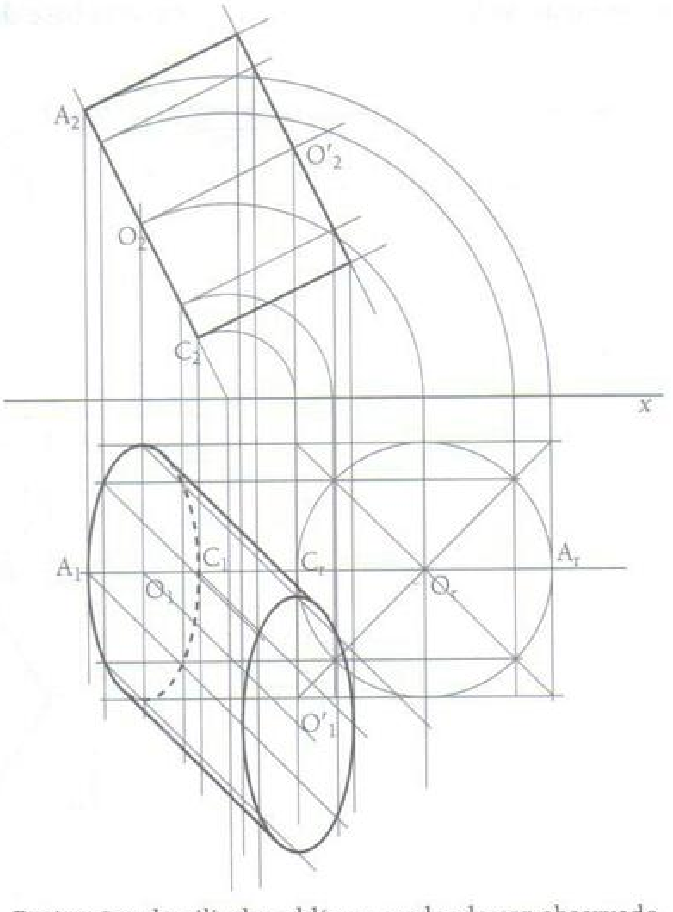
Projecções da base do cilindro.

2.° passo

Pelos extremos da projecção frontal do cilindro traçam-se duas perpendiculares, sobre as quais se marca a altura do sólido e se determina a projecção frontal da segunda base.

Em seguida, pelos extremos da projecção frontal dessa segunda base traçam-se duas linhas de chamada, que intersectarão as tangentes à projecção horizontal à primeira base.

Essas tangentes fazem 45° com o eixo x. Além das tangentes, serão projectados os outros pontos, que garantem o maior rigor no traçado da projecção horizontal da segunda base.



Projecções do cilindro oblíquo, podendo ser observado o seu contorno aparente.

Projecções de cilindros com bases verticais

Representemos, pelas suas projecções, um cilindro oblíquo com bases assentes em planos projectantes horizontais.

O cilindro oblíquo que vamos projectar posiciona-se da seguinte maneira:

- Os planos das bases fazem com o plano frontal de projecção ângulos diedros de 60° de abertura para a esquerda.
- O centro de uma das bases tem afastamento e cota respectivamente iguais a 3 cm e 3,5 cm, e o raio é igual a 3 cm.
- As geratrizes do cilindro são de nível e fazem com o plano frontal ângulos de 60° de abertura para a direita e medem 5 cm.

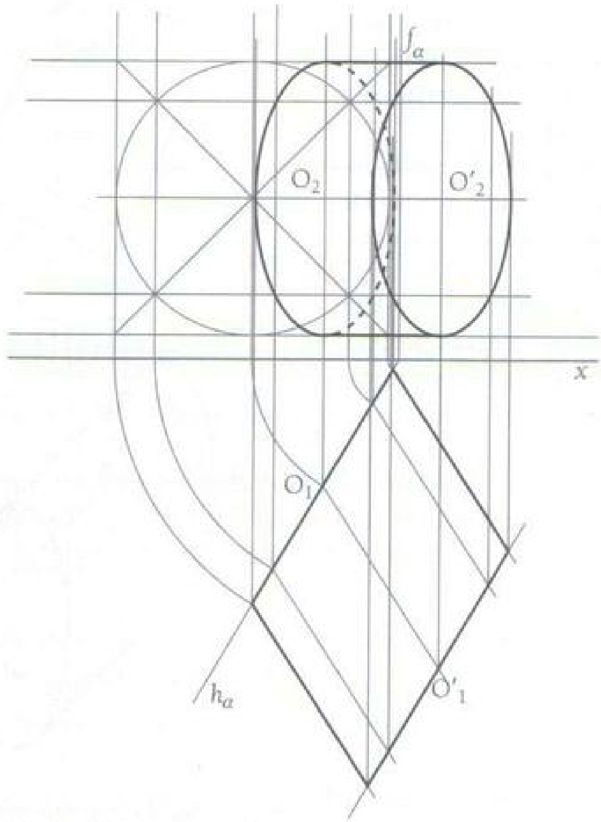
1.° passo

A projecção da base do cilindro é uma tarefa fácil, pois já foi feito aquando das projecções de figuras planas, bem como quando se falou de projecções de cones com bases projectantes horizontais.

Antes da determinação das projecções da base dada do cilindro, é necessário ter-se em consideração que deverá estar em verdadeira grandeza para garantir o necessário rigor que caracteriza o desenho geométrico em geral, e a Geometria Descritiva neste caso particular.

Após as projecções da base do sólido, pelos extremos da projecção horizontal da base mais próxima do plano frontal traçam-se linhas que fazem 60° com φ_0, de abertura para a direita, sobre as quais se marcam 5 cm, o comprimento das geratrizes.

Seguidamente, pela projecção frontal da base, traçam-se linhas paralelas ao eixo x, as quais ao cruzarem-se com as linhas de chamada da segunda base determinam a projecção frontal dessa base.



Projecções do cilindro oblíquo, com distinção, a traço grosso, do contorno aparente.

Esferas

Uma *esfera* é um sólido geométrico constituído por uma *superfície esférica*.
Para a sua representação, em geometria descritiva, basta conhecer o seu centro e o seu raio.

Projecções de esferas

Uma esfera é o sólido geométrico mais simples de projectar.

Qualquer que seja o plano onde ela se situe, as suas projecções são invariavelmente círculos, quer sobre o plano frontal de projecção, quer sobre o plano horizontal de projecção.

Sendo assim, não serão feitas as suas projecções em diferentes planos como temos vindo a fazer com outros sólidos geométricos, pois, como já se disse, independentemente do plano onde uma esfera esteja assente, as suas projecções serão sempre círculos.

Portanto, daremos apenas um exemplo, incidindo sobre um exercício de representação de uma esfera pelas suas projecções.

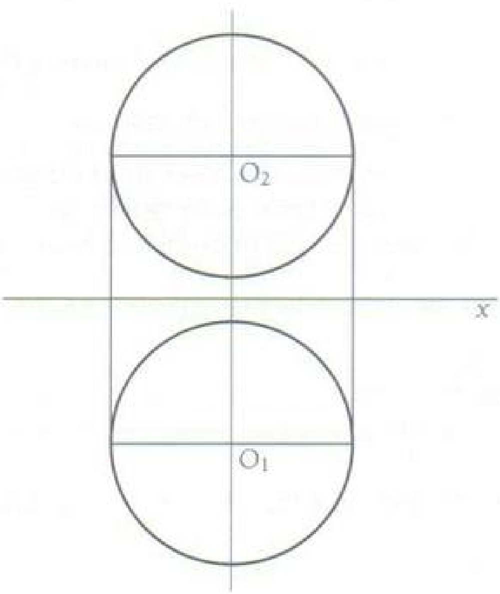
Estes são os dados da esfera:

- A esfera situa-se no primeiro diedro de projecção, o seu centro tem cota igual a 3 cm e pertence ao plano bissector dos quadrantes ímpares.
- O seu raio é 2,5 cm.

1.º passo

Representa-se pelas suas projecções o centro da esfera que, como se pode entender, tem cota e afastamento iguais entre si e, neste caso iguais a 3 cm.

Com a abertura do compasso igual a 2,5 cm, medida do raio da esfera, traçam-se dois círculos, o primeiro com centro na projecção frontal do centro e o segundo com centro na projecção horizontal do centro da esfera, projecção horizontal da esfera.



Projecções da esfera, com o seu contorno aparente.

Exercícios propostos

1. Uma pirâmide triangular regular recta, de base de nível tem 6 cm de altura e 4 cm de lado da base. A base situa-se 1,5 cm acima do plano horizontal de projecção, e o vértice da pirâmide está mais distante deste plano.
Determine as suas projecções, sabendo que a aresta da base mais à esquerda é de topo e o seu extremo mais próximo do plano frontal dista deste 1 cm.

2.* Construa as projecções de uma pirâmide hexagonal oblíqua, tendo em conta os seguintes dados:

A base é um hexágono regular de 4,5 cm de lado, assente no plano horizontal de projecção.
O centro da base tem 5 cm de afastamento, e dois dos lados dessa base são paralelos ao eixo x.
O vértice da pirâmide é o ponto V (0; 7), cuja linha de chamada coincide com a linha de chamada do centro da base.

3. Desenhe as projecções de uma pirâmide quadrangular recta situada no ID, sabendo que:

A pirâmide está assente pela sua base num plano de frente e **A** (0; 5,5; 2,5) e **B** (3; 5,5; 0) são vértices da base [**ABCD**];
O vértice da pirâmide é um ponto situado no plano frontal de projecção.

4.* Construa as projecções de um cone de revolução situado no primeiro diedro de projecção, sabendo que:

A base do cone está contida num plano de nível de 0,5 cm de cota.
O centro da base tem 4 cm de afastamento e o raio mede 3 cm.
A altura do cone é 6 cm.

a) Determine as projecções horizontais das geratrizes do contorno aparente frontal.
b) Represente pelas suas projecções a geratriz do ponto da base do cone de menor afastamento.

5. Desenhe as projecções de um cone de revolução situado no primeiro diedro de projecção, assente num plano de frente de 2 cm de afastamento. O centro da base do cone tem 4 cm de cota e o raio mede 3 cm. A altura do cone é 6 cm.

a) Represente as projecções das geratrizes do cone dos pontos da base de 5,5 cm de cota.
b) Desenhe as projecções frontais das geratrizes do contorno aparente horizontal.

6. Construa as projecções dum cone oblíquo situado no I D tendo em conta que:

A base do cone é de frente e o centro é o ponto **O** pertencente a $\beta_{1/3}$ com afastamento igual a 4 cm.
O raio da base mede 3 cm.
O vértice do cone é um ponto do eixo x, e a sua linha de chamada é a mesma que a do centro do cone.

7. Construa as projecções de um prisma quadrangular, sabendo que:

O prisma situa-se no I D e está assente por uma das bases num plano de nível α de cota 0,5 cm.
As bases são quadrados de 6 cm de lado cujos lados estão igualmente inclinados em relação ao eixo x.
Uma das arestas laterais do prisma pertence ao plano frontal de projecção mede 7 cm de comprimento.

8.* Represente pelas suas projecções um prisma hexagonal oblíquo situado no I D, com as bases assentes em planos de frente. Dados:

Os planos das bases têm afastamentos iguais a 2 cm e 6 cm, respectivamente.
As bases estão inscritas em circunferências de 4,5 cm de raio e duas das arestas de uma das bases são verticais.
O eixo do prisma é um segmento de nível que faz 55° com ν_0, abertura para a direita, e tem cota igual a 5 cm.

9.* Represente pelas suas projecções um cilindro oblíquo situado no I D, assente por uma das bases num plano de nível. O eixo do cilindro é oblíquo, e o centro de uma das bases é o ponto O (0; 5; 0,5). O raio das bases mede 4 cm e o centro da outra base é o ponto O′ (4; 7,5; 7,5).

a) Desenhe as projecções horizontais das geratrizes do contorno aparente frontal.
b) Represente pelas suas projecções as geratrizes do contorno aparente horizontal do cilindro.

10. Construa as projecções de um cilindro de revolução de bases de frente, sabendo que:

Uma das geratrizes do cilindro pertence ao plano horizontal de projecção, sendo que os centros das bases têm 4 cm de cota.
A base de maior afastamento tem 8 cm de afastamento e a altura do cilindro é de 6,5 cm.

11.* Desenhe as projecções de um cilindro oblíquo, sabendo que:

As bases circulares de 2,5 cm de raio estão contidas em φ_0 e num plano de frente, com 5 cm de afastamento.
O centro O da base contida em φ_0 é um ponto de 4 cm de cota.
As projecções das geratrizes fazem com o eixo x ângulos de 45° de abertura para a esquerda.

a) Desenhe as projecções das geratrizes do contorno aparente frontal.
b) Represente pelas suas projecções as geratrizes do contorno aparente horizontal.

12.* Desenhe as projecções de uma pirâmide quadrangular regular, situada no I D, tendo em conta que:

A base da pirâmide pertence um plano π, de perfil.
Um dos vértices da base da pirâmide situa-se no plano frontal de projecção e tem 2,5 cm de cota. Um outro vértice da base, que o segue, pertence a ν_0.
O lado da base da pirâmide mede 6 cm.
A altura da pirâmide mede 8 cm, e o vértice V da pirâmide situa-se à esquerda do plano da base.

13. Represente pelas suas projecções um cone de revolução de base de perfil, situado no I D, considerando que:

O centro da base do cone é o ponto O de afastamento igual a 5,5 cm e pertencente a $\beta_{1/3}$.
O raio da base do cone mede 4 cm e o vértice situa-se à esquerda da base. A altura do cone é de 6 cm.

14. Construa as projecções dum cone oblíquo situado no I D, sabendo que:

A base é de perfil, o seu centro é o ponto O (0; 5,5; 5,5) e o seu raio mede 4,5 cm.
O vértice é o ponto V (7; 0,5; 1)

15. Represente pelas suas projecções um prisma quadrangular regular recto de bases de perfil, sabendo que:

O centro de uma das bases é um ponto do $\beta_{1/3}$ e tem 5 cm de afastamento.
Uma das arestas laterais do prisma situa-se no plano horizontal de projecção.
As arestas da base estão igualmente inclinadas em relação a ν_0 e medem 4 cm.
A altura do prisma é 6 cm.

16.* Desenhe as projecções dum prisma pentagonal oblíquo, situado no primeiro diedro de projecção, tendo em conta que:

Uma das bases, de perfil, inscreve-se numa circunferência de centro O (5; 7,5).
Um dos vértices dessa base tem 3 cm de cota e o raio mede 5 cm.
As arestas laterais do prisma são segmentos de frente de 7 cm de comprimento.
A outra base situa-se à esquerda e tem um ponto no plano horizontal de projecção.

17. Represente pelas suas projecções um cilindro oblíquo, tendo em conta os seguintes dados:

As bases estão assentes em planos de perfil.
Os centros das suas bases são os pontos O (0; 6; 5) e O′ (6; 3; 3).
O raio das bases do cilindro mede 3 cm.

18.* Construa as projecções de uma pirâmide hexagonal regular recta, situada no primeiro diedro de projecção, sabendo que:

A base está contida num plano projectante frontal que faz com ν_0, um ângulo diedro de 60°, de abertura para a esquerda.
As arestas da base medem 3,5 cm; uma delas tem afastamento nulo e um dos seus extremos mede 3 cm de cota.
A base da pirâmide é invisível em projecção horizontal, e a altura da pirâmide mede 7,5 cm.

19. Desenhe as projecções ortogonais de uma pirâmide quadrangular oblíqua, situada no primeiro diedro de projecção, sabendo o seguinte:

A pirâmide está assente pela base num plano projectante frontal.
Os vértices E (0; 4,5; 0,5) e F (2,5; 1; 6), da base quadrangular regular [EFGH], definem a aresta [EF].
O vértice da pirâmide é o ponto V (-8; 9; 2).

20.* Desenhe as projecções duma pirâmide hexagonal regular recta situada no primeiro diedro de projecção, cuja base está assente num plano de topo que faz um ângulo diedro de 75° com ν_0, de abertura para a direita. O lado do hexágono mede 3,5 cm, e um dos lados tem cota nula. Um dos vértices da base da pirâmide pertence ao plano frontal de projecção. A altura da pirâmide mede 8 cm.

21. Represente pelas suas projecções um cone oblíquo de base de topo, situado no I D, considerando que:

O plano da base faz um ângulo diedro de 45° com o plano horizontal de projecção de abertura para a direita.
O centro da base é o ponto O (4, 3,5) e o raio da base mede 3 cm.
O vértice da base é um ponto do $\beta_{1/3}$ com afastamento igual a 10 cm, cuja linha de chamada situa-se 10 cm à esquerda da linha de chamada do centro da base.

22. Represente pelas suas projecções um cone de revolução, de base assente num plano projectante horizontal, respeitando o seguinte posicionamento:

O plano projectante horizontal faz um ângulo diedro de 60° de abertura para a direita.
O centro da base tem 4,5 cm de afastamento e a circunferência que determina os limites da base tem um ponto em ν_0 e outro em φ_0.
A altura do cone é de 6,5 cm.

23. Desenhe as projecções dum cone oblíquo situado no I D, sabendo que:

A sua base está assente num plano vertical que faz um diedro de 75° com ν_0, de abertura para a esquerda.
O raio da base é de 3 cm e o seu centro é o ponto O (4; 4,5).
O vértice é um ponto situado no lugar geométrico em que as cotas e afastamentos são nulos, estando 6 cm à direita do ponto de cruzamento dos traços do plano da base.

24. Desenhe as projecções de uma esfera situada no primeiro diedro de projecção, cujo centro é o ponto O (5, 6). A esfera tem um ponto no plano frontal de projecção.

25. Represente pelas suas projecção um prisma hexagonal regular recto, de bases de topo, considerando que:

Os planos das bases fazem ângulos de 30°, de abertura para a esquerda.
Uma das faces do prisma situa-se no plano frontal de projecção e a aresta da base mede 3 cm.
Um dos vértices da base de menor cota, situa-se no plano horizontal de projecção.
A altura do prisma é 6 cm.

26. Represente pelas sua projecções um prisma octogonal regular recto de bases verticais, sabendo que:

Os planos das bases fazem com o plano frontal de projecção ângulos de 60° de abertura para a esquerda.
O centro da base tem 3 cm de afastamento e 4 cm de cota e, o raio da circunferência a ela circunscrita mede 3 cm.
Duas faces do prisma são de nível e a altura é de 5,5 cm.

27.* Represente pelas suas projecções um prisma hexagonal oblíquo situado no I D, tendo em conta que:

As bases do prisma são projectantes horizontais e fazem com o plano frontal de projecção ângulos de 60° de abertura para a esquerda.
A aresta [AB] da base mais próxima do plano frontal de projecção, mede 4 cm, existe em ν_0 e o vértice A tem 2,5 cm de afastamento.
A altura da pirâmide mede 4 cm e as arestas laterais fazem com o eixo x ângulos de 45° de abertura para a esquerda.

28. Represente, pelas suas projecções, um cilindro de revolução de bases de topo, sabendo que:

Os planos projectantes frontais que contêm as bases fazem com o plano horizontal de projecção ângulos diedros de 60° de abertura para a esquerda.
O centro de uma das bases do cilindro é o ponto O (4; 3,5) e uma da geratrizes pertence ao plano frontal e projecção.
A altura do cilindro é de 6 cm.

29.* Construa as projecções de cilindro oblíquo situado no I D, sabendo que:

As bases estão assentes em planos projectantes frontais que fazem com ν_0 ângulos diedros de 75° de abertura para a esquerda.
O centro de uma das bases é o ponto O, pertencente ao plano bissector dos quadrantes ímpares, e tem afastamento igual a 4,5 cm; o raio mede 3 cm.
As projecções frontais e horizontais das geratrizes do cilindro fazem com o eixo x, respectivamente, ângulos de 40° e 45°, de abertura para a direita.
A altura do cilindro é de 4 cm

30. Construa as projecções dum cilindro oblíquo, com bases verticais, sabendo que:

As bases fazem com o plano frontal de projecção ângulos de 30° de abertura para a esquerda
Uma das bases do cilindro tem um ponto em φ_0 e outro em ν_0, e o raio mede 4 cm.
As geratrizes do cilindro são de nível e fazem com o plano frontal de projecção ângulos de 30° graus de abertura para a direita.
Os planos da base distam 5 cm entre si.

31. Represente pelas suas projecções uma esfera situada no primeiro diedro de projecção, sabendo que:

A esfera tem um ponto no plano frontal de projecção e outro no plano horizontal de projecção.
O seu raio mede 3,5 cm.

Unidade 1 – Introdução à Geometria Descritiva

5. C.

16. Planos ortogonais de projecção são dois planos perpendiculares em que um toma a posição frontal (φ_0) e o outro, consequentemente, toma a posição horizontal (ν_0), cuja linha de intersecção denomina-se eixo x.

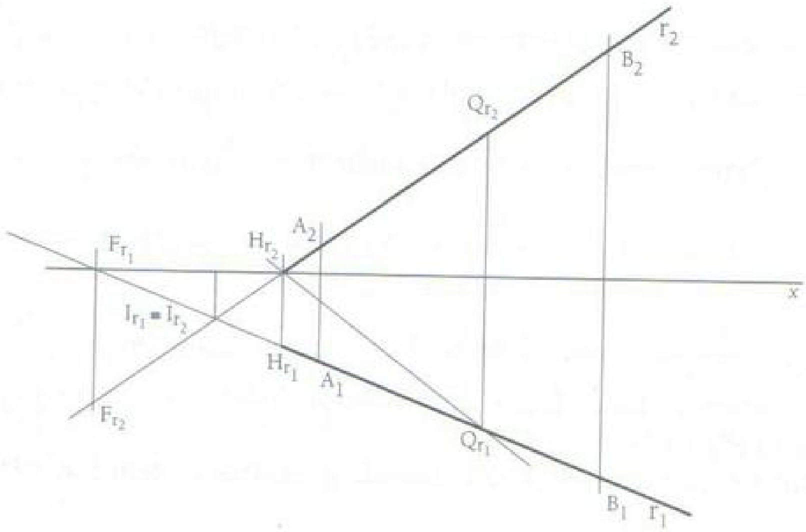
Unidade 2 – Representação Diédrica do Ponto

6. No plano do desenho, as projecções frontais dos pontos de cota negativa situam-se para baixo do eixo x.

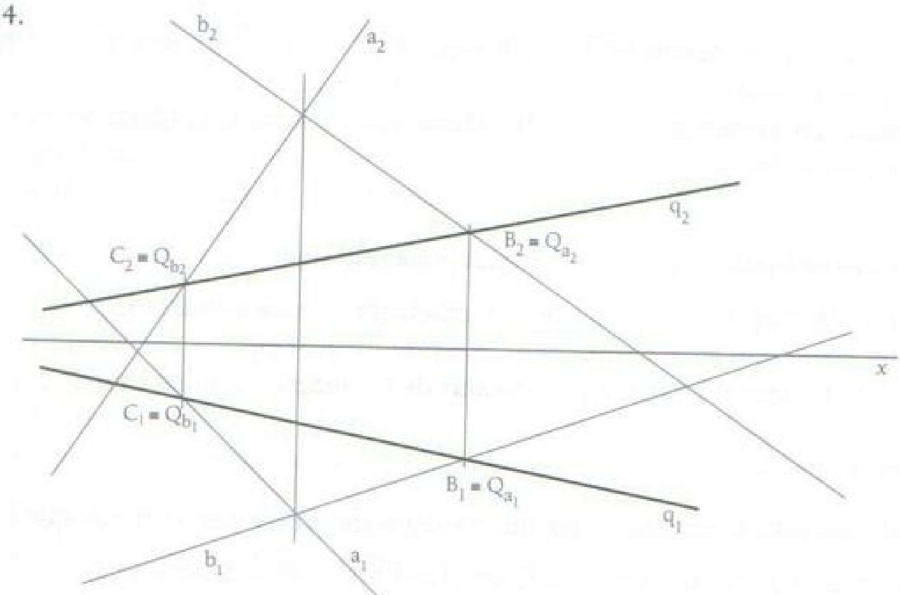
14. A.; B.; C.

Unidade 3 – Representação Diédrica da Recta

4.



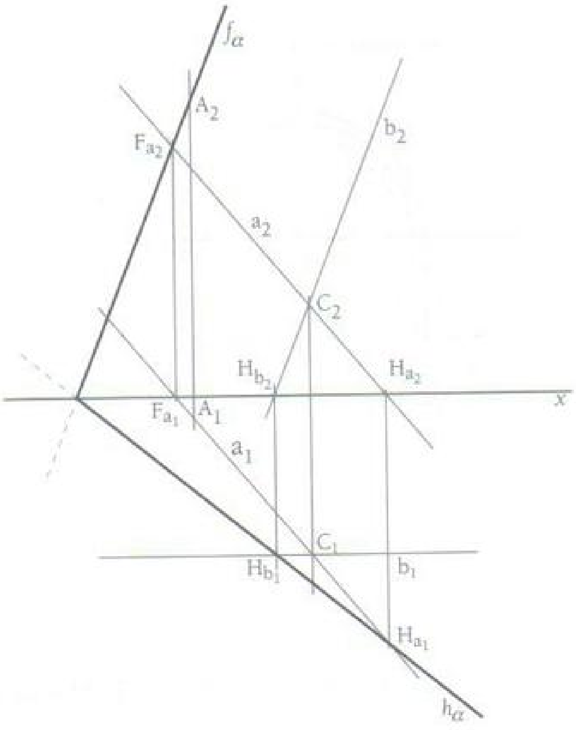
14.



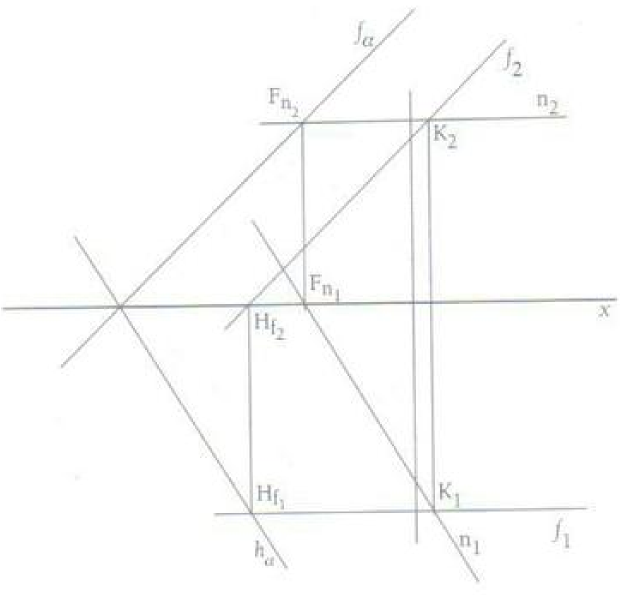
É uma recta do $\beta_{1/3}$.

Unidade 4 – Representação Diédrica do Plano

3.

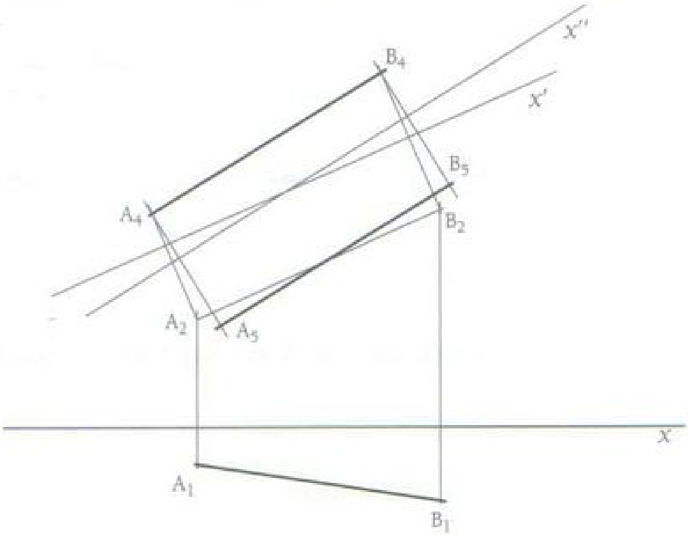


6.

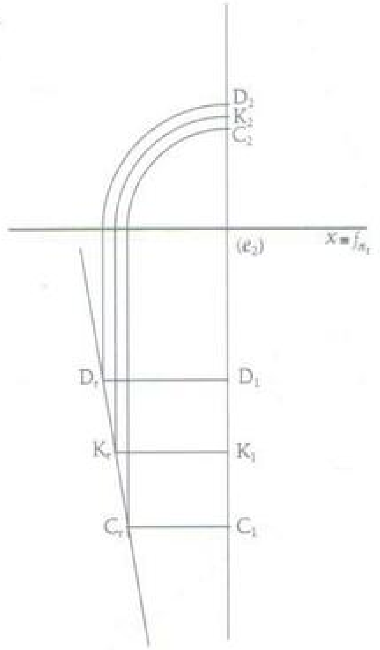


Unidade 5 – Processos Geométricos Auxiliares

8.

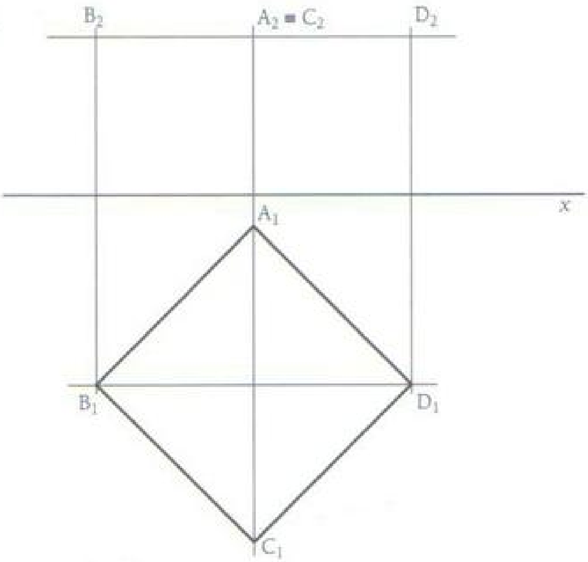


17.

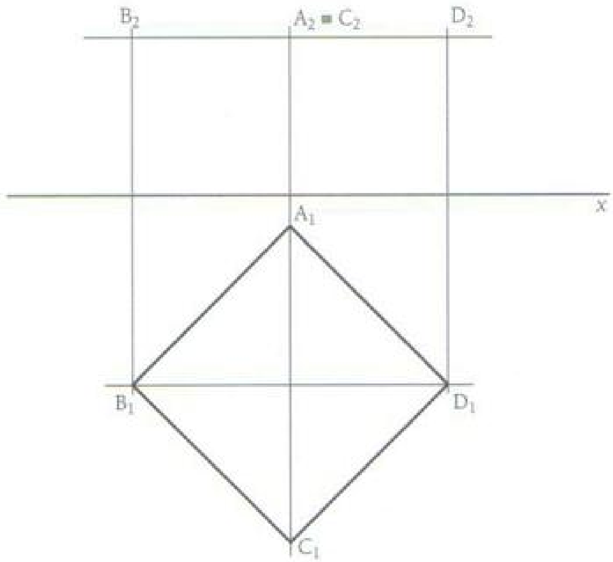


Unidade 6 – Projecções de Figuras

8.

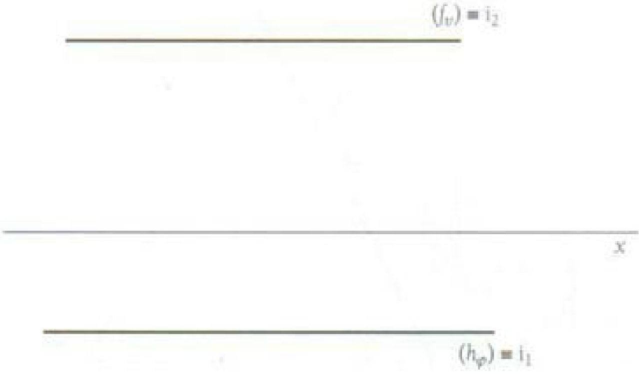


19.

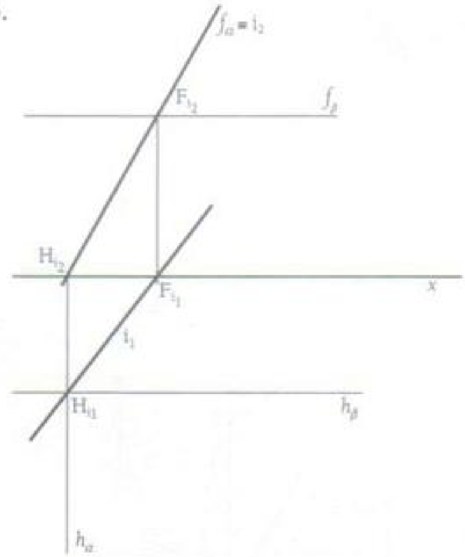


Unidade 7 – Intersecção de Dois Planos

1.

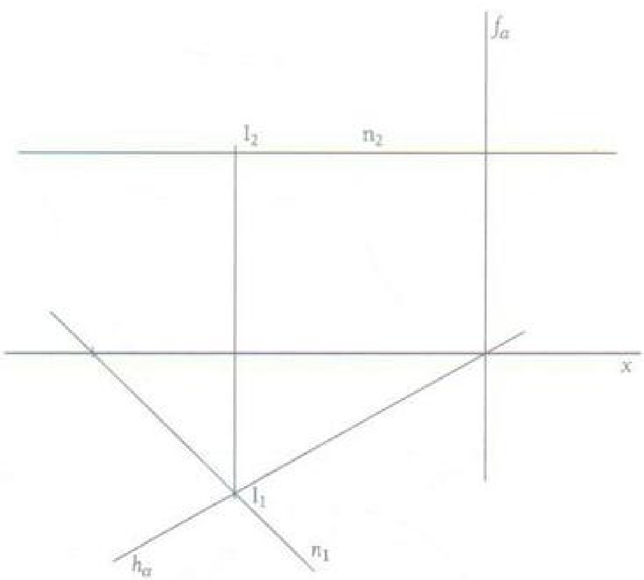


6.

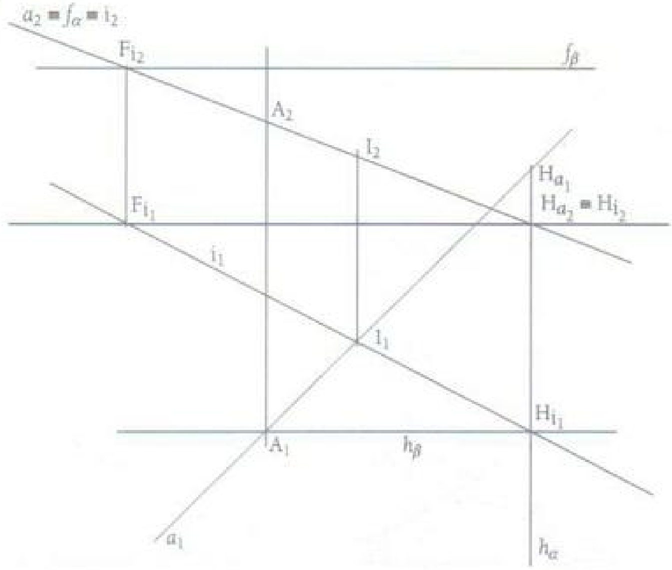


Unidade 8 – Intersecção de Rectas com Planos

2.

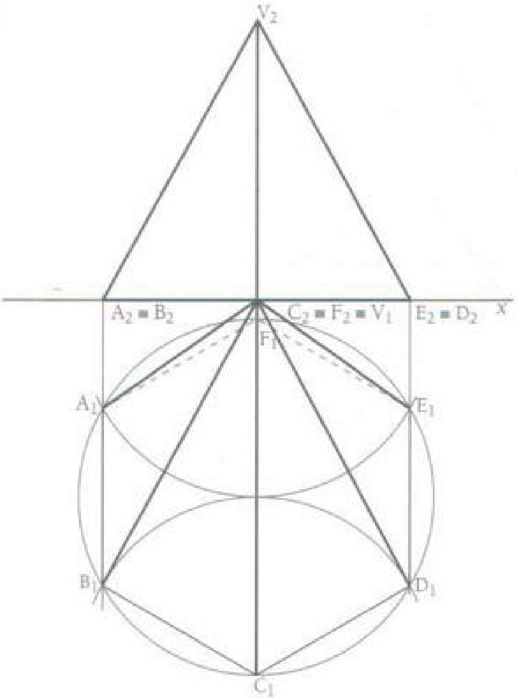


5.

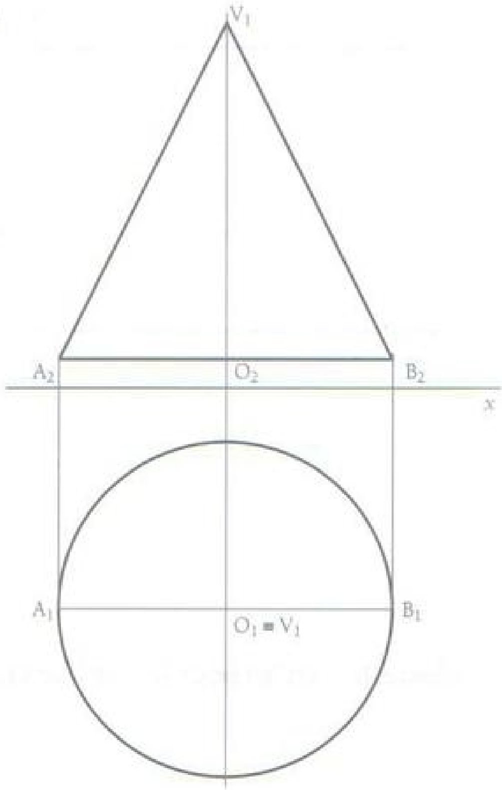


Unidade 9 – Representação Diédrica de Sólidos Geométricos

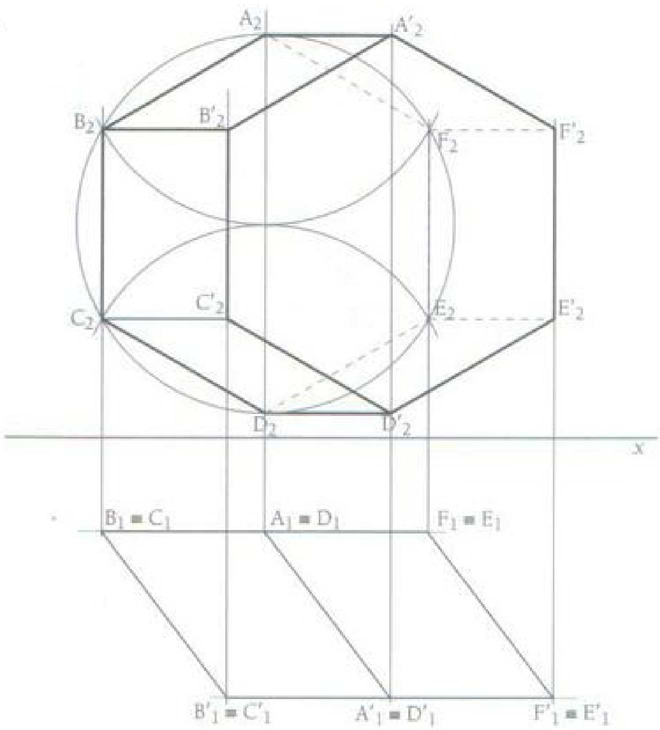
2.



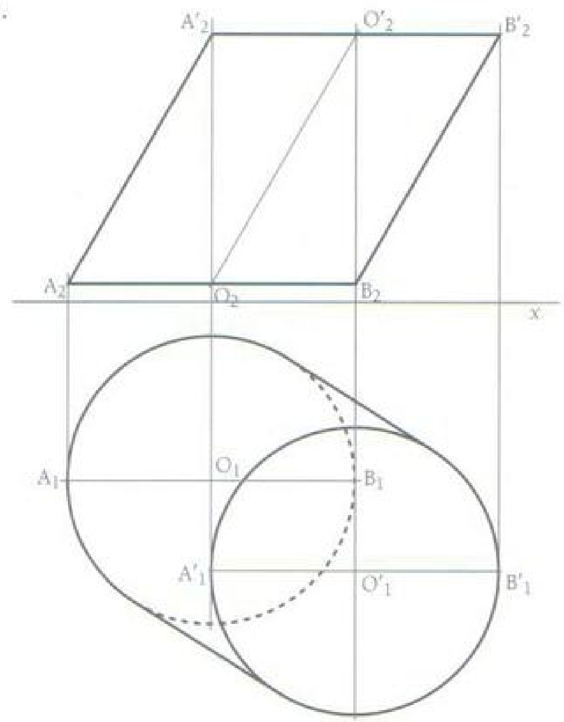
4.



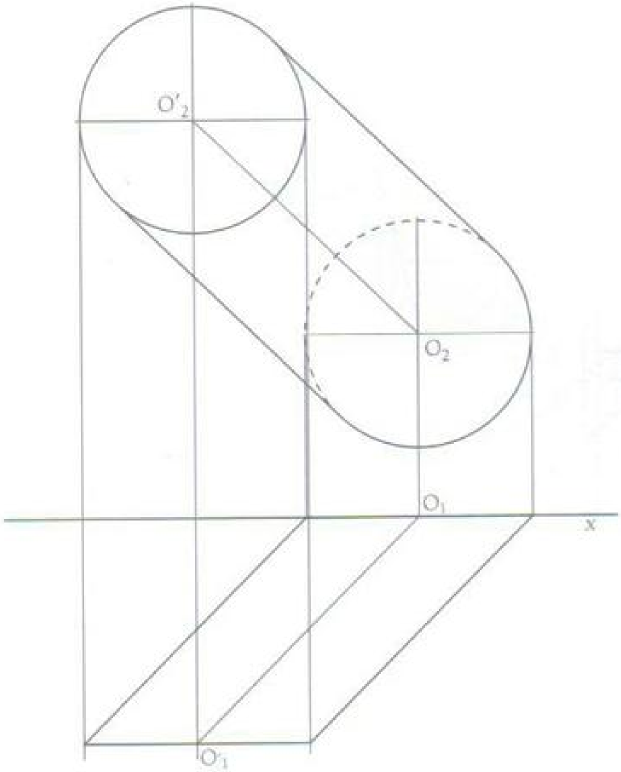
8.



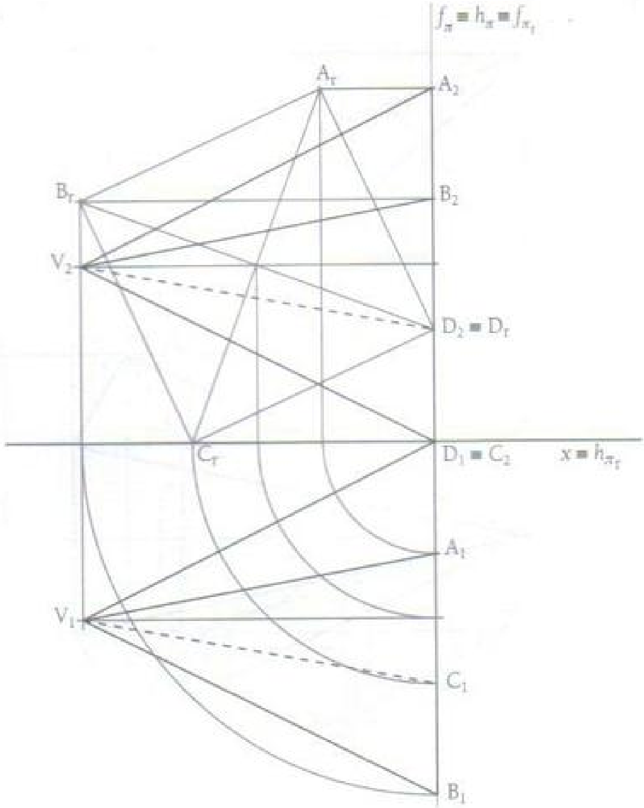
9.



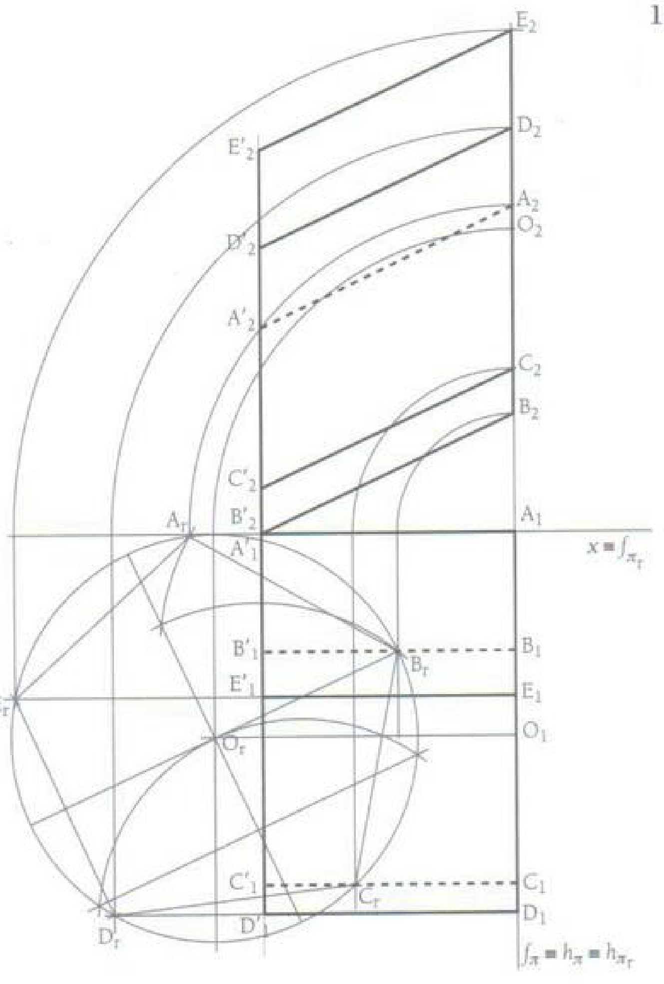
11.


O'2
O2
O1
x
O'1

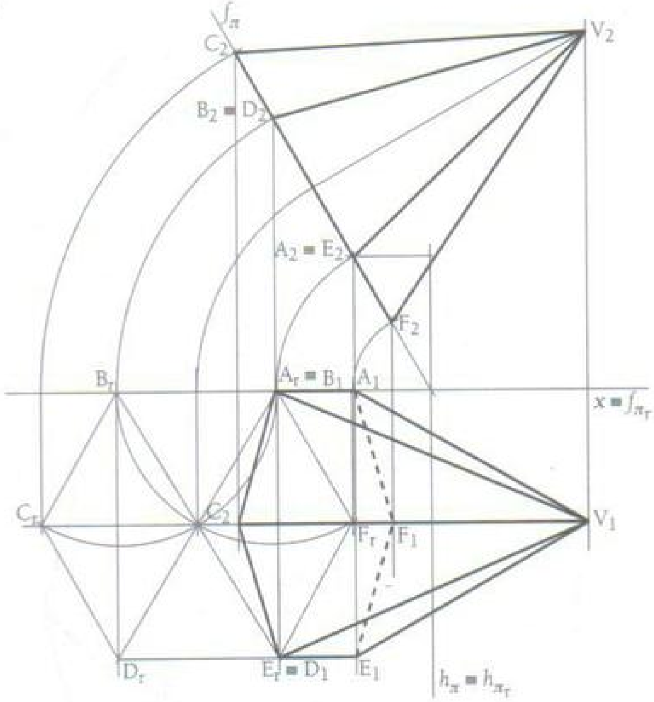
12.


$f_\pi \equiv h_\pi \equiv f_{\pi_r}$
Ar
A2
Br
B2
V2
D2 ≡ Dr
Cr
D1 ≡ C2
$x \equiv h_{\pi_r}$
A1
V1
C1
B1

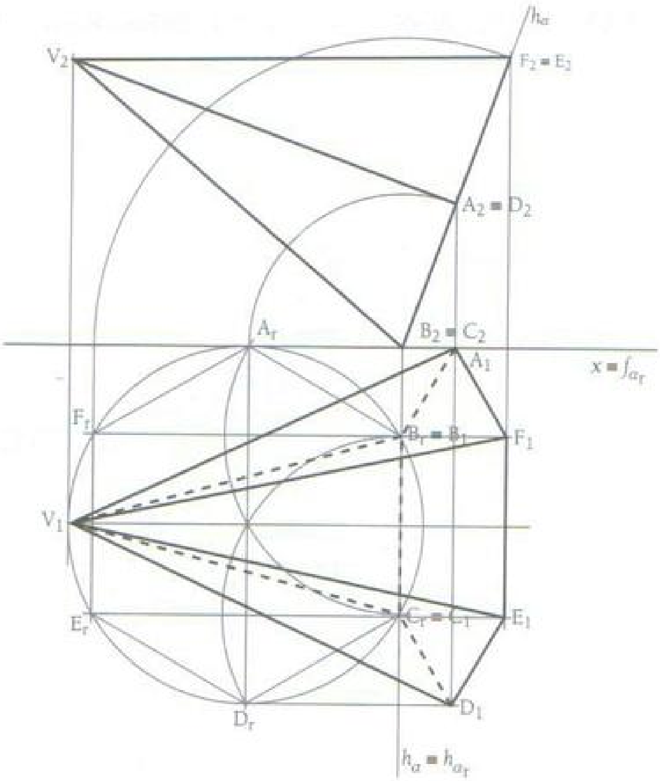
16.


E2
E'2
D2
D'2
A2
O2
A'2
C2
B2
C'2
B'2
A1
Ar
A'1
$x \equiv f_{\pi_r}$
B'1
B1
Br
Er
E'1
E1
Or
O1
C'1
C1
Cr
Dr
D'1
D1
$f_\pi \equiv h_\pi \equiv h_{\pi_r}$

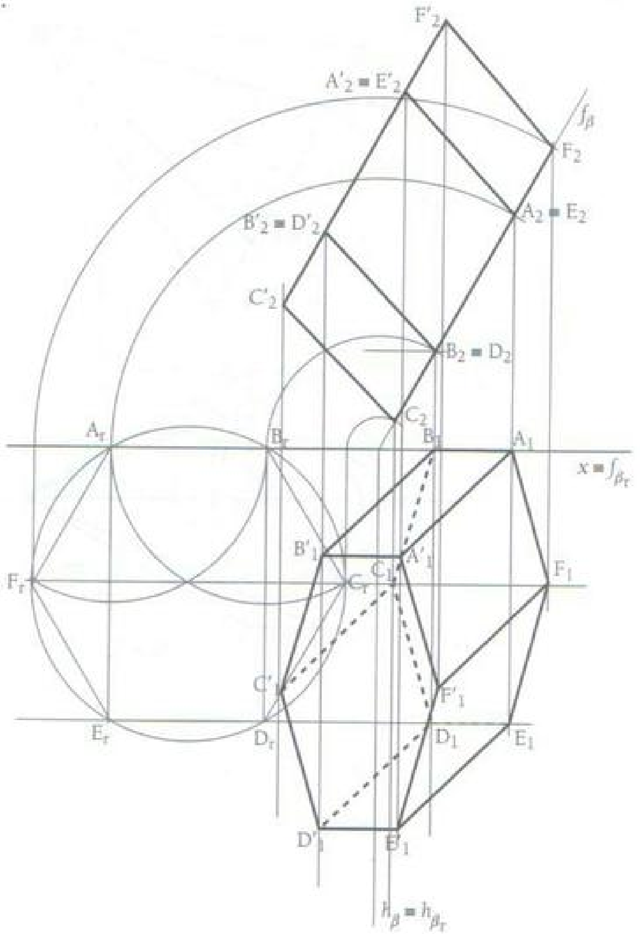
18.


f_π
C2
V2
B2 ≡ D2
A2 ≡ E2
F2
Br
Ar ≡ B1
A1
$x \equiv f_{\pi_r}$
Cr
C1
Fr
F1
V1
Dr
Er ≡ D1
E1
$h_\pi \equiv h_{\pi_r}$

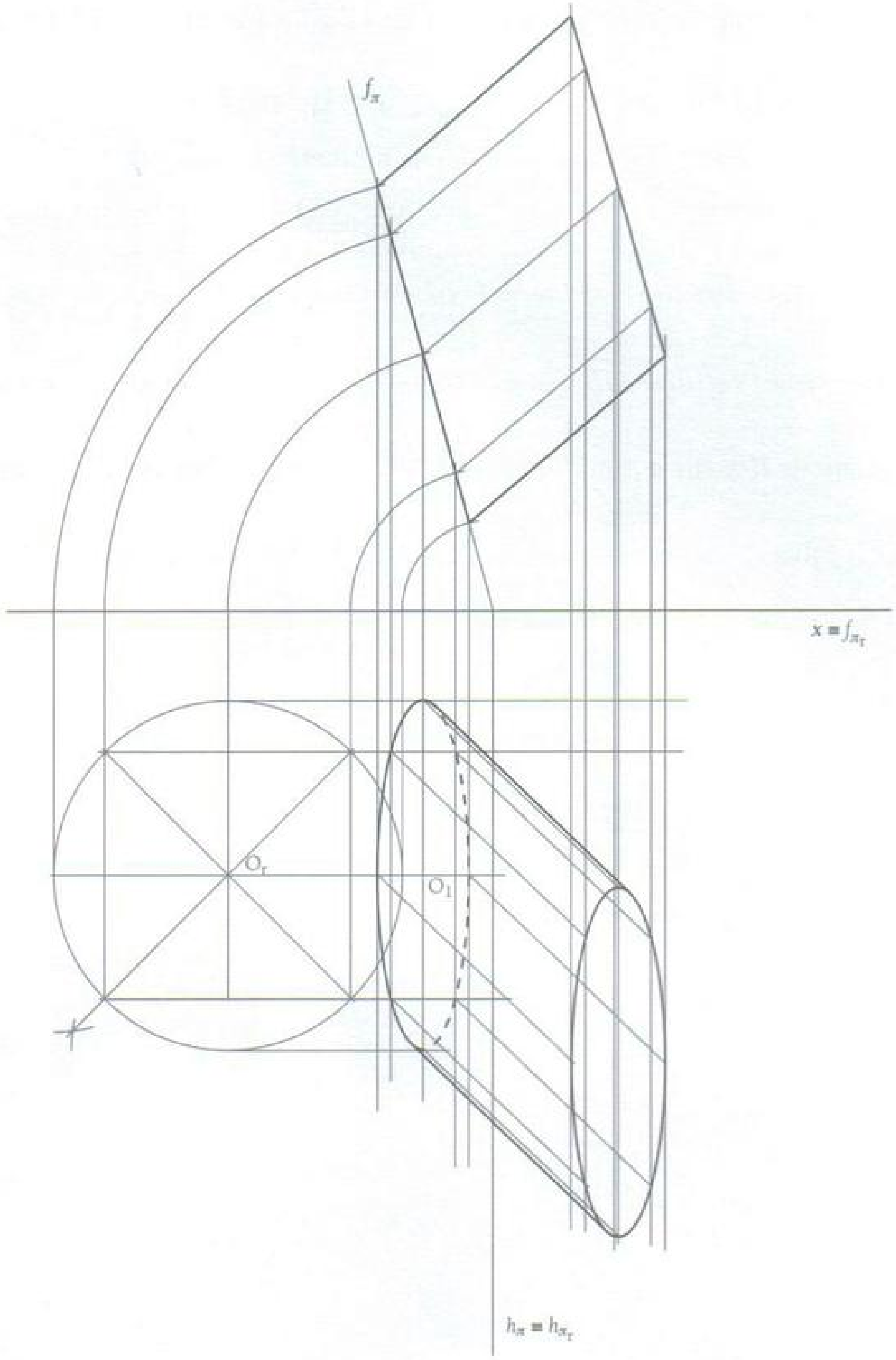
20.


h_α
V_2
$F_2 \equiv E_2$
$A_2 \equiv D_2$
A_r
$B_2 \equiv C_2$
A_1
$x \equiv f_{\alpha_r}$
F_r
$B_r \equiv B_1$
F_1
V_1
E_r
$C_r \equiv C_1$
E_1
D_r
D_1
$h_\alpha \equiv h_{\alpha_r}$

27.


F'_2
$A'_2 \equiv E'_2$
f_β
F_2
$A_2 \equiv E_2$
$B'_2 \equiv D'_2$
C'_2
$B_2 \equiv D_2$
C_2
A_r
B_r
B_1
A_1
$x \equiv f_{\beta_r}$
B'_1
A'_1
F_r
C_1
C_r
F_1
C'_1
F'_1
E_r
D_r
D_1
E_1
D'_1
E'_1
$h_\beta \equiv h_{\beta_r}$

29.



Bibliografia

Carreira, António Ribeiro, *Compêndio de Desenho* (para o 3.º Ciclo do Ensino Liceal), 2.ª Edição, Livraria Sá da Costa, Lisboa 1972.

Mesa, Agostinho, e Camundimo, Vasco Filipe, *Desenho*, 8.ª Classe, DINAME 1995.

Mesa, Agostinho, e Camundimo, Vasco Filipe, *Desenho*, 10.ª Classe, Editora Escolar, 1995.

Santa-Rita, José Fernando, *Desenho e Geometria Descritiva A*, 12.º Ano, 1.ª Edição, Texto Editora, Lda, 1998.

Santa-Rita, José Fernando, *Geometria Descritiva A/B Bloco 2*, volume 1 – 11.º/12.º Anos, 1.ª Edição, Texto Editores, Lda, 2005.

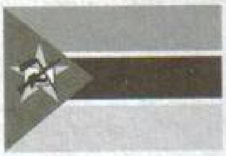
Santa-Rita, José Fernando, *Geometria Descritiva A/B Bloco 2*, volume 2 – 11.º/12.º Anos, 1.ª Edição, Texto Editores, Lda, 2005.

Santa-Rita, José Fernando, *Geometria Descritiva A/B Bloco 1* – 11.º /12.º Anos, 1.ª Edição, Texto Editores, Lda, 2007.

Soares, Óscar, e Carvalho, Luís Filipe, *Desenho e Geometria Descritiva A*, 10.º Ano, 1.ª Edição, Texto Editores, Lda, 1999.

Vasco Filipe Camundimo

Licenciado em Planificação, Administração e Gestão da Educação, pela Universidade Pedagógica, e bacharel em Desenho e Tecnologias Educativas, pela Universidade Eduardo Mondlane.
Possui larga experiência na elaboração de livros escolares e textos de apoio ao professor do Ensino Secundário Geral, assim como no ensino das disciplinas de Educação Visual e Desenho e Geometria Descritiva.
Técnico Pedagógico no Instituto Nacional do Desenvolvimento da Educação (INDE) há 22 anos, onde é coordenador dos grupos das disciplinas de Educação Visual, Ofícios, Desenho e Geometria Descritiva e Tecnologias de Informação e Comunicação.
Tem participado no desenho dos curricula do Ensino Básico, do Ensino Secundário Geral e de Formação de professores para o Ensino Primário.
Presentemente, efectua pesquisa sobre a integração pedagógica das Tecnologias de Informação e Comunicação, no âmbito da Rede de Pesquisa Educacional para a África Central e Ocidental.



HINO NACIONAL

Pátria Amada

Na memória de África e do Mundo
Pátria bela dos que ousaram lutar
Moçambique o teu nome é liberdade
O sol de Junho para sempre brilhará.

Coro
Moçambique nossa terra gloriosa
Pedra a pedra construindo o novo dia
Milhões de braços, uma só força
Ó pátria amada vamos vencer.

Povo unido do Rovuma ao Maputo
Colhe os frutos do combate pela Paz
Cresce o sonho ondulado na Bandeira
E vai lavrando na certeza do amanhã.

Flores brotando do chão do teu suor
Pelos montes, pelos rios, pelo mar
Nós juramos por ti, ó Moçambique
Nenhum tirano nos irá escravizar.

DGD 11

Programas Actualizados

Já à venda:

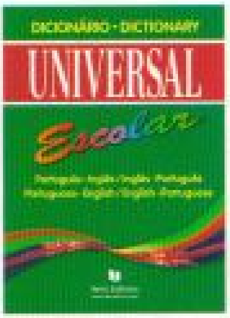
Geografia 11
História 11

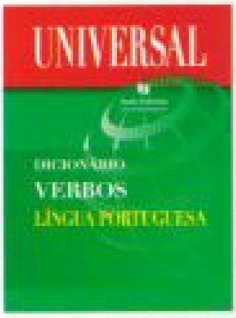
Brevemente:

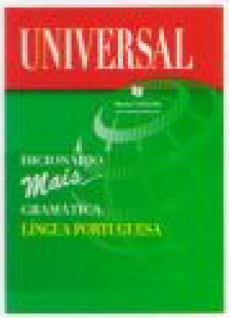
Filosofia 11
Inglês 11
Biologia 11
Matemática 11
Física 11
Química 11
Educação Visual 11

Texto Editores
www.textoeditores.com

Publicações de referência para apoio ao ensino







978-982-47-5425-8