

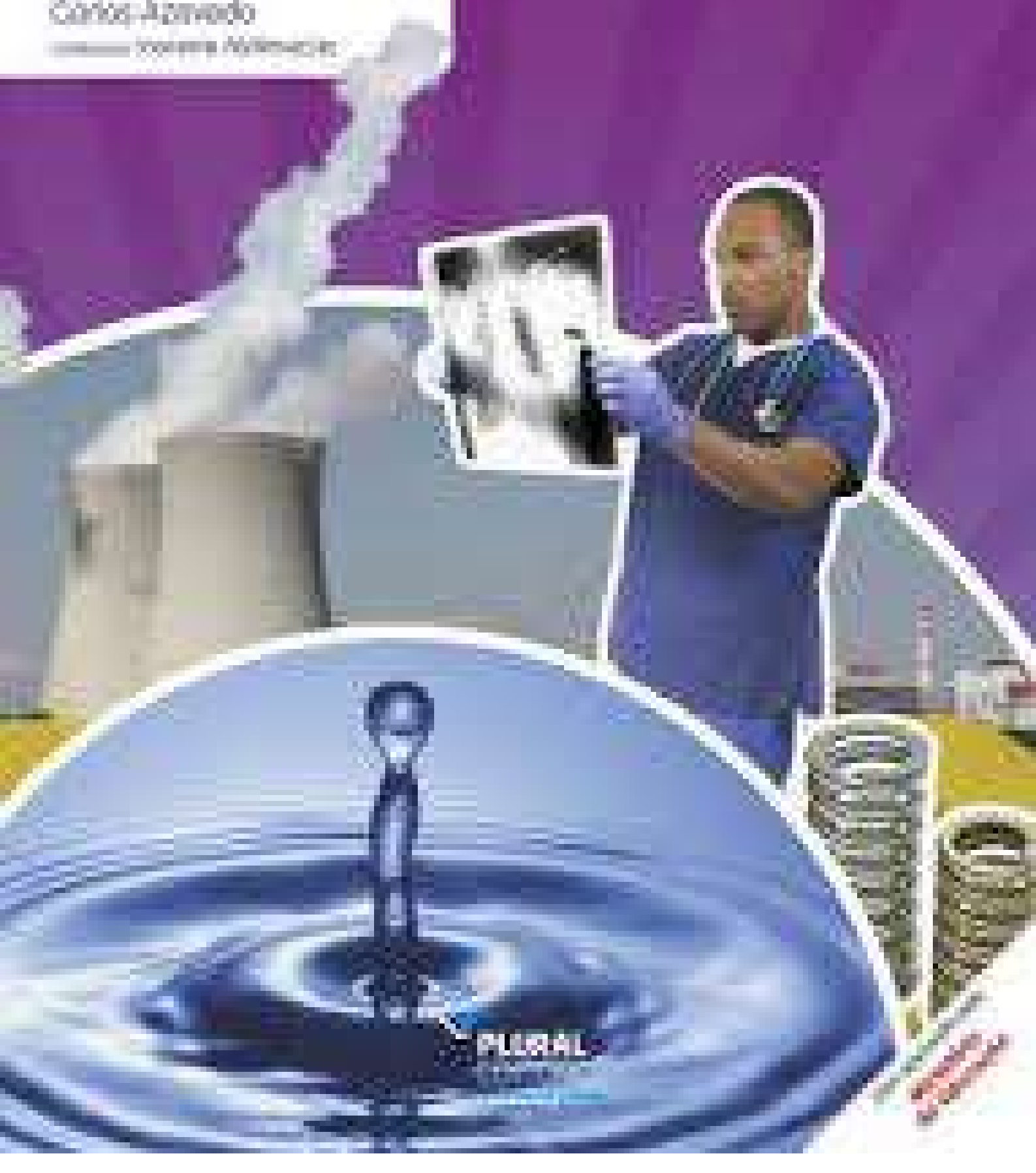
De acordo com as novas Diretrizes

Física

Carlos Azevedo

Coordenador Geral de Física

12^o



FLUXO 1

Estrutura do Livro

Introdução

Este livro foi escrito em conformidade com o novo Programa do Ensino Secundário Geral. De acordo com o espírito subjacente a este novo programa, foi nossa preocupação escrever um livro para o aluno que permita ajudá-lo a desenvolver o seu trabalho autónomo e a adquirir um conjunto de conhecimentos, competências, atitudes e valores necessários para a vida actual, possibilitando-lhe, ao terminar o Ensino Secundário Geral, enfrentar o mundo do trabalho, cada vez mais tecnológico e competitivo.

Desejamos que, paralelamente, possa ser um contributo para os colegas professores na prossecução dos objectivos gerais do Ensino Secundário Geral e da disciplina de Física em particular.

A estrutura do livro pressupõe as seis unidades programáticas, que são as seguintes:

- **Unidade 1** - Ondas electromagnéticas. Radiação do corpo negro
- **Unidade 2** - Física atómica
- **Unidade 3** - Física nuclear
- **Unidade 4** - Mecânica dos fluidos - hidrodinâmica
- **Unidade 5** - Gases. Termodinâmica
- **Unidade 6** - Oscilações mecânicas

Cada **unidade** abre em duas páginas com indicação dos **pontos** que a constituem e com uma imagem ilustrativa. Cada **ponto** inicia com a indicação dos **Conteúdos**, onde constam os assuntos a abordar.

O **desenvolvimento dos conteúdos** tem em conta os objectivos de aprendizagem programáticos e é intercalado com **Destaques, Repare, Curiosidades, Recorde, Pensamento Físico, Desafios e Questões Resolvidas**, de forma a proporcionar uma aprendizagem mais eficaz.

Todos os assuntos ou conceitos estudados são acompanhados de exemplos familiares. Procura-se, sempre que possível, estabelecer a ligação entre as ideias e os fenómenos físicos e a vida quotidiana, mostrando como podemos compreender os factos da Natureza ou as aplicações tecnológicas, usando conhecimentos de Física. A rubrica **Física em Acção** é um exemplo dessa abordagem.

No fim de cada ponto encontra-se sempre uma **Síntese de conteúdos**.

No final de cada unidade existe ainda um conjunto de **Questões e Problemas**, para que o aluno possa consolidar e aplicar conhecimentos, desenvolver competências e auto-avaliar o nível de compreensão dos conceitos e conteúdos.

A finalizar o livro apresentam-se as **Propostas de Resolução** das Questões e Problemas para que o aluno possa desenvolver o seu trabalho autónomo, verificando as suas resoluções e esclarecendo dúvidas.

Abertura de unidade



Abertura de ponto

1.1. Movimento oscilatório

Um sistema físico que oscila em torno de uma posição de equilíbrio. Exemplos: pêndulo simples, mola helicoidal com massa.

Equação do movimento: $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$

Velocidade: $v(t) = -A\omega \sin(\omega t + \phi)$

Aceleração: $a(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi)$

Período: $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Frequência: $f = \frac{1}{T}$

Desenvolvimento de conteúdos

1.2. Movimento oscilatório

Um sistema físico que oscila em torno de uma posição de equilíbrio. Exemplos: pêndulo simples, mola helicoidal com massa.

Equação do movimento: $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$

Velocidade: $v(t) = -A\omega \sin(\omega t + \phi)$

Aceleração: $a(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi)$

Período: $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Frequência: $f = \frac{1}{T}$

1.3. Movimento oscilatório

Um sistema físico que oscila em torno de uma posição de equilíbrio. Exemplos: pêndulo simples, mola helicoidal com massa.

Equação do movimento: $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$

Velocidade: $v(t) = -A\omega \sin(\omega t + \phi)$

Aceleração: $a(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi)$

Período: $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Frequência: $f = \frac{1}{T}$

Fim de ponto

FISICA EM ACCÃO

Um sistema físico que oscila em torno de uma posição de equilíbrio. Exemplos: pêndulo simples, mola helicoidal com massa.

Equação do movimento: $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$

Velocidade: $v(t) = -A\omega \sin(\omega t + \phi)$

Aceleração: $a(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi)$

Período: $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Frequência: $f = \frac{1}{T}$

Fim de unidade

QUESTOES E PROBLEMAS

Um sistema físico que oscila em torno de uma posição de equilíbrio. Exemplos: pêndulo simples, mola helicoidal com massa.

Equação do movimento: $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$

Velocidade: $v(t) = -A\omega \sin(\omega t + \phi)$

Aceleração: $a(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi)$

Período: $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Frequência: $f = \frac{1}{T}$

Fim do livro

PROPOSTAS DE RESOLUÇÃO

Um sistema físico que oscila em torno de uma posição de equilíbrio. Exemplos: pêndulo simples, mola helicoidal com massa.

Equação do movimento: $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$

Velocidade: $v(t) = -A\omega \sin(\omega t + \phi)$

Aceleração: $a(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi)$

Período: $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Frequência: $f = \frac{1}{T}$



6 **Unidade 1 – Ondas electromagnéticas.
Radiação do corpo negro**

8 1.1. Ondas electromagnéticas

20 1.2. Calorimetria

32 1.3. Radiação do corpo negro

39 **Questões e Problemas**

44 **Unidade 2 – Física atómica**

46 2.1. Emissão termoelectrónica e fotoelétrica

59 2.2. Raios X

66 2.3. Níveis de energia no átomo de hidrogénio

74 **Questões e Problemas**

78 **Unidade 3 – Física nuclear**

80 3.1. Núcleos atómicos e radioactividade

102 **Questões e Problemas**





104 **Unidade 4 – Mecânica dos fluidos – hidrodinâmica**

106 4.1. Hidrostática (revisão)

124 4.2. Hidrodinâmica

137 **Questões e Problemas**

144 **Unidade 5 – Gases. Termodinâmica**

146 5.1. Gases

154 5.2. Termodinâmica

164 **Questões e Problemas**

168 **Unidade 6 – Oscilações mecânicas**

170 6.1. Movimentos oscilatórios

188 **Questões e Problemas**

194 **Propostas de resolução**

206 **Formulário**

207 **Bibliografia**

208 **Tabela Periódica dos Elementos**



1.1. Ondas electromagnéticas

Conteúdos

- Ondas mecânicas e electromagnéticas.
- Espectro das ondas electromagnéticas.
- Espectro óptico.



Fig. 1.1 A prática do surf como exemplo lúdico do aproveitamento da energia das ondas.

Desde os primórdios da Humanidade, o ser humano sente-se fascinado e intrigado pelas ondas do mar. Na realidade, estas ondas e outras fazem parte do nosso mundo e do nosso quotidiano. Vivemos rodeados de ondas de vários tipos, como, por exemplo, luminosas, sonoras, rádio, sísmicas, etc. Grande parte da tecnologia do mundo moderno baseia o seu princípio de funcionamento na existência destas ondas, como as telecomunicações via satélite, a televisão, a rádio, o microondas e o radar, entre outras.

Conforme abordado na 10.ª classe, o significado físico de onda difere muitas vezes do conceito comum de onda. Para os físicos, uma onda é a propagação de uma perturbação oscilante, que tem lugar num dado ponto de um determinado meio.



Fig. 1.2 Propagação de ondas na superfície de um meio líquido.

Uma **onda** é a propagação, no espaço e no tempo, da oscilação de uma grandeza física num dado ponto.

Ao deixarmos cair uma pedra na superfície calma de um lago, forma-se uma onda que se propaga em todas as direcções. Os diferentes pontos da superfície da água oscilam devido à perturbação originada pela queda da pedra. É esta perturbação ocorrida no ponto em que a pedra caiu que é transmitida no decorrer do tempo aos restantes pontos do meio. Estes pontos apenas oscilam verticalmente para cima e para baixo, em torno de uma posição de equilíbrio, sem serem "arrastados" para fora. Diz-se que há transporte de energia mas não de matéria.

► Ondas mecânicas e electromagnéticas

Podemos classificar as ondas, conforme a natureza das oscilações, como sendo mecânicas ou electromagnéticas. As primeiras necessitam de um meio material elástico para se propagarem, enquanto as segundas não dependem do meio em que se encontram, podendo propagar-se no vácuo e em determinados meios materiais.

Assim:

- Uma **onda mecânica** resulta da propagação de uma oscilação num meio elástico, isto é, num meio capaz de propagar a energia da onda através das sucessivas vibrações das diferentes partículas desse meio. São exemplos, as ondas em superfícies de líquidos, em cordas de instrumentos musicais, em molas elásticas, etc.
- Uma **onda electromagnética**, ou simplesmente **luz**, resulta da oscilação simultânea de um campo eléctrico e de um campo magnético que se propaga no vácuo. Saliente-se que neste caso a propagação não ocorre devido à interacção entre partículas do meio, como acontece no caso das ondas mecânicas. São exemplos, as ondas de rádio, de radar, os raios X, as microondas, etc.

A designação de **ondas electromagnéticas** deve-se justamente ao facto de as oscilações eléctricas criarem campos magnéticos variáveis e vice-versa. Foi **James Clerk Maxwell** quem demonstrou, de forma teórica, que a luz é uma onda electromagnética.

Apesar de a Teoria de Maxwell ter ficado bem fundamentada física e matematicamente, só alguns anos mais tarde é que **Heinrich Hertz** conseguiu produzir ondas electromagnéticas a partir de um dispositivo eléctrico.

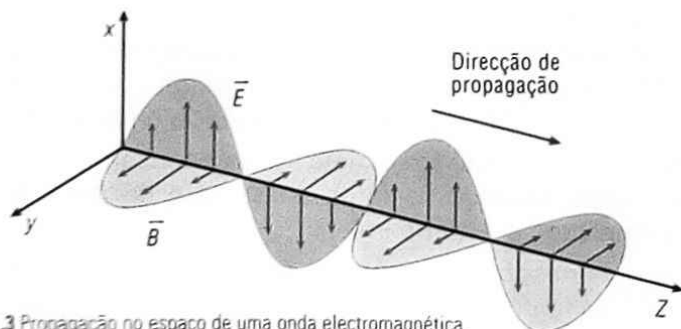


Fig. 1.3 Propagação no espaço de uma onda electromagnética.

As intensidades destes campos variam periodicamente, oscilando com a mesma frequência em planos perpendiculares entre si. Por sua vez, estes campos são perpendiculares à **direcção de propagação**, o que comprova que as ondas electromagnéticas são **ondas transversais**.

As ondas electromagnéticas propagam-se todas no vácuo com a mesma velocidade, habitualmente representada pela letra c , que representa uma constante universal fundamental da Natureza. Maxwell deduziu uma fórmula que relacionava as propriedades electromagnéticas, definidas na sua teoria, com a velocidade de propagação no vazio, chegando à seguinte expressão:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

onde μ_0 representa a permeabilidade magnética e ϵ_0 representa a permissividade eléctrica, no vácuo. Estas constantes físicas já tinham sido obtidas por via experimental na época de Maxwell, o que lhe permitiu chegar a um valor de c , em concordância com o que já tinha sido obtido por métodos diferentes. Este resultado foi um dos grandes êxitos da Teoria Electromagnética de Maxwell.

Assim, sendo $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H m}^{-1}$ e $\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ C}^2$:

$$c = \frac{1}{\sqrt{4\pi \times 10^{-7} \text{ H m}^{-1} \times 8,854 \times 10^{-12} \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ C}^2}} \Leftrightarrow c = 3,00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$$

De acordo com a Teoria da Relatividade de Einstein, este é o valor máximo de velocidade que pode ser alcançado por processos físicos. Mais rigorosamente, esse valor é $c = 299\,792\,458 \text{ m s}^{-1}$, no entanto, para a grande maioria dos cálculos é habitual usar a aproximação a $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$.

Repare

Uma onda electromagnética propaga-se no vácuo, no entanto, interage com a matéria que se cruza no seu caminho, visto transportar energia.



James C. Maxwell
(1831-1879)



Heinrich Hertz
(1857-1894)

Repare

O valor da velocidade de propagação da luz no ar é aproximadamente igual a c .

Nos meios materiais, como na água, no vidro, no ar, etc., a velocidade de propagação da luz tem um valor inferior à constante universal c , embora seja ainda muito elevado. A **tabela 1** apresenta valores de velocidade de propagação da luz em diferentes meios.

| Velocidade de propagação da luz | |
|---------------------------------|--------------------------------|
| Meio de propagação | Velocidade / m s^{-1} |
| Água | 225 000 000 |
| Vidro | 197 000 000 |
| Ar | 298 895 771 |
| Diamante | 124 000 000 |
| Perspex | 201 000 000 |
| Vácuo | 299 792 458 |

Tabela 1 Velocidade de propagação da luz em diversos meios.

Independentemente do tipo de ondas considerado, estas apresentam propriedades físicas características que nos permitem compreender e explicar um vasto conjunto de fenómenos. Todas, independentemente da sua natureza, podem ser descritas por três características: amplitude, frequência e comprimento de onda.

A **amplitude**, A , corresponde ao máximo afastamento em relação à posição de equilíbrio. O seu valor depende da fonte emissora e do meio de propagação. A unidade SI de amplitude é o metro (m).

A **frequência**, f , corresponde ao número de oscilações por unidade de tempo. É igual à frequência da fonte emissora e só depende dela. A unidade de frequência no SI é o s^{-1} , que se designa por hertz (Hz). Esta grandeza está intrinsecamente associada a uma outra denominada **período**, T . O período corresponde ao tempo que uma onda completa demora a passar por um ponto do meio. É igual ao período da oscilação da fonte emissora e, conseqüentemente, depende apenas desta. A unidade SI de período é o segundo (s).

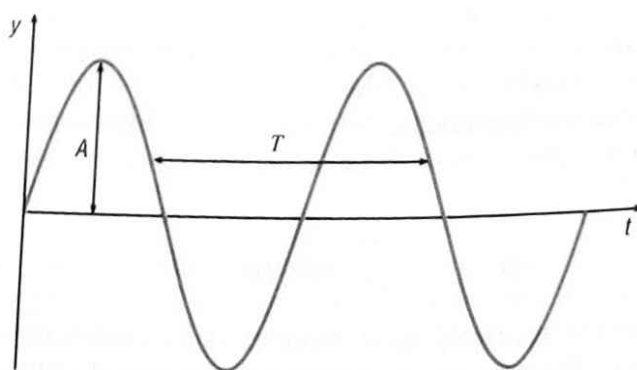


Fig. 1.4 Periodicidade temporal de uma onda periódica.

Estas grandezas são recíprocas, isto é, uma é o inverso da outra:

$$f = \frac{1}{T} \quad \text{ou} \quad T = \frac{1}{f}$$

O **comprimento de onda**, λ , corresponde à distância a que se propaga a onda num intervalo de tempo correspondente a um período. Esta é a menor distância que separa duas partículas do meio de propagação que se encontrem na mesma fase de oscilação. A unidade SI de comprimento de onda é o metro (m).

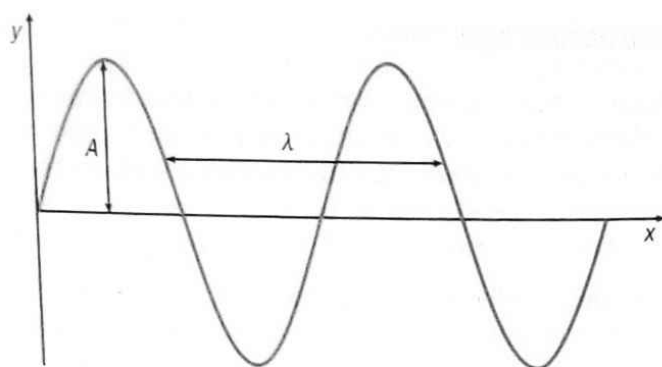


Fig. 1.5 Periodicidade espacial de uma onda periódica.

O comprimento de onda e o período estão relacionados. A razão entre estas duas grandezas físicas corresponde à **velocidade de propagação** da onda, v , num dado meio. Esta relação, conhecida como equação fundamental das ondas, pode ser traduzida pela expressão:

$$v = \frac{\lambda}{T}$$

Conforme anteriormente referido, se considerarmos ondas electromagnéticas que se propagam no vazio, representa-se a velocidade v por c . Nesta situação, a expressão anterior fica:

$$c = \frac{\lambda}{T} \text{ ou } c = \lambda f$$

Atendendo ao facto de c ser constante, então o comprimento de onda e a frequência são inversamente proporcionais.

Repare

Considere a seguinte analogia: quando caminhamos, o comprimento de onda é o comprimento do passo, a frequência é o número de passos que damos num segundo e o período é o tempo de um passo.

Questões Resolvidas

1. O canal Antena Nacional da Rádio Moçambique emite em FM para a região de Maputo, numa frequência de 92,3 MHz.
 - 1.1. Calcule o período das ondas rádio emitidas.
 - 1.2. Determine qual é o comprimento de onda dessas ondas rádio, considerando que a velocidade da luz é de 300 mil quilómetros por segundo.

Resolução

1.
 - 1.1. $f = 92,3 \text{ MHz} = 92,3 \times 10^6 \text{ Hz}$
 Como $T = \frac{1}{f}$, virá:

$$T = \frac{1}{92,3 \times 10^6 \text{ Hz}} \Leftrightarrow T = 1,08 \times 10^{-8} \text{ s}$$
 - 1.2. $v = c = 300\,000 \text{ km s}^{-1} = 300\,000\,000 \text{ m s}^{-1} = 3,00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
 De acordo com a equação fundamental das ondas, temos:
 $c = \lambda f \Leftrightarrow \lambda = \frac{c}{f}$ virá:

$$\lambda = \frac{3,00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}}{92,3 \times 10^6 \text{ Hz}} \Leftrightarrow \lambda = 3,25 \text{ m}$$

► Espectro electromagnético

A **radiação** é outro nome para designar **ondas electromagnéticas** ou **ondas de luz**. As ondas electromagnéticas são classificadas de acordo com o seu comprimento de onda ou frequência. Ao conjunto de todas as radiações chama-se **espectro electromagnético**.

Designa-se por **espectro electromagnético** o conjunto ordenado de todas as radiações electromagnéticas.

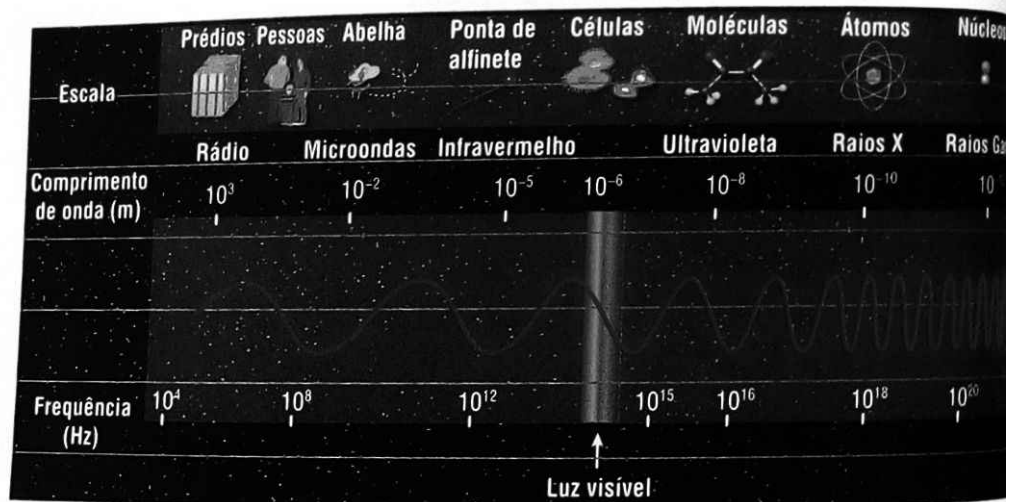


Fig. 1.6 Espectro electromagnético.

No espectro electromagnético, as ondas da luz visível encontram-se na região de comprimentos de onda da ordem das centenas de nanómetros. Os comprimentos de onda da luz visível encontram-se num intervalo de valores muito estreito se tivermos em conta todas as radiações electromagnéticas. A luz visível com menor comprimento de onda ($\lambda \approx 400$ nm) é a luz violeta e a luz visível com maior comprimento de onda é a luz vermelha ($\lambda \approx 700$ nm).

Imediatamente a seguir à luz vermelha (com comprimentos de onda superiores), encontra-se a região do **infravermelho**, cujos comprimentos de onda variam entre $0,8 \mu\text{m}$ e 1 mm. Os comprimentos de onda entre 1 mm e 30 cm, no espectro electromagnético, são designados por **microondas**.

As ondas electromagnéticas com comprimentos de onda superiores a 30 cm são consideradas **ondas rádio** e são usadas nas telecomunicações. Têm sido estabelecidas diferentes bandas de frequência destinadas a diferentes tipos de comunicações: rádio AM e FM, televisão, etc.

Na região do espectro electromagnético com comprimentos de onda menores que a luz visível temos a radiação **ultravioleta**. Os comprimentos de onda variam entre 390 nm e $1,3 \times 10^{-8}$ m. A seguir, com comprimentos de onda entre $1,3 \times 10^{-8}$ m e 6×10^{-12} m, encontram-se os **raios X** e os **raios gama**.

Não existe grande diferença entre os **raios X** e os **raios gama**, excepto historicamente. Os primeiros raios X observados foram produzidos por átomos e os primeiros raios gama observados foram produzidos nos núcleos atômicos. Actualmente, os dois tipos de radiação podem ser produzidos acelerando electrões.

A radiação **infravermelha** é fortemente absorvida pelas moléculas, aumentando a agitação térmica. Assim, não podemos ver as ondas infravermelhas, mas podemos senti-las como uma sensação de calor. O seu comprimento de onda é inversamente proporcional à temperatura do corpo que a absorve. Esta radiação é muito utilizada no tratamento de rupturas musculares, na indústria automóvel no processo de secagem da tinta, nos comandos à distância, sistemas de segurança, etc.

A radiação **ultravioleta**, com comprimentos de onda muito menores, consegue atravessar as células da pele e penetrar até às camadas mais profundas, sendo absorvida pelos núcleos das células. Estas ondas são mais **perigosas para a saúde humana**, porque podem alterar os núcleos, produzindo células malignas. Grande parte desta radiação proveniente do Sol é absorvida na estratosfera da Terra pela camada de ozono. Quando é absorvida por materiais fluorescentes é emitida sob a forma de radiação visível, fazendo com que esses materiais apresentem um brilho mais intenso.

As **microondas** penetram nas moléculas e podem alterar o estado de movimento dos átomos dentro delas: rotações ou vibrações internas das moléculas. As moléculas de água, por terem um momento dipolar, oscilam em ressonância com as microondas. Num forno de microondas, grande parte da energia destas ondas é absorvida pelas moléculas de água dentro dos alimentos, que logo transferem parte dessa energia para as moléculas vizinhas.

As principais aplicações das ondas electromagnéticas na obtenção de imagens para diagnóstico médico são: microscopia electrónica, radiografias, tomografia axial computadorizada (TAC) e ressonância magnética nuclear (RMN).

Na ressonância magnética nuclear são usados ímanes muito fortes para excitar núcleos de hidrogénio. Os núcleos excitados emitem ondas electromagnéticas com radiofrequências que são detectadas numa antena de rádio para gerar imagens tridimensionais.

A **tabela II** apresenta o nome das bandas de frequência e correspondentes gamas de frequência, bem como exemplos de aplicações.



Fig. 1.7 Grande parte da energia das microondas é absorvida pelas moléculas de água dos alimentos.



Fig. 1.8 Imagem de um cérebro obtida por ressonância magnética nuclear (RMN).

| Bandas de frequência | Gamas de frequência | Aplicações |
|--------------------------------|---------------------|--|
| Frequências muito baixas (VLF) | 3 – 30 kHz | - Comunicações a muito longas distâncias |
| Baixa frequência (LF) | 30 – 300 kHz | - Estações de rádio - Navegação por rádio |
| Frequência média (MF) | 0,3 – 3 MHz | - Estações de rádio |
| Alta frequência (HF) | 3 – 30 MHz | - Radiotelefone |
| Frequência muito elevada (VHF) | 30 – 300 MHz | - Estações de rádio em FM - Estações de televisão - Radioamadores |
| Frequência ultra-elevada (UHF) | 0,3 – 3 GHz | - Estações de televisão - Telemóveis - Radionavegação - Radar (controlo aéreo) |
| Frequência superelevada (SHF) | 3 – 30 GHz | - Telefones em rede multicanal - Radar (controlo aéreo) - Satélites de comunicação e GPS |
| Frequência extra-elevada | 30 – 300 GHz | - Estações espaciais |

Muitas das aplicações baseiam-se em fenómenos que são um denominador comum a todas as ondas electromagnéticas e que já foram abordadas na 10.ª classe. Alguns destes fenómenos sucedem quando as ondas encontram uma superfície de separação de dois meios ópticos, podendo ocorrer **reflexão**, **refracção**, **reflexão total**, etc. Outros, como a **absorção** e a **atenuação**, ocorrem aquando da passagem das ondas através de um meio óptico.

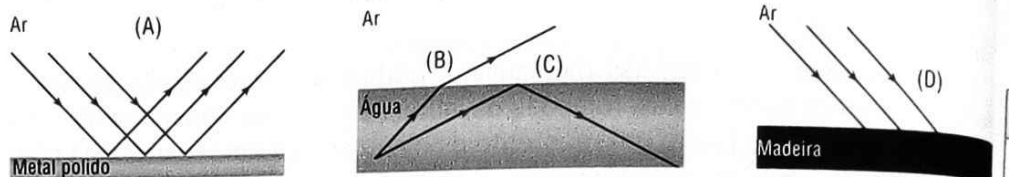


Fig. 1.9 Exemplos de propriedades gerais das ondas electromagnéticas. (A) reflexão; (B) refracção; (C) reflexão total; (D) absorção.

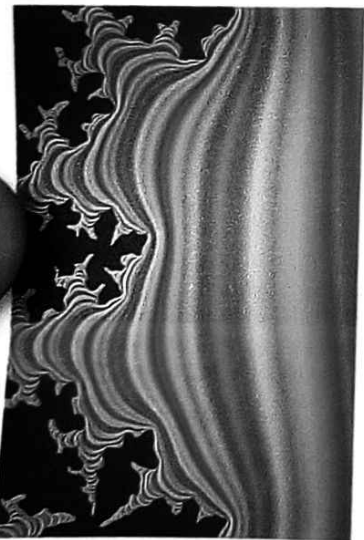
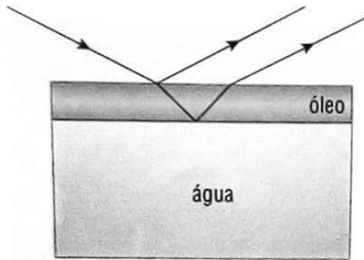


Fig. 1.11 Riscas coloridas que se observam na água com óleo devidas à interferência da luz proveniente da superfície da água e do óleo.

Outros ainda, como a **difracção**, envolvem fenómenos de **interferência** enquanto na **dispersão** ocorre a separação de uma onda em várias componentes espectrais com diferentes frequências.

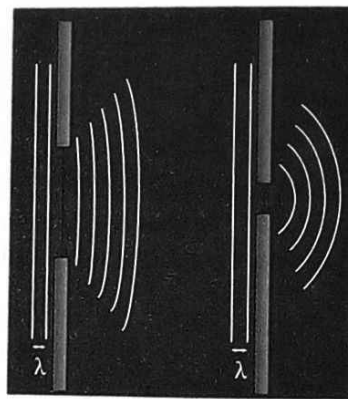


Fig. 1.10 Fenómeno de difracção através de uma fenda.

Em seguida, faremos um breve estudo das radiações que constituem o espectro electromagnético visível para o ser humano.

► Espectro óptico

Conforme anteriormente referido, a radiação visível aos humanos é constituída por ondas electromagnéticas compreendidas num intervalo de comprimentos de onda entre os 380 nm e os 750 nm.

Designa-se por **espectro óptico** o conjunto ordenado de todas as radiações electromagnéticas capazes de serem detectadas pelo olho humano.

Esse espectro é constituído por um conjunto sequencial de cores, a saber: violeta, azul, verde, amarela, laranja e vermelha. Na figura 1.12 pode-se observar essa distribuição contínua de cores e os respectivos valores do comprimento de onda expressos em nanómetros.

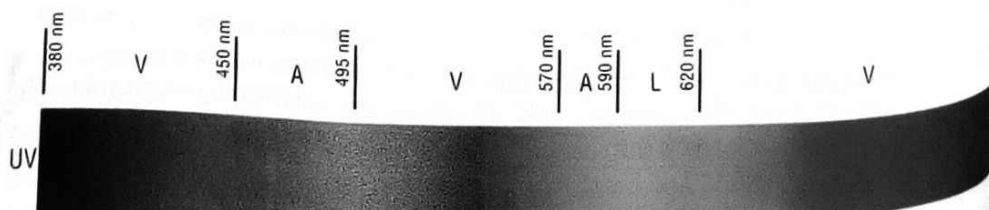


Fig. 1.12 Espectro óptico.

Curiosidade

O olho humano é muito pouco sensível à frequência do anil, sendo para muitos deveras difícil distingui-lo do azul ou do violeta. É por este e outros motivos que há quem entenda que o anil não deve ser considerado uma cor propriamente dita mas sim uma variação do azul ou do violeta.

Conforme ilustrado, a cor de menor comprimento de onda é o violeta, pelo que, como já vimos, esta será a cor com a maior frequência. Pelo contrário, a cor vermelha é a que apresenta maior comprimento de onda, logo, menor frequência. A sobreposição de todas as radiações visíveis dá origem à denominada luz branca.

Na **tabela III** estão listadas as bandas de comprimento de onda e as respectivas bandas de frequência do espectro óptico.

| Cor | Banda de λ / nm | Banda de f / THz |
|----------|-------------------------|--------------------|
| Violeta | 380 – 450 | 789 – 668 |
| Azul | 450 – 495 | 668 – 606 |
| Verde | 495 – 570 | 606 – 526 |
| Amarelo | 570 – 590 | 526 – 508 |
| Laranja | 590 – 620 | 508 – 484 |
| Vermelho | 620 – 750 | 484 – 400 |

Tabela III Bandas de comprimento de onda e de frequência no visível.

É com base no espectro óptico que podemos explicar fenómenos naturais como a formação do arco-íris, a cor do céu, as cores dos objectos, etc.

A luz que é emitida pela maioria das fontes luminosas é constituída por radiações de diversos comprimentos de onda – **luz policromática**. Cada uma das radiações que constituem a luz policromática tem o seu comprimento de onda próprio e pode ser separada, obtendo-se um espectro dessa luz. Esta separação chama-se **dispersão cromática**.

A formação de um arco-íris é justamente o resultado dessa dispersão cromática que ocorre quando a luz solar, luz branca, vai ao encontro das gotas de chuva. Ao penetrar em cada gota os raios luminosos são refractados, reflectem-se no interior da mesma, que se comporta como um pequeno espelho côncavo, sofrem um desvio e emergem por outro ponto da gota, voltando novamente a refractarem-se.

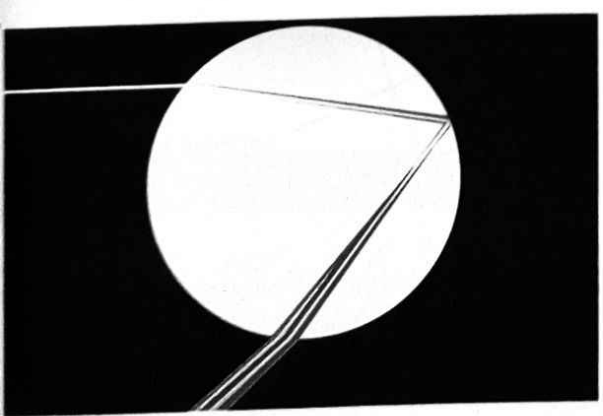


Fig. 1.13 Dispersão cromática numa gota de chuva. A luz mais desviada é a luz violeta e a menos desviada é a luz vermelha.

O índice de refração de um meio depende do comprimento de onda da luz que o atravessa, pelo que o ângulo de refração numa superfície ar-água difere de comprimento de onda para comprimento de onda, sendo maior para a cor violeta e menor para a cor vermelha. Por este motivo, as cores do arco-íris são precisamente as cores que encontramos no espectro óptico.

A **cor do céu** limpo ao longo do dia evolui do vermelho-alaranjado, ao amanhecer, para azul, regressando, ao entardecer, ao vermelho-alaranjado. Ao nascer e pôr-do-sol, o disco solar muda geralmente de cor, passando pelo amarelo e laranja até atingir o vermelho, enquanto durante o dia o disco solar é quase branco. Este facto afecta as cores do céu no horizonte.

Repare

A expressão **luz policromática** refere-se a luz composta por uma combinação de duas ou mais cores, como é o caso, por exemplo, da luz branca emitida pelo Sol ou pelas lâmpadas comuns.



Fig. 1.14 Arco-íris.



Lord Rayleigh
(1842-1919)

Este padrão de cores foi explicado por **Lord Rayleigh**, tendo por isso ficado conhecido na história da Física como fenómeno da **dispersão de Rayleigh**. O comprimento médio das moléculas do ar tem um valor muito inferior ao comprimento da onda da luz visível. Como o efeito da dispersão de Rayleigh é inversamente proporcional à 4.^a potência do comprimento de onda, ocorre mais fortemente para pequenos comprimentos de onda (zona azul do espectro). Desta forma, a luz que nos chega directamente do disco solar vai ser empobrecida em azul, enquanto a luz que nos chega da atmosfera é rica em azul.

Ao meio-dia, quando o sol se encontra na posição mais alta, a camada de atmosfera que a luz atravessa é pouco espessa e, conseqüentemente, a dispersão é mais reduzida, chegando à superfície da Terra praticamente branca. Ao amanhecer e entardecer, o Sol encontra-se numa posição mais baixa, pelo que a radiação solar atravessa uma camada de atmosfera mais extensa e a dispersão lateral torna-se mais acentuada. Como consequência, a luz proveniente do disco solar torna-se cada vez mais pobre em pequenos comprimentos de onda, aparecendo com um tom alaranjado ou mesmo avermelhado. Em ambas as situações, a radiação que nos chega da atmosfera resulta exclusivamente da dispersão, sendo que no caso da Terra é mais pronunciada no azul. Caso a composição da atmosfera terrestre fosse diferente também a cor do céu seria diferente.

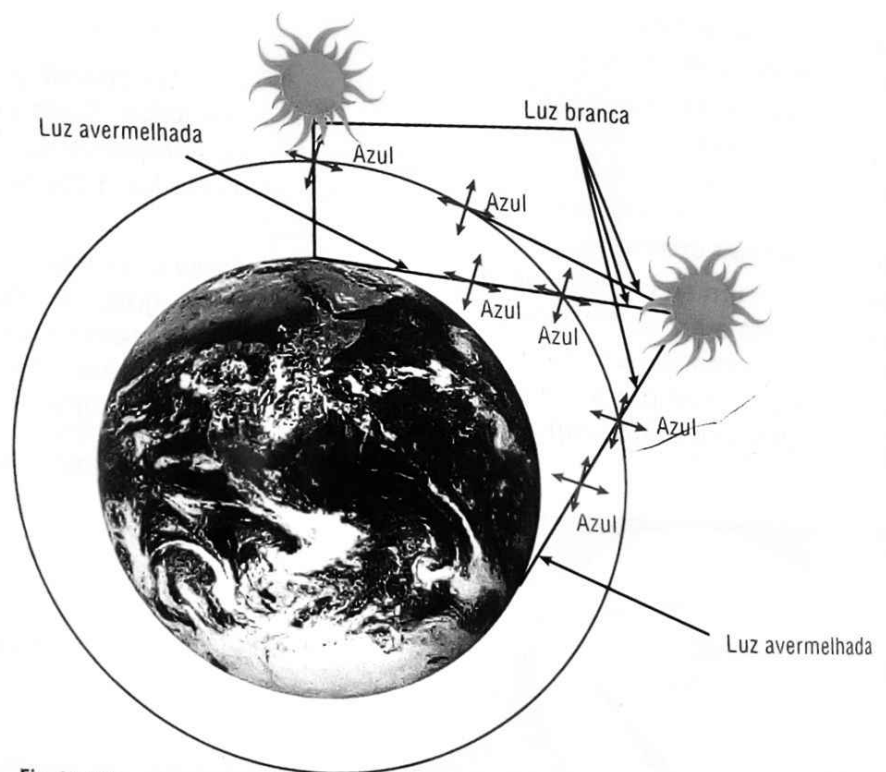


Fig. 1.15 Dispersão de Rayleigh na atmosfera terrestre.

As **cores dos corpos** iluminados são explicadas com base no espectro óptico. A sua cor resulta da reflexão de luz visível. Se quando iluminamos com luz branca um corpo o vemos de cor azul é porque ele reflecte a cor azul e absorve todas as outras. Se o percepcionarmos branco é porque reflecte todas as cores e se o vemos negro então é porque absorve todas as radiações sobre ele incidente.

O **espectro de uma substância** é o conjunto de radiações emitidas ou absorvidas por essa mesma substância. A **análise espectral** possibilitou o aprofundamento do conhecimento sobre a estrutura dos átomos e das moléculas. Hoje, recorrendo à análise dos espectros, é-nos possível identificar as substâncias que existem numa determinada amostra. Dos diferentes tipos de espectros destacam-se os espectros de emissão e os de absorção.

Repare

A preferência pela utilização de vestuário de cores mais claras, nos dias mais quentes, relaciona-se com o facto de estas, ao contrário das escuras, reflectirem as radiações electromagnéticas.

Para estudar os espectros é necessário recorrer a um aparelho denominado **espectroscópio**, que analisa a luz. Este é constituído por um prisma, com índice de refração diferente do ar, através do qual um feixe de luz, colimado por uma fenda e por uma luneta, é analisado sofrendo dispersão cromática.

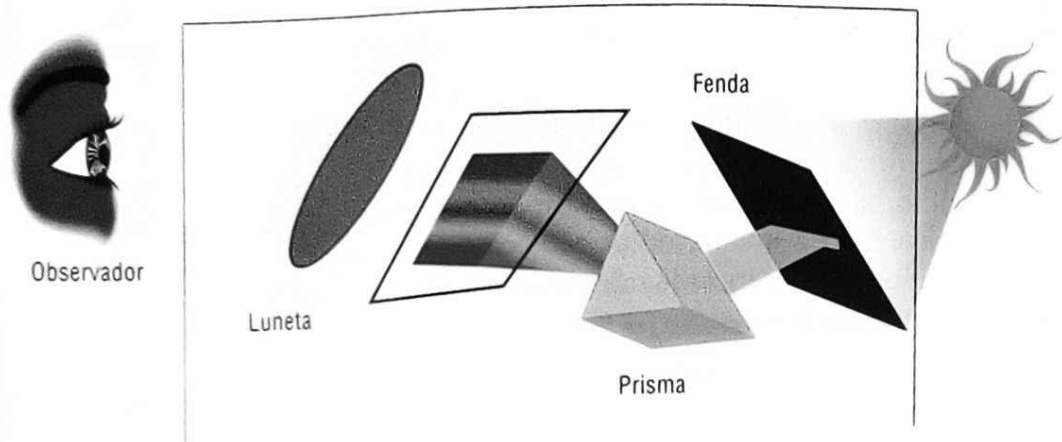


Fig. 1.16 Esquema de um espectroscópio.

Se essa luz analisada for proveniente de uma substância incandescente, obtém-se um **espectro de emissão**. Por sua vez, estes podem ser **contínuos** se forem de sólidos ou de líquidos incandescentes, ou de **riscas**, se forem de gases. Se a luz incidente atravessou uma substância, que absorve parte da radiação, antes de ser analisada pelo espectroscópio, obtém-se um **espectro de absorção**.

Cada elemento químico tem um dado espectro atómico, que lhe é característico e que por isso o permite identificar. O espectro do elemento é o seu "bilhete de identidade" e as riscas espectrais são as suas "impressões digitais".

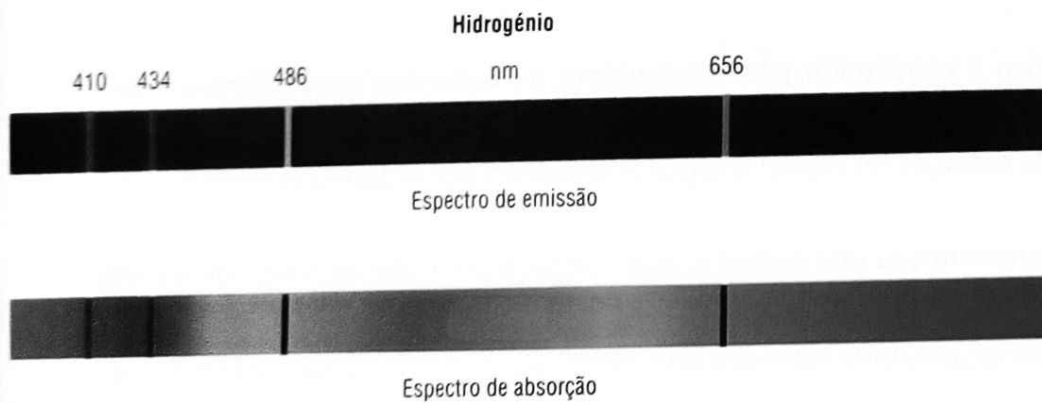


Fig. 1.17 Espectros de emissão e de absorção do hidrogénio.

Na figura 1.17 podemos observar os espectros de emissão e de absorção do elemento químico hidrogénio. O espectro de absorção apresenta **riscas pretas** exactamente nos mesmos locais onde surgem **riscas coloridas** no espectro de emissão. Isto deve-se ao facto de o hidrogénio absorver da luz policromática incidente apenas as radiações que é capaz de emitir. Este fenómeno, comum a todas as substâncias, é conhecido por inversão das riscas.

A análise espectral constitui uma poderosa técnica ao serviço da ciência e da indústria. É utilizada na descoberta de novos elementos, no estudo do átomo, na estrutura de novos compostos orgânicos, na astronomia (permitindo conhecer a composição dos astros, a sua temperatura, velocidade, etc.), na indústria (na determinação de densidades, na análise da pureza das gemas), na investigação criminal, nas análises químicas, etc.

Curiosidade

O elemento químico hélio foi primeiramente detectado no Sol através do espectro da luz solar. Só mais tarde foi detectado na Terra.

2. Leia o seguinte texto.

As potencialidades da espectroscopia, como método de análise utilizado para detectar e identificar diferentes elementos químicos, foram descobertas no século XIX, e desenvolvidas depois por vários investigadores, nomeadamente por Gustav Kirchoff que, a partir de estudos iniciados em 1859, provou a existência do sódio na atmosfera solar.

Nas lâmpadas de vapor de sódio, muito usadas nos candeeiros de iluminação pública, ocorre emissão de luz de cor amarela. A corrente eléctrica, que passa através do vapor de sódio, faz deslocar os electrões dos átomos de sódio para níveis energéticos mais elevados. Quando aqueles electrões descem pela escada energética, ocorre a emissão de radiação de frequências bem definidas, originando, entre outras riscas em zonas diferenciadas do espectro electromagnético, duas riscas brilhantes na zona do amarelo, que são características do sódio, permitindo identificá-lo.

Cada elemento químico possui, de facto, o seu próprio padrão de riscas espectrais, que funciona como uma impressão digital. Não há dois elementos com o mesmo espectro, tal como não há duas pessoas com as mesmas impressões digitais.

Fazendo a análise espectral da luz que nos chega das estrelas, captada pelos telescópios, é possível determinar as suas composições químicas. Descobriu-se, assim, que os elementos constituintes das estrelas são os mesmos que existem na Terra.

John Gribbin, *Um guia de Ciência para quase toda a gente*, Edições Século XXI, 2002 (adaptado); Máximo Ferreira e Guilherme de Almeida, *Introdução à Astronomia e às Observações Astronómicas*, Plátano Edições Técnicas, 6.ª edição, 2001 (adaptado).

- 2.1. Indique, com base no texto, o que se deverá observar no espectro de absorção do sódio, na região do visível.
- 2.2. Explique a afirmação: "Fazendo a análise espectral da luz que nos chega das estrelas, captada pelos telescópios, é possível determinar as suas composições químicas."
3. O espectro electromagnético é constituído por um conjunto de radiações com diferentes comprimentos de onda e frequências.
 - 3.1. Indique quatro tipos de radiação do espectro electromagnético por ordem crescente de frequência.
 - 3.2. Nos aeroportos, a movimentação dos aviões é monitorizada pelo uso do radar. Indique qual a propriedade da radiação electromagnética implícita nesta tecnologia.

Resolução

2.

- 2.1. No espectro de emissão do sódio observam-se duas riscas brilhantes na zona do amarelo. Assim, no espectro de absorção do sódio, será de observar duas riscas negras na zona do amarelo dado o fenómeno da inversão das riscas.
- 2.2. A análise dos espectros contínuos característicos das estrelas revela uma sobreposição de riscas negras. Estas riscas correspondem à absorção de radiação por parte das substâncias que constituem as suas atmosferas. Assim, como cada elemento químico possui o seu próprio padrão de riscas, é possível deduzir a natureza dos elementos presentes nas estrelas responsáveis pela absorção por comparação do espectro estelar com padrões dos elementos.

3.

- 3.1. Radiações infravermelha, visível, ultravioleta e raios X.
- 3.2. Reflexão das ondas electromagnéticas pela superfície metálica do avião.

Síntese de conteúdos

- Uma **onda** é a propagação, no espaço e no tempo, da oscilação de uma grandeza física num dado ponto.
- Uma **onda mecânica** resulta da propagação de uma oscilação num meio elástico, isto é, num meio capaz de propagar a energia da onda através das sucessivas vibrações das diferentes partículas desse meio. São exemplos, as ondas em superfícies de líquidos, em cordas de instrumentos musicais, em molas elásticas, etc.
- Uma **onda electromagnética**, ou simplesmente **luz**, resulta da oscilação simultânea de um campo eléctrico e de um campo magnético que se propaga no vácuo. Saliente-se que neste caso a propagação não ocorre devido à interacção entre partículas do meio, como acontece no caso das ondas mecânicas. São exemplos, as ondas de rádio, de calor, os raios X, as microondas, etc.
- A **amplitude**, A , corresponde ao máximo afastamento em relação à posição de equilíbrio. O seu valor depende da fonte emissora e do meio de propagação. A unidade SI de amplitude é o metro (m).
- A **frequência**, f , corresponde ao número de oscilações por unidade de tempo. É igual à frequência da fonte emissora e só depende dela. A unidade de frequência no SI é o s^{-1} , que se designa por hertz (Hz).
- O **período**, T , corresponde ao tempo que uma onda completa demora a passar por um ponto do meio. É igual ao período da oscilação da fonte emissora e, conseqüentemente, depende apenas desta. A unidade SI de período é o segundo (s).

$$f = \frac{1}{T} \quad \text{ou} \quad T = \frac{1}{f}$$

- O **comprimento de onda**, λ , corresponde à distância a que se propaga a onda num intervalo de tempo correspondente a um período. Esta é a menor distância que separa duas partículas do meio de propagação que se encontrem na mesma fase de oscilação. A unidade SI de comprimento de onda é o metro (m).
- O comprimento de onda e o período estão relacionados. A razão entre estas duas grandezas físicas corresponde à **velocidade de propagação** da onda, v , num dado meio. Esta relação, conhecida como equação fundamental das ondas, pode ser traduzida pela expressão:

$$v = \frac{\lambda}{T}$$

- A **velocidade de propagação das ondas electromagnéticas no vácuo** representa-se por c .

$$c = \frac{\lambda}{T} \quad \text{ou} \quad c = \lambda f$$

- Designa-se por **espectro electromagnético** o conjunto ordenado de todas as radiações electromagnéticas.
- Quando as ondas electromagnéticas encontram uma superfície de separação de dois meios ópticos, pode ocorrer **reflexão**, **refracção**, **reflexão total**, etc. Aquando da passagem das ondas através de um meio óptico podem ocorrer outros fenómenos como a **absorção** e a **atenuação**.
- Na **difracção**, estão envolvidos fenómenos de **interferência**, enquanto na **dispersão** ocorre a separação de uma onda em várias componentes espectrais com diferentes frequências.
- Designa-se por **espectro óptico** o conjunto ordenado de todas as radiações electromagnéticas capazes de serem detectadas pelo olho humano.
- A luz que é emitida pela maioria das fontes luminosas é **luz policromática**. Cada uma das radiações que constituem a luz policromática tem o seu comprimento de onda próprio e pode ser separada, obtendo-se um espectro dessa luz. Esta separação chama-se **dispersão cromática**.
- Os **espectros de emissão** podem ser **contínuos**, se forem de sólidos ou de líquidos incandescentes, ou de **riscas**, se forem de gases. Se a luz incidente atravessou uma substância, que absorve parte da radiação antes de ser analisada pelo espectroscópio, obtém-se um **espectro de absorção**.

1.2. Calorimetria

- Formas de transmissão de calor (condução, convecção e radiação).
- Troca de calor entre os corpos. Princípio fundamental da calorimetria.

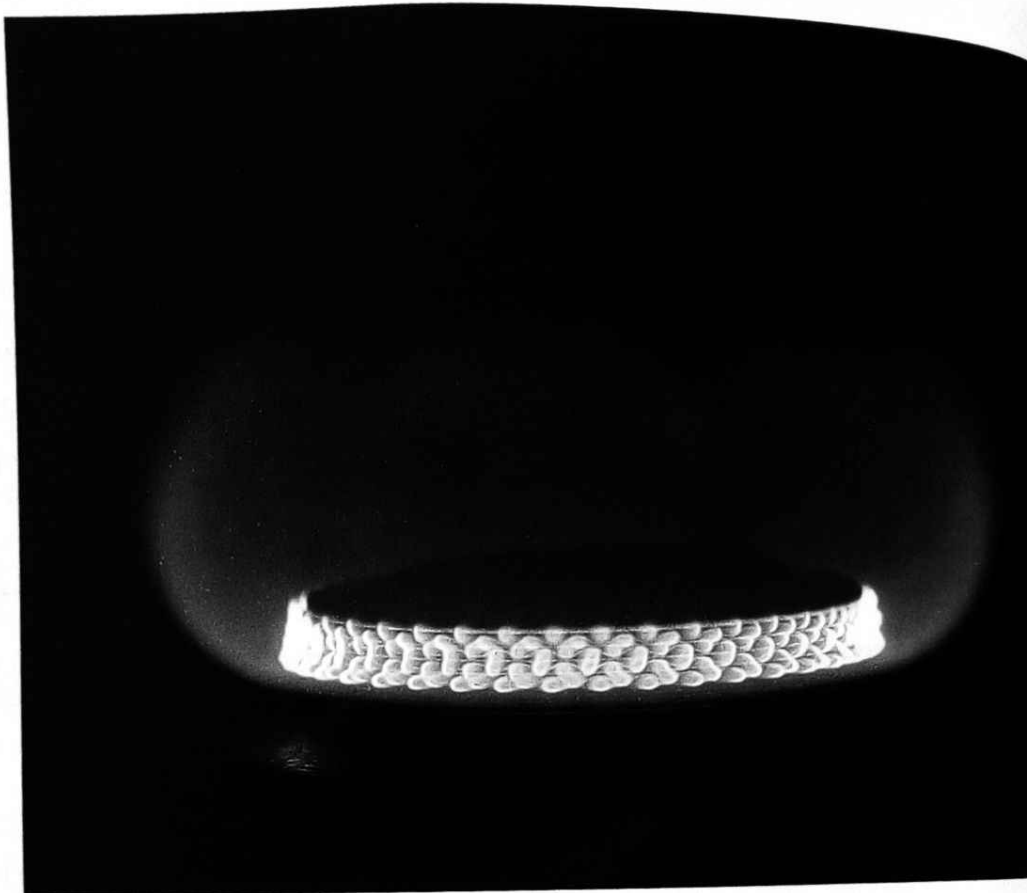


Fig. 1.18 A calorimetria ocupa-se da medição das quantidades de calor.

A vida na Terra não seria possível sem a presença do Sol nas suas proximidades. O fluxo de energia que o Sol transfere para a Terra através da luz que envia é imprescindível à nossa existência. No entanto, a Terra também transfere energia para o Espaço através de radiação. Podemos, pois, afirmar que o Sol e a Terra radiam energia, isto é, transferem energia para as suas vizinhanças através de radiação. Na realidade, **todos os corpos emitem radiação**.

A origem dessa radiação está intrinsecamente associada à natureza corpuscular da matéria. As unidades estruturais de todos os corpos, quer sejam átomos, quer sejam moléculas, quer sejam iões, são constituídas por cargas eléctricas. Estas cargas estão continuamente em agitação, a uma dada temperatura, e aumentando em consequência a emissão de ondas electromagnéticas. Um aumento de temperatura traduz-se por maior agitação das cargas eléctricas.

Esta radiação electromagnética emitida em função da energia interna de um corpo, ou seja, em função da sua temperatura, designa-se por **radiação térmica** e é essencialmente constituída por **radiação infravermelha**.

A radiação electromagnética emitida por um corpo devido à sua temperatura denomina-se radiação térmica.



Fig. 1.19 O Sol radia energia.

Se estabelecermos contacto térmico entre dois corpos a temperaturas diferentes, verifica-se a **transferência de energia** sob a forma de um fluxo de calor. A transferência só termina quando a igualdade das temperaturas for atingida. Se diferentes corpúsculos de um mesmo corpo estão a temperaturas diferentes, mais facilmente se processará a **transferência** ou **propagação do calor** através de toda a massa do corpo. Vamos agora estudar quais serão os mecanismos que estão na base dessa transferência.

► Formas de transmissão de calor

São três os mecanismos de transferência de energia por calor: **condução**, **convecção** e **radiação**.

Ao aquecermos fortemente a extremidade de uma barra metálica, apercebemo-nos, ao fim de algum tempo, que o calor se propaga até à extremidade oposta.

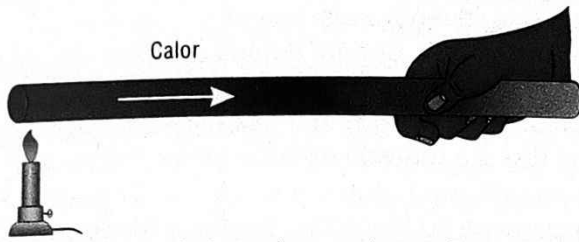


Fig. 1.20 Transferência de energia como calor numa barra metálica.

O mesmo não se verifica se utilizarmos uma haste de madeira em vez de uma barra metálica. O aquecimento que se nota na extremidade oposta é muito ligeiro. A grande dificuldade com que a propagação do calor se processa é tal que a extremidade aquecida pode sofrer combustão sem que a elevação de temperatura na outra extremidade seja grande.

Quer num caso quer no outro a transferência de energia por calor faz-se através do corpo por **condução térmica**.

Vejamos agora mais detalhadamente em que consiste este mecanismo de transferência de calor. O aquecimento local confere aos constituintes do corpo, moléculas, átomos ou iões, um aumento de energia cinética. Estes corpúsculos, agora mais agitados, chocam mais frequentemente com os corpúsculos vizinhos, o que se traduz num aumento de energia cinética dessas partículas. Estas, por sua vez, actuam do mesmo modo sobre as seguintes, e assim sucessivamente, através do corpo todo. Este processo de transmissão de energia ocorre nos sólidos.

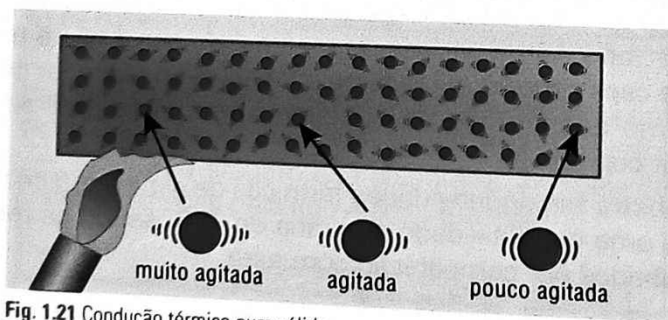


Fig. 1.21 Condução térmica num sólido.

Condução térmica é a transferência de energia sob a forma de calor entre átomos e/ou moléculas vizinhas de uma substância sólida, devido a uma diferença de temperaturas.

Neste mecanismo de condução os electrões livres também desempenham um papel importante. Conforme estudado na 10.^a classe, estes electrões livres movem-se desordenadamente ao longo de todos os corpos bons condutores, como é o caso dos metais. Quando se estabelece uma diferença de potencial eléctrico nos terminais de um condutor, os electrões livres passam a mover-se ordenadamente, originando uma corrente eléctrica.

Uma diferença de temperatura entre dois pontos de um condutor térmico tem efeito análogo ao anteriormente referido. A energia cinética dos electrões livres aumenta e rapidamente se transmite aos outros, contribuindo assim também para o aumento da sua energia cinética.

Repare

Na condução térmica, os corpúsculos vibram mas não se deslocam no sólido.

Estes dois fenómenos, **condução térmica** e **condução eléctrica**, são, em parte, parcialmente produzidos pelos mesmos agentes. É por este motivo que os corpos são geralmente bons condutores do calor também são geralmente bons condutores da electricidade. Em particular, os metais apresentam elevadas condutividades térmicas e eléctricas.

Experimentalmente, é possível determinar as diferentes condutividades térmicas dos metais e outros sólidos. Uma das experiências mais conhecidas é a do holandês Ingenhousz que inventou um aparelho, nos finais do século XVIII, inteiramente destinado a mostrar a condutividade térmica de diferentes materiais. É composto por uma tina de latão de secção rectangular e por hastes cilíndricas de diferentes substâncias incrustadas numa das paredes. Estas hastes entram de metade dentro da tina e a metade exterior está coberta de uma camada de cera amarela, de espessura uniforme, que funde a $61\text{ }^{\circ}\text{C}$. Enchendo a tina com água em ebulição, o calor propaga-se ao longo das hastes e funde a cera.

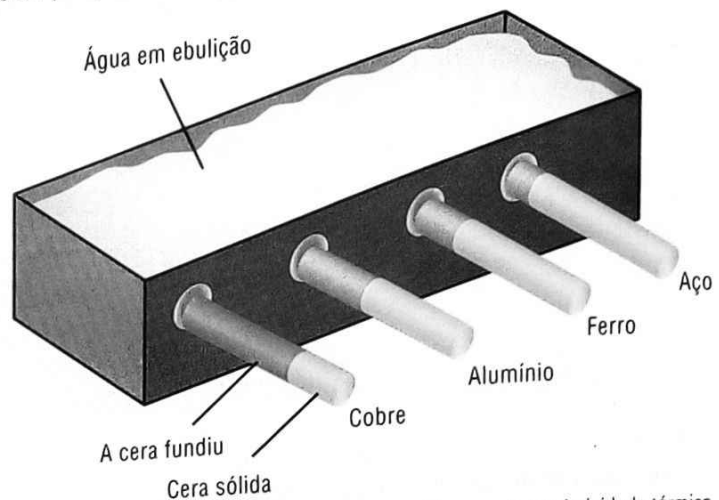


Fig. 1.22 Aparelho de Ingenhousz para mostrar a diferença de condutividade térmica dos metais.

Curiosidade

Ao contrário do que muitos julgam saber, o ouro não é o melhor condutor térmico. A prata apresenta o valor mais elevado de condutividade térmica. É por esta razão que na tabela ao lado se usa a prata como referência.

Quanto maior for a condutividade do material de que a haste é feita maior é o comprimento da capa de cera atingida pela fusão. Se a haste for de prata, a fusão atingirá o extremo desta antes de qualquer outra, visto este ser, de todos os metais, o melhor condutor.

A **tabela IV** mostra as condutividades térmicas de alguns materiais. Representa-se a prata com uma condutividade arbitrária de 100, sendo os restantes valores experimentais obtidos por comparação com este.

| Metais | Condutividade térmica | Outros materiais | Condutividade térmica |
|----------|-----------------------|------------------|-----------------------|
| Prata | 100 | Vidro | 0,2 |
| Cobre | 95 | Cimento | 0,2 |
| Alumínio | 50 | Madeira | 0,02 |
| Latão | 26 | Água | 0,01 |
| Ferro | 12 | Cortiça | 0,01 |
| Chumbo | 8 | Lã pura | 0,01 |
| Mercúrio | 2 | Ar | 0,005 |

Tabela IV Condutividades térmicas de alguns materiais em relação à prata.

Os materiais podem ser genericamente classificados como **bons ou maus condutores** do calor. Aos materiais maus condutores e que, além disso, também conduzem o calor por outros mecanismos, dá-se o nome de **isoladores térmicos**.

ou simplesmente **isoladores**. Cabem nesta categoria materiais como a cortiça, a madeira, a lã, etc. O mesmo já não se verifica no caso da água. Este material, e os líquidos de um modo geral, não é isolador. Apesar de apresentar uma condutividade térmica muito baixa, transmite o calor por outro mecanismo, o da convecção.

A propagação do calor nos líquidos e nos gases, ou seja, nos fluidos, não se reduz apenas à condução térmica, que assume aqui um papel quase irrelevante. O fenómeno da transmissão de calor nos fluidos consiste essencialmente na **convecção térmica**. Neste processo surgem correntes, que se formam com relativa facilidade, originadas por diferenças de densidade. Quando se aquece um fluido, uma certa porção dilata-se e, portanto, torna-se menos densa. Estas porções aquecidas, mais leves, elevam-se então por efeito da menor densidade, sendo o seu lugar ocupado pelo fluido não aquecido. Deste modo, estabelecem-se **correntes ascendentes**, de fluido mais quente, e **correntes descendentes**, de fluido mais frio. A estas correntes cíclicas dá-se o nome de **correntes de convecção**.

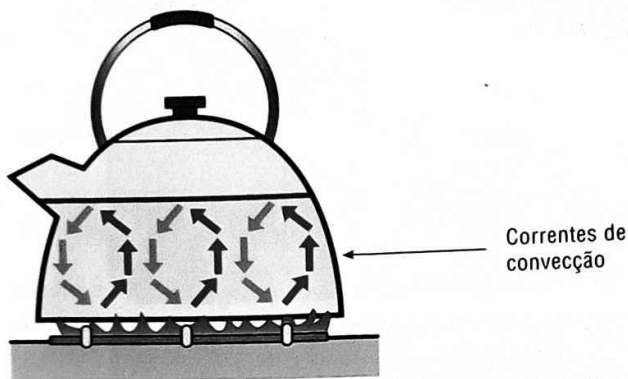


Fig. 1.24 Correntes de convecção de água quente no interior de uma chaleira.

A **convecção térmica** é a transferência de energia sob a forma de calor por deslocamento de fluido submetido a aquecimento.

Há muitas situações do nosso quotidiano em que ocorre convecção térmica. O aquecimento de uma sala faz-se essencialmente por convecção do ar ambiente. A ventilação de um interior, a tiragem das chaminés, as correntes marítimas, as brisas de ar, etc., são explicadas pela convecção térmica.

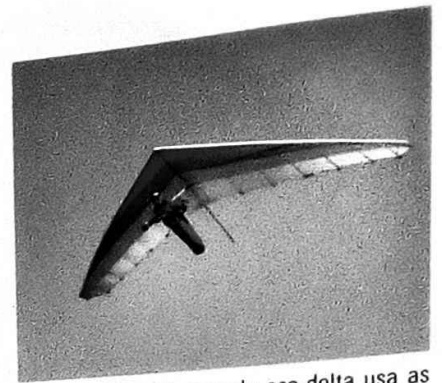
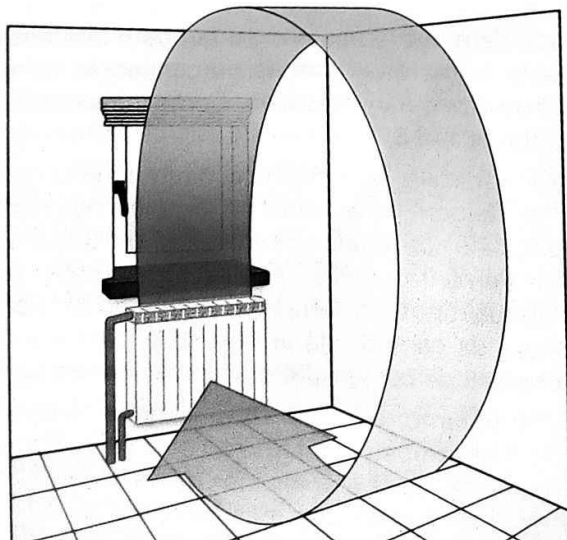


Fig. 1.23 O praticante de asa-delta usa as correntes de convecção para poder subir.

Repare

Na convecção, os corpúsculos deslocam-se originando deslocamento do fluido.

As **brisas marítimas** e as **brisas terrestres** que ocorrem junto às zonas devem-se a correntes de convecção. De dia, há absorção de radiação solar na terra e pelo mar. No entanto, verifica-se que a terra atinge uma temperatura superior à do mar, visto a areia ter uma condutividade térmica superior à água. Ainda o facto de parte da energia absorvida pelo mar ser gasta na evaporação da água. Assim, o ar próximo da terra aquece, tornando-se menos denso e gera uma corrente ascensional de ar quente. Desta forma forma-se uma zona de baixa pressão acima da superfície terrestre. Do lado do mar, o ar está mais frio e denso, formando uma zona de altas pressões. Como o ar se movimenta das zonas de alta pressão para as zonas de baixa pressão, o ar frio movimenta-se do mar para a terra, originando brisas marítimas que contribuem para amenizar o clima durante o dia (figura 1.26 A).

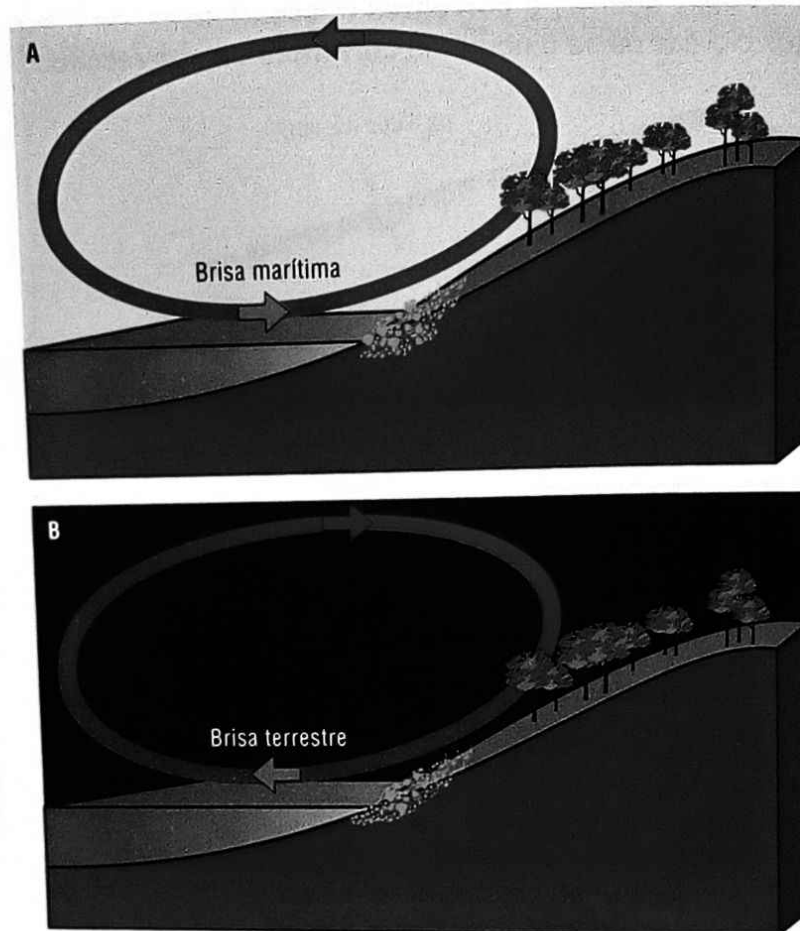


Fig. 1.26 (A) Brisa marítima durante o dia, do mar para a terra. (B) Brisa terrestre nocturna durante a noite, da terra para o mar.

Durante a noite o fenómeno processa-se exactamente ao contrário. Como a terra aquece mais rapidamente durante o dia também arrefece mais rapidamente durante a noite. Desta forma as correntes de convecção geram-se ao contrário, bem como as zonas de alta e baixa pressão. Como consequência criam-se brisas terrestres que movem o ar da terra para o mar (figura 1.26 B).

Outra situação real explicada pela convecção tem a ver com a **renovação do ar junto ao solo**, que se reveste de especial importância nos locais onde a poluição do ar mais se faz sentir. As correntes de convecção contribuem para a **dispersão dos gases poluentes** provenientes dos meios de transporte e das indústrias. Isto acontece porque, habitualmente, a temperatura que se faz sentir junto ao solo é superior à temperatura da camada de ar que se encontra a maior altitude, criando-se assim correntes de convecção que dispersam os gases poluentes.

Pode acontecer, no entanto, um fenómeno climatérico denominado de **inversão térmica**, em que o ar atmosférico junto ao solo se encontra mais frio do que o ar das camadas superiores. Este ar mais frio e mais denso do que o de cima não sobe. Assim sendo, não se formam correntes ascensionais de ar junto ao solo e os gases poluentes não são dispersados, aumentando os níveis de poluição atmosférica. Quando esta situação se verifica nas grandes cidades industrializadas é especialmente perigosa.



Fig. 1.27 O fenómeno da inversão térmica numa grande cidade.

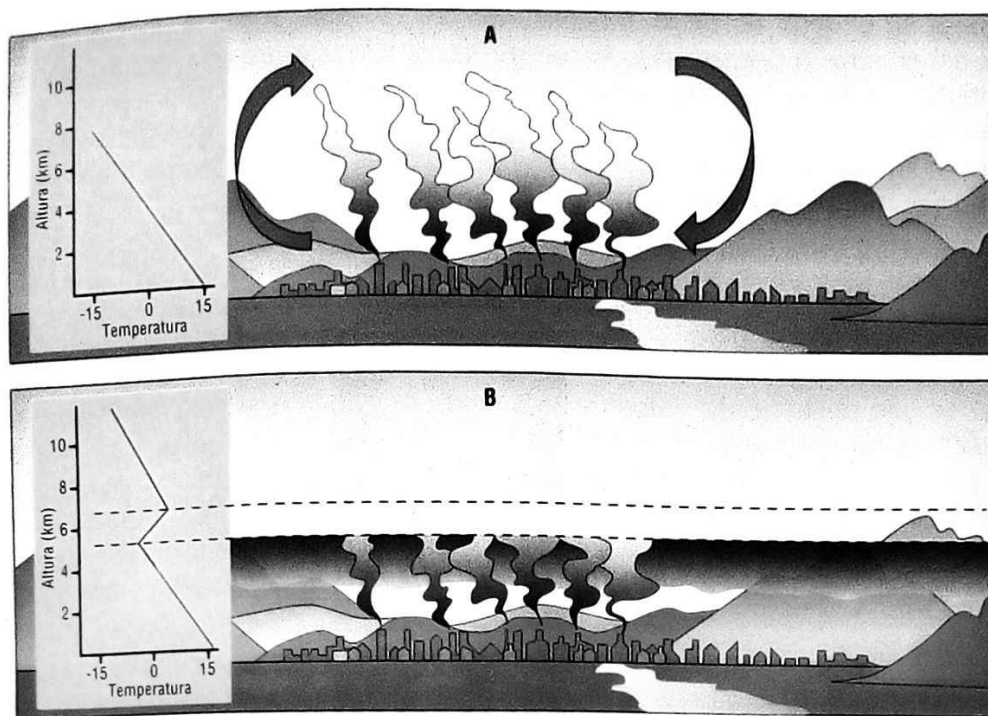


Fig. 1.28 (A) Renovação do ar atmosférico junto ao solo. (B) Fenómeno de inversão térmica, com acumulação de gases poluentes.

A **radiação** é o mecanismo de transmissão de calor associado à propagação de ondas electromagnéticas, que se propagam no vazio.

Como já referimos anteriormente, um corpo que se encontre a uma temperatura superior à do ambiente emite energia que se propaga através deste. Esta energia chama-se **energia radiante**, ou simplesmente **radiação**, e propaga-se no vazio à velocidade da luz. Quanto maior for a temperatura do corpo, maior será a energia irradiada.

A energia associada às radiações solares possui diversas aplicações práticas, nomeadamente na agricultura, na meteorologia, em sistemas de aquecimento e na produção de electricidade.

Podemos agora sintetizar os três processos, destacando as principais diferenças entre eles:

Na **condução** o calor propaga-se por intermédio da agitação corpuscular, na **convecção** há deslocamento de fluido sob a forma de correntes e na **radiação** não há intervenção da matéria, visto propagar-se no vazio.

Convém esclarecer que um corpo pode emitir calor pelos três processos, em simultâneo ou não. Por exemplo, quando nos aquecemos à lareira, há propagação de calor por condução, por convecção e por radiação. No entanto, a primeira forma contribui muitíssimo menos do que as outras duas, uma vez que, como vimos, o ar é mau condutor de calor. Se colocarmos uma simples folha de papel entre a nossa cara e a lareira, reduz-se consideravelmente o aquecimento do rosto, o que comprova que há propagação de uma grande quantidade de calor por radiação. Este efeito não seria tão perceptível se apenas intervissem correntes de convecção. Assim se explica também porque é que só a parte do corpo voltada para a lareira aquece.

Para concluir este breve estudo da propagação do calor será interessante referir uma aplicação prática muito útil, a garrafa-termo ou vaso de Dewar. Esta constitui um óptimo isolante térmico, conseguindo manter os líquidos quentes ou frios durante um intervalo de tempo considerável. São constituídas por uma garrafa de vidro de dupla parede que se encontra no interior de uma caixa protectora, metálica ou de plástico. Na cavidade delimitada pela dupla parede é feito o vazio e a sua superfície interior é prateada. Através do vazio não há propagação do calor por condução nem tão-pouco por convecção. As trocas de calor entre a garrafa e o



Fig. 1.29 Uma garrafa-termo permite manter os líquidos quentes ou frios.

exterior só podem, portanto, processar-se por radiação. A função das duas paredes espelhadas e opostas é a de reduzir essas trocas a um mínimo. Se a garrafa contiver um líquido quente, a emissão de calor para o exterior faz-se em menor quantidade pela parede mais interna e reflecte-se na parede oposta. Caso contenha um líquido frio, o calor exterior não pode, pelas mesmas razões, transmitir-se apreciavelmente para dentro.

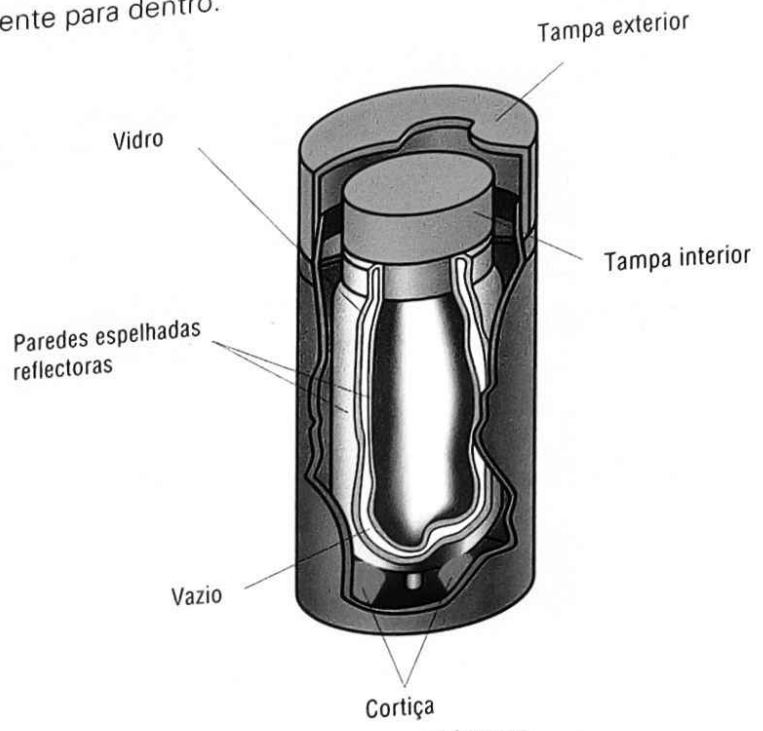


Fig. 1.30 Representação esquemática de uma garrafa-termo.

► Troca de calor entre corpos. Equação fundamental da calorimetria

Dois corpos, de diferentes materiais, aquecidos durante o mesmo intervalo de tempo pela mesma fonte, não experimentam a mesma elevação de temperatura. Exemplifiquemos com uma agulha de coser e a água contida num copo, aquecidos sobre a chama de uma lamparina de álcool. A agulha fica ao rubro a uma centena de graus Celsius em menos de um minuto, enquanto a água não chega a elevar a sua temperatura de 1 °C.

É sabido que, para um mesmo corpo, quanto mais calor ele receber, maior a variação de temperatura que experimenta. Para corpos feitos do mesmo material, quanto maior for a massa, maior tem de ser a quantidade de calor recebida, para produzir a mesma variação de temperatura. Também é sabido que corpos de mesma massa e de materiais diferentes absorvem quantidades de calor diferentes para uma mesma variação de temperatura.

A quantidade de calor absorvida, ou cedida, por um corpo é função da massa do corpo, da variação de temperatura experimentada e da natureza do material que o forma.

Com base no que acabámos de dizer, podemos admitir, em primeira aproximação, que há proporcionalidade directa entre a quantidade de calor, Q , absorvida ou cedida, a massa do corpo, m , e a variação de temperatura, ΔT , por este sofrida. Representarmos a constante de proporcionalidade por c , podemos escrever a equação fundamental da calorimetria:

$$Q = m c \Delta T$$

A equação fundamental da calorimetria também se pode escrever da seguinte forma:

$$Q = C \Delta T$$

sendo:

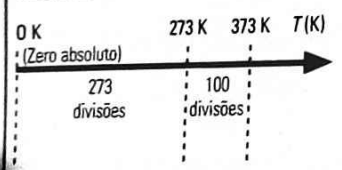
$$C = m c = \frac{Q}{\Delta T}$$

Desafio

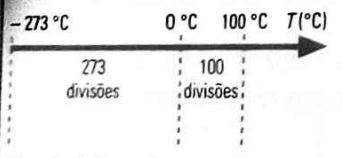
No Império Britânico e nos EUA usa-se como unidade calorimétrica a unidade térmica inglesa que se representa pelas iniciais BTU (British Thermal Unit) assim definida:
quantidade de calor necessária para elevar de 1 grau Fahrenheit a temperatura de 1 libra de água.
 Mostre que 1 BTU equivale a 252 cal.

Recorde

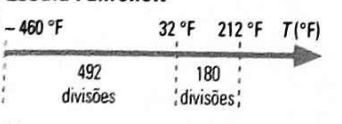
Escala Kelvin ou escala de temperatura absolutas



Escala Celsius



Escala Fahrenheit



a denominada **capacidade térmica**. Ao contrário da capacidade térmica mássica que é característica da substância, a capacidade térmica, C , é uma característica do corpo. Assim, por exemplo, diferentes blocos de chumbo têm diferentes capacidades térmicas, apesar de serem da mesma substância e como tal terem a mesma capacidade térmica mássica.

Capacidade térmica é a quantidade de calor absorvida ou cedida pelo corpo por cada grau de variação de temperatura.

As unidades em que se exprimem a capacidade térmica mássica e a capacidade térmica dependem obviamente das unidades escolhidas para Q , m e ΔT . No SI, como já foi referido, a **unidade de calor específico** é o $\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$ e a **unidade de capacidade térmica** é o J K^{-1} . Saliente-se que, por vezes, em vez de escrever K^{-1} se escreve $^{\circ}\text{C}^{-1}$, visto tratar-se de uma variação de temperatura e dessa forma não se escreve numericamente igual nas duas escalas.

Estamos agora em condições de enunciar o **princípio fundamental da calorimetria**:

Se dois ou mais corpos, colocados no interior de um recipiente térmicamente isolado, trocam calor, os de maior temperatura cedem calor aos de menor temperatura, até se atingir o equilíbrio térmico.

A energia não se ganha nem se perde, transfere-se de uns corpos para outros pelo que a soma algébrica dos calores trocados tem de ser igual a zero:

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_n = 0$$

Se representarmos o calor total recebido por Q_r e o calor total cedido por Q_c teremos que $Q_r > 0$ e que $Q_c < 0$, pelo que:

$$Q_r + Q_c = 0$$

A **calorimetria** ocupa-se da medição das quantidades de calor e de um modo particular da medição dos calores específicos.

Um dos métodos mais utilizados na determinação do calor específico dos corpos é o denominado **método das misturas**, ou do **calorímetro de água**. Analisaremos de seguida.

O calorímetro não é mais do que um recipiente metálico de forma cilíndrica com paredes polidas, de forma a reduzir ao mínimo as perdas de calor por radiação. É munido de um agitador feito do mesmo material metálico do recipiente. Este fica encerrado dentro de outro feito de paredes duplas e apoiado pela base intermédio de um disco ou de uns pés de cortiça. Pretende-se assim evitar a troca de calor com a vizinhança.

Começa-se por pesar a massa do calorímetro juntamente com o agitador. Introduce-se dentro do vaso uma certa quantidade de água, de massa m_a , e mede-se a sua temperatura. Introduz-se no seu interior um termómetro graduado, pelo menos em centésimos de grau, de forma a minimizar o erro relativo. Seja T_1 essa temperatura.

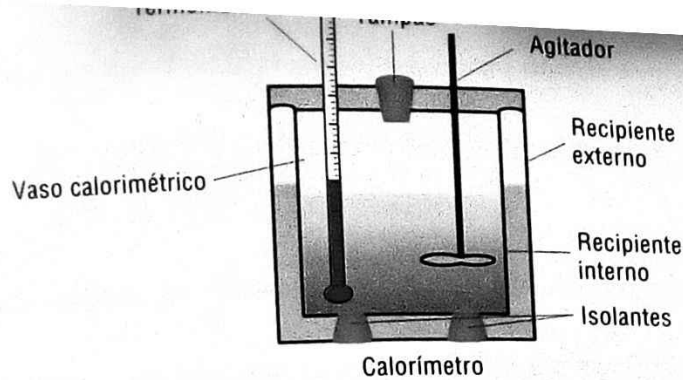


Fig. 1.31 Calorímetro de água.

De seguida, introduz-se um corpo, de massa m , cujo calor específico pretendemos conhecer, aquecido à temperatura T_2 , dentro do calorímetro. Tapa-se com um tampão e agita-se a mistura com o agitador de forma a homogeneizar a temperatura. Regista-se a temperatura de equilíbrio, T_e .

De acordo com o princípio fundamental da calorimetria, o corpo cedeu calor à água, ao calorímetro, ao agitador e ao termómetro. Esta transferência de energia cessou quando a temperatura da mistura ficou igual para todos os componentes.

Com estes dados experimentais facilmente se determina o calor específico, tendo em conta que a quantidade de energia cedida pelo corpo quente é igual à soma das quantidades de energia absorvidas pela água, pelo termómetro, pelo calorímetro e pelo agitador.

Representando por c o calor específico do corpo, c_c o calor específico do calorímetro, c_a o calor específico da água e por C a capacidade térmica da parte imersa do termómetro, teremos:

- Quantidade de calor cedida pelo corpo: $-c m (T_e - T_2) = c m (T_2 - T_e)$
- Quantidade de calor absorvida pela água: $c_a m_a (T_e - T_1)$
- Quantidade de calor absorvida pelo calorímetro + agitador: $c_c m_c (T_e - T_1)$
- Quantidade de calor absorvida pelo termómetro: $C (T_e - T_1)$

Segundo o princípio fundamental da calorimetria, podemos estabelecer a igualdade entre a primeira quantidade de calor e a soma das outras:

$$c m (T_2 - T_e) = (c_a m_a + c_c m_c + C) (T_e - T_1)$$

Sendo $c_a = 1 \text{ cal g}^{-1} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$, c_c (latão) $= 0,093 \text{ cal g}^{-1} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ e $C = 0,46 V \text{ cal}$ (V , volume da parte imersa de um termómetro de mercúrio, em cm^3), a igualdade anterior fica, então:

$$c m (T_2 - T_e) = (m_a + 0,093 m_c + 0,46 V) (T_e - T_1)$$

À soma $0,093 m_c + 0,46 V$ é habitual chamar-se equivalente em água do calorímetro e acessórios e representa-se por E . Assim, vem:

$$c m (T_2 - T_e) = (m_a + E) (T_e - T_1)$$

$$c = \frac{(m_a + E) (T_e - T_1)}{m (T_2 - T_e)}$$

É através desta expressão que se determina o **calor específico do corpo**.

Se se pretender determinar experimentalmente o calor específico de líquidos, também se pode aplicar este método. Neste caso, deve substituir-se a água pelo líquido em análise e usar um corpo sólido cujo calor específico seja conhecido.

Se representarmos o calor específico do líquido por c_L , o princípio fundamental da calorimetria permite-nos escrever:

$$c m (T_2 - T_0) = (c_L m_L + E) (T_0 - T_1)$$

$$c_L = \frac{c m (T_2 - T_0)}{m_L (T_0 - T_1)} - \frac{E}{m_L}$$

A **tabela V** indica os valores de calores específicos médios de algumas substâncias.

| Substâncias | Calor específico cal g ⁻¹ °C ⁻¹ | Calor específico J kg ⁻¹ K ⁻¹ |
|----------------------|--|--|
| Aço | 0,110 | 460 |
| Água | 1,000 | 4186 |
| Alumínio | 0,215 | 900 |
| Ar | 0,237 | 993 |
| Betão | 0,800 | 3,35 × 10 ³ |
| Chumbo | 0,0380 | 159 |
| Cobre | 0,0920 | 385 |
| Ferro | 0,106 | 443 |
| Gelo (-10 °C a 0 °C) | 0,500 | 2,09 × 10 ³ |
| Prata | 0,0566 | 237 |
| Vidro | 0,150 | 820 |

Tabela V Calores específicos médios, a 25 °C.

Questões Resolvidas

2. Num calorímetro de constante igual a 10 (equivalente em água do calorímetro e acessórios), colocou-se 140 mL de água. Seguidamente, pela introdução no seu interior de um corpo de cobre de 45 g a 98 °C, verificou-se que a temperatura da mistura atingiu o equilíbrio térmico aos 15 °C. Recorrendo aos valores da **tabela V**, determine a temperatura inicial da água.

Resolução

2. $m = 45 \text{ g}$, $c = 0,0920 \text{ cal g}^{-1} \text{ °C}^{-1}$

$m_a = 140 \text{ g}$ (1 mL de água equivale a 1 g)

$E = 10$, $c_a = 1,000 \text{ cal g}^{-1} \text{ °C}^{-1}$

$T_2 = 98 \text{ °C}$

$T_0 = 15 \text{ °C}$

Quantidade de calor cedida pelo corpo: $-c m (T_0 - T_2) = c m (T_2 - T_0)$

Quantidade de calor absorvida pela água: $c_a m_a (T_0 - T_1)$

Quantidade de calor absorvida pelo calorímetro + agitador + termómetro: $E (T_0 - T_1)$

Assim:

$$c m (T_2 - T_0) = (c_a m_a + E) (T_0 - T_1) \Leftrightarrow T_1 = T_0 - \frac{c m (T_2 - T_0)}{(c_a m_a + E)}$$

Substituindo:

$$T_1 = 15 \text{ °C} - \frac{0,0920 \text{ cal g}^{-1} \text{ °C}^{-1} \times 45 \text{ g} (98 - 15) \text{ °C}}{(1,000 \times 140 + 10)} \Leftrightarrow T_1 = 13 \text{ °C}$$

- A radiação electromagnética emitida por um corpo devido à sua temperatura denomina-se radiação térmica.
- São três os mecanismos de transferência de energia por calor:
 - condução;
 - convecção;
 - radiação.
- **Condução térmica** é a transferência de energia sob a forma de calor entre átomos e/ou moléculas vizinhas de uma substância sólida, devido a uma diferença de temperaturas.
- Os materiais podem ser genericamente classificados como **bons ou maus condutores** do calor. Aos materiais maus condutores e que, além disso, também não conduzem o calor por outros mecanismos, dá-se o nome de **isoladores térmicos** ou simplesmente **isoladores**.
- A **convecção térmica** é a transferência de energia sob a forma de calor por deslocação de fluido submetido a aquecimento.
- Na **convecção térmica** surgem correntes originadas por diferenças de densidade. Quando se aquece um fluido, uma certa porção dilata-se e, portanto, torna-se menos densa. Estas porções aquecidas, mais leves, elevam-se então por efeito da menor densidade, sendo o seu lugar ocupado pelo fluido não aquecido. Deste modo, estabelecem-se **correntes ascendentes**, de fluido mais quente, e **correntes descendentes**, de fluido mais frio. A estas correntes cíclicas dá-se o nome de **correntes de convecção**.
- A **radiação** é o mecanismo de transmissão de calor associado à propagação de ondas electromagnéticas, que se propagam no vazio.
- Na **condução** o calor propaga-se por intermédio da agitação corpuscular, na **convecção** há deslocamento de fluido sob a forma de correntes e na **radiação** não há intervenção da matéria, visto propagar-se no vazio.
- A quantidade de calor absorvida, ou cedida, por um corpo é função da massa do corpo, da variação de temperatura experimentada e da natureza do material que o forma.
- A **equação fundamental da calorimetria** estabelece uma proporcionalidade directa entre a quantidade de calor, Q , absorvida ou cedida, a massa do corpo, m , e a variação de temperatura, ΔT , por este sofrida. Se representarmos a constante de proporcionalidade por c , podemos escrever:

$$Q = m c \Delta T$$

- **Calor específico** ou **capacidade térmica mássica**, c , é a quantidade de calor absorvida ou cedida por unidade de massa e por cada grau de variação de temperatura.

$$c = \frac{Q}{m \Delta T}$$

- **Capacidade térmica** é a quantidade de calor absorvida ou cedida pelo corpo por cada grau de variação de temperatura.

$$C = m c = \frac{Q}{\Delta T}$$

- **Princípio fundamental da calorimetria:** Se dois ou mais corpos, colocados no interior de um recipiente termicamente isolado, trocam calor, os de maior temperatura cedem calor aos de menor temperatura, até se atingir o equilíbrio térmico.

1.3. Radiação do corpo negro

Exercícios

- Radiação do corpo negro.
- Lei de Stefan-Boltzmann.
- Lei de Wien.

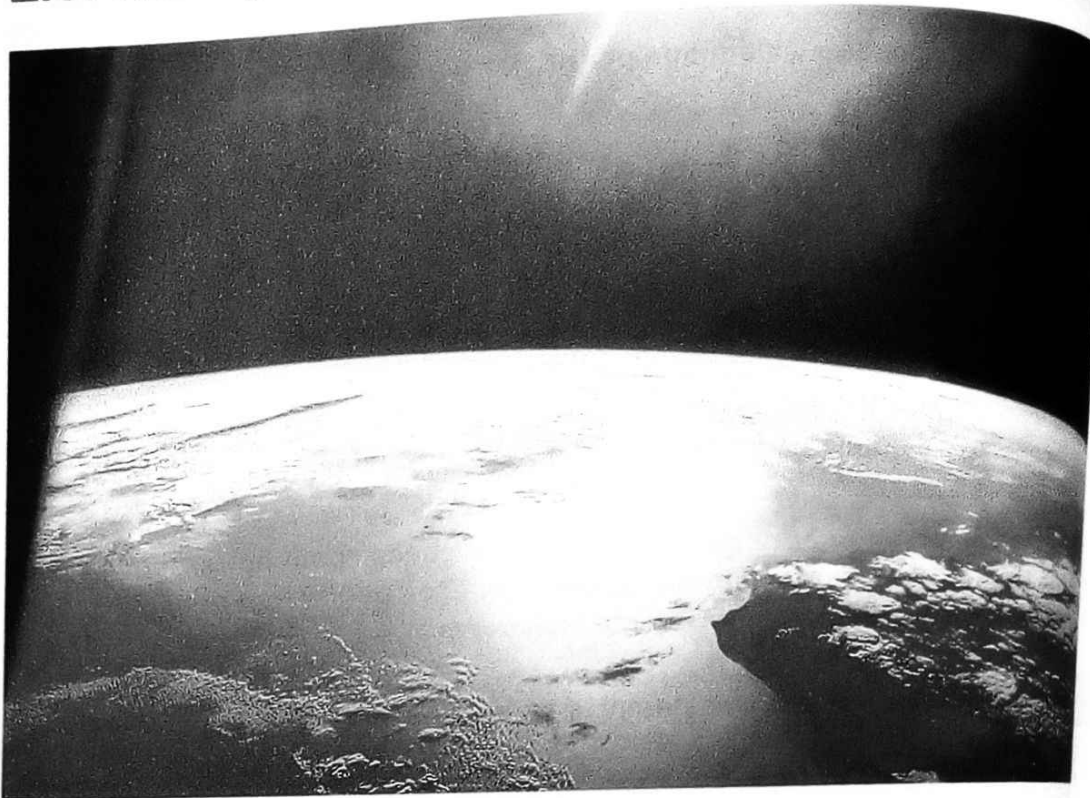


Fig. 1.32 A Terra e o Sol transferem energia para as suas vizinhanças.



Fig. 1.33 A lenha, na lareira, como qualquer corpo, emite radiação electromagnética.

Quando estamos em frente da lareira acesa, sentimos o calor irradiado pela lenha a arder. Essa sensação de calor é devida, em parte, à radiação electromagnética emitida pela lenha, com comprimentos de onda na região do infravermelho que é absorvida pelo nosso corpo. Podia existir um vidro entre nós e a lareira e a radiação, ainda assim, passava através do vidro, produzindo uma sensação de calor.

A lenha na lareira, como qualquer corpo, emite radiação electromagnética com um **espectro** que se estende por vários comprimentos de onda. Quando a temperatura não é muito elevada, o pico máximo do espectro é na região do infravermelho. Essa radiação não pode ser vista pelos nossos olhos, sensíveis à luz visível, mas pode ser "vista" por uma câmara sensível à radiação infravermelha. À medida que aumenta a temperatura, o pico do espectro desloca-se para comprimentos de onda menores e parte do espectro da radiação pode entrar na região da luz visível.

Um exemplo é uma barra metálica a ser aquecida com um maçarico (figura 1.34). Quando a temperatura é suficientemente elevada, a barra fica vermelha, indicando que o espectro da radiação emitida já se estende até aos comprimentos de onda da luz visível. Enquanto a temperatura da barra continuar a aumentar, a radiação emitida incluirá uma gama maior de comprimentos de onda no intervalo da luz visível e veremos a barra a passar pelo laranja e amarelo com o aumento da temperatura.

Repare

- A temperaturas moderadas (inferiores a 600 °C), a radiação térmica emitida por um corpo não é visível.
- A temperaturas entre 600 °C e 700 °C, o corpo emite luz vermelho-escura.
- A temperaturas superiores a 700 °C, o corpo emite luz vermelho-clara, alaranjada e amarela.

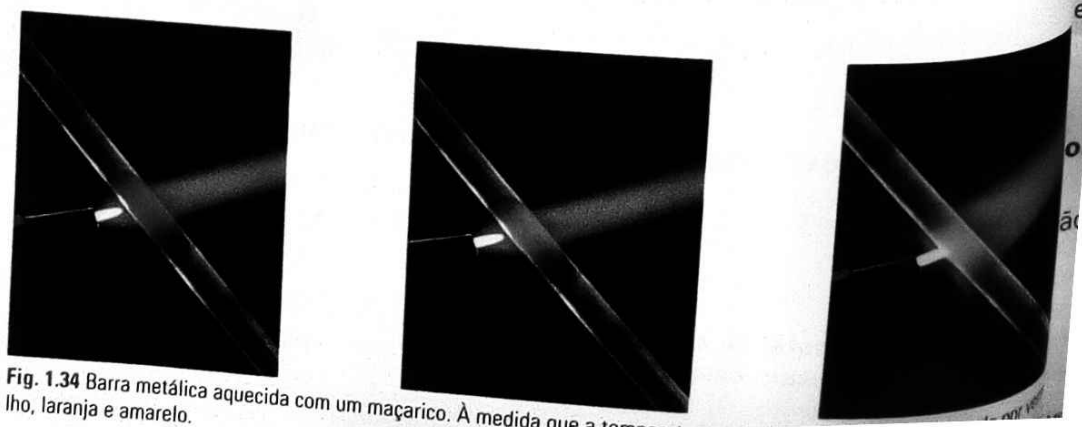


Fig. 1.34 Barra metálica aquecida com um maçarico. À medida que a temperatura aumenta, a barra emite luz vermelha, laranja e amarelo.

O resultado final da emissão de radiação é um espectro contínuo, uma vez que os corpúsculos não oscilam todos da mesma forma. À **intensidade da radiação emitida para cada comprimento de onda** dá-se o nome de **radiância espectral**. A representação gráfica da radiância espectral, R_λ , em função do comprimento de onda, λ , é uma curva com a forma apresentada na figura 1.35.

A radiância espectral, R_λ , é a intensidade da radiação emitida para cada comprimento de onda, λ .

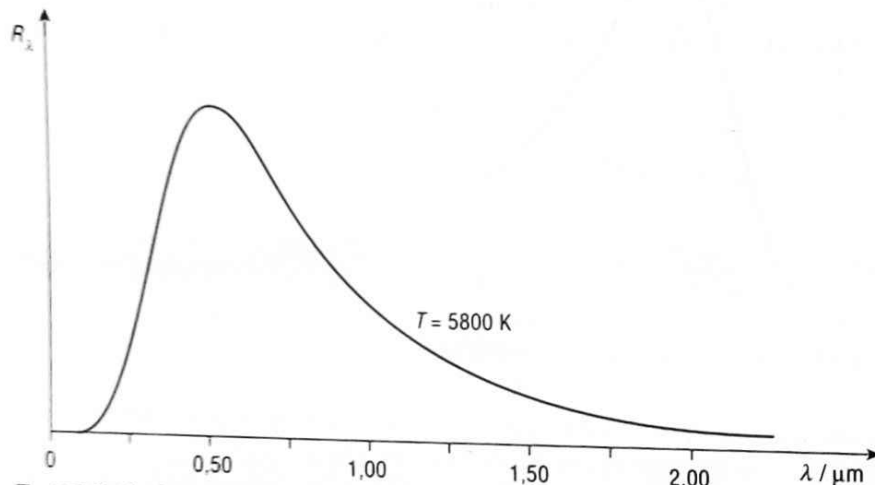


Fig. 1.35 Radiância espectral, em função do comprimento de onda, de um corpo negro.

O perfil da curva da figura 1.35 é **característico do espectro de radiação térmica de um corpo negro**. Designa-se por corpo negro uma vez que **absorve toda** a radiação que incide sobre ele.

O físico suíço Pierre Prévost publicou em 1792 um livro intitulado *Recherches physico-mécaniques sur la chaleur*, onde afirmou que um corpo, em equilíbrio térmico com a vizinhança, deve receber tanto calor quanto ele pode irradiar.

A radiação emitida por um corpo, em equilíbrio térmico com a sua vizinhança, é igual à radiação absorvida.

Na sequência da teoria de Prévost, como um **corpo negro** é um **absorvedor perfeito** da radiação, então, também é um **emissor perfeito**.

Um corpo negro é aquele que, a uma dada temperatura, mais radiação absorve e mais radiação emite.

A radiação emitida por um **corpo negro**, que pelo que acima foi exposto é um **corpo ideal**, é **independente da sua constituição e da sua forma**.

A análise da curva da figura 1.35 permite-nos concluir que no espectro da radiação térmica de um corpo negro:

- há uma intensidade máxima de emissão para um comprimento de onda bem definido, a uma dada temperatura;
- a intensidade de emissão tende para zero quer na região dos pequenos comprimentos de onda, quer na região dos grandes comprimentos de onda.

Curiosidade

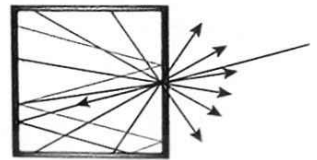


Fig. 1.36 Representação esquemática de um corpo negro.

Um corpo negro pode ser representado por uma cavidade, dotada de um pequeno orifício, como mostra a figura 1.36. Praticamente toda a radiação vinda do exterior (raio azul) que passa pelo orifício entra na cavidade, dificilmente conseguindo sair dela e terminando por ser absorvida. A vermelho representa-se a radiação emitida. Desta forma o orifício comporta-se como um corpo negro.



Pierre Prévost
(1751-1839)

Curiosidade

A radiação emitida por um corpo negro revelou limitações na teoria clássica, que apenas conseguia explicar as emissões a baixas temperaturas. O estudo das leis de corpos negros contribuiu para o surgimento da Mecânica Quântica.

► Lei de Stefan-Boltzmann

O conhecimento do gráfico da radiância espectral em função do comprimento de onda possibilita, ainda, a determinação da **intensidade total da radiação emitida** a uma dada temperatura. Tal determinação é conseguida pelo cálculo da "área" da figura delimitada pela curva do gráfico e pelo eixo dos comprimentos de onda.

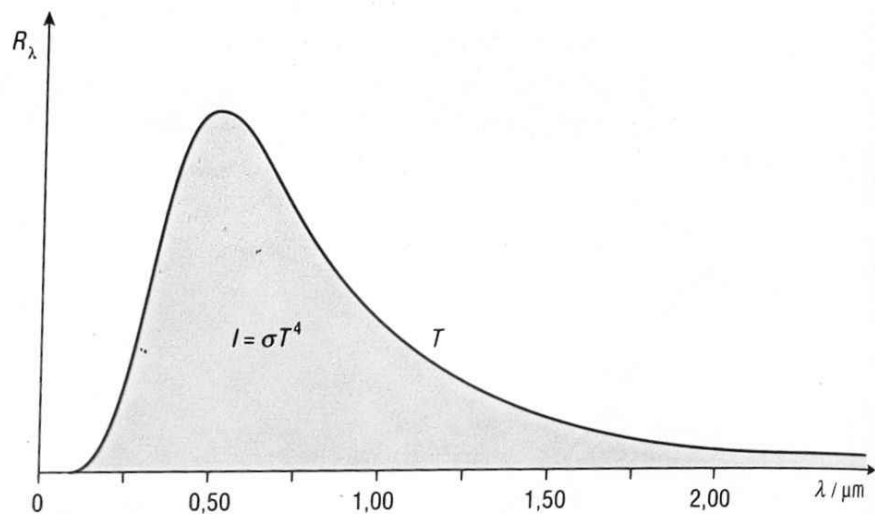


Fig. 1.37 Intensidade total da radiação, I , emitida por um corpo negro.

Recorde

A temperatura absoluta é a temperatura expressa na escala kelvin, que é a unidade de temperatura do SI.

$$T(\text{K}) = \theta(^{\circ}\text{C}) + 273,15$$



Joseph Stefan
(1835-1893)



Ludwig Boltzmann
(1844-1906)

Esse cálculo permite concluir que a intensidade total é directamente proporcional ao valor da sua **temperatura absoluta** elevada à quarta potência. Se representarmos a constante de proporcionalidade por σ , podemos escrever o resultado anterior na forma:

$$I = \sigma T^4$$

Esta relação foi obtida por via experimental, em 1879, pelo físico esloveno Joseph Stefan e por via teórica, em 1884, por um dos seus alunos, o físico austríaco Ludwig Boltzmann. Traduz uma lei da Física que, por este motivo, ficou conhecida por **Lei de Stefan-Boltzmann**:

A intensidade total da radiação emitida por um corpo negro é directamente proporcional à quarta potência da sua temperatura absoluta.

A constante de proporcionalidade, σ , entretanto designada por **constante Stefan-Boltzmann**, tem o valor: $\sigma = 5,670 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$.

A intensidade da radiação, I , não é mais do que a energia emitida por unidade de tempo e por unidade de área, pelo que podemos reescrever a expressão anterior na forma:

$$\frac{E}{A \Delta t} = \sigma T^4 \Leftrightarrow E = \sigma \Delta t A T^4$$

onde A é a área da superfície do corpo e Δt é o intervalo de tempo durante o qual o corpo emite radiação.

Se atendermos ainda a que uma energia por unidade de tempo é uma potência, as expressões anteriores podem ser escritas na forma:

$$\frac{P}{A} = \sigma T^4 \Leftrightarrow P = \sigma A T^4$$

Em boa aproximação podemos considerar as estrelas como um corpo negro. No entanto, o conceito de corpo negro é um conceito ideal, pelo que, na prática,

► Lei de Stefan-Boltzmann

O conhecimento do gráfico da radiância espectral em função do comprimento de onda possibilita, ainda, a determinação da **intensidade total da radiação** emitida a uma dada temperatura. Tal determinação é conseguida pelo cálculo da área da figura delimitada pela curva do gráfico e pelo eixo dos comprimentos de onda.

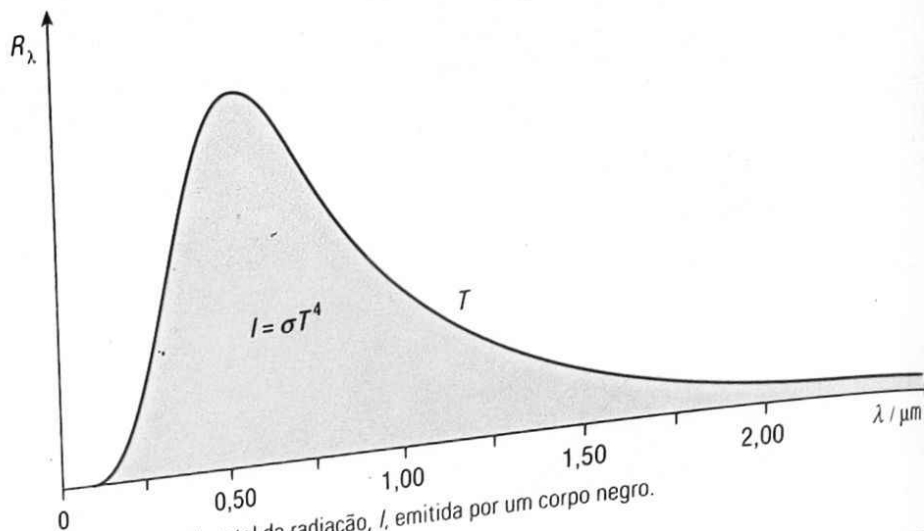


Fig. 1.37 Intensidade total da radiação, I , emitida por um corpo negro.

Recorde

A temperatura absoluta é a temperatura expressa na escala kelvin, que é a unidade de temperatura do SI.

$$T(K) = \theta(^{\circ}C) + 273,15$$

Esse cálculo permite concluir que a intensidade total é directamente proporcional ao valor da sua **temperatura absoluta** elevada à quarta potência. Se rearmos a constante de proporcionalidade por σ , podemos escrever o resultado anterior na forma:

$$I = \sigma T^4$$

Esta relação foi obtida por via experimental, em 1879, pelo físico esloveno Joseph Stefan e por via teórica, em 1884, por um dos seus alunos, o físico austríaco Ludwig Boltzmann. Traduz uma lei da Física que, por este motivo, é conhecida por **Lei de Stefan-Boltzmann**:

A intensidade total da radiação emitida por um corpo negro é directamente proporcional à quarta potência da sua temperatura absoluta.

A constante de proporcionalidade, σ , entretanto designada por **constante de Stefan-Boltzmann**, tem o valor: $\sigma = 5,670 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$.

A intensidade da radiação, I , não é mais do que a energia emitida por unidade de tempo e por unidade de área, pelo que podemos reescrever a expressão anterior na forma:

$$\frac{E}{A \Delta t} = \sigma T^4 \Leftrightarrow E = \sigma \Delta t A T^4$$

onde A é a área da superfície do corpo e Δt é o intervalo de tempo durante o qual o corpo emite radiação.

Se atendermos ainda a que a energia por unidade de tempo é uma potência, as expressões anteriores podem ser escritas na forma:

$$\frac{P}{A} = \sigma T^4 \Leftrightarrow P = \sigma A T^4$$

Em boa aproximação podemos considerar as estrelas como um corpo negro. No entanto, o conceito de corpo negro é um conceito ideal, pelo que, na prática,



Joseph Stefan
(1835-1893)



Ludwig Boltzmann
(1844-1906)

corpos reais não se comportam rigorosamente como um corpo negro. Para corpos reais a expressão anterior assume a forma:

$$\frac{P}{A} = e \sigma T^4 \Leftrightarrow P = e \sigma A T^4$$

onde o parâmetro numérico e representa a **emissividade** do corpo emissor. Este factor pode assumir valores compreendidos entre zero e 1. O valor 1 corresponde à emissividade de um corpo negro e o valor zero corresponde à emissividade de um corpo reflector perfeito, isto é, um corpo que não absorve qualquer radiação.

No caso de o corpo emissor, à temperatura T , radiar energia para a sua vizinhança, à temperatura $T_0 < T$, a potência total efectivamente emitida será:

$$P = e \sigma A (T^4 - T_0^4)$$

Curiosidade

O ouro polido apresenta uma emissividade de 0,02, o que faz dele um exemplo de óptimo reflector e consequentemente mau absorvedor. O gelo, pelo contrário, apresenta uma emissividade de 0,97, o que faz dele um exemplo de absorvedor quase perfeito.

Questões Resolvidas

1. Considere um corpo negro à temperatura de 50°C . Sabendo que este corpo radia $5,56 \times 10^4$ J num minuto, determine:
 - 1.1. a potência radiada;
 - 1.2. a intensidade total da radiação que o corpo emitiu nesse minuto;
 - 1.3. a área do corpo.

Resolução

1.

$$1.1. E = 5,56 \times 10^4 \text{ J}$$

$$\Delta t = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}$$

$$P = \frac{E}{\Delta t} \Rightarrow P = \frac{5,56 \times 10^4 \text{ J}}{60 \text{ s}} \Leftrightarrow P = 9,27 \times 10^2 \text{ W}$$

$$1.2. \theta = 50^\circ\text{C}$$

$$T(\text{K}) = \theta(^{\circ}\text{C}) + 273,15 \Rightarrow T = 323,15 \text{ K}$$

$$I = \sigma T^4 \Rightarrow I = 5,670 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4} \times 323,15^4 \text{ K}^4 \Leftrightarrow I = 6,18 \times 10^2 \text{ W m}^{-2}$$

$$1.3. E = \sigma \Delta t A T^4 \Leftrightarrow A = \frac{E}{\sigma \Delta t T^4}$$

$$A = \frac{5,56 \times 10^4 \text{ J}}{5,670 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4} \times 60 \text{ s} \times 323,15^4 \text{ K}^4} \Leftrightarrow A = 1,5 \text{ m}^2$$

► Lei de Wien

Como vimos anteriormente, a potência radiada por um corpo é função do comprimento de onda da radiação emitida, apresentando um máximo para um dado comprimento de onda, a uma determinada temperatura. Se a temperatura aumentar, as amplitudes de oscilação dos corpúsculos deverão ser em média maiores e como consequência o corpo deverá radiar mais energia. Será, pois, de esperar uma modificação do espectro de emissão térmica. Efectivamente, é isto que se observa, como evidencia a figura 1.38.

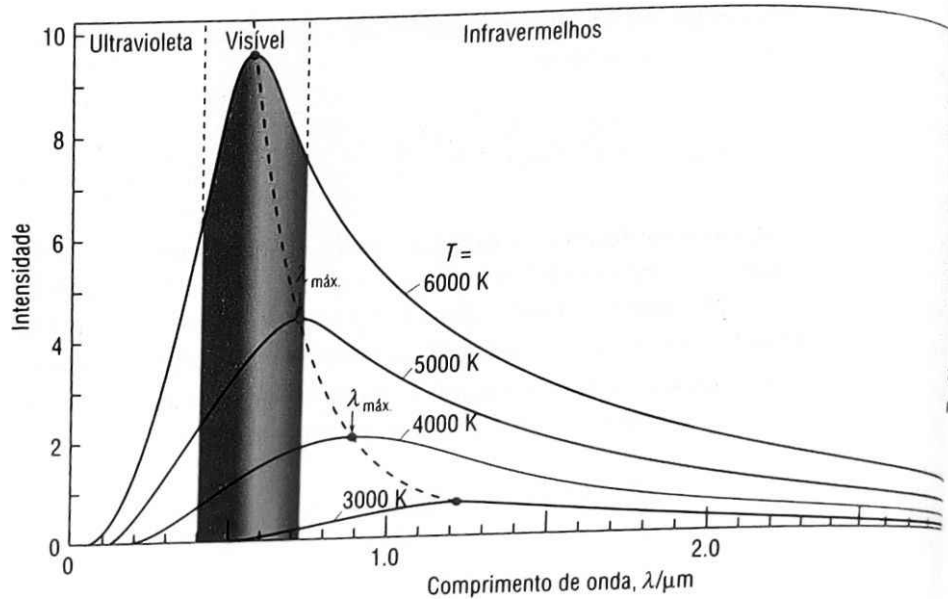


Fig. 1.38 Espectros para corpos negros a diferentes temperaturas.

Com base na análise da figura 1.38, podemos concluir que o valor máximo da curva é tanto maior quanto maior for a temperatura. Por outro lado, também podemos concluir que esse **valor máximo da curva, $\lambda_{\text{máx.}}$, desloca-se para os menores comprimentos de onda** quando a temperatura aumenta.

Estas conclusões foram obtidas experimentalmente pelo físico alemão Wilhelm Wien, que conseguiu ainda verificar que **o comprimento de onda máximo é inversamente proporcional à temperatura absoluta**. Se representarmos esta constante de proporcionalidade por b , podemos escrever o resultado anterior na seguinte forma:

$$\lambda_{\text{máx.}} T = b$$

Esta constante, a que se dá o nome de **constante de dispersão de Wien**, é igual a $2,898 \times 10^{-3} \text{ m K}$ e permite reescrever a relação anterior na forma:

$$\lambda_{\text{máx.}} T = 2,898 \times 10^{-3} \text{ m K}$$

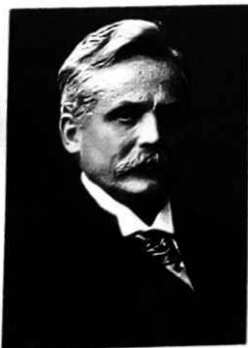
Esta relação traduz uma lei física conhecida por **Lei de Wien** ou **Lei do Deslocamento de Wien**:

O comprimento de onda da radiação mais intensa, emitida por um corpo negro, varia inversamente com a temperatura absoluta.

Esta lei permite determinar a temperatura de uma estrela, corpo que se aproxima muito do modelo de corpo negro. Foi assim possível conhecer a temperatura da fotosfera do nosso Sol. A potência máxima radiada pelo Sol ocorre para o comprimento de onda de 500 nm. Assim, **a temperatura da fotosfera solar será**

$$\lambda_{\text{máx.}} T = 2,898 \times 10^{-3} \text{ m K} \Leftrightarrow T = \frac{2,898 \times 10^{-3} \text{ m K}}{\lambda_{\text{máx.}}} \Rightarrow T = \frac{2,898 \times 10^{-3} \text{ m K}}{500 \times 10^{-9} \text{ m}} \Leftrightarrow T = 5800 \text{ K}$$

A cor amarela do Sol resulta da mistura das radiações visíveis emitidas por esta estrela, verde, vermelha e azul, correspondendo o máximo à radiação verde. A temperatura de uma estrela dá-nos uma indicação da sua temperatura superficial. Uma estrela mais fria que o Sol apresenta uma cor vermelha, enquanto uma estrela mais quente que o Sol apresenta uma cor esbranquiçada ou azul, decorrente do deslocamento no espectro das cores azul e violeta e da diminuição da cor vermelha.



Wilhelm Wien
(1864-1928)

Curiosidade

O corpo humano está à temperatura de 310 K. O comprimento de onda para o qual é máxima a intensidade da radiação emitida pelo corpo humano é de 9300 nm.

Este comprimento de onda situa-se na zona do infravermelho. É nesta zona que se dá a máxima emissão dos corpos na faixa de temperatura dos 300 K. Não emitimos luz própria, pois não somos vistos se estivermos numa sala às escuras, mas, num sentido mais lato, temos luz própria pois emitimos radiação electromagnética.

A temperatura média do nosso planeta, apesar de ter sofrido pequenas oscilações ao longo dos tempos e revelar tendência para aumentar nos nossos dias, tem-se mantido **globalmente constante** e próxima dos 15 °C. Uma vez que a Terra está constantemente a receber energia do Sol e a temperatura média pouco oscila, significa que a radiação que emite, na zona do infravermelho, é praticamente igual à que absorve. Em média, essa energia recebida, e consequentemente emitida, pela Terra por unidade de tempo e por unidade de área é de 240 W m⁻².

Partindo da Lei de Stefan-Boltzmann, e atendendo a que a vizinhança da Terra, o espaço exterior, se encontra a uma temperatura T_0 , podemos estimar teoricamente a temperatura média da Terra:

$$I = e\sigma(T^4 - T_0^4) \Leftrightarrow T = \sqrt[4]{\frac{I}{e\sigma} + T_0^4}$$

Fazendo a emissividade da Terra igual a 1 e considerando $T_0 = 3$ K, virá:

$$T = \sqrt[4]{\frac{240 \text{ W m}^{-2}}{1 \times 5,670 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}} + 3^4 \text{ K}^4} \Leftrightarrow T = 255 \text{ K} = -18 \text{ °C}$$

Este resultado é consideravelmente inferior ao valor médio de 15 °C! A discrepância não se fica a dever ao modelo que utilizamos mas sim ao facto de termos ignorado a contribuição do chamado **efeito de estufa**.

Trata-se de um processo que ocorre quando **parte da radiação infravermelha emitida pela superfície terrestre é absorvida e reemitida de novo para a superfície** por determinados **gases**, como dióxido de carbono, vapor de água, metano, CFC, ozono, etc., que se encontram presentes na atmosfera.

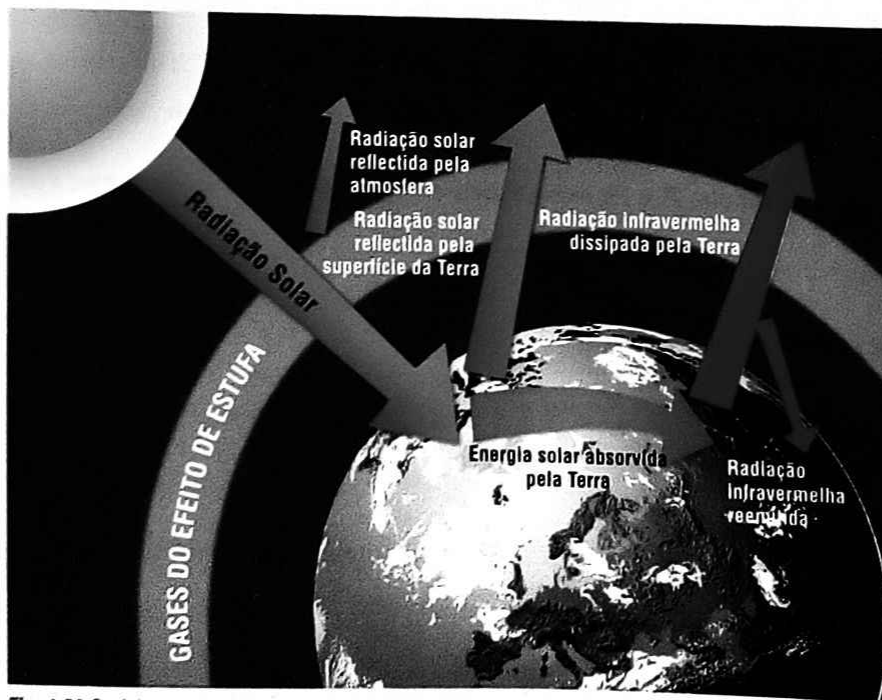


Fig. 1.39 O efeito de estufa influencia a temperatura da Terra.

Este efeito **natural** produz um **aquecimento da superfície da Terra** e das camadas inferiores da atmosfera, contribuindo para que se verifiquem pequenas amplitudes térmicas ao longo do dia. Sem este efeito de estufa a temperatura média não seria de 15 °C e a vida como a conhecemos não seria possível neste planeta.

O que se pode tornar problemático é a ocorrência de um agravamento do efeito estufa, provocado pelo aumento das emissões dos gases de estufa, que desestabilize o equilíbrio energético no planeta e origine um fenómeno conhecido como **aquecimento global**.

Atividade experimental

Medindo a temperatura do Sol

Material:

Lata de alumínio pintada de preto, régua, termómetro, balança e cronómetro.

Procedimento:

- Determinar a massa m de água colocada na lata e registar a sua temperatura inicial, T_i .
- Colocar a lata num local exposto ao Sol, durante cerca de 5 minutos e registar a temperatura final da água, T_f .

- Desprezando a massa da lata, calcular a quantidade de calor recebida pela água, $E_{\text{água}}$.

- Determinar a energia total irradiada pelo Sol, E_{total} , a partir da expressão: $E_{\text{total}} = \frac{4\pi r^2}{A_{\text{lata}}} \times E_{\text{água}}$, onde r é a distância da Terra ao Sol e A_{lata} é a área da superfície lateral da lata.

- Calcular a potência total irradiada pelo Sol,

$$P_{\text{total}} = \frac{E_{\text{total}}}{\Delta t} = \frac{4\pi r^2}{A_{\text{lata}}} \times \frac{E_{\text{água}}}{\Delta t}$$

- Considerando o Sol como corpo negro, calcular a temperatura do

$$\text{Sol, } T = \sqrt[4]{\frac{P_{\text{total}}}{4\pi r^2 \sigma}}$$

- Comparar os valores obtidos pelos diferentes grupos, determinar a sua média e confrontar com o valor de referência.

Repare

De acordo com os estudos, um aumento sucessivo da temperatura à superfície da Terra provoca uma alteração climática. Ocorrerá um aumento de ondas de calor, de cheias e do número de doenças infecciosas através da proliferação de pestes.

É exemplo disto o fenómeno do El Niño, em que um aumento de temperatura no sistema oceânico deu origem a uma onda de calor por todo o Mundo. Como resultado directo, verificou-se uma deslocação dos mosquitos responsáveis pela disseminação da malária e febre-amarela para regiões temperadas a altitudes mais elevadas, atacando os grupos de pessoas mais vulneráveis da sociedade.

Síntese de conteúdos

- A **radiância espectral**, R_λ , é a intensidade da radiação emitida para cada comprimento de onda, λ .
- A **radiação emitida** por um corpo, **em equilíbrio térmico** com a sua vizinhança, é **igual à radiação absorvida**.
- Um **corpo negro** é aquele que, a uma dada temperatura, mais radiação absorve e mais radiação emite.
- A radiação emitida por um **corpo negro** é **independente da sua constituição e da sua forma**.
- No **espectro da radiação térmica de um corpo negro**:
 - há uma intensidade máxima de emissão para um comprimento de onda bem definido, a uma dada temperatura;
 - a intensidade de emissão tende para zero quer na região dos pequenos comprimentos de onda, quer na região dos grandes comprimentos de onda.
- **Lei de Stefan-Boltzmann**: A intensidade total da radiação emitida por um corpo negro é directamente proporcional à quarta potência da sua temperatura absoluta.

$$I = \sigma T^4$$

onde $\sigma = 5,670 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$ é a constante de Stefan-Boltzmann.

- A **intensidade da radiação**, I , é a energia emitida por unidade de tempo e por unidade de área, pelo que podemos reescrever a expressão anterior na forma:

$$\frac{E}{A \Delta t} = \sigma T^4 \Leftrightarrow E = \sigma \Delta t A T^4$$

onde A é a área da superfície do corpo e Δt o intervalo de tempo durante o qual o corpo emite radiação.

- Uma energia por unidade de tempo é uma **potência**, P , e as expressões anteriores podem ser escritas na forma

$$\frac{P}{A} = \sigma T^4 \Leftrightarrow P = \sigma A T^4$$

- Para corpos reais a expressão anterior assume a forma:

$$\frac{P}{A} = e \sigma T^4 \Leftrightarrow P = e \sigma A T^4$$

onde o parâmetro numérico e representa a **emissividade** do corpo emissor.

- No caso de o corpo emissor, à temperatura T , radiar energia para a sua vizinhança, à temperatura $T_0 < T$, a potência total efectivamente emitida será:

$$P = e \sigma A (T^4 - T_0^4)$$

- **Lei de Wien ou Lei do Deslocamento de Wien**: O comprimento de onda da radiação mais intensa, emitida por um corpo negro, varia inversamente com a temperatura absoluta.

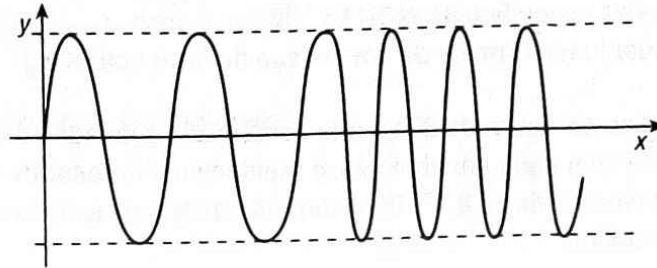
$$\lambda_{\text{máx.}} T = 2,898 \times 10^{-3} \text{ m K}$$

- **Efeito de estufa**: Processo que ocorre quando **parte da radiação infravermelha emitida pela superfície terrestre é absorvida e reemitida de novo para a superfície**, por determinados **gases**, como dióxido de carbono, vapor de água, metano, CFC, ozono, etc., que se encontram presentes na atmosfera.

▶ QUESTÕES E PROBLEMAS

1. O diagrama abaixo representa uma onda que se propaga ao longo da direcção X num meio uniforme. Qual a característica física da onda que é constante?

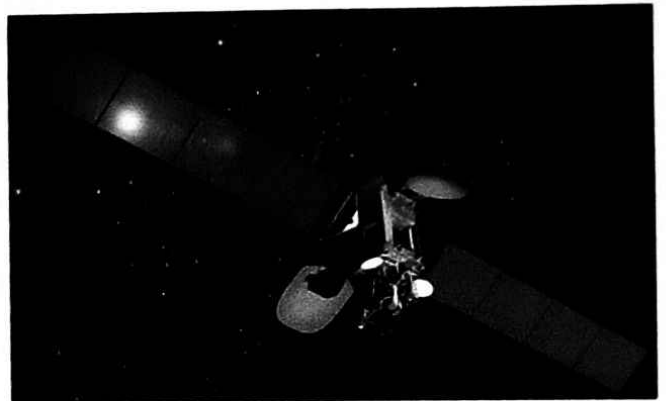
- (A) Frequência
- (B) Amplitude
- (C) Comprimento de onda
- (D) Período



2. A TVM, Televisão de Moçambique, transmite o seu sinal via satélite, podendo as suas emissões ser captadas não só em Moçambique como em quase toda a África e numa parte da Europa. Para o efeito utiliza o satélite INTELSAT 906 que fica a $64,0^\circ$ Este. O sinal é emitido numa frequência de 3654,2 MHz.

Calcule:

- 2.1. o comprimento de onda do sinal referido, em cm;
- 2.2. o intervalo de tempo gasto para alcançar uma antena parabólica de TV que se encontre a 35 797 km do satélite.



3. Qual é, em unidades SI, a frequência da luz de comprimento de onda 500 \AA ?

($c = 300\,000 \text{ km s}^{-1}$, $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$)

- (A) $1,6 \times 10^{-16}$
- (B) $0,6 \times 10^{14}$
- (C) $0,6 \times 10^{15}$
- (D) $0,6 \times 10^{16}$

4. O mel é produzido pelas abelhas, que retiram o néctar das flores e o transformam através de um processo químico natural em mel. Apesar do seu cérebro minúsculo, a abelha tem uma capacidade de navegação notável baseada na sua visão. Os seus olhos são sensíveis à luz de frequência $1,00 \times 10^{15} \text{ Hz}$, entre outras.

- 4.1. Calcule o comprimento de onda, em nanómetros.
- 4.2. Classifique este tipo de luz no espectro electromagnético.

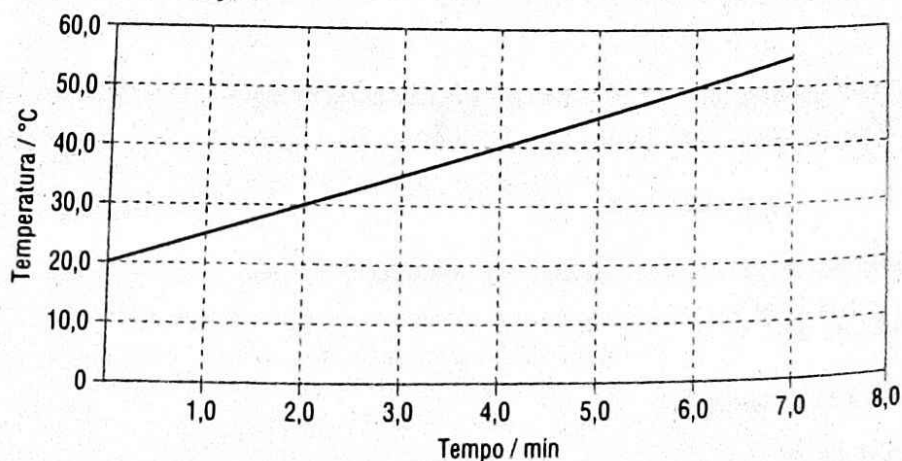
5. O controlo remoto de um aparelho de TV envia pulsos de radiação para um receptor de TV. Essa comunicação entre o controlo remoto e o televisor ilustra que essa radiação...

- (A) ... somente se propaga através do ar.
- (B) ... possui energia inversamente proporcional à sua frequência.
- (C) ... difracta e acelera no ar.
- (D) ... é uma onda electromagnética.

Seleccione a opção correcta.

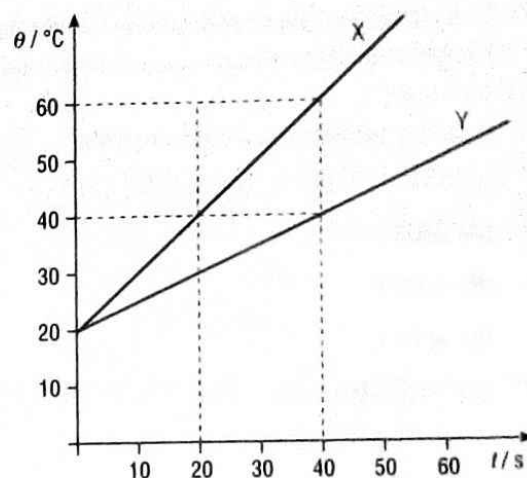
▶ QUESTÕES E PROBLEMAS

6. O ferro é o metal mais usado, com 95% em massa da produção mundial de metal. É indispensável devido ao seu baixo preço e dureza, especialmente utilizado em automóveis, barcos e componentes estruturais de edifícios. Este metal apresenta um calor específico de $443 \text{ J kg}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$.
Determine a capacidade térmica de um pedaço de ferro com 150 g.
7. Considere um vaso de cobre de 300 g que contém 300 g de água à temperatura de $25,0 \text{ }^\circ\text{C}$. Uma esfera metálica, em equilíbrio térmico com água em ebulição, é rapidamente introduzida dentro do recipiente. Após alguns minutos a temperatura de equilíbrio é de $30,0 \text{ }^\circ\text{C}$. Considerando o sistema isolado e os valores da **tabela V** da página 30, determine para a esfera metálica:
- 7.1. a quantidade de energia cedida como calor;
 - 7.2. a capacidade térmica;
 - 7.3. o material de que é feita, sabendo que a sua massa é 213 g.
8. Um aluno deitou 100 g de café líquido, à temperatura de $80 \text{ }^\circ\text{C}$, numa tigela de alumínio para oferecer a um colega. Considere que a tigela, de massa 50 g, se encontrava inicialmente a $20 \text{ }^\circ\text{C}$ e que não ocorrem trocas de energia com o exterior.
Investigue, com cálculos, se o colega pode pegar na tigela directamente com as mãos sem se queimar.
Dados: $c_{Al} = 900 \text{ J kg}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$; $c_{café} = 4200 \text{ J kg}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$
9. O conhecimento de propriedades físicas, como o calor específico e a condutividade térmica, é fundamental quando se analisam situações que envolvem transferências de energia sob a forma de calor.
Numa fábrica, pretende-se escolher um material adequado ao fabrico de um recipiente que, quando colocado sobre uma chama, permite aquecer, rapidamente, um líquido nele contido.
- 9.1. Tendo em conta a situação descrita, seleccione a opção que completa correctamente a frase seguinte.
Para fabricar esse recipiente, deve escolher-se um material que tenha...
- (A) ... elevado calor específico e elevada condutividade térmica.
 - (B) ... elevado calor específico e baixa condutividade térmica.
 - (C) ... baixo calor específico e elevada condutividade térmica.
 - (D) ... baixo calor específico e baixa condutividade térmica.
- 9.2. Para escolher o material a utilizar, realizaram-se diversos ensaios, usando blocos de diversos materiais, de massa $1,30 \text{ kg}$, e uma fonte de aquecimento que fornecia, a cada um desses blocos, $2,50 \times 10^3 \text{ J}$ em cada minuto. O gráfico da figura representa o modo como variou a temperatura de um desses blocos, em função do tempo de aquecimento.
Calcule o calor específico do material constituinte desse bloco.
Apresente todas as etapas de resolução.



▶ QUESTÕES E PROBLEMAS

10. Considere dois materiais X e Y aquecidos por uma fonte capaz de transferir por segundo 64,5 cal. A massa de X é 586 g e a massa de Y é 600 g. O gráfico traduz o modo como a temperatura dos dois materiais varia com o tempo.



10.1. Determine a razão entre as capacidades térmicas dos materiais X e Y.

10.2. Identifique o material X, recorrendo aos dados da **tabela V** da página 30.

10.3. Calcule a temperatura atingida pelo material Y ao fim de dois minutos.

11. Um cubo de aço, de massa 50 g, encontrava-se à temperatura de 80 °C no preciso momento em que foi mergulhado num vaso que continha 250 g de água à temperatura de 20 °C.

$$(c_{\text{água}} = 4,18 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}; c_{\text{aço}} = 4,60 \times 10^2 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1})$$

11.1. Determine a temperatura final da água, uma vez estabelecido o equilíbrio térmico.

11.2. Calcule as variações de temperatura sofridas pelo cubo e pela água.

12. Considere duas panelas de massas iguais e materiais diferentes, uma de cobre e outra de alumínio. Se as colocarmos em cima de discos eléctricos de aquecimento iguais, durante o mesmo intervalo de tempo, qual delas alcança maior temperatura? Justifique.

13. A figura representa um gráfico da variação da temperatura, ΔT , de uma amostra de água contida numa cafeteira eléctrica, em função da energia, E , que lhe é fornecida.

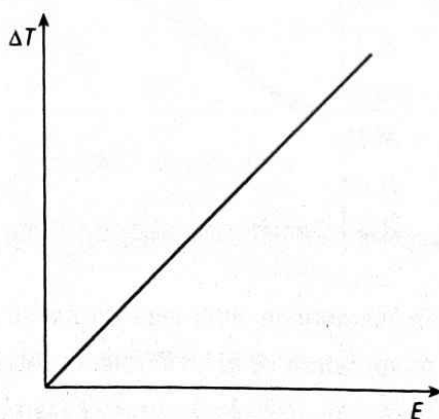
Sabendo que essa amostra tem uma massa m e um calor específico c , seleccione a opção que contém a expressão que traduz o declive da recta representada na figura.

(A) $\frac{m}{c}$

(B) $\frac{1}{mc}$

(C) $\frac{c}{m}$

(D) mc



14. Considere duas amostras de água, A e B, de massas respectivamente iguais a m_A e a $2m_A$, às quais foi fornecida a mesma quantidade de energia.

Selecione a única opção que permite obter uma afirmação correcta.

Sendo ΔT_A e ΔT_B as variações de temperaturas sofridas pelas amostras A e B, ΔT_B será igual a...

(A) ... $\frac{1}{2} \Delta T_A$

(B) ... ΔT_A

(C) ... $-2\Delta T_A$

(D) ... $2\Delta T_A$

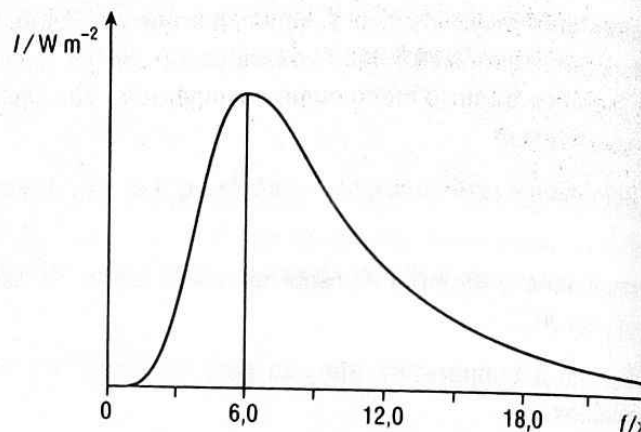
▶ QUESTÕES E PROBLEMAS

15. O gráfico seguinte representa a intensidade da radiação emitida por uma estrela em função da frequência.

Qual é a temperatura desta estrela?

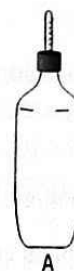
($c = 3,0 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$; $b = 3 \times 10^{-3} \text{ (SI)}$)

- (A) 3000 K
(B) 6000 K
(C) 8000 K
(D) 10 000 K

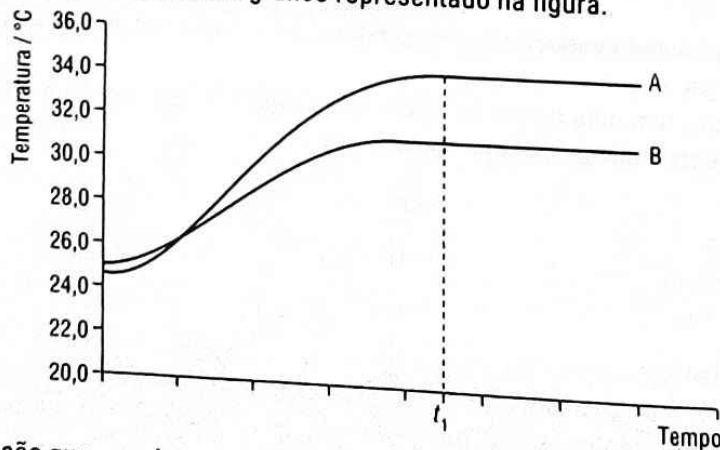


16. A figura representa duas garrafas de vidro, iguais, pintadas com o mesmo tipo de tinta, mas de cor diferente: a garrafa A foi pintada com tinta branca, enquanto a garrafa B foi pintada com tinta preta. As garrafas foram fechadas com uma rolha atravessada por um termómetro e colocadas ao Sol, numa posição semelhante, durante um mesmo intervalo de tempo.

Indique, justificando, em qual das garrafas se terá observado uma maior variação de temperatura, durante o referido intervalo de tempo.



17. Para comparar o poder de absorção de energia, sob a forma de radiação, de superfícies diferentes, um grupo de alunos usou uma lâmpada de 100 W e duas latas idênticas, A e B, mas pintadas com tintas diferentes. Os alunos colocaram as latas com a lâmpada e registaram a evolução da temperatura do ar contido em cada lata, até a temperatura estabilizar. Com os dados obtidos, construíram o gráfico representado na figura.



- 17.1. Selecciona a única opção que permite obter uma afirmação correcta.

A partir do instante t_1 , a temperatura do ar no interior da lata A mantém-se constante, porque...

- (A) ... as taxas de absorção e de emissão de energia são nulas.
(B) ... o módulo da taxa de absorção de energia é superior ao módulo da taxa de emissão.
(C) ... o módulo da taxa de absorção de energia é inferior ao módulo da taxa de emissão.
(D) ... os módulos das taxas de absorção e de emissão de energia são iguais.

- 17.2. Selecciona a única opção que permite obter uma afirmação correcta.

Com base nos resultados experimentais, conclui-se que a superfície da lata A...

- (A) ... absorve melhor a radiação, enquanto a da lata B emite melhor a radiação.
(B) ... absorve melhor a radiação, enquanto a da lata B reflecte melhor a radiação.
(C) ... emite melhor a radiação, enquanto a da lata B absorve melhor a radiação.
(D) ... reflecte melhor a radiação, enquanto a da lata B absorve melhor a radiação.

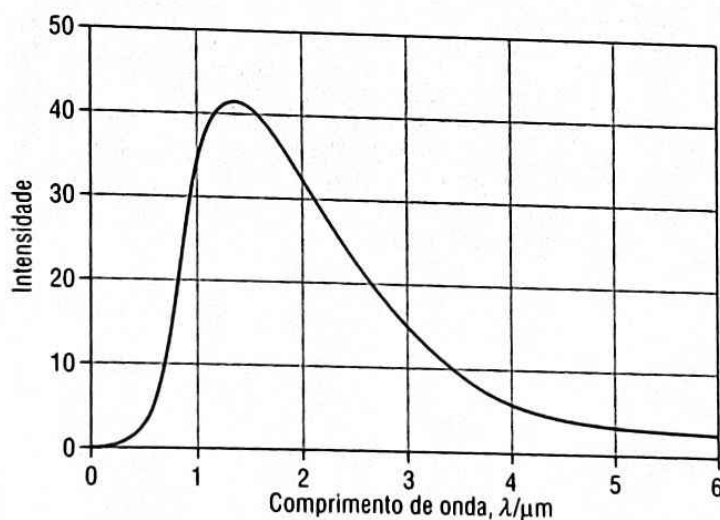
18. Considere um corpo negro que à temperatura de $20\text{ }^\circ\text{C}$ emite com intensidade I . Das opções seguintes, seleccione a que corresponde à intensidade I' com que este corpo passará a emitir, admitindo que a temperatura do corpo negro aumentou para $40\text{ }^\circ\text{C}$.

- (A) $I' = 0,5 I$
- (B) $I' = 1,3 I$
- (C) $I' = 2 I$
- (D) $I' = 16 I$

19. A intensidade da radiação emitida pelo do Sol é aproximadamente de $7,4 \times 10^7\text{ W m}^{-2}$. Com base nesta informação, e sabendo que $\sigma = 5,67 \times 10^{-8}\text{ (SI)}$, qual é a temperatura estimada do Sol?

- (A) 1000 K
- (B) 2000 K
- (C) 3000 K
- (D) 6000 K

20. A figura representa o espectro de radiação de um forno.



De acordo com este espectro é correcto afirmar que a temperatura do forno é de aproximadamente...

(use $b = 3 \times 10^{-3}\text{ (SI)}$)

- (A) ... 2000 K e que $\lambda_{\text{máx}}$ aumenta quando a temperatura do forno aumenta.
- (B) ... 1500 K e que $\lambda_{\text{máx}}$ diminui quando a temperatura do forno diminui.
- (C) ... 2000 K e que $\lambda_{\text{máx}}$ diminui quando a temperatura do forno aumenta.
- (D) ... 1500 K e que $\lambda_{\text{máx}}$ aumenta quando a temperatura do forno diminui.

21. Após exposto ao sol, a temperatura superficial de um pequeno objecto atingiu os $50\text{ }^\circ\text{C}$. Durante esta exposição, a superfície sobre a qual o pequeno objecto se encontrava apoiado atingiu os $25\text{ }^\circ\text{C}$.

Admitindo que as temperaturas do pequeno objecto e da superfície de apoio não se alteram e que a emissividade de ambos é 0,90, calcule a intensidade da radiação emitida por cada um deles.

2.1. Emissão termoelectrónica e fotoelétrica

Conteúdos

- Raios catódicos, suas propriedades e aplicações.
- A emissão termoelectrónica e fotoelétrica.
- Leis do fenómeno fotoelétrico.

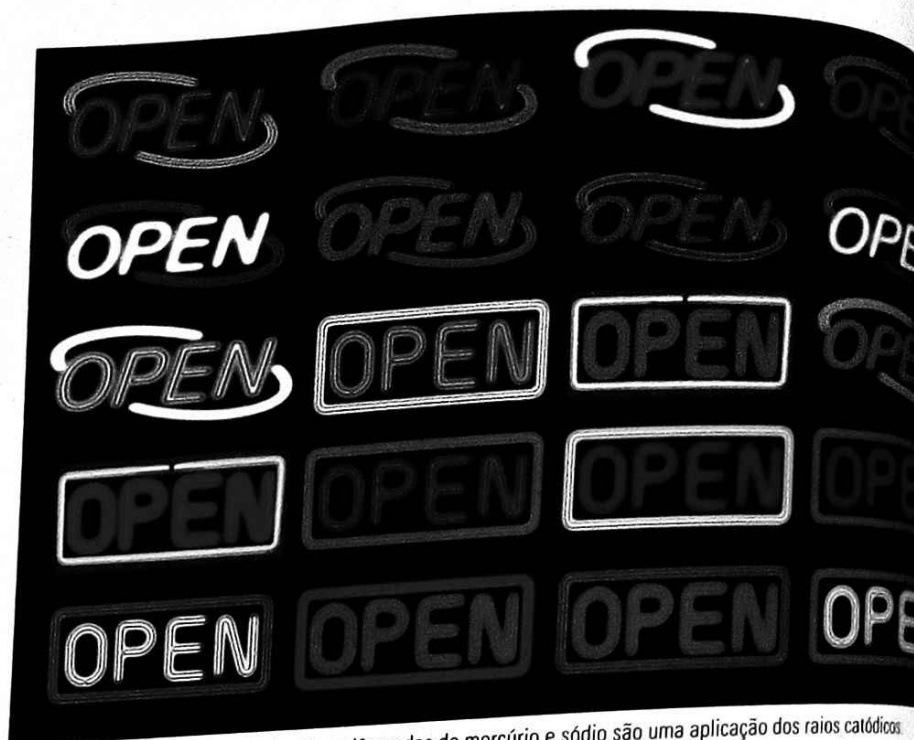


Fig. 2.1 Os anúncios luminosos de néon e lâmpadas de mercúrio e sódio são uma aplicação dos raios catódicos.

O modelo atómico da matéria terá surgido pela primeira vez na Antiga no século V a. C., com Demócrito de Abdera. No entanto, somente no século XIX é que esta concepção atomista da matéria volta a ser seriamente considerada pela comunidade científica, graças a John Dalton. Contudo, desde surgem estudos experimentais que questionam este modelo. Descargas em tubos com gases rarefeitos, produzindo misteriosos raios chamados catódicos, e a descoberta da radioactividade sugeriam que a matéria teria raio eléctrica sendo constituída por partículas discretas de electricidade, que hoje nos serem os prótons e os electrões, e que o átomo não é indivisível. Neste texto, a descoberta e o estudo dos raios catódicos revelaram-se essenciais para a compreensão da natureza da matéria, contribuindo para o nascimento de uma nova Física conhecido por Física Atómica.

► Raios catódicos

Em 1855, o físico alemão Heinrich Geissler realizou um conjunto de experiências de descargas eléctricas no ar contido em tubos de vidro fechados. Normalmente, o ar é um isolante, mas a utilização de uma bomba de vácuo, desenvolvida por Geissler, permitiu obter uma pressão de ar suficientemente baixa no interior do tubo capaz de produzir um feixe luminoso.



Heinrich Geissler
(1814-1879)

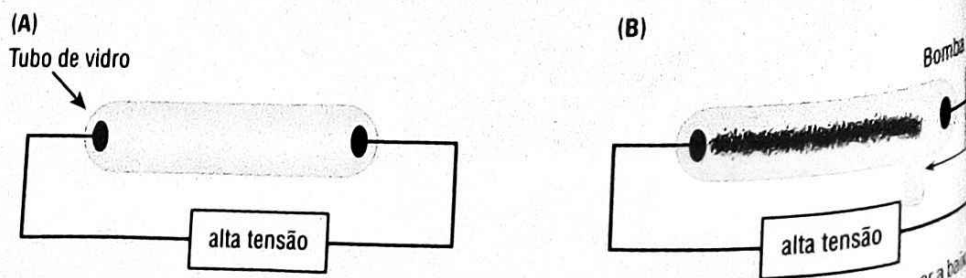
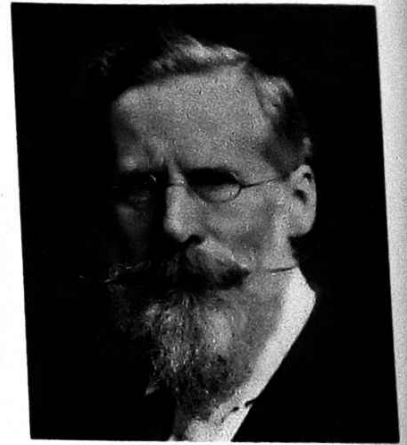


Fig. 2.2 Descargas eléctricas num tubo de ar: (A) com pressão de ar normal não se formam faíscas; (B) com ar a baixa pressão há descarga eléctrica observando-se um feixe luminoso.

No dia-a-dia, esses tubos estão presentes, entre outros, nos anúncios luminosos de néon e nas lâmpadas a vapor de mercúrio e sódio.

Em 1875, o físico inglês William Crookes produziu uma variedade desses tubos a que chamou tubos de descarga e que hoje são conhecidos como **tubos de Crookes**. Estes são simétricos, feitos de vidro e têm um eléctrodo de metal embudado em cada extremidade. Estes eléctrodos, por sua vez, estão ligados a uma fonte de alta tensão capaz de produzir uma diferença de potencial através do tubo. Ao **eléctrodo negativo** dá-se o nome de **cátodo** e ao **eléctrodo positivo** dá-se o nome de **ânodo**. A meio do tubo existe uma saída lateral que se encontra ligada a uma bomba de vácuo. Esta bomba é usada para produzir progressivamente uma atmosfera rarefeita no interior do tubo.

Crookes observou que à medida que a pressão dentro do tubo diminuía gradualmente, a luz que estava distribuída dentro da ampola desaparecia também gradualmente. É então que um estranho fenómeno começa a ocorrer – a esta baixíssima pressão surge uma luz esverdeada nas paredes do tubo opostas ao cátodo conforme ilustrado na figura 2.3.



William Crookes
(1832-1919)

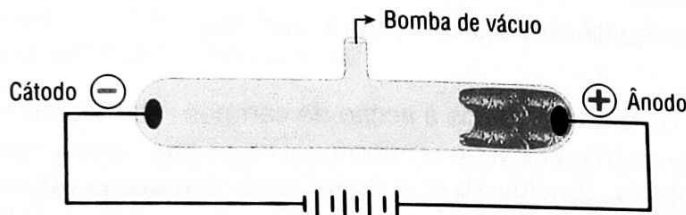


Fig. 2.3 Surgimento de uma luz esverdeada na extremidade do tubo e por detrás do ânodo.

Esta luz esverdeada foi pela primeira vez identificada por Plücker em 1858 e deixou a comunidade científica da época intrigada com o novo fenómeno observado. A descarga eléctrica não ocorria entre os eléctrodos mas, sim, por detrás do ânodo. Era como se houvesse algum tipo de radiação atingindo a extremidade do tubo e tornando-o fluorescente. Cedo se percebeu que a origem desta emissão luminosa era desconhecida e passou a ser conhecida como **raios catódicos**.

Vários estudos se seguiram. Ao colocar um anteparo, com a forma da cruz de Malta, coberto com um material fluorescente, verificou-se que a cruz brilhava com uma luz esverdeada do lado que se encontrava virado para o cátodo.

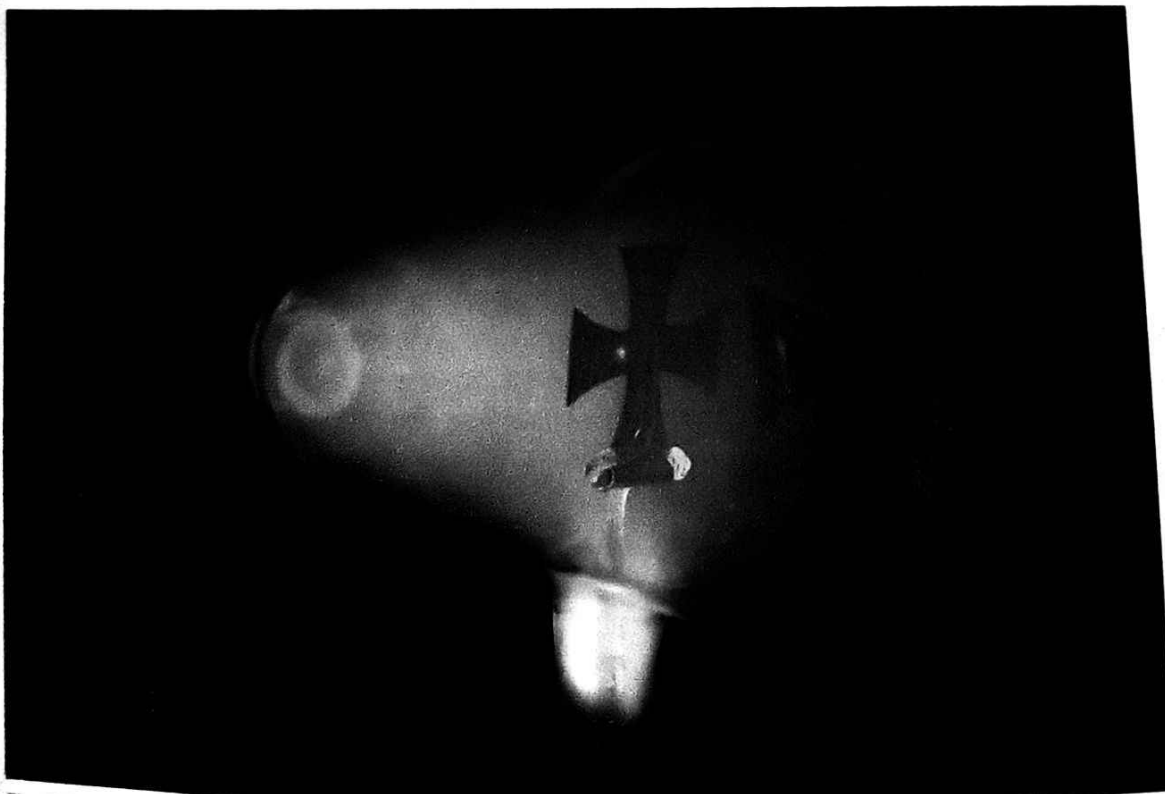


Fig. 2.4 Dispositivo utilizado para demonstração de raios catódicos.

Quando no interior do tubo é colocado um torniquete, conjunto de pequenas placas com formato de pás unidas através de um eixo, verifica-se que os raios catódicos o fazem rodar. Pode, assim, concluir-se que **estes raios têm energia cinética e portanto devem possuir massa**. Para a época, finais do século XIX, este resultado significava também que os raios eram formados por partículas e não, como defendiam alguns físicos da época, por ondas electromagnéticas, como defendiam alguns físicos da época, os quais o alemão Johann Wilhelm Hittorf.

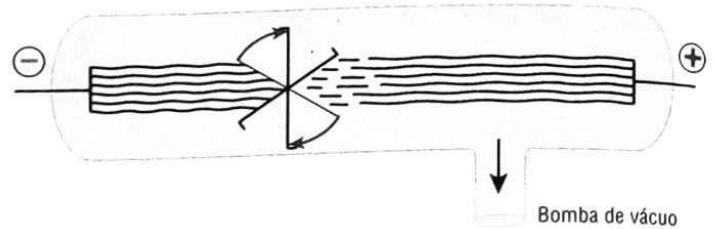


Fig. 2.5 Torniquete em rotação por acção de raios catódicos.

Submetendo os raios catódicos à acção de campos magnéticos e eléctricos, verifica-se um desvio na trajectória dos mesmos. Diz-se que são deflectidos por estes campos. Pode, assim, concluir-se que estes raios têm **carga eléctrica negativa**.

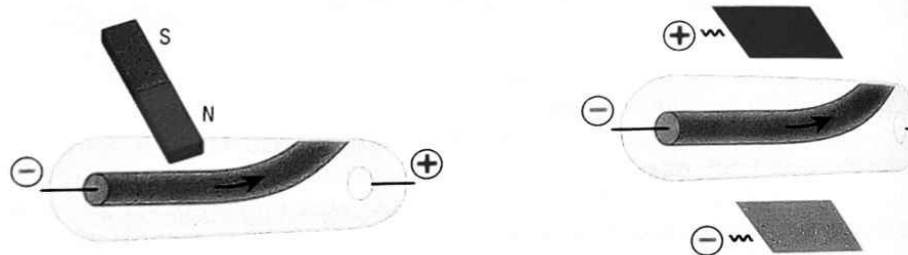


Fig. 2.6 Acção de um campo magnético e de um campo eléctrico sobre raios catódicos.



Sir Joseph John Thomson
(1856-1940)

Após a descoberta dos raios catódicos, o estudo experimental das suas propriedades permitiu concluir que estes são constituídos por partículas de pequena massa e carga eléctrica negativa. Nestas importantes descobertas, teve papel de destaque o físico inglês Sir Joseph John Thomson.

J. J. Thomson efectuou uma série de experiências com tubos de raios catódicos de alto vácuo. Na figura 2.7, reproduz-se o esquema de um dos tubos de raios catódicos por ele desenvolvido.

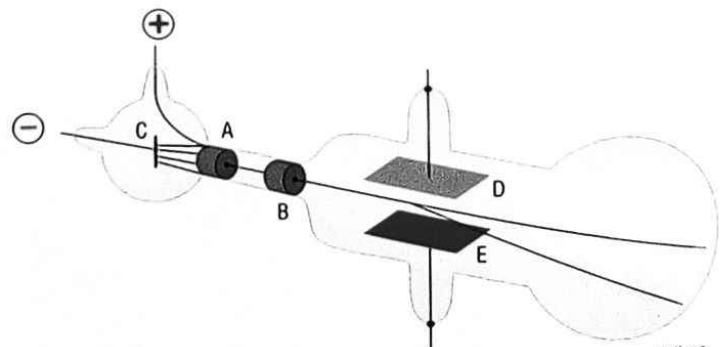


Fig. 2.7 Acção de um campo magnético e de um campo eléctrico sobre raios catódicos.

Neste esquema, C representa o cátodo, A o ânodo e B um colimador. A função da placa D é deixar passar um estreito feixe de raios catódicos. Em D e E encontram-se as placas de um condensador, cuja função é criar um campo eléctrico para desviar os raios catódicos até ao anteparo fosforescente na superfície do tubo.

encontra na extremidade do tubo. Com este dispositivo, determinou a razão entre a carga, q , e a massa, m , das partículas, obtendo o seguinte valor:

$$\frac{q}{m} = 1,76 \times 10^{11} \text{ C kg}^{-1}$$

Pôs assim, inequivocamente, fim à polémica que se arrastava entre a comunidade científica, que discutia o carácter ondulatório ou corpuscular dos raios catódicos, conforme anteriormente referido, ao demonstrar, sem margem para dúvidas, que os raios catódicos eram partículas.

Thomson testou ainda uma série de cátodos de diferentes materiais, tais como alumínio, ferro e cobre, constatando que o valor q/m era constante. Estabeleceu, então, que essas partículas de carga eléctrica negativa são todas iguais, independentemente do metal que constitui o cátodo ou o ânodo e que se podem encontrar na constituição de todos os corpos. A estas partículas, mais tarde, foi dado o nome de electrões. Em 1906, ganhou o Prémio Nobel da Física, como reconhecimento pelos seus contributos nesta área.

Raios catódicos são um feixe de electrões acelerados por uma tensão eléctrica elevada que se propagam rectilaneamente com elevada energia cinética.

Em resumo, as **principais propriedades dos raios catódicos** são:

- **Provocam a fluorescência** em algumas substâncias.
- **Propagam-se em linha recta.**
- **Possuem energia cinética.**
- **Possuem carga eléctrica negativa.**
- **Sofrem deflexão por acção de campos eléctricos e magnéticos.**

Estas descobertas relacionadas com os raios catódicos tiveram uma fulcral importância no desenvolvimento experimental da Física Moderna. Novas descobertas, como a dos raios X, do efeito fotoelectrico, entre outras, só foram possíveis graças aos desenvolvimentos experimentais conseguidos com os estudos dos raios catódicos. As **aplicações** tecnológicas não tardaram a surgir.

Uma das primeiras aplicações dos estudos das descargas eléctricas em tubos de gás rarefeito foi a **invenção da lâmpada**. Até essa altura a iluminação artificial reduzia-se à utilização de velas, lâmpadas a óleo ou a gás. Com o contributo do químico inglês Sir Humphry Davy, produziu-se luz artificialmente através de uma lâmpada que ficou conhecida como lâmpada de arco. Seguiu-se-lhe a **lâmpada de filamento** ou de incandescência, inventada pelo norte-americano Thomas Edison, que foi a lâmpada mais usada no século XX. Estas lâmpadas só puderam ser desenvolvidas graças ao aperfeiçoamento de tubos de vácuo eficazes. Posteriormente, surgiram as **lâmpadas a gás** rarefeito, que mais não são do que tubos de Crookes, munidos de eléctrodos nos extremos, nos quais podem ser introduzidos gases a baixa pressão como, por exemplo, néon e argón. Estas lâmpadas brilham com um leque variado de cores, dependendo do tipo de gás utilizado e da tensão eléctrica aplicada. São estas lâmpadas que vemos nos letreiros luminosos em vários tamanhos e estilos. São igualmente muito utilizadas na iluminação residencial e pública. Para esta finalidade, são utilizadas lâmpadas de vapor de mercúrio e de vapor de sódio, respectivamente. Estas últimas, mais económicas, produzem uma cor amarelada característica.

Outra das aplicações relaciona-se com os aparelhos de televisão. A imagem fornecida pela grande maioria destes aparelhos ainda é dada por um tubo de raios catódicos, também designado neste caso por cinescópio. Trata-se da imagem obtida nos **televisores CRT**, iniciais do inglês *Cathode Ray Tube*.

Curiosidade

O alemão Karl Ferdinand Braun desenvolveu um tubo de raios catódicos muito semelhante ao de Thomson. Utilizou-o, no entanto, para representar no ecrã fosforescente a amplitude de um sinal eléctrico. Em 1897, Braun tinha inventado o primeiro osciloscópio baseado em tubos de raios catódicos.



Fig. 2.8 Tubo de raios catódicos de Braun.

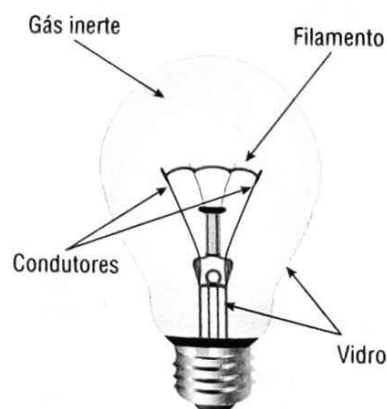


Fig. 2.9 Lâmpada de incandescência. O eficiente desenvolvimento de tubos de vácuo foi imprescindível para o aparecimento das lâmpadas de filamento.

Curiosidade

Um monitor ou um televisor CRT são geralmente pesados. Um ecrã de 20 polegadas pode ter até 50 cm de profundidade e pesar mais de 20 kg. Tal peso fica a dever-se à espessura do vidro que constitui o tubo, principalmente na parte frontal onde se situa o ecrã. Para suportar a pressão atmosférica sem risco de implosão, devido ao razoável vácuo no seu interior, é necessário que o vidro que constitui o tubo seja muito espesso.

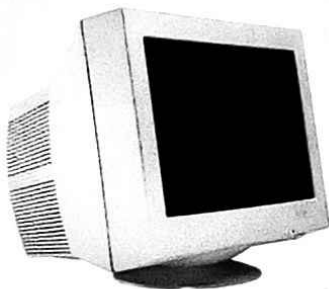


Fig. 2.10 Monitor CRT.

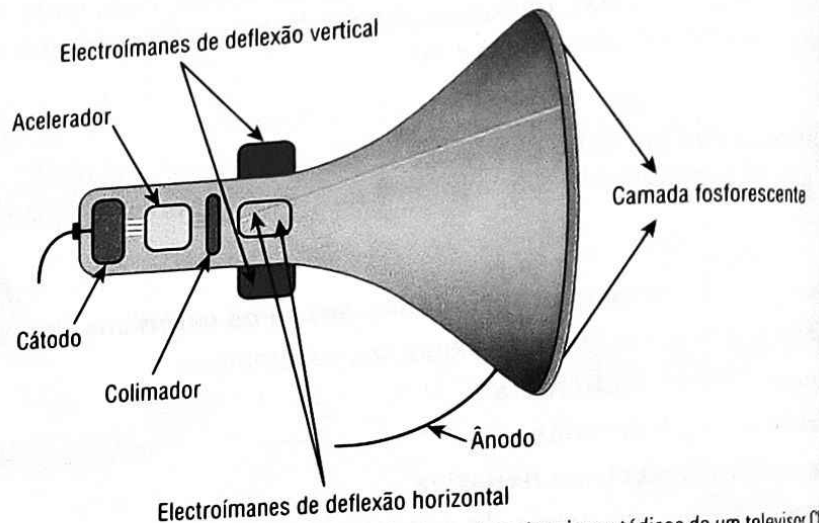


Fig. 2.11 Representação esquemática simplificada de um tubo de raios catódicos de um televisor CRT.

O CRT utiliza alta tensão eléctrica para gerar um fluxo de electrões, 200 vezes superior à da rede eléctrica que alimenta o aparelho. Estes electrões são posteriormente acelerados através de um dispositivo que se encontra ao cátodo e colimados de forma a produzir um feixe. É este feixe de electrões que atinge a superfície interna fosforescente do ecrã. O ponto atingido pelo feixe ilumina-se, podendo ser visto do lado de fora do tubo. Para que os electrões sejam atraídos para o ecrã, este é eletrizado de modo oposto ao cátodo, constituindo assim o ânodo.

O controlo do movimento do feixe electrónico, de forma a conseguir a trajectória horizontal e de cima para baixo do ecrã, é conseguido através de dois pares de potentes electroímãs que se encontram localizados a meio da trajectória. Para cada linha horizontal, um código específico do sinal dá a indicação que o feixe chegou ao fim. Este código desencadeia uma pequena descida vertical e o feixe parte do outro extremo, iniciando o desenho da próxima linha. A deflexão vertical do feixe é conseguida através da variação da intensidade da corrente eléctrica que percorre os electroímãs que assim atraem o feixe com maior e menor intensidade. Como resultado o feixe pode ser direccionado para a esquerda e para a direita e também para cima e para baixo. Esta variação da intensidade da corrente eléctrica, lida pelo circuito electrónico em função do sinal que chega ao ecrã, permite ainda o controlo da intensidade do feixe emitido pelo canhão. Assim, os pontos da imagem são, assim, formados com pontos mais claros/mais escuros dependendo da intensidade da imagem, controlando traçado e intensidade, completa-se a formação da imagem.

Qualquer perturbação no funcionamento do CRT atrás descrito irá resultar numa **imagem mal ajustada**. De seguida, analisaremos alguns desses exemplos.

Repare

É muito perigoso mexer nos componentes de um televisor CRT. Estes televisores funcionam com tensões muito elevadas, da ordem dos 10 a 40 kV.

Mesmo que a televisão esteja desligada da corrente eléctrica, estas tensões permanecem acumuladas durante vários dias.

Isto fica a dever-se às paredes de vidro do CRT que funcionam como um condensador. Só um técnico com conhecimentos para tal o poderá fazer em segurança.

Uma saída insuficiente nos circuitos de deflexão horizontal e vertical pode trazer-se numa incorrecta **relação de aspecto**, conforme ilustrado na figura 2.12.

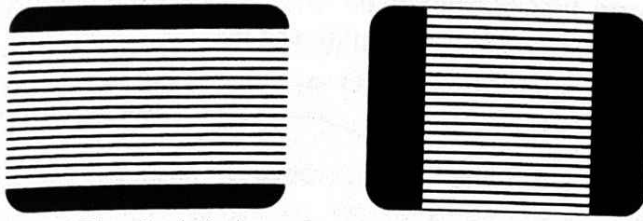


Fig. 2.12 Distorsão relação de aspecto.

A **distorsão trapezoidal** (figura 2.13) é causada por deflexão assimétrica ou associada a problemas nos electroímãs de deflexão.



Fig. 2.13 Distorsão trapezoidal.

A chamada **distorsão almofada** (figura 2.14 A) é causada desde que o ângulo de abertura do feixe seja constante. Se essa largura é ajustada para as extremidades superior e inferior do ecrã, a parte central será mais estreita visto encontrar-se mais próxima do ponto de emissão do feixe. Caso a compensação da distorsão almofada seja excessiva, ocorre a **distorsão barril** (figura 2.14 B).

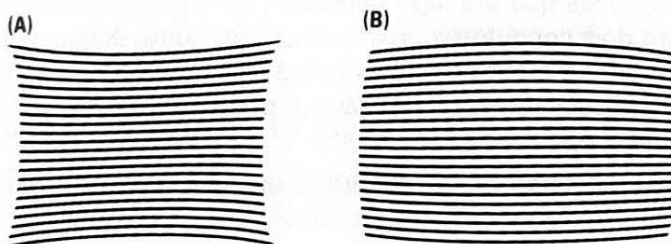


Fig. 2.14 Distorsão almofada (A) e distorsão barril (B).

Outros exemplos de imagens mal ajustadas poderiam ser dados, como falta de sincronismo, varredura não linear, etc. Deixa-se como desafio aos alunos procurarem mais informação sobre este assunto na Internet, artigos de revistas e livros da especialidade.

► A emissão termoelectrónica e fotoelectrica

As baixas energias de ionização dos metais permitem que os electrões mais externos desses átomos, também designados por **electrões de valência ou de condução**, possam mover-se livremente através da estrutura cristalina do metal. Por esta razão, verifica-se não ser difícil remover electrões a partir de superfícies metálicas. Essa remoção processa-se essencialmente de duas formas: por **emissão termoelectrónica** ou por **emissão fotoelectrica**.

A emissão termoelectrónica, descoberta por Thomas Edison, em 1880, ocorre quando um filamento metálico é submetido a elevadas temperaturas emitindo electrões.

Emissão termoelectrónica consiste na emissão de electrões de uma superfície metálica quando submetida a elevadas temperaturas.

As características deste fenómeno foram estudadas colocando uma placa metálica nas proximidades do filamento e submetendo-a a um potencial positivo.

Desafio

Pesquise mais informação sobre imagens mal ajustadas na Internet, artigos de revistas e livros da especialidade. Partilhe essa pesquisa na sala de aulas com os seus colegas e professor.

Curiosidade

Com esta experiência, Edison constatou que a corrente emitida pelo filamento aquecido aumentava rapidamente com o aumento da tensão, tendo apresentado uma aplicação para um dispositivo regulador de voltagem a 15 de Novembro de 1883 (Patente U.S. 307,031 – a primeira patente de um dispositivo electrónico). Propôs com este aparato operar um telégrafo sonoro.

O filamento metálico aquecido emite electrões, funcionando assim como cátodo e a placa metálica recolhe os electrões, funcionando assim como ânodo. Este princípio básico de funcionamento de uma válvula termoelectrónica, designada por díodo termoelectrónico (figura 2.15).

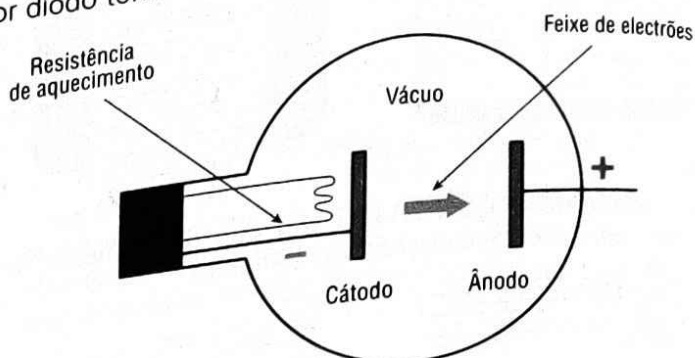


Fig. 2.15 Emissão termoelectrónica num díodo.

O **efeito fotoeléctrico**, descoberto por Heinrich Hertz em 1887, ocorre quando um metal é submetido a radiação electromagnética com energia suficiente para libertar electrões.

Emissão fotoeléctrica consiste na emissão de electrões de uma superfície metálica quando submetida a radiação electromagnética.

Hertz, ao aplicar uma descarga eléctrica entre dois condutores, obteve uma onda electromagnética que era logo detectada num sistema remoto, produzindo uma faísca entre dois condutores próximos um do outro. A descarga eléctrica produzida pelo emissor também produzia uma faísca. Hertz verificou que a luz produzida pelo emissor também facilitava a passagem de cargas entre os condutores no receptor.

Uma década mais tarde foi descoberto o electrão, ficando estabelecido que o efeito fotoeléctrico é devido à libertação de electrões de um metal quando iluminado por luz. A energia electromagnética da luz é absorvida pelos electrões do metal. Quando essa energia é suficientemente elevada, consegue-se que os electrões sejam libertados do metal. Habitualmente, designam-se estes electrões por **fotoclectrões**, não por serem diferentes dos outros mas porque a sua libertação está relacionada com a luz.

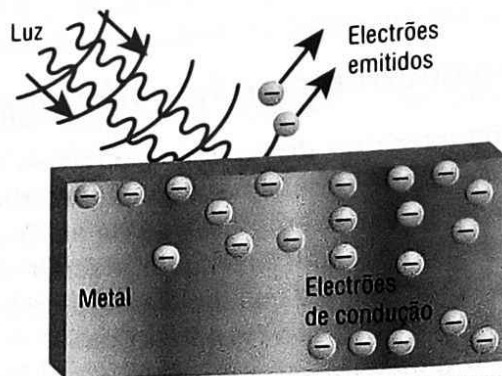


Fig. 2.16 A luz absorvida num metal pode libertar alguns electrões de condução.

Repare

Um **feixe monocromático** de luz é um feixe de luz de uma única cor, isto é, de um único comprimento de onda, ou frequência. Por exemplo, a luz amarela emitida por lâmpadas de vapor de sódio é monocromática.

O estudo experimental deste fenómeno foi efectuado por um colega do físico húngaro Philipp Lenard, em 1902, tendo com ele ganho o Prémio Nobel de Física de 1905. Com base nas suas experiências enunciaram-se as **leis do efeito fotoeléctrico**:

- O número de electrões emitidos é directamente proporcional à intensidade do feixe monocromático de luz incidente.

- A energia dos electrões emitidos é independente da intensidade do feixe monocromático de luz e directamente proporcional à frequência da radiação incidente.
- O efeito fotoelectrico é praticamente instantâneo, mas só ocorre a partir de uma dada frequência mínima, chamada frequência-limite ou limiar, característica de cada metal.

Do ponto de vista da Física Clássica, quanto maior fosse a intensidade da luz maior seria a energia transferida para os electrões no metal e maior seria a probabilidade de serem emitidos electrões para fora do metal. No entanto, não é isso que se observa experimentalmente. **Para que sejam emitidos electrões**, a luz deve ter uma **frequência superior a uma frequência mínima**. Se a frequência for menor que esse valor mínimo, não é emitido nenhum electrão, independentemente da intensidade da luz.

Diferentes metais têm diferentes valores da frequência mínima para que se produza efeito fotoelectrico.

Uma **experiência** que pode ser feita no laboratório consiste em **carregar negativamente dois electroscópios** (figura 2.17); **um deles de zinco e o outro de ferro**. **Illuminando** os dois electroscópios com **luz visível**, nada acontece, porque a frequência da luz visível não é suficiente para produzir efeito fotoelectrico em nenhum dos dois metais.

Se os electroscópios forem iluminados com **luz ultravioleta**, o electroscópio de zinco é descarregado e nada acontece no electroscópio de ferro. Isso indica que a frequência da luz ultravioleta é superior à frequência que produz efeito fotoelectrico no zinco, mas inferior à frequência que produz efeito fotoelectrico no ferro.

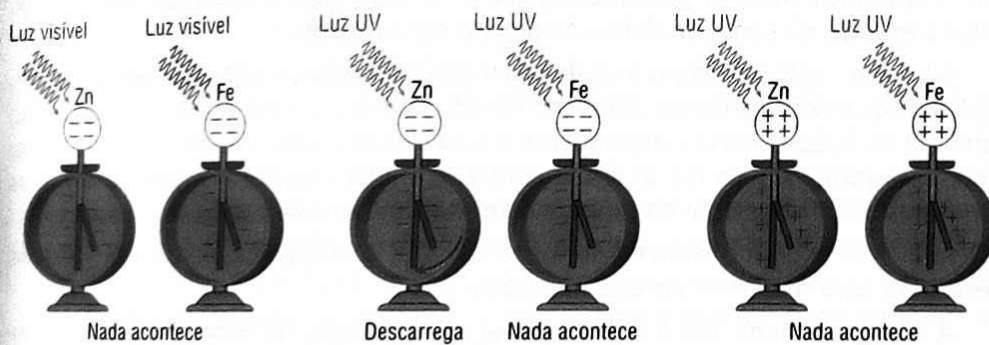


Fig. 2.17 Dois electroscópios de zinco e de ferro iluminados com luz visível e com luz ultravioleta.

Quando os electroscópios se encontram carregados com cargas positivas, nada acontece em nenhum dos electroscópios com qualquer tipo de luz. Não se produz efeito fotoelectrico uma vez que na superfície dos metais não há electrões de condução (o excesso de cargas positivas, que corresponde a défice de electrões livres, concentra-se na superfície do metal).

Outro facto que se observa experimentalmente é que **iluminando um metal com luz de igual frequência**, suficientemente elevada para produzir efeito fotoelectrico **mas de diferentes intensidades**, a **luz mais intensa** faz com que sejam emitidos muitos **mais electrões**, mas a energia média dos electrões emitidos permanece constante. Era de esperar que a energia dos electrões emitidos aumentasse com o aumento da intensidade da luz, porque a energia da luz mais intensa é muito maior. Claro que continua a existir conservação da energia, porque são emitidos mais electrões, mas não existe razão aparente para que a energia dos electrões seja a mesma.

Actividade experimental

Emissão fotoelectrica

Material:

Electroscópio de folhas

Procedimento:

- Carregar o electroscópio.
- Expor o electroscópio ao Sol e observar.
- Registar os factos observados.
- Discutir em grupo os dados sistematizados e elaborar o relatório da experiência.

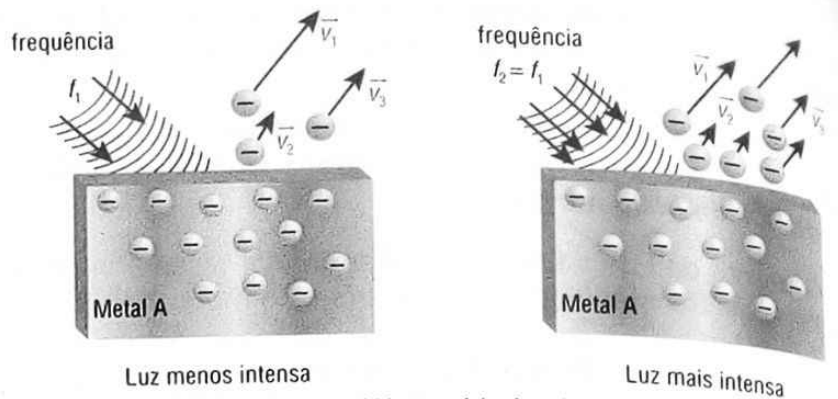
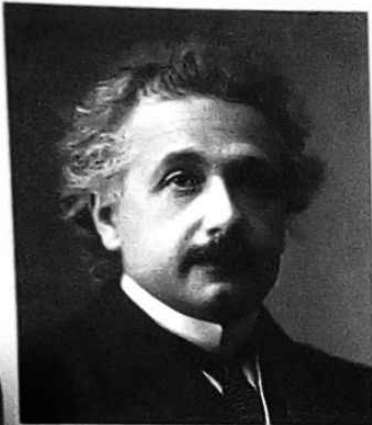


Fig. 2.18 A energia dos electrões emitidos no efeito fotoelétrico depende apenas do tipo de luz, não depende da sua intensidade.



Albert Einstein
(1879-1955)

Curiosidade

Einstein recebeu o Prémio Nobel da Física, em 1921, devido à sua explicação do efeito fotoelétrico e não devido à teoria da relatividade. Esses dois trabalhos de Einstein foram publicados no mesmo ano de 1905.

Recorde

Um electrão-volt é uma unidade de energia igual a $1,6 \times 10^{-19}$ J. É a energia transferida para um electrão quando é acelerado por uma diferença de potencial de 1 volt.

Repare

A função trabalho, ϕ , de um metal não é igual à energia necessária para extrair um electrão de um átomo desse metal – energia de ionização. A organização dos átomos numa rede cristalina faz com que os níveis de energia sejam modificados, deixando de ser iguais aos níveis de energia de um átomo isolado do mesmo elemento.

Em 1905, Einstein conseguiu resolver os paradoxos em torno do efeito eléctrico, nomeadamente, a existência de uma frequência limiar, abaixo da qual não existe efeito fotoelétrico, e a independência entre a intensidade da luz e a energia dos electrões emitidos.

Para explicar o efeito fotoelétrico, Einstein admitiu que a luz era composta por partículas designadas por fotões, recuperando assim a visão corpuscular da luz. Baseando-se no postulado de Max Planck para a radiação do corpo negro, assumiu que a energia dos fotões não podia ser qualquer uma, mas, sim, múltiplo de uma energia elementar – um **quantum de energia** (plural quanta). A cada fotão corresponde uma energia igual a um *quantum* que é dada por

$$E = hf$$

onde $h = 6,626 \times 10^{-34}$ J s é uma constante universal, designada por **constante de Planck**, e f é a **frequência da luz**. Assim, quando aumentamos a intensidade da luz, mantendo a mesma frequência, o que estamos a fazer é a produzir mais fotões, mas a energia de cada um deles continua a ser a mesma.

A luz absorvida pela superfície de um metal corresponde a fotões que são absorvidos pelos electrões de condução no metal. Cada electrão absorve uma parte da energia do fotão absorvido. Se a energia absorvida for superior a uma determinada energia mínima, o electrão será removido do metal. Caso contrário, o electrão acabará por perder a energia em colisões com os átomos do metal, aumentando a sua temperatura.

Assim se explica o facto de ser necessária uma frequência mínima de luz incidente para que ocorra o efeito fotoelétrico.

A energia mínima que é preciso ceder a um electrão de condução para o retirar de um metal é designada por **função trabalho**, ϕ , desse metal. A tabela seguinte apresenta valores da função trabalho para diferentes metais, expressos em eV.

| Funções trabalho de alguns metais | |
|-----------------------------------|-----------------------------|
| Metal | Função trabalho ϕ / eV |
| Sódio | 2,36 |
| Zinco | 3,63-4,9 |
| Alumínio | 4,06-4,26 |
| Chumbo | 4,25 |
| Ferro | 4,67-4,81 |
| Cobre | 4,53-5,10 |
| Prata | 4,52-4,74 |
| Ouro | 5,1-5,47 |

Tabela I Funções trabalho de alguns metais.

Os fótons que tenham uma energia menor que a função trabalho do metal não conseguirão arrancar electrões do metal. Assim, a **frequência-limite ou limiar, f_0 , para que exista efeito fotoeléctrico** é:

$$f_0 = \frac{\phi}{h}$$

A frequência limiar tem um valor característico para cada metal e situa-se dentro da gama de frequências da luz ultravioleta. A luz, com frequência f superior a essa frequência limiar, produz efeito fotoeléctrico.

A Lei da Conservação da Energia permite-nos escrever uma relação entre a energia da radiação incidente, E , a energia de remoção dos electrões, ϕ , e a energia cinética máxima dos fotoelectrões ejectados, $E_{c.máx.}$, conhecida como **equação de Einstein para o efeito fotoeléctrico**:

$$E = \phi + E_{c.máx.}$$

A energia cinética máxima dos fotoelectrões emitidos é dada por:

$$E_{c.máx.} = E - \phi \Leftrightarrow \frac{1}{2} m_e v_{máx.}^2 = hf - \phi$$

Esta equação mostra que:

- a **energia cinética máxima dos electrões emitidos** só depende da frequência da radiação incidente e do metal; não depende da intensidade da radiação;
- **para haver efeito fotoeléctrico**, a luz incidente tem de ter uma frequência, f , superior à frequência limiar desse metal;
- a **energia mínima do fóton** que consegue arrancar um electrão é igual à função trabalho, ϕ .

Questões Resolvidas

1. Efeito fotoeléctrico

Duas barras metálicas, uma de chumbo e outra de ouro, são iluminadas com radiação ultravioleta de comprimento de onda $\lambda = 285 \text{ nm}$. A barra de chumbo emite electrões com velocidades entre 0 e $1,96 \times 10^5 \text{ m s}^{-1}$ e a barra de ouro não emite nenhum electrão. Calcule a função trabalho da barra de chumbo, em electrões-volt (eV), e diga o que é que se pode concluir acerca da função trabalho da barra de ouro ($m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$).

Resolução

1. A frequência da radiação electromagnética usada na experiência é:

$$f = \frac{c}{\lambda}; \quad f = \frac{3,00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}}{285 \times 10^{-9} \text{ m}} \Leftrightarrow f = 1,05 \times 10^{15} \text{ Hz}$$

A energia de cada fóton dessa radiação é:

$$E = hf; \quad E = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J s} \times 1,05 \times 10^{15} \text{ Hz} \Leftrightarrow E = 6,96 \times 10^{-19} \text{ J} \quad \text{ou} \quad E = 4,35 \text{ eV}$$

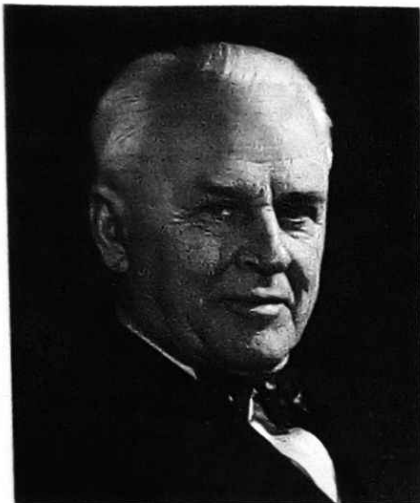
A energia cinética máxima dos electrões é:

$$E_{c.máx.} = \frac{1}{2} m_e v^2; \quad E_{c.máx.} = \frac{1}{2} \times 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg} \times (1,96 \times 10^5 \text{ m s}^{-1})^2 \Leftrightarrow E_{c.máx.} = 1,75 \times 10^{-20} \text{ J} \quad \text{ou} \quad E_{c.máx.} = 0,11 \text{ eV}$$

A função trabalho da barra de chumbo é:

$$\phi = E - E_{c.máx.}; \quad \phi = 4,35 \text{ eV} - 0,11 \text{ eV} \Leftrightarrow \phi = 4,24 \text{ eV}$$

A função trabalho da barra de ouro deverá ser maior do que a energia dos fótons da radiação usada, isto é, maior do que 4,35 eV.



Robert Millikan
(1868-1953)

Curiosidade

Millikan estava profundamente convicto de que a equação de Einstein estava errada, visto pôr em causa o bem estabelecido modelo ondulatório da luz. Encetou, então, uma década de investigações experimentais sobre esta questão. Ao contrário de todas as suas expectativas, foi forçado a assegurar a verificação experimental da equação de Einstein, apesar da sua não-razoabilidade visto ela parecer violar tudo o que se sabia acerca da natureza ondulatória da luz.

A equação de Einstein para o efeito fotoelétrico prevê uma dependência para a variação da energia cinética máxima com a frequência. Tal relação não foi observada nas experiências realizadas por Lenard. Impunha-se uma validação experimental que só ocorreu em 1915, quando Millikan conseguiu confirmar experimentalmente a teoria de Einstein. A figura 2.19 ilustra um gráfico da energia cinética máxima em função da frequência para um cátodo de sódio.

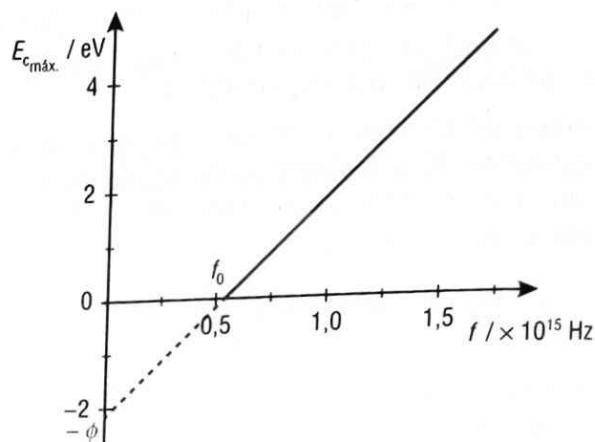


Fig. 2.19 Gráfico da energia cinética máxima dos fotoelectrões em função da frequência da radiação incidente sobre um cátodo de sódio.

A equação de Einstein, $E_{c.máx.} = hf - \phi$, tem a forma da equação reduzida de uma recta, $y = mx + b$, pelo que a representação gráfica da energia cinética máxima em função da frequência é uma recta com declive positivo, conforme ilustrado no gráfico da figura 2.19. O declive dessa recta representa o valor da constante de Planck, h , e a ordenada na origem o valor da função trabalho, ϕ . A parte interceptada é obtida por extrapolação, visto corresponder a valores de frequências inferiores à frequência-limite ou limiar, f_0 , onde não há emissão fotoelétrica. A concordância, dentro das limitações experimentais, do valor obtido para a constante de Planck, por esta via, com o valor obtido a partir da análise da radiação do corpo negro, constituiu uma confirmação da teoria de Einstein.

Experimentalmente, os fotoelectrões podem ser facilmente detectados, sob a forma de corrente eléctrica, se forem acelerados para uma placa colectora, isto é, o ânodo, através de uma diferença de potencial, U , conforme ilustrado na figura 2.20. Para valores elevados da diferença de potencial, a corrente fotoelétrica, medida pelo amperímetro A, atinge um valor-limite e todos os electrões emitidos atingem o ânodo.

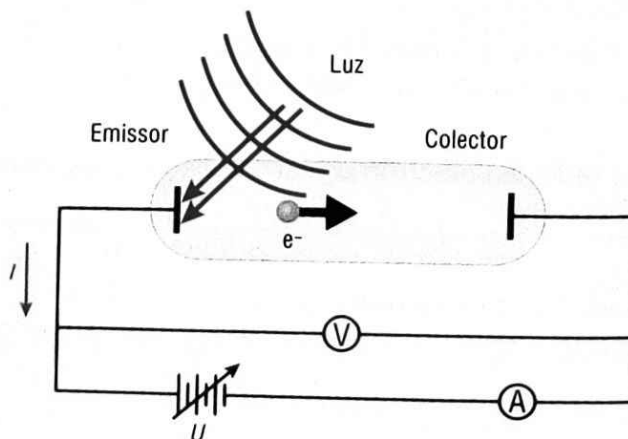


Fig. 2.20 Montagem para o estudo experimental do efeito fotoelétrico.

Diminuindo o potencial, U , da placa colectora para zero, os electrões que são emitidos da placa emissora conseguem ainda atingir a placa colectora. Continuando a diminuir o potencial, tendo, portanto, agora invertido a diferença de potencial, a intensidade da corrente, I , diminui, embora não vá imediatamente a zero.

que os fotoelectrões são emitidos com uma certa energia cinética. Alguns conseguem mesmo atingir a placa colectora, apesar de o campo eléctrico se opor ao seu movimento. **O potencial mínimo necessário para conseguir parar todos os fotoelectrões**, levando a intensidade da corrente fotoelétrica a zero, **denomina-se potencial de paragem**, ou potencial de corte, e representa-se por U_0 . Como, durante o movimento dos electrões, a sua energia potencial, dada por eU , se converte em energia cinética, podemos concluir que:

$$E_{c_{\max}} = eU_0$$

onde e , carga eléctrica elementar, representa o módulo da carga eléctrica do electrão. Partindo da equação de Einstein para o efeito fotoelétrico, podemos escrever:

$$hf = \phi + eU_0 \Leftrightarrow U_0 = \frac{h}{e}f - \frac{\phi}{e}$$

Como forma de validação desta equação, Einstein propôs o estudo experimental da dependência do potencial de paragem em função da frequência da radiação incidente. O gráfico da figura 2.21 ilustra essa dependência. Tal como previsto, obteve-se uma recta com um declive igual a h/e e uma ordenada na origem dada por $-\phi/e$.

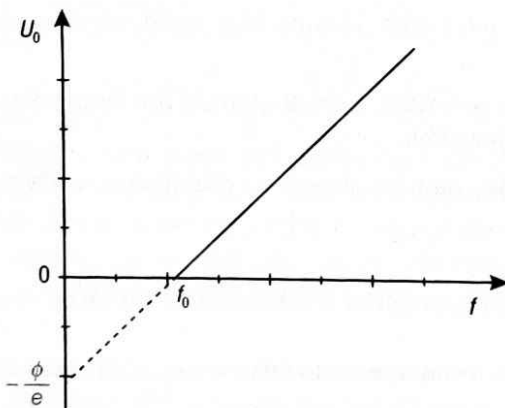
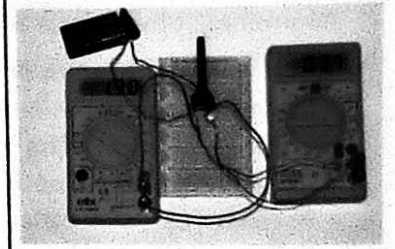


Fig. 2.21 Gráfico do potencial de paragem em função da frequência da radiação incidente.

Os resultados desta experiência são considerados os primeiros a demonstrarem a universalidade da constante de Planck, ou seja, uma constante independente da natureza do material utilizado.

São conhecidas inúmeras aplicações do efeito fotoelétrico, eminentemente associadas a automatismos e sensores de presença. De entre todas pode destacar-se a produção de energia eléctrica a partir da radiação solar. Os **painéis solares fotovoltaicos**, que começaram por ser uma tecnologia utilizada nos veículos espaciais, constituem um bom exemplo de aplicação deste efeito. Hoje em dia usam-se **semicondutores** em vez de metais nas células fotoelétricas. Os semicondutores têm funções trabalho menores do que os metais, permitindo que a luz visível seja suficiente para ejectar electrões de um material **semicondutor de tipo negativo**. Os electrões emitidos são absorvidos por outro **semicondutor de tipo positivo**, que se encontra junto do semicondutor negativo. A passagem de electrões entre os dois semicondutores produz uma corrente eléctrica com intensidade proporcional à intensidade da luz. Esse tipo de células é muito usado actualmente como uma boa alternativa para gerar energia eléctrica sem os efeitos adversos dos combustíveis fósseis. No entanto, o ainda elevado custo de produção deste tipo de painéis tem dificultado a sua implementação. A intensa investigação nesta área aliada ao aumento do custo dos combustíveis fósseis indicia que este tipo de solução será tendencialmente mais utilizado.

Medindo a constante de Planck



Material:

1 LED, 1 potenciômetro na ordem dos $k\Omega$, 1 resistência de $1 k\Omega$, 2 multímetros, 1 pilha de 9 V, fios de ligação e 1 placa para estabelecer ligações (*breadboard*).

Procedimento:

- Montar o circuito ilustrado na figura.
- Para diferentes valores da corrente eléctrica I registar, numa tabela, os respetivos valores da tensão U nos terminais do LED.
- Traçar o gráfico de $U = f(I)$ e obter o declive da recta de regressão linear que melhor se ajusta aos dados recolhidos.
- Com os resultados obtidos obter o valor da constante de Planck e comparar com o valor previsto teoricamente.
- Elaborar o relatório da actividade.

Curiosidade

A figura 2.22 representa uma fotografia da Estação Espacial Internacional onde se destacam os painéis solares fotovoltaicos que fornecem a energia eléctrica imprescindível ao seu funcionamento. O que começou por ser um bom exemplo de uma tecnologia espacial rapidamente encontrou aplicações no nosso quotidiano, como, por exemplo, nas máquinas de calcular solares.

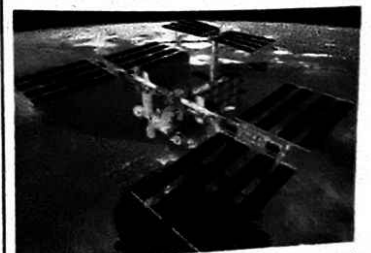


Fig. 2.22 Fotografia da Estação Espacial Internacional.

Síntese de conteúdos

- **Raios catódicos** são um feixe de electrões acelerados por uma tensão eléctrica elevada que se propagam rapidamente com elevada energia cinética.
- As principais **propriedades dos raios catódicos** são:
 - **Provocam a fluorescência** em algumas substâncias.
 - **Propagam-se em linha recta.**
 - **Possuem energia cinética.**
 - **Possuem carga eléctrica negativa.**
 - **Sofrem deflexão por acção de campos eléctricos e magnéticos.**
- Um **televisor**, bem como um **monitor, CRT** é um dispositivo analógico, constituído por um ecrã de vidro revestido interiormente por uma camada de material fosforescente, camada essa que tem a propriedade de tornar-se luminosa quando atingida por um feixe de electrões.
- Qualquer perturbação no funcionamento do CRT irá traduzir-se numa imagem mal ajustada, como, por exemplo:
 - **Distorção relação de aspecto**, causada por saída insuficiente nos circuitos de deflexão horizontal e vertical.
 - **Distorção trapezoidal**, causada por deflexão assimétrica ou associada a problemas nos electroímãs de deflexão.
 - **Distorção almofada**, causada desde que o ângulo de abertura do feixe seja constante. Se essa largura é ajustada para as extremidades superior e inferior do ecrã, a parte central será mais estreita visto encontrar-se mais próxima do ponto de emissão do feixe.
 - **Distorção barril**, causada por compensação excessiva da distorção almofada.
- **Emissão termoelectrónica** consiste na emissão de electrões de uma superfície metálica quando submetida a elevadas temperaturas.
- O **efeito fotoeléctrico**, descoberto por Heinrich Hertz em 1887, ocorre quando um metal é submetido a radiação electromagnética com energia suficiente emitindo electrões.
- **Emissão fotoeléctrica** consiste na emissão de electrões de uma superfície metálica quando submetida a radiação electromagnética.
- **Leis do fenómeno fotoeléctrico:**
 - O número de electrões emitidos é directamente proporcional à intensidade do feixe monocromático de luz incidente.
 - A energia dos electrões emitidos é independente da intensidade do feixe monocromático de luz e directamente proporcional à frequência da radiação incidente.
 - O efeito fotoeléctrico é praticamente instantâneo, mas só ocorre a partir de uma dada frequência mínima chamada frequência-limite ou limiar, característica de cada metal.
- Para explicar o efeito fotoeléctrico, Einstein admitiu que a luz era constituída por partículas designadas por **fotoões**, cuja energia não podia ser uma qualquer, mas sim um **múltiplo de uma energia elementar – um quantum de energia** (plural *quanta*) dada por:

$$E = hf$$

onde $h = 6,626 \times 10^{-34}$ J s é uma constante universal, designada por **constante de Planck**, e f é a frequência da luz.

- A energia mínima que é preciso ceder a um electrão de condução para o arrancar de um metal é designada por **função trabalho**, ϕ .
- A **frequência-limite ou limiar**, f_0 , para que exista efeito fotoeléctrico é dada por:

$$f_0 = \frac{\phi}{h}$$

- **Equação de Einstein para o efeito fotoeléctrico:**

$$E = \phi + E_{c_{máx.}} \Leftrightarrow E_{c_{máx.}} = E - \phi \Leftrightarrow \frac{1}{2} m_0 v_{máx.}^2 = hf - \phi$$

- O **potencial mínimo necessário para conseguir parar todos os fotoelectrões**, levando a intensidade da corrente fotoeléctrica a zero, denomina-se **potencial de paragem**, ou potencial de corte, e representa-se por U_0 , sendo:

$$E_{c_{máx.}} = eU_0$$

- Partindo da equação de Einstein para o efeito fotoeléctrico, podemos escrever:

$$hf = \phi + eU_0 \Leftrightarrow U_0 = \frac{h}{e}f - \frac{\phi}{e}$$

2.2. Raios X

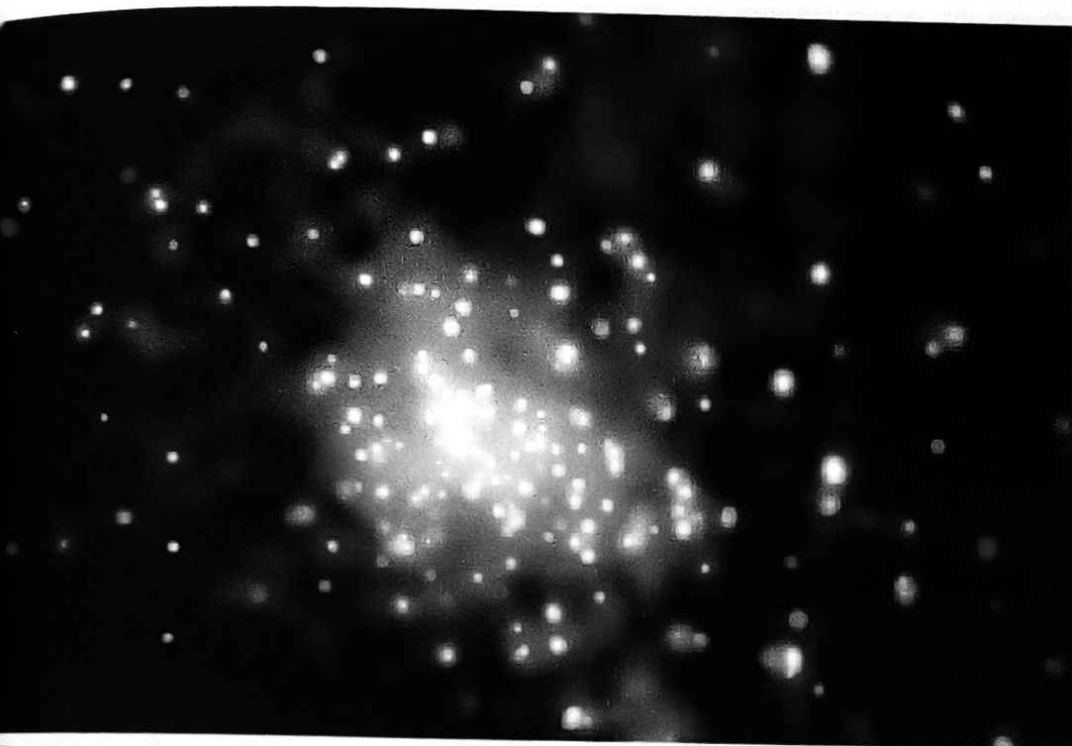


Fig. 2.23 Aglomerado estelar RCW 38. Nesta fotografia da NASA, obtida pelo satélite orbital Observatório de raios X Chandra, as cores azuis representam raios X de elevada energia, as verdes raios X de média energia e as vermelhas raios X de baixa energia.

A radiação electromagnética com comprimentos de onda suficientemente pequenos para conseguirem penetrar nos átomos e retirar electrões é designada por **radiação ionizante**. Como o tamanho dos átomos é da ordem dos 10^{-10} m, as radiações electromagnéticas ionizantes são: **raios ultravioleta** com frequências elevadas, **raios X** e **raios gama**. Neste ponto iremos centrar o nosso estudo nos raios X.

Os **raios X** foram descobertos acidentalmente, em 1895, por **Wilhelm Röntgen**, antes de serem descobertos o electrão e o núcleo atómico. Röntgen era um apaixonado pela fotografia. Certo dia deixou, casualmente, junto de um tubo de raios catódicos com que efectuava experiências, umas chapas fotográficas sob um livro, cuja capa metálica continha uma chave gravada. Dias mais tarde, ao revelar uma fotografia tirada com uma dessas chapas, constatou que esta estava emulsionada com a imagem da chave. Apercebeu-se que a luz solar não era responsável pela emulsão e que esta radiação era distinta da dos raios catódicos, visto não sofrer a acção de campos magnéticos e, entre outras, apresentar propriedades de absorção peculiares. Como não sabia qual era a origem destes raios misteriosos, decidiu designá-los por raios X.

Röntgen apercebeu-se que **os raios X atravessavam o corpo humano**, sendo absorvidos apenas pelos ossos, e propôs a sua aplicação em medicina, na obtenção de radiografias. Os raios X têm muitas outras aplicações. Por exemplo, a estrutura dos materiais cristalinos é determinada observando o padrão de interferência quando os raios X atravessam um cristal.

Produção de raios X

Na sua investigação com tubos de descarga, Röntgen pôde constatar que a radiação até aí desconhecida surgia no local onde ocorria a **colisão dos raios catódicos com as paredes do tubo de vidro**. Conforme abordado no ponto anterior nesse local o **vidro fica iluminado com uma cor esverdeada** (figura 2.3). Fazendo incidir sobre determinadas substâncias, nomeadamente sais metálicos, provocam

Conteúdos

- Raios X: produção, propriedades e aplicações.
- Espectro de raios X.



Fig. 2.24 Primeira radiografia obtida por Röntgen, em 1895, da mão da sua esposa usando um anel.



Wilhelm Röntgen
(1845-1923)

fluorescência. Experiências realizadas posteriormente permitiram concluir que **raios X eram emitidos quando os electrões acelerados colidiam com um material, em particular com os eléctrodos metálicos.**

Conforme se pode constatar, **o método usado inicialmente para produzir raios X foi o processo inverso ao efeito fotoeléctrico.** Neste procedimento são lançados electrões contra uma superfície metálica. Se a sua energia cinética for suficientemente elevada, o electrão pode ser absorvido pelo metal produzindo um fóton.

Para a produção de raios X, construíram-se aparelhos cada vez mais aperfeiçoados que se chamam tubos de Röntgen, apesar de já não serem muito parecidos com os dispositivos originalmente utilizados. Modernamente, produzem-se raios X em tubos de vidro, onde se estabelece um vazio quase perfeito, recorrendo-se à emissão termoelectrónica. A figura 2.25 mostra um esquema de um desses tubos conhecido como tubo de Coolidge.

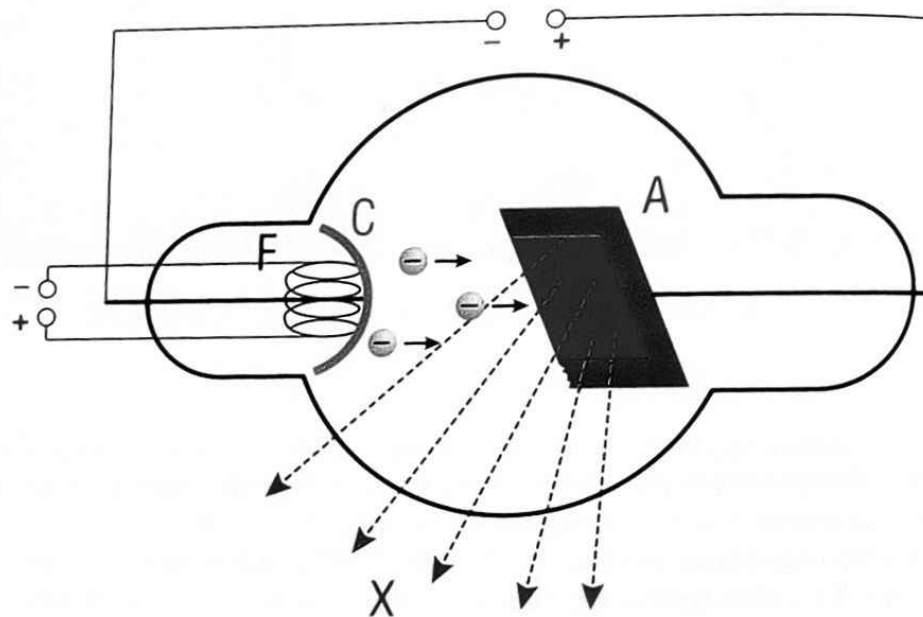


Fig. 2.25 Tubo de raios X de Coolidge.

O aquecimento produzido junto do cátodo, C, por um filamento de volfrâmio incandescente, F, origina um feixe de electrões que é acelerado em direcção ao ânodo, A, através de uma elevada diferença de potencial. A inevitável colisão dos electrões com o ânodo traduz-se numa transferência da energia cinética do feixe para os electrões da placa metálica que constitui o ânodo. De modo geral, apenas uma pequena fracção desta energia é posteriormente emitida na forma de raios X, sendo a restante convertida em energia térmica, o que se comprova pela elevada temperatura atingida. Como forma de protecção do ânodo sobreaquecido, que pode levar à sua fusão, utiliza-se uma pastilha metálica de elevado ponto de fusão cravada numa massa de cobre que é arrefecido por um circuito de refrigeração. Por vezes, para evitar este inconveniente, recorre-se a ânodos rotativos.

Nestes processos de transferência de energia, vamos analisar o caso extremo no qual um electrão transfere toda a sua energia cinética num único processo, sendo emitido um único fóton de raios X. A energia potencial eléctrica, eU , é convertida em energia cinética máxima dos electrões, $\frac{1}{2} m v^2$, e consequentemente igual à energia do fóton emitido, hf . Assim, podemos escrever:

$$eU = \frac{1}{2} m v^2 = hf_{\text{máx.}} = \frac{hc}{\lambda_{\text{mín.}}}$$

Esta expressão permite concluir que o comprimento de onda mínimo, $\lambda_{\text{mín}}$, é inversamente proporcional à diferença de potencial entre o cátodo e o ânodo.

É de salientar que fótons com qualquer energia inferior a $h f_{\text{máx}}$ são igualmente produzidos nos inúmeros processos elementares em que a transferência de energia é parcial, originando assim um espectro de emissão sobre o qual falaremos mais à frente.

Com diferenças de potencial entre o cátodo e o ânodo da ordem das dezenas de kV produzem-se raios X de baixa frequência, isto é, **elevado comprimento de onda** conhecidos como **raios X moles**. Se essa diferença de potencial for da ordem das centenas de kV produzem-se raios X de elevada frequência, isto é, **pequeno comprimento de onda**, conhecidos como **raios X duros**.

► Propriedades dos raios X

Conforme anteriormente referido, aquando da sua descoberta, cedo se constatou que estes raios X tinham a curiosa propriedade de **impressionar chapas fotográficas** não expostas e de **ionizar as moléculas do ar**. No entanto, não sofriam reflexão nem refração de forma perceptível e eram **imunes à acção de campos electromagnéticos**.

A ideia de considerar **os raios X como ondas electromagnéticas**, produzidas durante a colisão com alvos metálicos, **propagando-se em linha recta e à velocidade da luz no vazio**, impôs-se rapidamente. O facto de não serem visíveis é consequência de apresentarem **menores comprimentos de onda** do que as radiações da parte visível do espectro. Quanto **maior for a energia dos electrões** que colidem com os alvos metálicos **menor** será o respectivo **comprimento de onda** dos raios X emitidos. É justamente devido a estes pequenos comprimentos de onda que os raios X possuem excelente **capacidade de penetração**.

Variando a intensidade da corrente que atravessa o filamento incandescente faz-se variar o **número de electrões que colidem** com o ânodo, fazendo variar a **intensidade do feixe de raios X**.

Questões Resolvidas

2. Num tubo de raios X usa-se uma diferença de potencial de $1,10 \times 10^4$ eV para acelerar electrões que, a seguir, colidem com uma lâmina metálica. Admitindo que um dos electrões acelerados sofreu uma colisão frontal com o metal, ficando em repouso após emitir um fóton, calcule o comprimento de onda do raio X produzido.

Dados: $1 \text{ eV} = 1,60 \times 10^{-19} \text{ J}$

Resolução

2. A energia fornecida aos electrões é de $1,10 \times 10^4$ eV. Passando para unidades SI, temos:

$$E = 1,10 \times 10^4 \text{ eV} \times 1,60 \times 10^{-19} \text{ J eV}^{-1} \Leftrightarrow E = 1,76 \times 10^{-15} \text{ J}$$

Como o electrão fica em repouso após a colisão, toda essa energia será transferida para o fóton emitido. O comprimento de onda de um fóton com essa energia é:

$$\lambda = \frac{c}{f} \Leftrightarrow \lambda = \frac{ch}{E} \Rightarrow \lambda = \frac{3,00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1} \times 6,626 \times 10^{-34} \text{ J s}}{1,76 \times 10^{-15} \text{ J}} \Leftrightarrow \lambda = 1,13 \times 10^{-10} \text{ m}$$

Com base em tudo o que foi exposto até aqui, podemos fazer um resumo das **principais propriedades dos raios X**:

- Propagam-se em linha recta.
- Propagam-se à velocidade da luz no vazio.
- Impressionam películas fotográficas.
- Não sofrem a acção de campos electromagnéticos.
- Provocam fluorescência quando incidem sobre sais metálicos.
- Atravessam a matéria sem praticamente sofrerem alterações.

- São produzidos por colisão de electrões sobre alvos metálicos.
- O comprimento de onda é inversamente proporcional à diferença de potencial entre o cátodo e o ânodo.
- São tanto mais duros, logo com maior poder de penetração, quanto maior for o comprimento de onda.

► Aplicações dos raios X



Fig. 2.26 Radiografia revelando fractura óssea.

Desafio

Pesquise mais informação sobre raios X na Internet, artigos de revistas e livros da especialidade. Elabore um trabalho ou projecto subordinado ao tema: "Os raios X na minha vida".

A descoberta dos raios X revestiu-se de tal importância que rapidamente encontraram inúmeras aplicações importantes nas mais variadas actividades humanas, como, por exemplo, medicina, engenharia, investigação científica, arte, etc.

Na medicina, a utilização dos raios X assume essencialmente duas vertentes: diagnóstico e terapia. A absorção de raios X por parte dos diferentes tecidos dos seres vivos é feita de forma desigual. Verifica-se que os tecidos da pele e os músculos absorvem menos do que os ossos e dentes. Desta forma, é possível identificar fracturas, doenças ósseas, alterações dentárias, anomalias nos órgãos internos, etc., usando **radioscopia** (alvo fluorescente) ou **radiografia** (chapa fotográfica), conforme ilustrado na figura 2.26.

Na investigação das desordens digestivas, respiratórias e urinárias, pode administrar-se ao paciente **produtos de contraste** que contêm substâncias com núcleos atômicos elevados e grande poder absorvente, tornando, selectivamente, órgãos que se pretendem radiografar opacos à radiação. A incidência de raios X sobre tecidos vivos, por períodos de tempo apreciáveis, pode provocar perigosas queimaduras que levam à destruição celular, em especial dos tecidos orgânicos: crescimento desmesurado, como é o caso dos tecidos cancerosos. Como meio de terapia, a aplicação devidamente doseada é utilizada na destruição de tumores cancerosos. Neste tipo de tratamento, designado por **radioterapia**, recorrem-se a raios X duros, de forma a atravessar os tecidos mais superficiais sem provocar danos e destruindo os tecidos malignos mais profundos.

Na engenharia, a utilização dos raios X baseia-se nas diferenças de absorção dos diferentes componentes metálicos de uma amostra, permitindo, assim, a detecção de bolhas de ar, de imperfeições nas soldaduras e outros defeitos de fabrico. São, ainda, utilizados na distinção entre pedras preciosas naturais e artificiais, na análise de componentes aeronáuticos, na detecção de produtos nocivos nos alimentos, na pesquisa de novos materiais, etc.

Na investigação científica, os raios X são amplamente aplicados, nomeadamente em astronomia, cristalografia, espectroscopia e microscopia de raios X.

Na arte, a utilização destes raios está essencialmente associada à certificação de obras de arte e à detecção de imagens ocultas em pinturas antigas. A figura 2.27 ilustra uma pintura de camponesa dissimulada por baixo de outra do pintor Van Gogh, revelada por raios X. Os investigadores acreditam que há mais telas com pinturas ocultas.



Fig. 2.27 Técnica, com raios X e acelerador de partículas, revelou pintura de mulher oculta por baixo da obra *Patch of Grass*, de Van Gogh.

► Espectro de raios X

A perda de energia cinética dos electrões quando colidem com o ânodo tem como consequência a emissão de fotões de raios X de **diferentes energias**, isto é, de diferentes comprimentos de onda constituindo um **espectro contínuo**. A esta parte contínua do espectro dá-se o nome de "**Bremsstrahlung**". O **comprimento de onda mínimo, λ_{\min}** , ocorre quando um electrão colide com um único núcleo do material que constituiu o alvo, sendo esse valor **tanto menor quanto maior for a diferença de potencial que se estabelece entre o cátodo e o ânodo**. O mesmo será dizer que a frequência máxima dos fotões de raios X é **directamente proporcional à tensão** entre o cátodo e o ânodo.

No entanto, há lugar também para a emissão de fotões com energias bem definidas que constituem um **espectro de riscas ou discreto**, associado às transições electrónicas nos átomos previamente ionizados pelas colisões. As energias dos fotões correspondentes ao espectro discreto de raios X apresentam picos estreitos ou riscas, conforme ilustrado na figura 2.28, e dependem apenas dos níveis de energia electrónicos dos átomos. Estes picos ou riscas são característicos do material que é utilizado na construção da lâmina metálica que constitui o alvo.

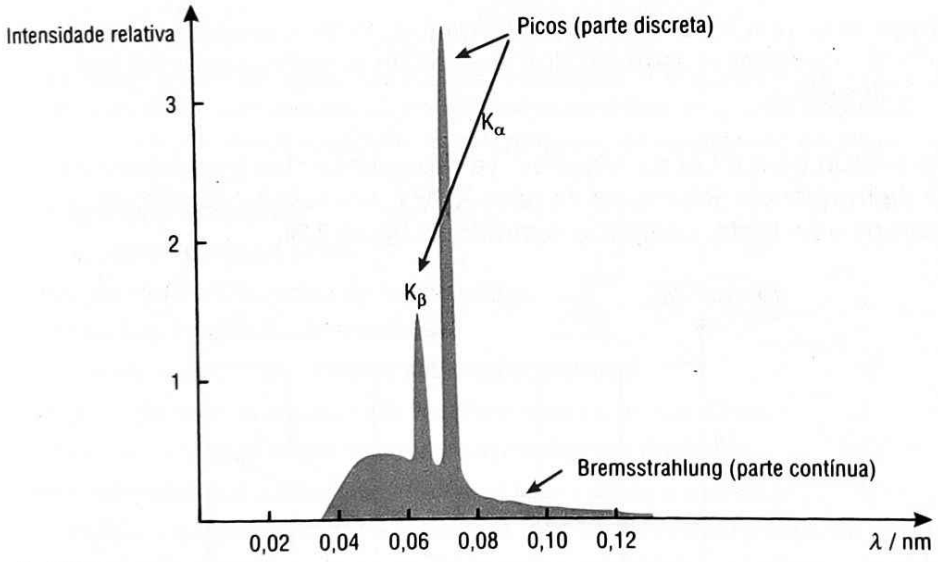


Fig. 2.28 Espectro de raios X.



É habitual agrupar as riscas em séries designadas por **K, L, M, ...**, e em cada série distinguir cada risca pelas mesmas letras acrescentando os índices $\alpha, \beta, \gamma, \dots$. Os raios X mais energéticos, mais duros ou de maior frequência correspondem às riscas K, sendo de todas as séries aquela que exige uma tensão mais elevada.

O aparecimento destas riscas pode explicar-se pela acção dos electrões emitidos pelo cátodo com elevadas energias cinéticas. Estes conseguem penetrar mais profundamente nos átomos do material que forma o ânodo extraindo electrões dos níveis mais interiores, ou fazendo-os passar para níveis energéticos mais elevados, deixando assim **lacunas** nessas camadas internas. Estas lacunas, por sua vez, podem ser preenchidas com a transição de um electrão de qualquer nível energético superior, com **emissão** de um fotão de raios X, conforme ilustrado na figura 2.29.

A energia do fotão emitido corresponde exactamente à diferença entre os níveis de energia do átomo bombardeado, ΔE , antes e depois da transição electrónica.

Assim, a frequência do fotão de raios X emitido será dada por $f = \frac{\Delta E}{h}$. As restantes riscas da série resultam do elevado número de átomos excitados.

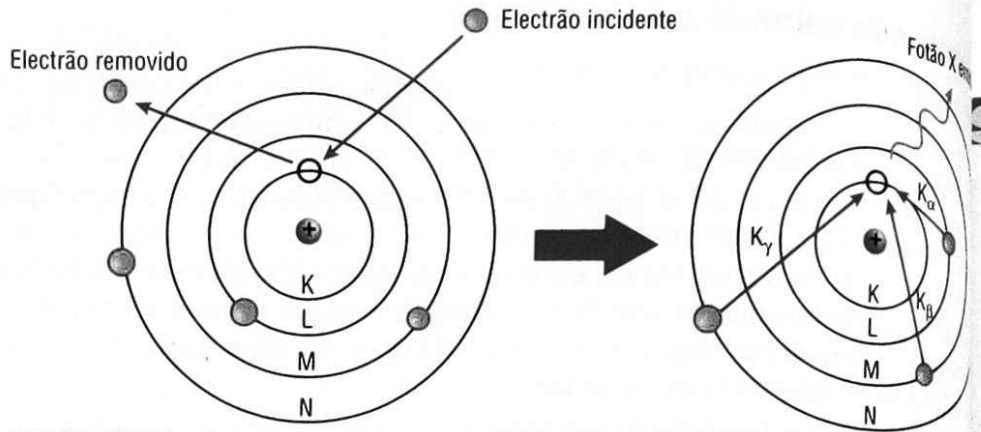


Fig. 2.29 Possibilidades de preenchimento de uma lacuna na camada K, por electrões provenientes das camadas



Henry Moseley
(1887-1915)

Em 1913, o físico inglês Henry Moseley estabeleceu uma **relação** entre o **espectro de raios X** de um elemento químico e o seu **número atômico, Z**. Essa relação empírica mostra que a frequência dos raios X emitidos é directamente proporcional ao quadrado do número atômico do metal utilizado no bombardeio electrónico. Ficou conhecida como Lei de Moseley.

Lei de Moseley

A frequência dos fótons de raios X emitidos é directamente proporcional ao quadrado do número atômico dos átomos do elemento químico metálico que constitui o alvo.

De acordo com a Lei de Moseley, se representarmos graficamente a raiz quadrada da frequência dos fótons de raios X, \sqrt{f} , em função do número atômico, obteremos uma recta, conforme ilustrado na figura 2.30.

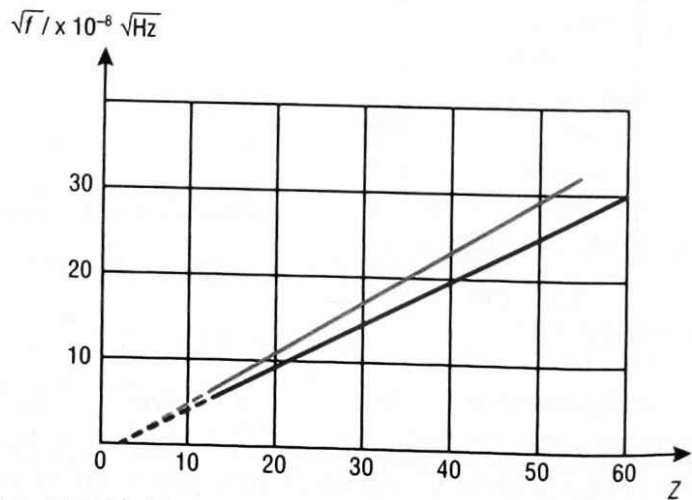


Fig. 2.30 Lei de Moseley.

Foi um gráfico semelhante a este que Moseley obteve a partir dos dados recolhidos na sua investigação experimental e que está na génese da sua lei. Antes dos seus trabalhos, a distribuição dos elementos na Tabela Periódica era feita de acordo com o seu peso. A partir de Moseley, essa distribuição passou a ser feita de acordo com o número atômico, levando a alterações na Tabela Periódica com base na versão original deste gráfico e na alteração do critério de distribuição dos elementos na Tabela Periódica que Moseley conseguiu prever a existência dos elementos químicos com os números atômicos 43, 61, 72 e 75, que só vieram a ser descobertos anos mais tarde.

O trabalho de Moseley foi fundamental na consolidação e aceitação, por parte da comunidade científica da época, do modelo atômico de Bohr, de que falaremos mais em detalhe no ponto seguinte. Foi a primeira investigação experimental a confirmar as previsões de Bohr.

Síntese de conteúdos

- Há produção de raios X quando os electrões acelerados colidem com um obstáculo, em particular, com eléctrodos metálicos.
- Para a produção de raios X, construíram-se aparelhos cada vez mais aperfeiçoados que se chamam **tubos de Röntgen**.
- Modernamente, produzem-se raios X em tubos de vidro, onde se estabelece um vazio quase perfeito, recorrendo à emissão termoelectrónica.

- Em casos extremos, **um só electrão transfere toda a sua energia cinética** num único processo, sendo **emitido um único fóton de raios X**. A **energia potencial eléctrica, eU** , é igual à **energia cinética máxima** dos electrões, $\frac{1}{2} m v^2$, e consequentemente igual à **energia do fóton emitido, hf** . Assim, podemos escrever:

$$eU = \frac{1}{2} m v^2 = hf_{\text{máx.}} = \frac{hc}{\lambda_{\text{min.}}}$$

- O comprimento de onda mínimo, $\lambda_{\text{min.}}$, é inversamente proporcional à diferença de potencial entre o cátodo e o ânodo.
- Diferenças de potencial da ordem das dezenas de kV produzem raios X de baixa frequência, isto é, **elevado comprimento de onda**, conhecidos como **raios X moles**. Diferenças de potencial da ordem das centenas de kV produzem raios X de elevada frequência, isto é, **pequeno comprimento de onda**, conhecidos como **raios X duros**.
- **Propriedades dos raios X:**
 - Propagam-se em linha recta.
 - Propagam-se à velocidade da luz no vazio.
 - Impressionam películas fotográficas.
 - Não sofrem a acção de campos electromagnéticos.
 - Provocam fluorescência quando incidem sobre sais metálicos.
 - Atravessam a matéria sem praticamente sofrerem alterações.
 - São produzidos por colisão de electrões sobre alvos metálicos.
 - O comprimento de onda é inversamente proporcional à diferença de potencial entre o cátodo e o ânodo.
 - São tanto mais duros, logo com maior poder de penetração, quanto menor for o comprimento de onda.
- A descoberta dos **raios X** revestiu-se de tal importância que rapidamente se encontraram inúmeras aplicações importantes nas mais variadas actividades humanas, como, por exemplo, **medicina, engenharia, investigação científica, arte, etc.**
- À parte contínua do espectro de raios X dá-se o nome de "**Bremsstrahlung**". O **comprimento de onda mínimo, $\lambda_{\text{min.}}$** , ocorre quando um electrão colide com um único núcleo do material que constituiu o alvo, sendo esse valor **tanto menor quanto maior for a diferença de potencial que se estabelece entre o cátodo e o ânodo**.
- Há lugar à emissão de fótons com **energias bem definidas** que constituem um **espectro de riscas ou discreto**, associado às transições electrónicas nos átomos previamente ionizados pelas colisões. As energias dos fótons correspondentes ao **espectro discreto de raios X** apresentam **picos estreitos ou riscas** que dependem apenas dos níveis de energia electrónicas dos átomos. Estes picos ou riscas são **característicos do material** que é utilizado na construção da lâmina metálica que constitui o alvo.
- **Lei de Moseley:**
A **frequência dos fótons de raios X** emitidos é directamente proporcional ao quadrado do número atómico dos átomos do elemento químico metálico que constitui o alvo.

2.3. Níveis de energia no átomo de hidrogénio

Conteúdos

- Revisão da evolução dos modelos atómicos.
- O modelo atómico de Bohr.
- Níveis de energia no átomo de hidrogénio.



Fig. 2.31 Nuvens de gás hidrogénio incandescente na constelação de Cefeu.

A descoberta do núcleo atómico por **Ernest Rutherford** estimulou o dinamarquês **Niels Bohr**, em 1913, a dedicar-se ao estudo da estrutura do átomo. Bohr estava convicto que utilizando a teoria quântica de **Max Planck** seria possível encontrar uma explicação para a forma como os electrões absorvem e emitem radiação, propondo um novo modelo atómico. A aceitação deste novo modelo atómico de Bohr foi progressivamente aumentando à medida que os resultados experimentais foram sendo divulgados, nomeadamente os que estiveram em conformidade com a Lei de Moseley que abordámos no ponto anterior. Neste ponto, após uma breve revisão da evolução dos modelos atómicos da matéria, estudaremos o modelo proposto por Bohr.

► Revisão da evolução dos modelos atómicos

Em 1803, **John Dalton** usou o conceito de que a matéria é formada por átomos para explicar porque as reacções químicas entre diferentes elementos só ocorrem em proporções de números inteiros. De acordo com a teoria de Dalton, cada elemento seria formado por átomos idênticos e nas reacções químicas os átomos de diferentes elementos combinam-se produzindo novas substâncias com uma combinação diferente desses átomos.

Em 1869, **Dimitri Mendeleiev** criou a **Tabela Periódica**, classificando os elementos químicos. A Tabela Periódica dá-nos a indicação de que os átomos não são constituídos por partículas subatómicas comuns.

Em 1897, **Joseph Thomson** demonstrou que os raios catódicos, que já eram conhecidos desde a década de 70 do século XIX, eram constituídos por pequenas partículas de carga negativa: os **electrões**. A descoberta de Thomson demonstrou que os átomos não eram unidades indivisíveis, como se pensava anteriormente. Thomson considerou os átomos como esferas maciças de carga positiva com electrões incrustados uniformemente, onde se encontravam incrustados electrões com carga negativa, como as passas num "bolo de passas". A carga positiva de cada átomo deveria ser igual e oposta à carga negativa dos electrões, para que o átomo fosse neutro. Mas, nessa época, não era conhecido o número de electrões em cada átomo.

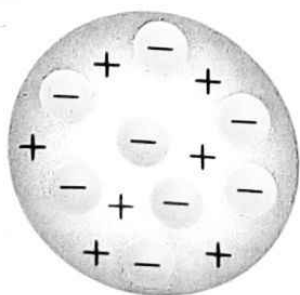


Fig. 2.32 Modelo atómico de Thomson.

Em 1909, **Ernest Rutherford** concluiu que as cargas positivas dentro dos átomos se encontram concentradas numa região muito pequena – o **núcleo atómico** – e propôs um modelo de átomo semelhante ao Sistema Solar, ou seja, um modelo em que os electrões teriam órbitas elípticas à volta do núcleo.

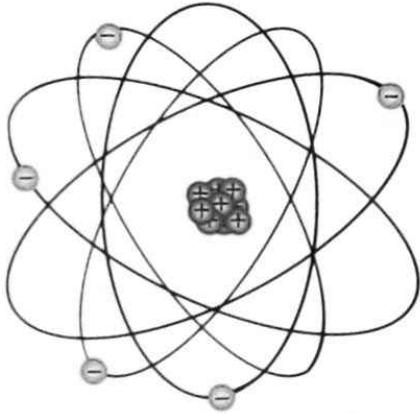


Fig. 2.33 Modelo atómico de Rutherford.

A semelhança entre a força gravítica e electrostática favorecia este modelo. Mas, como as cargas eléctricas, quando são aceleradas, produzem ondas electromagnéticas, um electrão numa órbita circular emitiria uma onda electromagnética com frequência igual à frequência do movimento circular, e perderia rapidamente a sua energia, sendo absorvido pelo núcleo.

Por outro lado, os átomos estariam constantemente a emitir radiação electromagnética de frequências cada vez maiores, o que não corresponde ao observado. Os átomos, quando são "excitados", emitem radiação ao regressarem a um estado de menor energia, numa série de frequências discretas, características de cada elemento, como se pode observar, por exemplo, no **espectro de emissão** do hidrogénio (figura 2.34). Da mesma forma, um átomo só absorve radiação com a mesma frequência da que emite (**espectro de absorção**), conforme abordado no ponto 1.1.



Fig. 2.34 Espectro visível de emissão do hidrogénio.

► O modelo atómico de Bohr

Em 1913, **Niels Bohr** explicou o mistério dos espectros atómicos, admitindo que as **órbitas dos electrões** nos átomos só poderiam ter alguns valores permitidos para o raio. Em condições normais, os electrões ocupariam as órbitas mais próximas do núcleo e não emitiriam nenhuma onda enquanto estivessem na mesma órbita.

Para fazer "saltar" um desses electrões para uma órbita mais afastada, seria preciso absorver um fóton com uma frequência específica, que corresponde à diferença de energia entre a órbita inicial e a órbita final. Os electrões nas órbitas mais afastadas teriam tendência a passar para órbitas mais próximas do núcleo, com menor energia. Em cada transição para uma órbita de menor energia, **a energia perdida pelo electrão é transferida para um fóton**. Assim, observando as frequências em que aparecem as riscas nos espectros de emissão ou de absorção, é possível conhecer a energia das possíveis órbitas dos electrões nos átomos e, portanto, os raios das órbitas.



Niels Bohr
(1885-1962)



Louis De Broglie
(1892-1987)

Repare

A **relação de De Broglie** é o equivalente para a matéria da **relação de Planck-Einstein** para a luz.

Tal como a luz, a **matéria** tem uma **natureza dual**, isto é, ora se comporta como uma onda, ora como uma partícula.

Em 1924, **Louis De Broglie** sugeriu que todas as partículas, à semelhança dos fótons, teriam também uma natureza dual onda-partícula. A onda associada a uma partícula com momento linear de módulo p tem comprimento de onda, λ , dada pela relação de De Broglie:

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

que é simplesmente uma generalização da relação que define o momento linear dos fótons. O comprimento de onda de uma partícula é inversamente proporcional ao seu momento linear, tal como acontecia com os fótons.

Assim, por exemplo, na questão resolvida 2, página 61, o comprimento de onda da onda associada ao electrão que choca com o metal seria o mesmo comprimento de onda do fóton de raios X emitido, já que o momento linear das partículas é o mesmo.

A **teoria ondulatória da matéria** permitiu a De Broglie dar uma explicação para o **modelo atômico de Bohr**. Segundo De Broglie, o comprimento da órbita de um electrão num átomo deveria ser um múltiplo do comprimento de onda desse electrão.

Se assim não fosse, a onda do electrão interferiria consigo própria de forma destrutiva. A condição imposta por De Broglie implica que, após uma órbita circular, a onda regressa ao ponto inicial com a mesma fase, produzindo interferência construtiva. A situação é semelhante ao que acontece com as ondas estacionárias numa corda de um instrumento musical; o comprimento da corda é sempre um múltiplo inteiro de metade do comprimento de onda.

Se o **número quântico n** representa as possíveis órbitas dos electrões num átomo, para $n = 1$, o comprimento da órbita será igual ao comprimento de onda do electrão, para $n = 2$, o comprimento da órbita será duas vezes o comprimento de onda, etc.

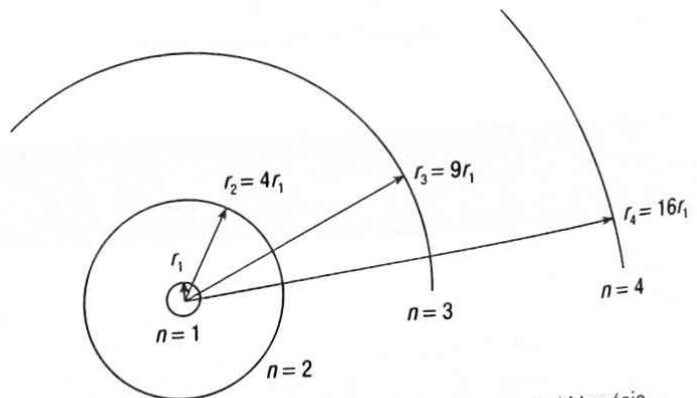


Fig. 2.35 As primeiras quatro órbitas electrónicas num átomo de hidrogénio.

Em 1927, **Clinton J. Davisson** e **Lester Germer** realizaram uma experiência que permitiu validar experimentalmente a hipótese da natureza ondulatória da matéria proposta por De Broglie.

Davisson e Germer estavam a estudar a reflexão de electrões num metal quando, acidentalmente, descobriram que, em certas condições, os electrões eram reflectidos apenas em algumas direcções específicas. Analisando os resultados experimentais, descobriram que o que estavam a observar era de facto um padrão de difracção de electrões como os que são observados nas experiências de difracção da luz.

Reconhecendo a importância da descoberta, Davisson e Germer investigaram exaustivamente o comportamento dos electrões com um cristal de níquel. Descobriram sempre que, ao fazer incidir um feixe de electrões perpendicularmente a um cristal de níquel, a posição regular dos átomos no cristal actua de forma semelhante a uma fenda dupla.

a uma rede de difracção da luz. Os ângulos das direcções segundo as quais existe interferência construtiva, sendo observados electrões reflectidos, coincidem com as previsões da difracção de uma onda com comprimento de onda dado pela relação de De Broglie.

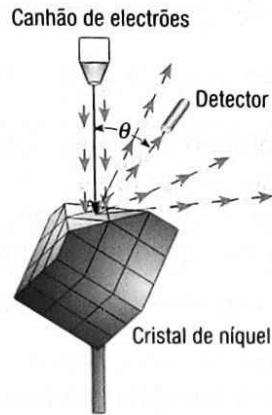


Fig. 2.36 Difracção de electrões num cristal.

As propriedades ondulatórias de átomos e de moléculas vieram a ser demonstradas, pela primeira vez, em 1930. Mais recentemente, a difracção de outros átomos, de prótons e de neutrões também foi observada.

As partículas da matéria apresentam propriedades ondulatórias, da mesma forma que as ondas electromagnéticas apresentam propriedades corpusculares.

Usando a relação de De Broglie para o átomo de hidrogénio, e admitindo órbitas circulares, podemos calcular o raio das órbitas permitidas para o electrão e os respectivos níveis de energia, no átomo de hidrogénio.

O comprimento de uma órbita circular é $2\pi r$.

Sendo, para o modelo de Bohr:

$$2\pi r = n\lambda$$

tem-se, aplicando a relação de De Broglie:

$$2\pi r_n = \frac{nh}{m_e v} \quad (1)$$

Por outro lado, a velocidade também está relacionada com o raio da órbita, r_n , através da equação da força centrípeta, F_c , que é igual à força electrostática, F_e , entre o electrão e o protão no núcleo.

$$\text{Então, uma vez que } F_c = m_e \frac{v^2}{r_n} \text{ e } F_e = k_0 \frac{e^2}{r_n^2} \quad (2)$$

fica:

$$m_e \frac{v^2}{r_n} = k_0 \frac{e^2}{r_n^2}$$

onde e corresponde à carga elementar, k_0 é a constante de Coulomb no vazio e m_e a massa do electrão. Eliminando a velocidade entre as equações (1) e (2), obtemos a expressão para os raios das órbitas:

$$r_n = \frac{h^2}{4\pi^2 e^2 k m_e} n^2$$

O termo constante que multiplica por n^2 é conhecido como **raio de Bohr** e é designado pela letra a_0 .

Substituindo pelos valores das constantes e da massa do electrão, obtém-se

$$a_0 = \frac{h^2}{4\pi^2 e^2 k_0 m_e}$$

$$a_0 = \frac{(6,626 \times 10^{-34})^2 \text{ J s}}{(2 \times 3,1416 \times 1,60 \times 10^{-19})^2 \text{ C}^2 \times 9 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2} \times 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}}$$

$$\Leftrightarrow a_0 = 5,3 \times 10^{-11} \text{ m}$$

O diâmetro do átomo de hidrogénio, no seu estado de menor energia seria duas vezes esse raio, nomeadamente 10^{-10} m , que coincide muito bem com o que é medido experimentalmente. As órbitas com valores maiores que o número quântico n têm raios que aumentam quadraticamente em função de n :

$$r_n = a_0 n^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

A energia do electrão na órbita de raio r_n , isto é, a energia do nível n , calculando a energia cinética com a energia potencial electrostática:

$$E_n = \frac{1}{2} m_e v^2 - k_0 \frac{e^2}{r_n}$$

Usando a equação (2) para eliminar o parâmetro velocidade, obtém-se:

$$E_n = - \frac{k_0 e^2}{2r_n}$$

Substituindo, agora, r_n por $a_0 n^2$ ($r_n = a_0 n^2$), nesta expressão fica:

$$E_n = - \frac{k_0 e^2}{2a_0 n^2}$$

Se quisermos exprimir a energia em electrão-volt, bastará dividir o termo constante pela carga elementar e . Assim, a constante na expressão anterior, em electrões-volt, será:

$$\frac{k_0 e^2}{2a_0} = \frac{9 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2} \times 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}}{2 \times 5,3 \times 10^{-11} \text{ m}} \Leftrightarrow \frac{k_0 e^2}{2a_0} = 13,6 \text{ eV}$$

e a expressão para a energia dos níveis é:

$$E_n = - \frac{13,6}{n^2} \text{ eV}$$

Desafio

Mostre que no SI a expressão para a energia dos níveis é dada por:

$$E_n = - \frac{2,176 \times 10^{-18} \text{ J}}{n^2}$$

Assim, a energia do **estado fundamental, estado mais estável e de menor energia correspondente a $n = 1$** , é de $-13,6 \text{ eV}$. A energia do nível seguinte é cerca de $-3,40 \text{ eV}$. A energia do terceiro nível, $n = 3$, é de $-1,51 \text{ eV}$ e assim sucessivamente. À medida que n aumenta, a diferença entre os sucessivos níveis energéticos diminui, isto é, os níveis ficam cada vez mais próximos uns dos outros. **O facto de estas energias serem negativas traduz um estado de ligação do electrão e o protão do núcleo.** Ao último nível energético, $n = \infty$, atribuído o valor de referência nulo. Energias positivas correspondem a estados em que o átomo se encontra **ionizado**, isto é, estados em que o electrão já não se encontra ligado ao núcleo, tendo por isso saído do átomo.

Fornecendo energia aos átomos gasosos de hidrogénio, por exemplo, através de uma descarga eléctrica, ocorre uma **excitação**. No entanto, este acréscimo de energia é rápido e espontaneamente perdido sob a forma de radiação, ocorrendo uma **desexcitação**. O facto de os valores de E_n serem bem determinados e contínuos significa que as frequências das radiações espontaneamente emitidas também o são.

Se após a excitação a um estado de energia E_j , o electrão regressar a um estado energético mais baixo, E_i , a frequência da radiação emitida, f , verifica a relação de Planck-Einstein:

$$\Delta E = hf \Leftrightarrow E_j - E_i = hf \Leftrightarrow f = \frac{E_j - E_i}{h}$$

sendo h a constante de Planck e os índices i e j números inteiros tais que $j > i$. Esta é a razão pela qual os **espectros são descontínuos ou de riscas**. Habitualmente, agrupam-se estas riscas em séries que se caracterizam por possuírem radiações de frequências muito próximas produzidas por transições electrónicas de **níveis mais elevados para o mesmo nível inferior**. A figura 2.37 ilustra algumas dessas séries espectrais de emissão do átomo de hidrogénio. Os nomes destas séries estão relacionados com os nomes dos cientistas que as descobriram.

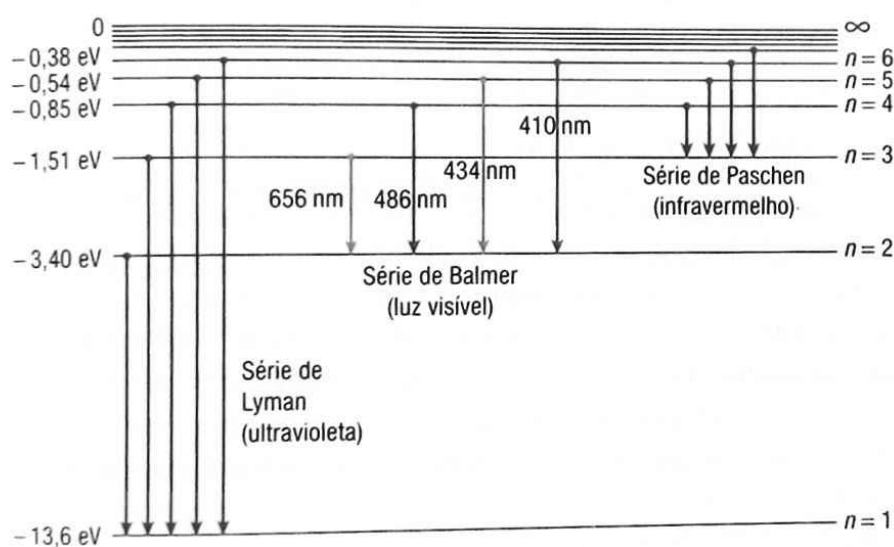


Fig. 2.37 Níveis de energia do átomo de hidrogénio e séries espectrais obtidas por emissão de fótons nas transições para níveis mais baixos de energia. A série de Balmer, transições electrónicas descendentes para o nível 2, reproduz o espectro visível observado na figura 2.34.

Questões Resolvidas

1. Após excitação eléctrica de um átomo de hidrogénio, um electrão desexcita do nível 4 para o nível 2 emitindo radiação.

Dados: $h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J s}$; $c = 3,0 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$.

- 1.1. Calcule o comprimento de onda da radiação emitida.
1.2. Identifique o tipo de radiação em causa.

Resolução

1.

$$1.1. \Delta E = E_4 - E_2 \Rightarrow E_4 - E_2 = hf \Leftrightarrow E_4 - E_2 = h \frac{c}{\lambda}$$

$$-\frac{2,179 \times 10^{-18} \text{ J}}{4^2} - \left(-\frac{2,179 \times 10^{-18} \text{ J}}{2^2} \right) = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J s} \times \frac{3,0 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}}{\lambda} \Leftrightarrow$$

$$\lambda = 4,87 \times 10^{-7} \text{ m} \Leftrightarrow \lambda = 487 \text{ nm}$$

- 1.2. Esta radiação pertence à zona visível do espectro e apresenta cor azul.

Se após a excitação a um estado de energia E_j , o electrão regressar a um estado energético mais baixo, E_i , a frequência da radiação emitida, f , verifica a relação de Planck-Einstein:

$$\Delta E = hf \Leftrightarrow E_j - E_i = hf \Leftrightarrow f = \frac{E_j - E_i}{h}$$

sendo h a constante de Planck e os índices i e j números inteiros tais que $j > i$. Esta é a razão pela qual os **espectros são descontínuos ou de riscas**. Habitualmente, agrupam-se estas riscas em séries que se caracterizam por possuírem radiações de frequências muito próximas produzidas por transições electrónicas de **níveis mais elevados para o mesmo nível inferior**. A figura 2.37 ilustra algumas dessas séries espectrais de emissão do átomo de hidrogénio. Os nomes destas séries estão relacionados com os nomes dos cientistas que as descobriram.

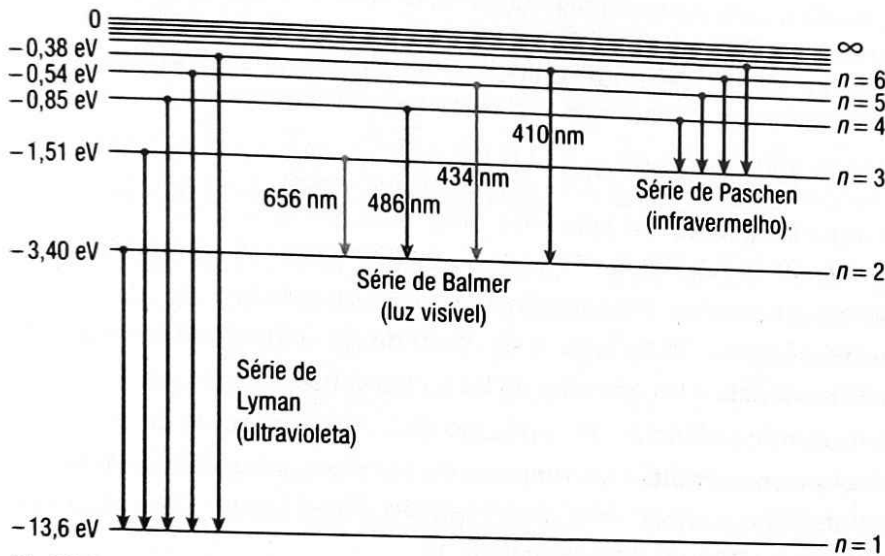


Fig. 2.37 Níveis de energia do átomo de hidrogénio e séries espectrais obtidas por emissão de fótons nas transições para níveis mais baixos de energia. A série de Balmer, transições electrónicas descendentes para o nível 2, reproduz o espectro visível observado na figura 2.34.

Questões Resolvidas

1. Após excitação eléctrica de um átomo de hidrogénio, um electrão desexcita do nível 4 para o nível 2 emitindo radiação.

Dados: $h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J s}$; $c = 3,0 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$.

1.1. Calcule o comprimento de onda da radiação emitida.

1.2. Identifique o tipo de radiação em causa.

Resolução

1. 1.1. $\Delta E = E_4 - E_2 \Rightarrow E_4 - E_2 = hf \Leftrightarrow E_4 - E_2 = h \frac{c}{\lambda}$

$$-\frac{2,179 \times 10^{-18} \text{ J}}{4^2} - \left(-\frac{2,179 \times 10^{-18} \text{ J}}{2^2} \right) = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J s} \times \frac{3,0 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}}{\lambda} \Leftrightarrow$$

$$\lambda = 4,87 \times 10^{-7} \text{ m} \Leftrightarrow \lambda = 487 \text{ nm}$$

1.2. Esta radiação pertence à zona visível do espectro e apresenta cor azul.

O conjunto das riscas situado na região visível do espectro de emissão do átomo de hidrogénio, correspondente à **série de Balmer**, apresenta em comum serem **transições electrónicas de níveis mais elevados para o nível $n=2$** . As frequências das riscas desta série podem ser obtidas de forma simples a partir da expressão seguinte, fazendo $n = 3, 4, \text{ etc.}$:

$$f = 3,29 \times 10^{15} \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \text{ Hz}$$

As restantes riscas do espectro de emissão do hidrogénio situam-se na região do UV e do IV. A **série de Lyman** (UV) caracteriza-se por corresponder a **transições electrónicas descendentes para o nível $n = 1$** , enquanto a **série de Paschen** corresponde a **transições electrónicas descendentes para o nível $n = 3$** .

O espectro de emissão é o resultado final das diferentes transições electrónicas que ocorrem simultaneamente nos inúmeros átomos que constituem a substância submetida a uma fonte de excitação. Enquanto um dos átomos emite radiação de frequência f_1 , num dado instante, outro emite radiação de frequência f_2 , outro f_3 , etc. Assim se compreende porque é que se observam simultaneamente diferentes riscas que constituem o espectro de emissão.

Este fenómeno de emissão de luz por átomos excitados quando regressam ao estado fundamental é designado por **luminescência**. Esta emissão de luz pode ser conseguida quando se submete uma substância a algum tipo de excitação, como irradiação de luz UV, ou de raios X, ou aquecimento, entre outros.

Podemos considerar os seguintes tipos de luminescência:

- **Fluorescência** – Só há lugar à emissão de luz enquanto ocorre a irradiação.
- **Fosforescência** – Há emissão de luz inclusivamente após terminar a irradiação.
- **Termoluminescência** – Há emissão de luz por acção do calor.
- **Triboluminescência** – Há emissão de luz por quebra, fricção ou pressão.
- **Radioluminescência** – Há emissão de luz através do bombardeamento com partículas altamente energéticas (α, β).

A luminescência é uma **característica intrínseca** de cada elemento químico. Por exemplo, os átomos de sódio emitem luz amarela, os átomos de césio emitem luz azul, os átomos de bário luz verde, etc.

São estas cores que observamos quando olhamos para o fogo-de-artifício. Entretanto, nos fogos-de-artifício são utilizados sais destes elementos químicos devido à reactividade do elemento puro.



Fig. 2.38 Emissão de radiações de diferentes cores num fogo-de-artifício.

Síntese de conteúdos

- De acordo com o modelo de **Dalton**, cada elemento seria formado por átomos idênticos e nas reacções químicas os átomos de diferentes elementos combinam-se produzindo novas substâncias com uma combinação diferente desses átomos.
- **Thomson** considerou os átomos como esferas maciças de carga positiva distribuída uniformemente, onde se encontravam incrustados electrões com carga negativa, como as passas num "bolo de passas". A carga positiva de cada átomo deveria ser igual e oposta à carga negativa dos electrões para que o átomo fosse neutro.
- **Rutherford** concluiu que as cargas positivas dentro dos átomos se encontram concentradas numa região muito pequena – o **núcleo atómico** – e propôs um modelo de átomo semelhante ao Sistema Solar, ou seja, um modelo em que os electrões teriam órbitas elípticas à volta do núcleo.
- **Bohr** admitiu que as **órbitas dos electrões** nos átomos só poderiam ter alguns valores permitidos para o raio. Em condições normais, os electrões ocupariam as órbitas mais próximas do núcleo e não emitiriam nenhuma onda enquanto estivessem na mesma órbita. Para fazer "saltar" um desses electrões para uma órbita mais afastada, seria preciso absorver um fóton com uma frequência específica, que corresponde à diferença de energia entre a órbita inicial e a órbita final. Os electrões nas órbitas mais afastadas teriam tendência a passar para órbitas mais próximas do núcleo, com menor energia. Em cada transição para uma órbita de menor energia, a **energia perdida pelo electrão é transferida para um fóton**.
- **Louis De Broglie** sugeriu que todas as partículas, à semelhança dos fotões, teriam também uma natureza dual onda-partícula. A onda associada a uma partícula com momento linear de módulo p tem comprimento de onda, λ , dado pela relação de De Broglie:

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

que é simplesmente uma generalização da relação que define o momento linear dos fotões. O comprimento de onda de uma partícula é inversamente proporcional ao seu momento linear, tal como acontece com os fotões.

- **Davisson e Germer** validaram experimentalmente a hipótese da natureza ondulatória da matéria proposta por De Broglie.
- As partículas da matéria apresentam propriedades ondulatórias, da mesma forma que as ondas electromagnéticas apresentam propriedades corpusculares.
- A expressão para a energia dos níveis no átomo de hidrogénio é:

$$E_n = -\frac{13,6}{n^2} \text{ eV} \quad \text{ou} \quad E_n = -\frac{2,176 \times 10^{-18}}{n^2} \text{ J}$$

- Fornecendo energia aos átomos gasosos de hidrogénio, por exemplo, através de uma descarga eléctrica, ocorre uma **excitação**. No entanto, este acréscimo de energia é rápido e espontaneamente perdido sob a forma de radiação, ocorrendo uma **desexcitação**. O facto dos valores de E_n serem bem determinados e descontínuos significa que as frequências das radiações espontaneamente emitidas também o são.
- Se após a excitação a um estado de energia E_j o electrão regressar a um estado energético mais baixo, E_i , a frequência da radiação emitida, f , verifica a relação de Planck-Einstein:

$$\Delta E = hf \Leftrightarrow E_j - E_i = hf \Leftrightarrow f = \frac{E_j - E_i}{h}$$

sendo h a constante de Planck e os índices i e j números inteiros, tais que $j > i$.

- O fenómeno de emissão de luz por átomos excitados quando regressam ao estado fundamental é designado por **luminescência**. Esta emissão de luz pode ser conseguida quando se submete uma substância a algum tipo de estímulo como irradiação de luz UV, ou de raios X, ou aquecimento, entre outros.

▶ QUESTÕES E PROBLEMAS

1. O efeito fotoelétrico foi descoberto por Heinrich Hertz em 1887. Em que consiste este efeito?

- (A) Electrões emitidos por metais por acção de radiações de qualquer energia.
- (B) Electrões emitidos por metais por acção de radiações de energia adequada.
- (C) Radiação emitida por uma substância quando absorve radiação de cor complementar à que emitiu.
- (D) Fotões emitidos por metais quando estes são sujeitos a uma corrente eléctrica.
- (E) Fotões emitidos por metais por acção de radiações de energia adequada.

Seleccione a opção correcta.

2. Com base nos resultados experimentais do efeito fotoelétrico podemos concluir que:

- (A) Este pode ser interpretado de acordo com a teoria ondulatória da luz.
- (B) O número de fotoelectrões emitidos é proporcional à energia da radiação.
- (C) A energia cinética dos fotoelectrões aumenta com o aumento da intensidade do feixe.
- (D) Cada fotão, de uma certa energia, origina a emissão de um só electrão.
- (E) Só haveria emissão de electrões com radiações abaixo de uma certa energia mínima.

Seleccione a opção correcta.

3. Considere uma fonte de radiação monocromática de cor verde e de comprimento de onda $\lambda = 510 \text{ nm}$.

3.1. Determine a ordem de grandeza de um *quantum* de energia da radiação visível verde.

3.2. Qual é a energia de um fotão de radiação verde? Justifique.

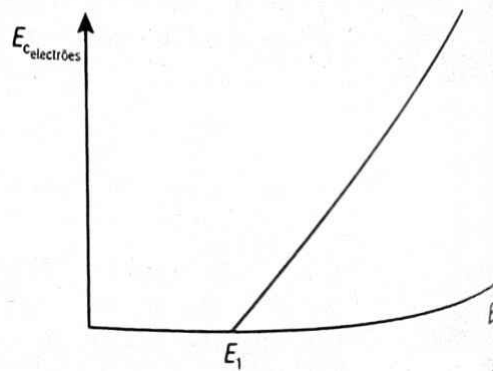
3.3. Sabendo que o olho humano pode detectar a energia mínima de $2,35 \times 10^{-18} \text{ J}$ de luz verde, calcule o número mínimo de fotões dessa luz que o olho humano tem de receber para poder detectá-la.

4. Das opções seguintes, seleccione a que corresponde à energia de um fotão de luz ultravioleta de $1,0 \times 10^{15} \text{ Hz}$, expressa em electrão-volt.

- (A) 4,1
- (B) 4,4
- (C) 4,6
- (D) 4,9

5. O gráfico da figura diz respeito a uma experiência do efeito fotoelétrico sobre um determinado metal. Com base no gráfico, responda às seguintes questões.

- 5.1. Qual é o significado do valor E_1 ?
- 5.2. Por que razão não ocorre efeito fotoelétrico para valores inferiores a E_1 ?
- 5.3. O que acontece quando é fornecido ao metal um valor de energia superior a E_1 ?



▶ QUESTÕES E PROBLEMAS

6. A energia mínima para arrancar um electrão do chumbo é de 4,25 eV.
- 6.1. Determine a energia cinética de um fotoelectrão ejectado da superfície do chumbo se sobre ele incidir radiação electromagnética de comprimento de onda $\lambda = 12,7 \text{ nm}$.
- 6.2. Classifique de verdadeira ou falsa, justificando, a seguinte afirmação:
 “No efeito fotoelétrico, a energia cinética dos fotoelectrões ejectados aumenta com o aumento da intensidade da radiação incidente no metal.”
- 6.3. Será de utilizar o metal chumbo numa célula fotoelétrica destinada a funcionar com uma fonte luminosa que emite radiação de frequência $1,02 \times 10^{14} \text{ Hz}$?
7. A função trabalho do metal sódio é 2,36 eV. Das opções seguintes, seleccione a única que corresponde à energia cinética máxima dos fotoelectrões emitidos, em eV, se luz de comprimento de onda 2000 \AA incidir sobre uma superfície metálica de sódio.
- (A) 2,3
 (B) 3,9
 (C) 4,3
 (D) 6,2
8. Incide-se luz num material fotoelétrico e não se observa a emissão de electrões. Para que ocorra a emissão de electrões do mesmo material basta que se aumente...
- (A) ... a intensidade de luz.
 (B) ... o comprimento de onda da luz.
 (C) ... a frequência da luz.
 (D) ... a velocidade da luz.
- Selecione a opção correcta.
9. Quando num metal M_1 incide a radiação electromagnética X, não ocorre efeito fotoelétrico. Quando esta mesma radiação X incide no metal M_2 , verifica-se a ocorrência do efeito fotoelétrico. Uma segunda radiação electromagnética Y provoca efeito fotoelétrico em M_1 e em M_2 .
- Das afirmações seguintes seleccione a correcta.
- (A) A energia mínima para arrancar um electrão do metal M_1 é inferior à do metal M_2 .
 (B) As radiações X e Y têm a mesma energia, mas a intensidade de Y é superior à de X.
 (C) Os electrões do metal M_2 adquirem maior energia cinética quando são removidos com a radiação Y do que quando são removidos com a radiação X.
 (D) A radiação electromagnética Y tem maior comprimento de onda do que a radiação electromagnética X.
10. A função trabalho para o chumbo é de 4,25 eV. Das seguintes opções, seleccione a que corresponde ao comprimento de onda máximo, isto é, o comprimento de onda crítico, λ_c , abaixo do qual ocorre o fenómeno fotoelétrico.
- (A) 292 nm
 (B) 300 nm
 (C) 468 nm
 (D) 500 nm

▶ QUESTÕES E PROBLEMAS

6. A energia mínima para arrancar um electrão do chumbo é de 4,25 eV.
- 6.1. Determine a energia cinética de um fotoelectrão ejectado da superfície do chumbo se sobre ele incidir radiação electromagnética de comprimento de onda $\lambda = 12,7$ nm.
- 6.2. Classifique de verdadeira ou falsa, justificando, a seguinte afirmação:
"No efeito fotoelétrico, a energia cinética dos fotoelectrões ejectados aumenta com o aumento da intensidade da radiação incidente no metal."
- 6.3. Será de utilizar o metal chumbo numa célula fotoelétrica destinada a funcionar com uma fonte luminosa que emite radiação de frequência $1,02 \times 10^{14}$ Hz?
7. A função trabalho do metal sódio é 2,36 eV. Das opções seguintes, seleccione a única que corresponde à energia cinética máxima dos fotoelectrões emitidos, em eV, se luz de comprimento de onda 2000 Å incidir sobre uma superfície metálica de sódio.
- (A) 2,3
(B) 3,9
(C) 4,3
(D) 6,2
8. Incide-se luz num material fotoelétrico e não se observa a emissão de electrões. Para que ocorra a emissão de electrões do mesmo material basta que se aumente...
- (A) ... a intensidade de luz.
(B) ... o comprimento de onda da luz.
(C) ... a frequência da luz.
(D) ... a velocidade da luz.
- Seleccione a opção correcta.
9. Quando num metal M_1 incide a radiação electromagnética X, não ocorre efeito fotoelétrico. Quando esta mesma radiação X incide no metal M_2 , verifica-se a ocorrência do efeito fotoelétrico. Uma segunda radiação electromagnética Y provoca efeito fotoelétrico em M_1 e em M_2 .
- Das afirmações seguintes seleccione a correcta.
- (A) A energia mínima para arrancar um electrão do metal M_1 é inferior à do metal M_2 .
(B) As radiações X e Y têm a mesma energia, mas a intensidade de Y é superior à de X.
(C) Os electrões do metal M_2 adquirem maior energia cinética quando são removidos com a radiação Y do que quando são removidos com a radiação X.
(D) A radiação electromagnética Y tem maior comprimento de onda do que a radiação electromagnética X.
10. A função trabalho para o chumbo é de 4,25 eV. Das seguintes opções, seleccione a que corresponde ao comprimento de onda máximo, isto é, o comprimento de onda crítico, λ_c , abaixo do qual ocorre o fenómeno fotoelétrico.
- (A) 292 nm
(B) 300 nm
(C) 468 nm
(D) 500 nm

▶ QUESTÕES E PROBLEMAS

11. Das proposições seguintes escolha a correcta.

- (A) O efeito fotoeléctrico é explicado pela teoria ondulatória da luz.
- (B) A energia cinética de um electrão ejectado depende da frequência da radiação incidente.
- (C) Dois feixes de luz com a mesma frequência têm a mesma intensidade.
- (D) O número de electrões ejectados depende da frequência da radiação incidente.

12. Os fotoelectrões ejectados de uma chapa metálica, sobre a qual se fez incidir radiação, adquirem uma velocidade $9,4 \times 10^5 \text{ m s}^{-1}$. A função trabalho do metal é de $3,68 \times 10^{-19} \text{ J}$.

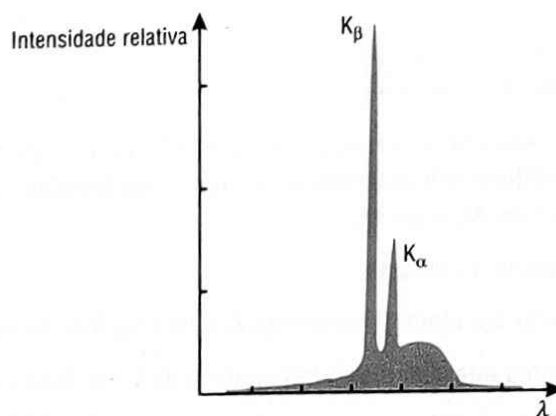
Sabendo que a massa de um electrão é de $9,10 \times 10^{-31} \text{ kg}$, calcule:

- 12.1. a frequência limiar do metal;
- 12.2. o comprimento de onda da radiação incidente.

13. Um aparelho de raios X funciona sob uma tensão de 30 kV. Das opções seguintes, seleccione a única que corresponde ao comprimento de onda mínimo da radiação produzida, em unidades SI.

- (A) $2,3 \times 10^{-11}$
- (B) $3,5 \times 10^{-11}$
- (C) $4,1 \times 10^{-11}$
- (D) $6,5 \times 10^{-11}$

14. As energias dos fótons correspondentes ao espectro discreto de raios X apresentam picos estreitos ou riscas, como é ilustrado na figura, e dependem apenas dos níveis de energia electrónicos dos átomos. Considere que os picos ou riscas são característicos do cobalto ($Z=27$), material que é utilizado na construção da lâmina metálica que constitui o alvo.



14.1. Quais são as energias dos fótons correspondentes às radiações K_α e K_β do alvo de cobalto sabendo que $\lambda_{K_\alpha} = 1,78 \text{ \AA}$ e $\lambda_{K_\beta} = 1,62 \text{ \AA}$?

14.2. Dos materiais apresentados na tabela seguinte qual pode ser usado como filtro que apenas deixa passar a radiação K_β ?

| | | | |
|------------------------|------|------|------|
| Número atómico (Z) | 24 | 26 | 28 |
| Elemento químico | Cr | Fe | Ni |
| E_K / keV | 5,99 | 7,11 | 8,33 |

E_K é a energia de ionização da camada K, isto é, a energia necessária para arrancar um electrão da camada K. Uma radiação é filtrada quando ela é absorvida, por exemplo, para ionizar uma camada do elemento filtro.

▶ QUESTÕES E PROBLEMAS

15. São feitas as seguintes afirmações sobre os raios X:

- I. Os raios X são ondas mecânicas.
- II. Em módulo, a velocidade de propagação dos raios X é igual à velocidade de propagação da luz.
- III. Os raios X têm comprimento de onda maior do que o comprimento de onda da luz visível.

Está(ão) correcta(s) apenas:

- (A) I
- (B) II
- (C) I e II
- (D) II e III

16. No modelo de Bohr para o átomo de hidrogénio, a energia de um electrão...

- (A) ... pode ter qualquer valor.
- (B) ... tem um valor indeterminado.
- (C) ... não depende da órbita do electrão.
- (D) ... tem certos valores possíveis.

Seleccione a opção correcta.

17. No átomo de hidrogénio, as energias associadas aos vários níveis são dadas por:

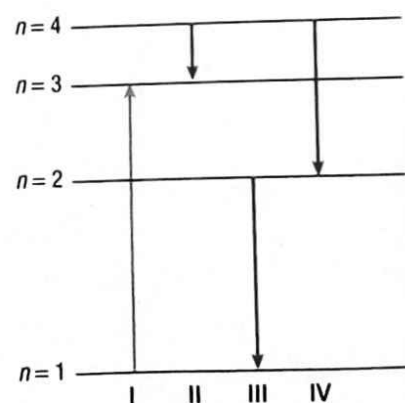
$$E_n = -\frac{13,6}{n^2} \text{ eV}$$

Determine:

- 17.1. os valores das energias E_1 , E_2 e E_3 em eV;
- 17.2. o comprimento de onda da linha menos energética da série de Lyman;
- 17.3. a frequência da linha de radiação visível de maior comprimento de onda.

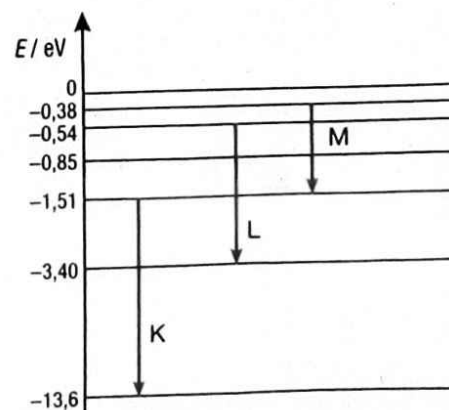
18. O diagrama ao lado mostra os níveis de energia, n , de um electrão num átomo de hidrogénio. Qual das transições ilustradas na figura representa a emissão de um fóton com maior frequência?

- (A) I
- (B) II
- (C) III
- (D) IV



19. Observe o diagrama ao lado dos níveis de energia no átomo de hidrogénio. Considerando as três transições electrónicas assinaladas pelas letras K, L e M, determine:

- 19.1. o comprimento de onda da transição visível;
- 19.2. a frequência da transição ultravioleta.



3.1. Núcleos atômicos e radioatividade

Conteúdos

- Energia de ligação nuclear e estabilidade dos núcleos.
- Processos de estabilização dos núcleos: decaimento radioactivo.
- Propriedades das emissões radioactivas (alfa, beta e gama).
- Lei do decaimento radioactivo.
- Período de decaimento (tempo médio de vida).
- Actividade de uma amostra radioactiva.
- Fontes naturais e artificiais de radioactividade.
- Detectores de radiação ionizante.
- Efeitos biológicos da radioactividade. Dose de radiação absorvida e dose-equivalente biológica.
- Aplicações da radiação ionizante.
- Reacções nucleares de fissão e de fusão nucleares.

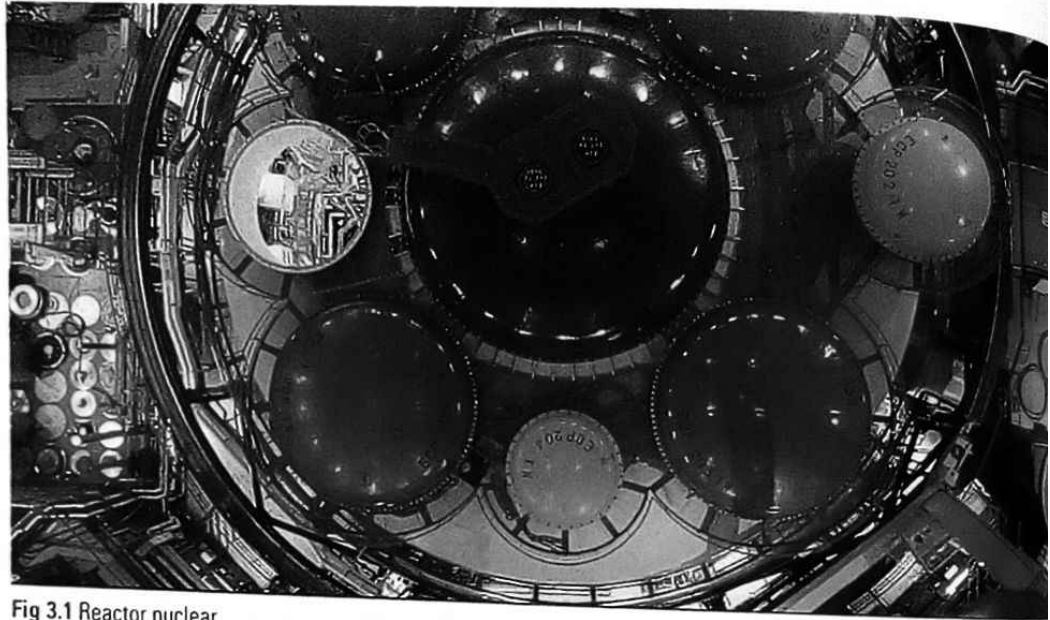


Fig 3.1 Reactor nuclear.

► Energia de ligação nuclear e estabilidade dos núcleos

Pode dizer-se que a **física nuclear** nasceu, em 1896, com **Antoine Henri Becquerel**, quando estudava a emissão e a absorção de luz pela matéria.

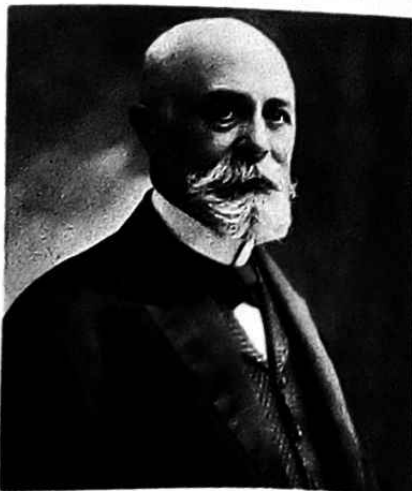
Acidentalmente, observou que sais de urânio emitiam uma radiação invisível e altamente penetrante, capaz de impressionar placas fotográficas protegidas e capazes de ionizar gases.

Depois de ter tido conhecimento da existência de raios X, que tinham sido descobertos por Röntgen no ano anterior, a partir da fluorescência que estes raios produziam em certos materiais, Becquerel resolveu investigar um possível processo inverso, isto é, se haveria possibilidade de os sais de urânio se tornarem fluorescentes depois de serem expostos à luz solar, emitindo também raios X. Para isso, usou uma amostra de sulfato duplo de urânio e potássio e colocou-a sobre uma placa fotográfica, embrulhada em papel preto e expôs o conjunto à luz solar no parapeito de uma janela. Nas primeiras experiências, observou o aparecimento de uma imagem da amostra na placa fotográfica, o que lhe sugeria que a amostra estava efectivamente a emitir raios X.

Veio ainda a verificar que uma amostra do sal de urânio que havia sido guardada numa gaveta, sem ser exposta à luz, também impressionava uma placa fotográfica. Perante estes factos, Becquerel concluiu que o material emitia espontaneamente uma radiação penetrante, até então desconhecida. Descobria-se, assim, a **radioactividade**.

Muita investigação se seguiu a esta descoberta nas primeiras décadas do século XX, no sentido de se compreender a radiação emitida pelos núcleos radioactivos.

Foi pioneiro o trabalho de **Ernest Rutherford**, que mostrou a existência de **tipos de radiações**, as quais designou por **radiações α , β e γ** , de acordo com a sua capacidade de penetrar na matéria e de ionizar o ar.



Antoine Henry Becquerel
(1852-1908)

A **radiação α** era a menos penetrante e a que produzia maior ionização; a **radiação γ** era a mais penetrante e a que produzia menor ionização; a **radiação β** apresentava propriedades intermédias.

Experiências posteriores mostraram que a **radiação α** são núcleos de átomos de hélio, ${}^4\text{He}$, a **radiação β** são electrões ou positrões (partículas em tudo semelhantes aos electrões, excepto na sua carga eléctrica, que é positiva) e a **radiação γ** são fótons de alta energia.

Mas a que se deve o fenómeno da radioactividade?

O fenómeno da radioactividade deve-se à existência de núcleos que não são estáveis e que se transformam noutros, resultando núcleos mais estáveis.

Como sabemos, o **átomo** é constituído por um **núcleo** central muito pequeno, de carga positiva, onde se encontram os **protões** e os **neutrões**, e por uma **nuvem electrónica**, em volta do núcleo, onde se encontram os **electrões**.

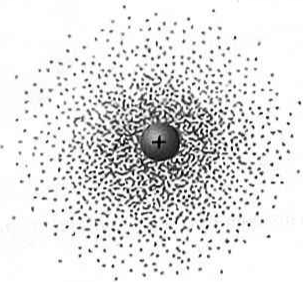


Fig. 3.2 Átomo com o seu núcleo central e a nuvem electrónica.

Este foi o modelo estabelecido experimentalmente por Ernest Rutherford, em 1911.

Ernest Rutherford chegou a esta conclusão ao bombardear finas lâminas de ouro com partículas α . Observou que a maior parte destas partículas atravessavam as lâminas de ouro sem sofrerem grandes desvios.

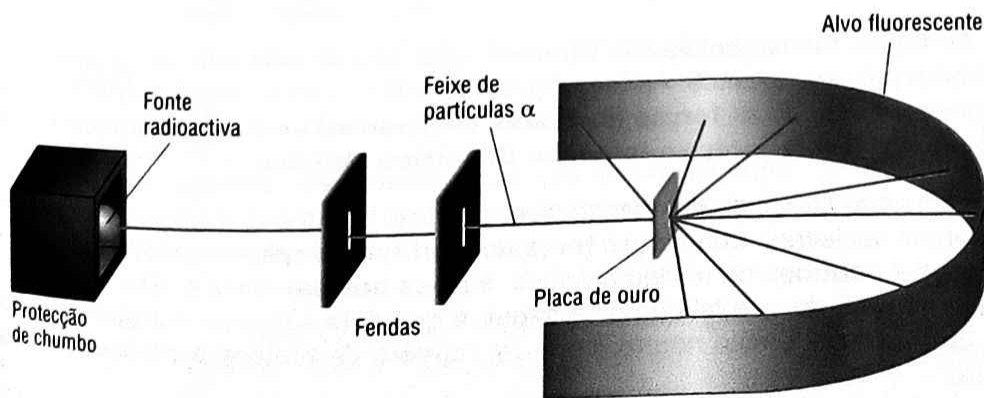
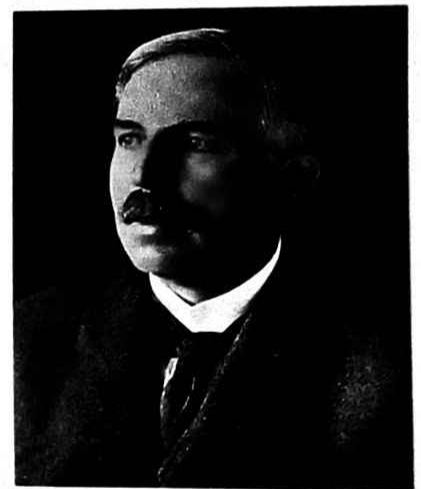


Fig. 3.3 Experiência de Rutherford.

Com base nestas observações, concluiu que o átomo não podia ser uma esfera com carga positiva, uniformemente distribuída, onde se encontravam os electrões com carga negativa, como então se pensava. Para Rutherford, a maior parte do espaço atômico é espaço vazio, com um pequeno núcleo central, positivo, onde se concentra a maior parte da massa do átomo.

Por serem neutros, os neutrões não contribuem para a carga do núcleo, mas contribuem para a sua massa. A massa do neutrão (em repouso) é sensivelmente igual à massa do protão ($m_p = 1,6726 \times 10^{-27}$ kg e $m_n = 1,6750 \times 10^{-27}$ kg).

Já a massa do electrão (em repouso) é cerca de 1836 vezes inferior à massa do protão ($m_e = 9,109 \times 10^{-31}$ kg).



Ernest Rutherford
(1871-1937)

Estabilidade dos núcleos atômicos

A presença de neutrões no núcleo é muito importante para assegurar a **estabilidade nuclear**. Apesar das forças electrostáticas de repulsão entre os prótons, os prótons e os neutrões mantêm-se unidos nos núcleos atômicos devido à **força nuclear forte**. Esta força de atracção extremamente intensa entre os prótons e neutrões (genericamente chamados nucleões) compensa a força electrostática de repulsão, sendo, por isso, responsável pela estabilidade dos núcleos. Entretanto, alguns núcleos que são instáveis e que se desintegram, originando o fenómeno da radioactividade.

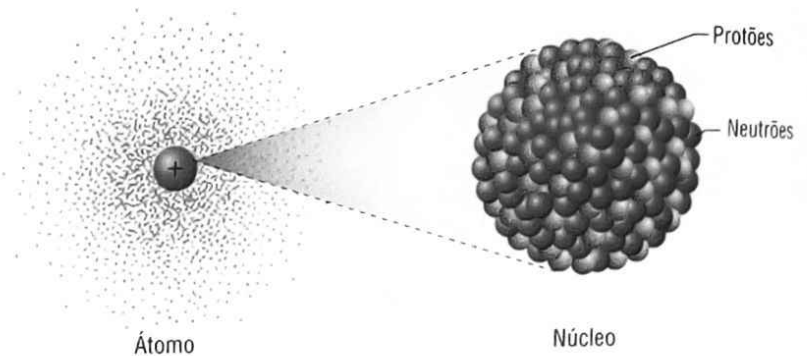


Fig. 3.4 Os prótons e os neutrões mantêm-se unidos no núcleo atômico devido à força nuclear forte

Repare

Ordens de grandeza de intensidades relativas das forças fundamentais considerando 1 a intensidade da força nuclear forte.

| | |
|------------------------|--------------|
| Força gravitacional | $- 10^{-40}$ |
| Força electromagnética | $- 10^{-2}$ |
| Força nuclear forte | $- 1$ |
| Força nuclear fraca | $- 10^{-5}$ |

As **forças fundamentais na Natureza** são:

- Força gravitacional.
- Força electromagnética.
- Força nuclear forte.
- Força nuclear fraca.

As forças fundamentais são caracterizadas não só pela sua intensidade, mas também pelo seu alcance. As forças gravitacional e electromagnética possuem alcance infinito. Já as **forças nucleares exercem-se apenas a distâncias muito curtas**, isto é, **inferiores ao tamanho do núcleo atômico** ($\approx 10^{-15}$ m).

Só no século XX, ao estudar-se a constituição do átomo, é que se descobriu as forças nucleares. Enquanto a **força nuclear forte** é responsável pela união dos prótons e neutrões no núcleo atômico, a **força nuclear fraca** é responsável pelo decaimento β de que falaremos a seguir e que está subjacente à transformação de um núcleo atômico neutro, com um número de prótons e de neutrões iguais, em um núcleo radioactivo.

O factor principal que determina se um núcleo é estável é a **razão neutrão/protão, N/Z** . Para **átomos estáveis** de elementos de número atômico baixo, o valor N/Z é próximo de 1.

À medida que o número atômico, Z , aumenta, as razões neutrão/protão para núcleos estáveis tornam-se maiores do que 1. Este desvio para números atômicos maiores vem do facto de ser necessário um maior número de neutrões para estabilizar o núcleo.

A figura 3.5, da página seguinte, mostra um **gráfico do número de neutrões em função do número de prótons** para vários isótopos estáveis. A linha tracejada corresponde à razão neutrão/protão igual a 1 ($N = Z$) e a área sombreada representa a **faixa de estabilidade**.

Recorde

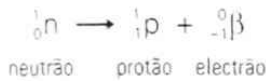
- **Número atômico, Z** – número de prótons de um núcleo.
- **Número de massa, A** – soma do número de prótons com o número de neutrões.
- **Nuclídeo** – representação de uma espécie atômica por:



onde X é o símbolo químico do elemento.

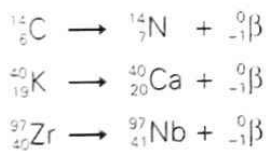
Os **núcleos estáveis** situam-se, portanto, na faixa de estabilidade. A maior parte dos núcleos radioactivos fica fora desta faixa. Assim:

- **Acima da faixa de estabilidade**, os núcleos têm razões neutrões/protões maiores do que os da faixa de estabilidade (para o mesmo número de protões). Para baixar esta razão (e assim aproximarem-se da faixa de estabilidade), **estes núcleos emitem partículas β^-** (electrões):

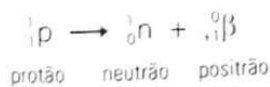


A emissão de uma partícula β^- conduz a um aumento do número de protões no núcleo e a uma diminuição simultânea do número de neutrões.

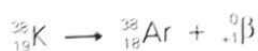
Exemplos:



- **Abaixo da faixa de estabilidade**, os núcleos têm razões neutrões/protões (para o mesmo número de protões) inferiores às da faixa de estabilidade. Para aumentar esta razão (e assim aproximarem-se da faixa de estabilidade), estes núcleos **ou emitem partículas β^+** (positrões):

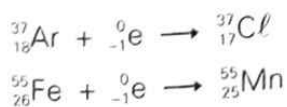


Exemplo:



ou sofrem captura electrónica – captura de um electrão (geralmente um electrão 1s) pelo núcleo. O electrão capturado combina-se com um protão para formar um neutrão.

Exemplos:



Verifica-se também que:

- **Os núcleos que contêm 2, 8, 20, 50, 82 ou 126 protões ou neutrões são geralmente mais estáveis** do que os que não têm estes números de partículas. Por exemplo, há 10 isótopos (átomos do mesmo elemento que diferem apenas no número de neutrões no núcleo) estáveis de estanho (Sn) com o número atômico 50 e apenas 2 isótopos estáveis de antimónio (Sb) com número atômico 51. Os números 2, 8, 20, 50, 82 e 126 são conhecidos por "números mágicos". O significado destes números para a estabilidade nuclear é semelhante à do número de electrões associados aos gases nobres muito estáveis (isto é, 2, 10, 18, 36, 54 e 86 electrões).

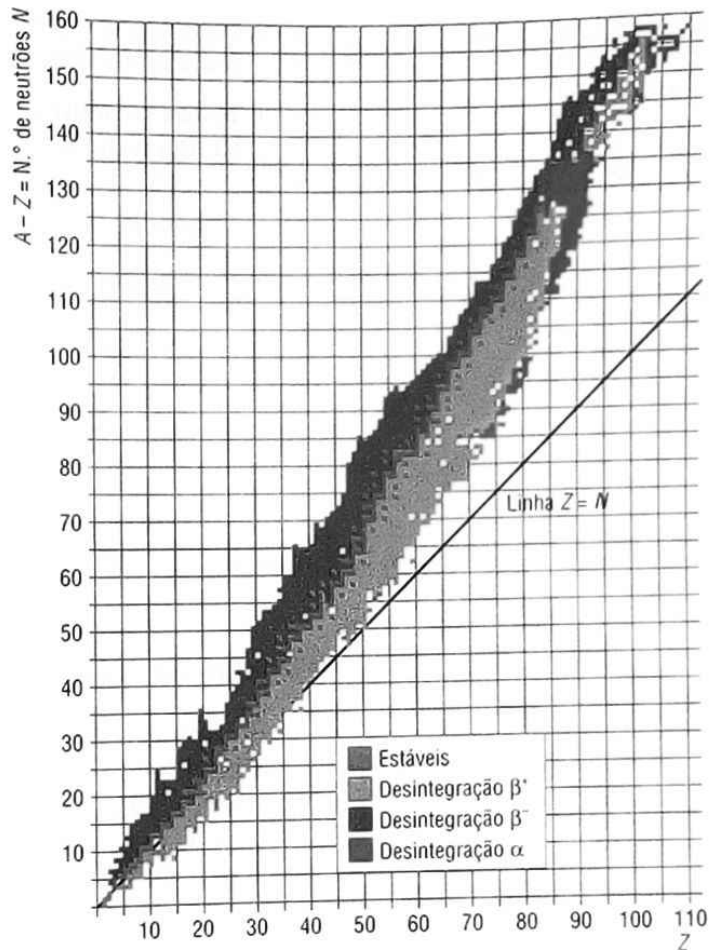


Fig. 3.5 Gráfico do número de neutrões em função do número de protões para vários isótopos estáveis.

Repare

Simbolos das partículas elementares:

protão – 1_1p ou 1_1H

neutrão – 1_0n

electrão – ${}^0_{-1}e$ ou ${}^0_{-1}\beta$

positrão – ${}^0_{+1}e$ ou ${}^0_{+1}\beta$

partícula α – 4_2He ou ${}^4_2\alpha$

Repare

Usamos nestes últimos exemplos ${}^0_{-1}e$ e não ${}^0_{-1}\beta$ porque o electrão veio de uma orbital atômica e não de uma emissão β por parte do núcleo.

- Os núcleos com um número par de prótons e de nêutrons são geralmente mais estáveis do que os que possuem um número ímpar destas partículas.
- Todos os isótopos dos elementos com números atômicos superiores a 83 são radioativos.

| Número de isótopos estáveis com números pares e ímpares de prótons e de nêutrons | | |
|--|-----------|-----------------------------|
| Prótons | Nêutrons | Número de isótopos estáveis |
| N.º ímpar | N.º ímpar | 4 |
| N.º ímpar | N.º par | 50 |
| N.º par | N.º ímpar | 53 |
| N.º par | N.º par | 164 |

Tabela I

Energia de ligação nuclear

A **massa** total de um **núcleo** (à exceção do prótio - ${}^1_1\text{H}$) é sempre **menor** que a **soma das massas** dos seus **nucleões** (prótons e nêutrons).

Há, portanto, uma **diferença de massa** entre os prótons e os nêutrons separados e os mesmos prótons e nêutrons juntos, num núcleo atômico. Isso dá-se à **energia de ligação nuclear**.

De acordo com a **relação de equivalência entre massa e energia** de Einstein:

$$E = mc^2$$

a **energia libertada**, ΔE , no processo de **formação de um núcleo** a partir de prótons e nêutrons considerados em separado, corresponde à **diminuição de massa**, Δm , que se verifica.

$$\Delta E = (\Delta m)c^2$$

Assim, se um núcleo é constituído por Z prótons e N nêutrons, a massa das partículas quando suficientemente afastadas umas das outras é:

$$Zm_p + Nm_n$$

Quando essas partículas se juntam num núcleo atômico, a massa, M , do núcleo é menor, sendo a diminuição de massa, Δm , dada por:

$$\Delta m = Zm_p + Nm_n - M$$

A esta diferença entre a soma das massas dos prótons e dos nêutrons existentes num núcleo e a sua massa total dá-se o nome de **defeito de massa**.

A **energia de ligação nuclear** relaciona-se, então, com a diferença de massa através da relação de Einstein:

$$\Delta E = (Zm_p + Nm_n - M)c^2$$

A energia que se liberta na formação de um núcleo atômico é também a energia que seria necessário fornecer ao núcleo para o desagregar nos prótons e nêutrons que o constituem.

Energia de ligação nuclear – energia libertada quando um núcleo se forma a partir dos seus constituintes ou energia fornecida para desagregar um núcleo nas partículas constituintes.

Questões Resolvidas

1. A massa atômica relativa do iodo é $A_r(\text{I}) = 126,9004$. Calcule:
- 1.1. a energia de ligação nuclear do nuclídeo $^{127}_{53}\text{I}$ ($m_p = 1,6726 \times 10^{-27} \text{ kg}$ e $m_n = 1,6750 \times 10^{-27} \text{ kg}$);
 - 1.2. a energia de ligação por nucleão correspondente;
 - 1.3. a razão neutrão/protão e, com base no gráfico da figura 3.5., diga se este isótopo é estável.

Resolução

- 1.1. O núcleo do isótopo $^{127}_{53}\text{I}$ é constituído por 53 prótons e 74 neutrões.

Então:

- Massa dos prótons e dos neutrões muito afastados:

$$53 m_p + 74 m_n = 53 \times 1,6726 \times 10^{-27} \text{ kg} + 74 \times 1,6750 \times 10^{-27} \text{ kg} \Leftrightarrow 53 m_p + 74 m_n = 212,5978 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

- Massa atômica expressa em quilogramas:

$$M(\text{I}) = 126,9004 \text{ g mol}^{-1} \Leftrightarrow M(\text{I}) = \frac{126,9004 \times 10^{-3} \text{ g mol}^{-1}}{6,022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}} \Leftrightarrow M(\text{I}) = 210,7280 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

- Diferença de massa:

Como a massa do electrão é cerca de 1836 vezes inferior à massa do próton ou neutrão, considera-se a massa do átomo aproximadamente igual à massa do núcleo atômico. Então:

$$\Delta m = 210,7280 \times 10^{-27} \text{ kg} - 212,5978 \times 10^{-27} \text{ kg} \Leftrightarrow \Delta m = -1,8698 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

- Energia de ligação nuclear:

$$\Delta E = (\Delta m) c^2$$

$$\Delta E = 1,8698 \times 10^{-27} \text{ kg} \times (3,00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1})^2 \Leftrightarrow \Delta E = 1,6828 \times 10^{-10} \text{ J}$$

Repare

A energia de ligação considera-se sempre positiva.

- 1.2. Sendo o número de nucleões 127 (53 prótons + 74 neutrões = 127 nucleões), tem-se:

$$\Delta E/\text{nucleão} = \frac{1,6828 \times 10^{-10} \text{ J}}{127} \Leftrightarrow \Delta E/\text{nucleão} = 1,3250 \times 10^{-12} \text{ J/nucleão}$$

- 1.3. A razão neutrão/protão é, para o $^{127}_{53}\text{I}$:

$$\frac{N}{Z} = \frac{74}{53} \Leftrightarrow \frac{N}{Z} = 1,4$$

Por análise do gráfico da figura 3.5, verifica-se que o iodo-127 encontra-se na faixa de estabilidade, pelo que é um isótopo estável.

Portanto, quanto **maior** for a **diferença de massa**, **maior** é a **energia de ligação** nuclear e **mais estável** é o núcleo.

Também no caso de um núcleo atômico com maior número de nucleões, isto é, com **maior número de massa**, **A**, a **energia de ligação** é **maior**.

A **energia de ligação associada a um núcleo** é um indicador da **estabilidade do núcleo**.

Contudo, ao compararmos a estabilidade de dois núcleos quaisquer temos de ter em conta que eles têm um número de nucleões diferente. Daí, neste caso, ser mais significativo usar a **energia de ligação por nucleão**, $\Delta E/\text{nucleão}$:

$$\Delta E/\text{nucleão} = \frac{\Delta E}{n.^\circ \text{ nucleões}}$$

A energia de ligação por nucleão permite, portanto, comparar a estabilidade de todos os núcleos numa base comum.

A figura 3.6 mostra a variação da **energia de ligação por nucleão em função do número de massa**.

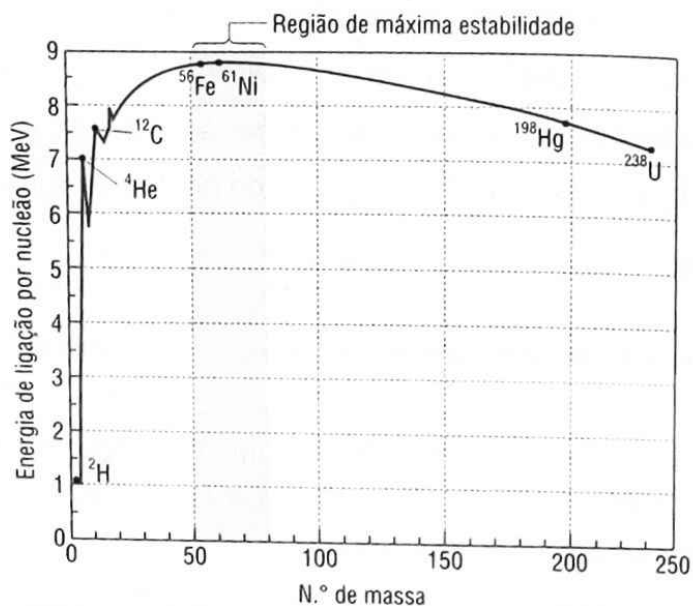


Fig. 3.6 Gráfico da energia de ligação por nucleão em função do número de massa, A.

Como se pode ver, a curva sobe bastante abruptamente, para valores baixos de números de massa. As energias de ligação mais altas (por volta de 8,8 MeV/nucleão) dizem respeito a elementos com números de massa intermédios – entre 40 e 100 – e são máximas para os elementos na região do ferro, do cobalto e do níquel (os elementos dos grupos 8, 9 e 10) da Tabela Periódica. O ferro-56 é o elemento que apresenta valor máximo. Para números de massa superiores, a energia de ligação por nucleão decresce suavemente. Pode concluir-se que a energia de ligação por nucleão oscila pouco, à excepção nos núcleos mais leves.

A queda gradual da energia de ligação por nucleão, para valores elevados do número de massa, A, deve-se à repulsão electrostática dos prótons que aumenta com Z^2 , fazendo diminuir a energia de ligação.

Para **valores muito grandes de número de massa, A**, a repulsão electrostática torna-se tão intensa que um núcleo com $A > 300$ é instável e tende a sofrer **fissão nuclear espontânea**.

Refira-se também que o valor mais baixo da energia de ligação por nucleão é do **deutério** (isótopo do hidrogénio). O facto de a sua energia de ligação ser muito baixa significa que é relativamente fácil separá-lo nas partículas constituintes.

► Processos de estabilização dos núcleos: decaimento radioactivo

Decaimento radioactivo

Como já foi referido, os núcleos que estão fora da faixa de estabilidade, bem como os núcleos com mais de 83 prótons, tendem a ser estáveis.

A emissão, por núcleos instáveis, de partículas ou de radiações electromagnéticas, ou das duas, é conhecida como **radioactividade**.

A este processo também se chama **decaimento**.

Dos mais de 3000 nuclídeos conhecidos, apenas cerca de 266 são estáveis. Todos os outros são instáveis, isto é, radioactivos, transformando-se espontaneamente em outros nuclídeos e emitindo partículas e/ou radiação electromagnética.

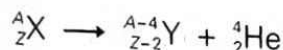
A **radioactividade** consiste na transformação ou desintegração de núcleos instáveis com formação de núcleos mais estáveis, por emissão de partículas e/ou radiação electromagnética.

Dissemos já que os decaimentos ou emissões radioativas podem ser de três tipos:

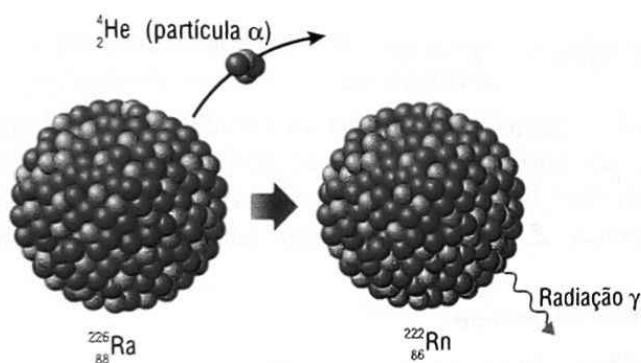
• Decaimento α

Neste decaimento, um núcleo, ao emitir uma **partícula α** (${}^4_2\text{He}$) numa desintegração espontânea, perde dois prótons e dois nêutrons. Portanto, o **número atômico, Z , diminui duas unidades** e o **número de massa, A , diminui quatro unidades**.

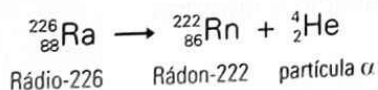
O decaimento pode ser representado esquematicamente da seguinte forma:



onde X é o núcleo-pai (núcleo original) e Y é o núcleo-filho (núcleo que se formou).



A **equação nuclear** que traduz esta **reação nuclear** é:



Na **escrita de uma equação nuclear**:

- Os elementos têm de ser representados pelos respectivos **nuclídeos** (${}^A_Z\text{X}$).
- Ter em atenção a **conservação da carga** (o número total de cargas nos reagentes e nos produtos tem de ser igual).

No exemplo anterior é: $88 = 86 + 2$.

- Ter em atenção a **conservação do número de nucleões** (o número de nucleões nos reagentes e nos produtos tem de ser igual).

No exemplo anterior é: $226 = 222 + 4$.

A emissão α ocorre, principalmente, em núcleos grandes, nos quais a força nuclear forte não é capaz de manter unidos os prótons e os nêutrons.

Pela conservação da massa-energia, pode verificar-se que o decaimento α é possível sempre que a massa do núcleo original é maior que a soma das massas do núcleo que se formou e do núcleo do átomo de hélio (partícula α).

• Decaimento β

O decaimento β ocorre com núcleos que possuem um número excessivo ou insuficiente de nêutrons para serem estáveis.

Neste tipo de decaimento, o **número de massa, A , permanece constante**, enquanto o **número atômico, Z , pode aumentar de uma unidade** (decaimento β^-) ou **diminuir de uma unidade** (decaimento β^+).



Fig. 3.7 Certos núcleos radioativos são naturais. A rocha da figura contém um sal de urânio que é radioativo.

Repare

Num decaimento α :

- O núcleo perde o mesmo número de prótons e de nêutrons.
- O núcleo que se obtém diz respeito ao elemento químico que se encontra, na Tabela Periódica, dois lugares à esquerda do elemento original.

Repare

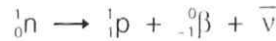
No **decaimento β^-** , o núcleo que se obtém diz respeito ao **elemento químico** que se encontra, na Tabela Periódica, **um lugar à direita do elemento original**.

- **Decaimento β^-** – neste decaimento, um núcleo instável, com excesso de neutrões (situado na parte de cima da franja de estabilidade), ao emitir um **electrão (${}_{-1}^0\beta$)** e um **antineutrino ($\bar{\nu}$)** transforma-se nouro núcleo com **número atómico, Z, superior em uma unidade e com igual número de massa, A**.
Esquemáticamente, tem-se:



O **electrão emitido** provém da desintegração de um neutrão, segundo o esquema:

neutrão \rightarrow protão + electrão + antineutrino
ou



Exemplo:

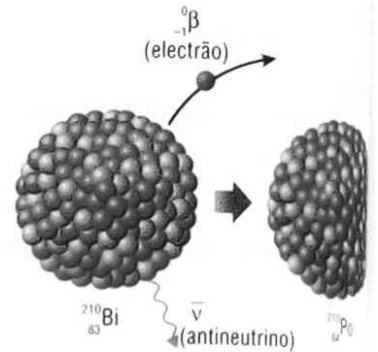


Fig. 3.9 Decaimento β^- .

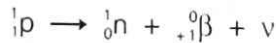
- **Decaimento β^+** – neste decaimento, um núcleo instável, com défice de neutrões (situado por baixo da franja de estabilidade), torna-se mais estável emitindo um **positrão (${}_{+1}^0\beta$)** e um **neutrino (ν)** e originando um outro núcleo com **número atómico, Z, inferior em uma unidade e com igual número de massa, A**.

Esquemáticamente tem-se:



O **positrão emitido** provém da desintegração de um protão, segundo o esquema:

protão \rightarrow neutrão + positrão + neutrino
ou



Exemplo:

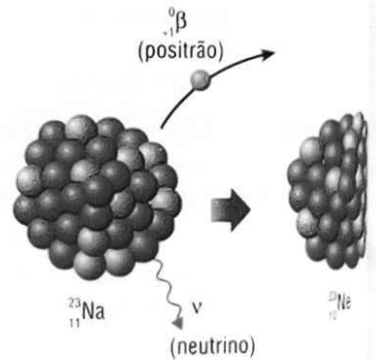
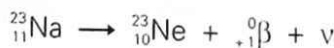


Fig. 3.10 Decaimento β^+ .

É importante observar que o electrão (${}_{-1}^0\beta$) e o positrão (${}_{+1}^0\beta$) que participam nos decaimentos β^- e β^+ , respectivamente, são criados no núcleo, da mesma forma que é criado um fóton quando um átomo sofre uma desexcitação devido a uma transição electrónica de um nível de energia para outro de energia inferior.

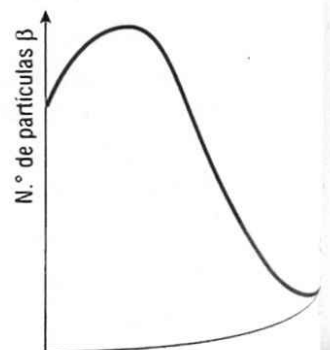
Repare

No **decaimento β^+** , o núcleo que se obtém diz respeito ao **elemento químico** que se encontra, na Tabela Periódica, **um lugar à esquerda do elemento original**.

PENSAMENTO FÍSICO

Decaimento β

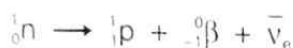
No **decaimento β^-** , um núcleo de número de massa A e número atómico Z transforma-se, como vimos, num núcleo de número de massa igual e número atómico Z + 1, com emissão de um electrão. Se a energia do decaimento fosse totalmente convertida em energia cinética do electrão emitido, o electrão seria emitido sempre com a mesma energia. Na prática, porém, observa-se que a energia dos electrões emitidos no decaimento β^- varia de zero até à energia do decaimento.



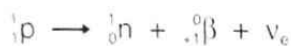
A figura mostra uma distribuição típica da energia desses electrões.

Para explicar a aparente não conservação da energia no decaimento β , Pauli propôs, em 1930, que uma terceira partícula, à qual chamou **neutrino**, também era emitida. Como a energia máxima do electrão emitido era igual à energia do decaimento, Pauli supôs que a energia de repouso da nova partícula fosse nula. Em 1948, medidas dos momentos do electrão emitido e do núcleo formado mostraram que uma terceira partícula era também necessária para que a Lei da Conservação do Momento Linear não fosse violada no decaimento β . O neutrino foi observado experimentalmente, pela primeira vez, em 1957. Hoje, sabe-se que existem pelo menos **três tipos de neutrinos**: um ν_e associado ao electrão (e^-), um ν_μ associado ao muão (μ) e um terceiro ν_τ que ainda não foi observado experimentalmente, associado ao tauão (τ). Além disso, cada neutrino possui uma **antipartícula**. As antipartículas do neutrino do electrão, do neutrino do muão e do neutrino do tauão são representadas, respectivamente, pelos símbolos $\bar{\nu}_e$, $\bar{\nu}_\mu$ e $\bar{\nu}_\tau$.

É o **antineutrino do electrão** que é emitido no **decaimento de um neutrão**:



No **decaimento β^+** , um protão transforma-se num neutrão com a emissão de um **positrão** (antipartícula do electrão) e um **neutrino**:

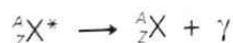


O neutrino e o antineutrino não têm carga eléctrica e a sua massa é extremamente pequena.

• Decaimento γ

No decaimento γ , um núcleo radioactivo num estado excitado decai para um estado de menor energia emitindo um fotão.

Neste decaimento, não há alteração nem do número atómico nem do número de massa. Trata-se de um processo análogo ao que se passa com a emissão de fotões por átomos e moléculas.



Exemplo:

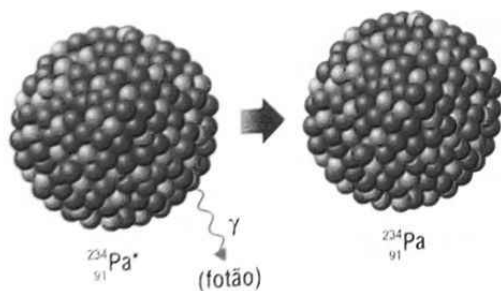
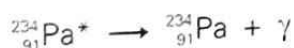


Fig. 3.11 Decaimento γ .

Como o espaçamento entre os níveis de energia dos núcleos é da ordem de 1 MeV (e não de 1 eV, como nos átomos), os comprimentos de onda dos fotões emitidos são da ordem de 1 pm ($1 \text{ pm} = 10^{-12} \text{ m}$):

$$\lambda = \frac{hc}{E}; \quad \lambda = \frac{4,136 \times 10^{-21} \text{ MeV} \times 3,00 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}}{1 \text{ MeV}} \Leftrightarrow \lambda = 1,2 \times 10^{-12} \text{ m}$$

A **vida média** associada ao **decaimento γ** é, em geral, **muito curta**, da ordem de 10^{-11} s . Os **decaimentos α e β** são normalmente acompanhados de emissão γ . Assim, por exemplo, quando um núcleo radioactivo decai por emissão β para um estado excitado do núcleo filho, o núcleo filho, por sua vez, decai para o estado fundamental por emissão γ .



Wolfgang Pauli
(1900-1958)

► Propriedades das emissões radioactivas (alfa, beta e gama)

Na tabela II resumem-se as principais propriedades das emissões alfa, beta e gama.

| Propriedade | Decaimento α | Decaimento β | Decaimento γ |
|--|---|---|--|
| Natureza | Núcleos de átomos de hélio. | Electrões ou positrões. | Radiação electromagnética de elevada frequência. |
| Massa (protão = 1 u) | ≈ 4 | $\frac{1}{1836}$ | - |
| Carga eléctrica (carga do protão = 1) | + 2 | - 1 ou + 1 | - |
| Velocidade ($m s^{-1}$) | $\approx 2 \times 10^7$ | $\approx 2 \times 10^8$ | 3×10^8 |
| Poder ionizante | Forte | Fraco | Muito fraco |
| Poder penetrante | Fraco; podem ser absorvidas por uma folha de papel, pela pele ou por uma espessura de alguns centímetros de ar. | Bastante penetrantes; podem ser absorvidas por uma espessura de 5 mm de alumínio. | Altamente penetrantes; podem ser absorvidas por uma espessura de 25 mm de chumbo ou por uma parede de betão. |
| Poder penetrante relativo | 1 | ≈ 100 | ≈ 1000 |
| Acção de campos magnético ou eléctrico | São desviadas por campos magnético e eléctrico. | Fortemente desviadas pelos campos magnético e eléctrico. | Não são desviadas. |

Tabela II Propriedades das emissões alfa, beta e gama.

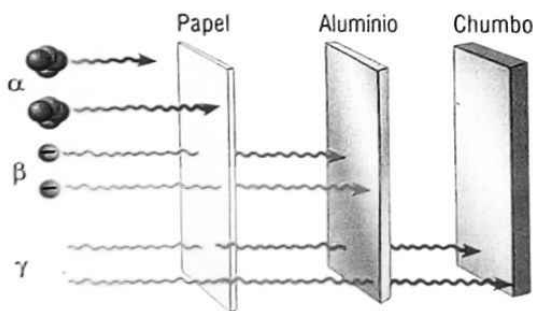


Fig. 3.12 Comparação do poder de absorção das partículas α e β e da radiação γ por diferentes materiais.

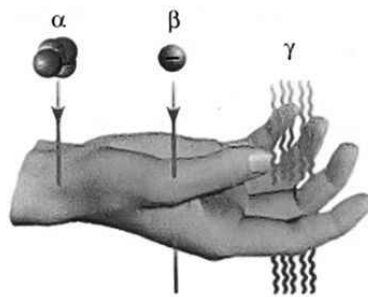


Fig. 3.13 Comparação do poder de penetração das partículas α e β e da radiação γ no corpo humano.

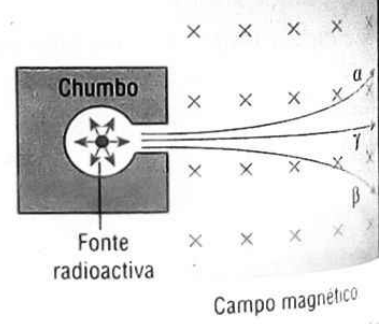


Fig. 3.14 Comparação do desvio das partículas α e β e da radiação γ por um campo magnético.

no radiação ionizante é usado não só para certas radiações electromagnéticas como também para emissões radioactivas na forma de partículas.

► Lei do Decaimento Radioactivo

Numa amostra radioactiva existe um número muito elevado de núcleos activos, pelo que o seu decaimento pode ser estudado por métodos estatísticos.

Seja N o número de núcleos radioactivos de uma amostra, num determinado instante de tempo, t .

À medida que o tempo passa, o número N de núcleos radioactivos presentes na amostra diminui de acordo com a expressão:

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

Lei do Decaimento Radioactivo

onde N_0 é o número de núcleos radioactivos existentes inicialmente na amostra ($t = 0$ s) e λ é a constante de decaimento. Esta é uma característica da substância; indica a probabilidade, por unidade de tempo, de ocorrência de um processo radioactivo.

A função exponencial $N = f(t)$ da Lei do Decaimento Radioactivo está representada no gráfico da figura 3.15.

Como podemos constatar, o **número de núcleos** da amostra radioactiva **diminui exponencialmente com o tempo**.

Define-se **tempo médio de vida**, τ , também designada por **vida média**, como o inverso da constante de decaimento, λ .

$$\tau = \frac{1}{\lambda}$$

Então, uma constante de decaimento, λ , elevada significa um tempo médio de vida curto. Fazendo $t = \tau$ na Lei do Decaimento Radioactivo, tem-se:

$$N = e^{-1} N_0 \iff N = 0,367 N_0$$

o que significa que o tempo médio de vida, τ , é, portanto, o tempo que o número de núcleos radioactivos da amostra demora a reduzir-se a cerca de 37% do valor inicial.

► Período de decaimento

O **período de decaimento**, também designado por **tempo de meia-vida** ou **período de semidesintegração**, $T_{1/2}$, é o tempo que decorre até que o número de núcleos radioactivos se reduza a metade do valor inicial, conforme ilustrado nas figuras 3.16 e 3.17.

Então, se substituirmos

$$N = \frac{N_0}{2} \text{ e } t = T_{1/2}$$

na Lei do Decaimento Radioactivo, tem-se:

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}} \iff \frac{1}{2} = e^{-\lambda T_{1/2}} \implies \ln 2 = \lambda T_{1/2} \iff T_{1/2} = \tau \ln 2$$

Os períodos de decaimento, $T_{1/2}$, dos núcleos radioactivos variam desde valores muito pequenos (inferiores a 1 μ s) até valores muito grandes (superiores a 10^{16} anos).

Na **tabela III** apresentam-se alguns exemplos de períodos de decaimento de vários núcleos, bem como o tipo de decaimento associado.

Período de decaimento de vários núcleos

| Núcleos | $T_{1/2}$ | Tipo de decaimento |
|--|------------------------|-----------------------------|
| ^{238}U (natural) | $7,1 \times 10^8$ anos | α (também γ) |
| ^{235}U (natural) | $4,5 \times 10^9$ anos | α (também γ) |
| ^{239}Pu (artificial) | $2,4 \times 10^4$ anos | α (também γ) |
| ^{14}C (produzido por raios cósmicos) | $5,7 \times 10^3$ anos | β |
| ^3H (produzido por raios cósmicos) | 12,5 anos | β |
| ^{60}Co (artificial) | 5,3 anos | γ (também β) |
| ^{131}I (artificial) | 8 dias | β (também γ) |
| ^{234}Th (artificial) | 24,1 dias | β (também γ) |
| ^{214}Po (artificial) | 6 s | β (também γ) |
| ^{24}Mg (artificial) | 0,6 s | β^+ |
| ^{210}Po (artificial) | $1,6 \times 10^{-4}$ s | β (também γ) |

Tabela III

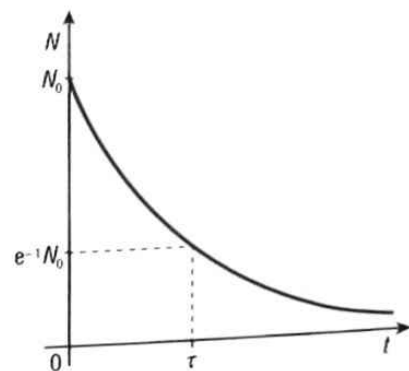


Fig. 3.15 Decaimento exponencial de um núcleo radioactivo: $\tau = \frac{1}{\lambda}$ é o tempo médio de vida.

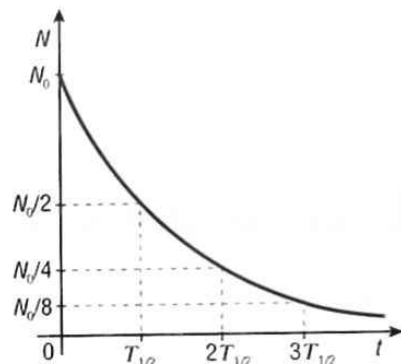


Fig. 3.16 Decaimento exponencial de um núcleo radioactivo. $T_{1/2}$ é o período de decaimento ou tempo de meia-vida.

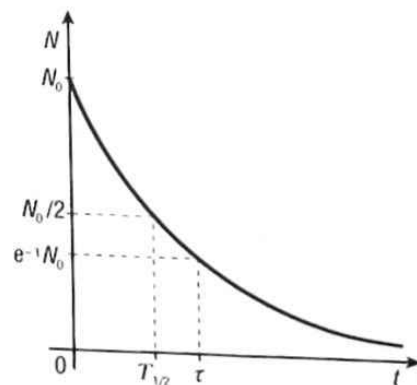


Fig. 3.17 Decaimento exponencial de um núcleo radioactivo, com indicação do tempo médio de vida, τ , e do tempo de meia-vida, $T_{1/2}$.

► Actividade de uma amostra radioactiva

A **actividade**, A , de uma amostra radioactiva é o número de decaimentos por unidade de tempo. É, portanto, uma medida da rapidez com que a desintegração ocorre.

Se designarmos por N o número de núcleos radioactivos da amostra, a **actividade**, que é o número de decaimentos por unidade de tempo e que não é mais do que a **taxa de decaimento**, R (taxa de variação no tempo do número de núcleos radioactivos), é dada por:

$$R = - \frac{dN}{dt}$$

Pela Lei do Decaimento Radioactivo, $N = N_0 e^{-\lambda t}$, tem-se:

$$R = \frac{d}{dt} (N_0 e^{-\lambda t}) \Leftrightarrow R = N_0 \lambda e^{-\lambda t} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow R = \lambda N$$

A **unidade SI** de actividade é o **becquerel**, **Bq** (1 Bq = 1 decaimento/segundo). Portanto, a actividade de uma amostra radioactiva é proporcional ao número de núcleos existentes na amostra num determinado instante.

Sendo $R_0 = \lambda N_0$ a actividade no instante inicial, a expressão (1) pode ser escrita

$$R = R_0 e^{-\lambda t}$$

o que nos permite concluir que a **actividade** de uma amostra radioactiva **diminui exponencialmente com o tempo**.

Questões Resolvidas

2. Uma fonte radioactiva tem uma meia-vida de 1 min. No instante $t = 0$ s, a fonte é colocada nas proximidades de um detector e verifica-se que a taxa de contagem (número de partículas emitidas pela fonte e registadas pelo detector por unidade de tempo) é 2000 contagens/segundo.
- 2.1. Determine o tempo médio de vida e a constante de decaimento da fonte.
- 2.2. Determine a taxa de decaimento nos instantes $t = 1$ min, $t = 2$ min, $t = 3$ min e $t = 10$ min.

Resolução

- 2.1. A relação entre o tempo de meia-vida, $T_{1/2}$, e o tempo médio de vida, τ , é: $T_{1/2} = \tau \ln 2$. Como $T_{1/2} = 1$ min, tem-se: $\tau = \frac{1 \text{ min}}{\ln 2} \Leftrightarrow \tau = 1,44 \text{ min} \Leftrightarrow \tau = 86,6 \text{ s}$. Por outro lado, é: $\tau = \frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{\tau}$. Então, a constante de decaimento da fonte, λ , é: $\lambda = \frac{1}{86,6 \text{ s}} \Leftrightarrow \lambda = 1,15 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$.
- 2.2. A taxa de contagem e a taxa de decaimento, R , são numericamente iguais. Como a taxa de contagem em $t = 0$ s é 2000 contagens por segundo, é $R_0 = 2000$ Bq. Então, a taxa de decaimento R , para diferentes instantes, é: $R = R_0 e^{-\lambda t}$; $R = 2000 e^{-(1,15 \times 10^{-2})t}$. Substituindo pelos valores, tem-se:
- $R(1 \text{ min}) = 2000 \text{ Bq} e^{-(1,15 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}) \times 60 \text{ s}} \Leftrightarrow R(1 \text{ min}) \approx 1000 \text{ Bq}$
- $R(2 \text{ min}) = 2000 \text{ Bq} e^{-(1,15 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}) \times 120 \text{ s}} \Leftrightarrow R(2 \text{ min}) \approx 500 \text{ Bq}$
- $R(3 \text{ min}) = 2000 \text{ Bq} e^{-(1,15 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}) \times 180 \text{ s}} \Leftrightarrow R(3 \text{ min}) \approx 250 \text{ Bq}$
- $R(10 \text{ min}) = 2000 \text{ Bq} e^{-(1,15 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}) \times 600 \text{ s}} \Leftrightarrow R(10 \text{ min}) \approx 2 \text{ Bq}$

► Fontes naturais e artificiais de radioactividade

No início do estudo deste ponto referimos a descoberta da radioactividade, em 1896, pelo físico francês Becquerel, quando verificou que certos núcleos emitem partículas e radiação electromagnética.

As investigações mais relevantes sobre este fenómeno foram realizadas por **Marie Curie e Pierre Curie**.

Em 1898 Marie Curie descobriu, em Paris, que o elemento tório, Th, emitia radiação juntamente com o seu marido, Pierre Curie, deduziu que este fenómeno estava associado aos núcleos de certos átomos.

Na pechblenda, um mineral de óxido de urânio, descobriram dois novos elementos radioactivos: o polónio, Po, e o rádio, Ra. Nesse mesmo ano, os Curie designaram este fenómeno de emissão espontânea de radiações por parte de certos núcleos por **radioactividade**.

Marie Curie provou que a actividade de um material radioactivo não se modifica devido a um processo físico ou químico, como, por exemplo, uma mudança de estado ou a combinação química com outro elemento.

Demonstrou, também, que a actividade radioactiva de qualquer sal de urânio é proporcional ao seu conteúdo em urânio. Estas características permitiram-lhe afirmar que a **radioactividade é um fenómeno nuclear**.



Marie Curie
(1867-1934)



Repare

A **unidade de actividade mais antiga** é o **curie, Ci**, assim designada em homenagem a **Marie Curie**. Um curie é a actividade de um nuclídeo que sofre $3,7 \times 10^{10}$ decaimentos por segundo.

$$1 \text{ Ci} = 3,7 \times 10^{10} \text{ Bq}$$

Radioactividade natural

São **fontes naturais** de radiação ionizante os **raios cósmicos** (partículas de alta energia provenientes do Espaço), **materiais radioactivos** existentes em locais na crosta terrestre (a família do urânio, por exemplo), a radiação emitida pelos isótopos radioactivos contidos nos próprios seres vivos, principalmente isótopos do carbono e do potássio, o **rádón** que inalamos quando respiramos e a **atmosfera** (por exemplo, o carbono-14 existente na atmosfera e que é produzido por interacção da radiação cósmica).

Os **materiais radioactivos naturais** podem ser classificados em **três categorias**: **nuclídeos primários**, **nuclídeos secundários** e **nuclídeos induzidos**.

Os nuclídeos radioactivos que existem desde a formação da Terra são **nuclídeos primários**. São os que têm um tempo médio de vida muito grande, da ordem da idade da Terra ou maior.

Pertencem a esta categoria o urânio-238, o tório-232 e o urânio-235. Foi Rutherford e o seu colaborador Soddy que verificaram que, quando um nuclídeo primário, por exemplo, um núcleo de urânio, emite uma partícula α , transforma-se num novo núcleo, com características radioactivas diferentes. Este segundo núcleo, se não for estável, decompõe-se, por sua vez, originando um terceiro núcleo e assim sucessivamente.

Os núcleos radioativos que assim se formam são **nuclídeos secundários**, formam-se por desintegração de nuclídeos radioativos primários. Têm um tempo médio de vida mais curto que os primeiros, muito menor do que a idade da Terra.

Por último, os **nuclídeos induzidos** são os que se formam continuamente na Natureza por efeito da radiação cósmica sobre os elementos químicos que formam a Terra, especialmente a atmosfera, como é o caso do carbono-14.

Quando um nuclídeo primário se desintegra, o nuclídeo secundário pode ser por sua vez, instável, e dar lugar a uma **série de desintegrações sucessivas** que se alcance uma configuração nuclear estável.

Uma **série ou família radioactiva** é constituída pelo conjunto de nuclídeos radioactivos naturais que procedem de um mesmo nuclídeo radioactivo inicial, que, por desintegrações sucessivas, termina num mesmo nuclídeo estável.

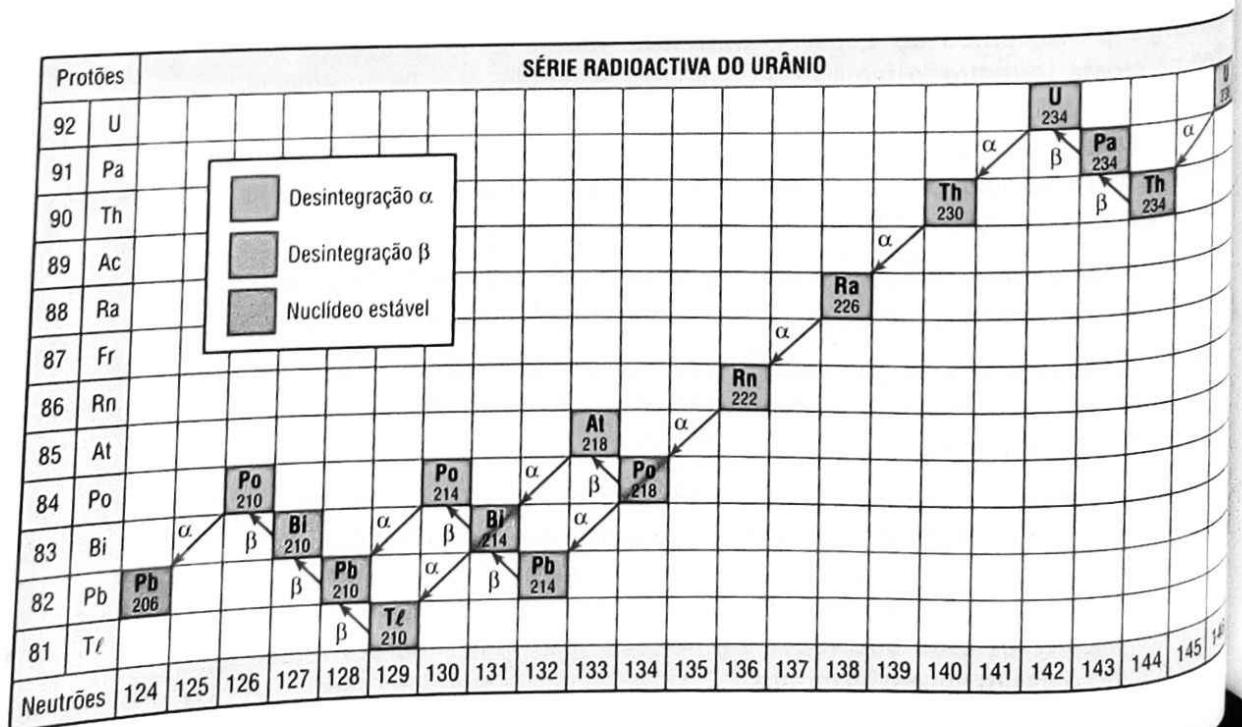
Conforme ilustrado na **tabela IV**, os nuclídeos radioactivos podem ser incluídos em alguma das **três séries radioactivas**:

- série do urânio-rádio, U-238;
- série do urânio-actínio, U-235;
- série do tório, Th-232.

| Série | Elemento inicial | Elemento final | Tempo total de desintegração (anos) |
|----------------|------------------|----------------|-------------------------------------|
| Urânio-rádio | U-238 | Pb-206 | $4,51 \times 10^9$ |
| Urânio-actínio | U-235 | Pb-208 | $7,18 \times 10^8$ |
| Tório | Th-232 | Pb-208 | $1,41 \times 10^{10}$ |

Tabela IV As três séries radioactivas.

A maioria dos nuclídeos que formam uma série radioactiva têm um único modo de desintegração, originando uma partícula α ou β e um nuclídeo do elemento seguinte da série. No entanto, há nuclídeos que têm dois modos diferentes de desintegração, originando, por isso, dois nuclídeos diferentes.



PENSAMENTO FÍSICO

Datação pelo carbono-14

O **carbono-14**, isótopo radioactivo do carbono, é produzido nas camadas superiores da atmosfera em reacções nucleares envolvendo os raios cósmicos.

Este carbono-14 coexiste com o carbono-12 normalmente presente na atmosfera na proporção de cerca de 1 átomo de carbono-14 para 10^{13} átomos de carbono-12. Como os organismos vivos estão permanentemente a trocar CO_2 com a atmosfera, possuem estes dois isótopos de carbono aproximadamente naquela proporção.

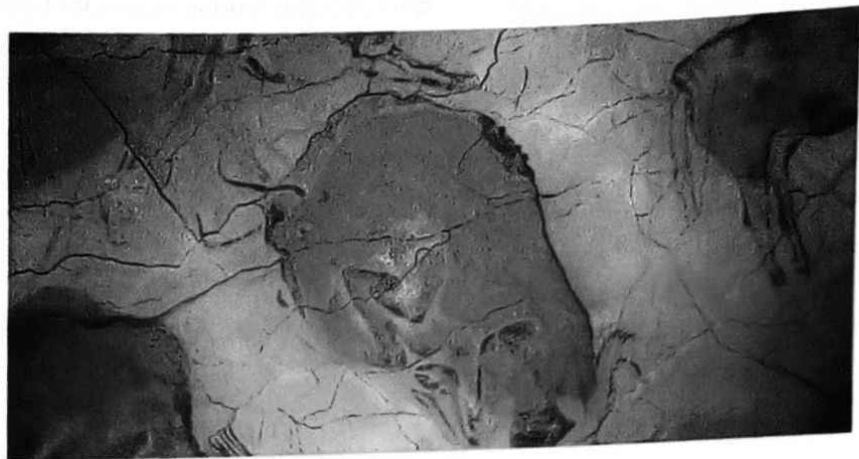
Enquanto os organismos estão vivos, esta proporção mantém-se, mas, quando um organismo morre, pára de absorver carbono-14 da atmosfera e a proporção deste relativamente ao carbono-12 começa a diminuir, devido ao decaimento do carbono-14.

O carbono-14 desintegra-se por emissão β^- , transformando-se em azoto:



O seu tempo de semivida é 5730 anos.

Medindo a actividade do carbono-14 presente numa amostra de um organismo sem vida que contenha carbono (osso, sangue ou outro corpo inanimado) e comparando-a com a actividade de um organismo com vida da mesma espécie, é possível determinar a idade da amostra.



Radioactividade artificial

Pode dizer-se que a descoberta da **radioactividade artificial** se deve a **Irène Joliot-Curie**, filha de Marie e Pierre Curie, em conjunto com o marido, **Jean Frédéric Joliot**. Irène Curie e o marido realizaram importantes trabalhos no campo da radioactividade natural e artificial tendo conseguido sintetizar novos elementos radioactivos. Estudaram também a acção de neutrões sobre os elementos pesados, passo que foi determinante para a descoberta da fissão nuclear do urânio.

As principais **fontes artificiais de radiação ionizante** têm a ver com reactores nucleares, com nuclídeos radioactivos utilizados em medicina, nas indústrias e na agricultura e com aparelhos de diagnóstico médico que utilizam raios X.

Também algumas pequenas doses podem ser devidas a descargas de resíduos radioactivos em centrais nucleares, a viagens de avião e a pequenos aparelhos domésticos que emitem radiação ionizante, como, por exemplo, alguns detectores de fumo e televisores a cores.

▶ Detectores de radiação ionizante

A radiação ionizante pode ser detectada com um **detector de Geiger**, também conhecido por contador de Geiger-Müller. Este é formado por um tubo metálico que contém um gás a pressão reduzida e ao qual se aplica uma diferença de potencial entre o tubo e a outra armadura do condensador, que se encontra dentro do tubo. A radiação ionizante é detectada pela ionização que provoca no gás contido no tubo, facto que é detectado pela descarga eléctrica, praticamente instantânea, entre as armaduras.



Fig. 3.18 Barras de combustível nuclear no interior de um reactor nuclear.



Fig. 3.19 Detector de Geiger.

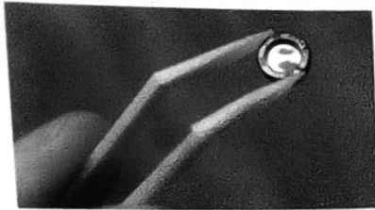


Fig. 3.20 Dosímetro.

Outro aparelho de uso comum entre investigadores e profissionais que trabalham em locais onde há emissão de radiações ionizantes é o **dosímetro**.

Este recolhe a dose-equivalente absorvida que recebe a pessoa que o traz consigo, permitindo, posteriormente, realizar um acompanhamento cuidadoso da dose total recebida.

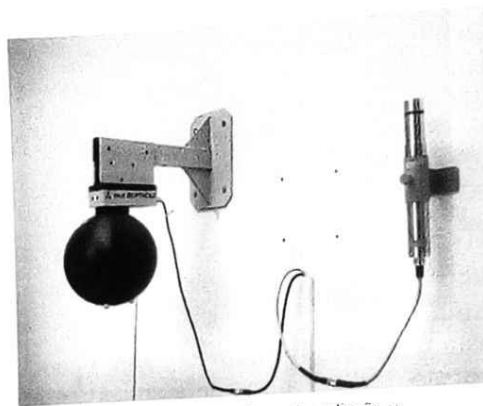


Fig. 3.21 Detectores de neutrões e de radiação γ

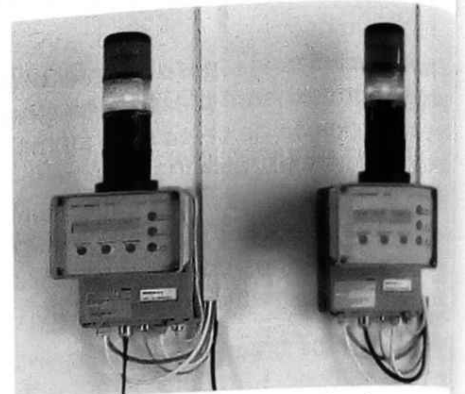


Fig. 3.22 Detectores de radiação ambiental.

► Efeitos biológicos da radioactividade.

Dose de radiação absorvida e dose-equivalente biológica

Os efeitos biológicos da radiação devem-se, principalmente, à ionização que produz, podendo alterar a estrutura das moléculas que constituem as células e causar a sua morte. Estes efeitos podem ser **agudos** ou a **longo prazo**.

- Os **efeitos agudos** podem manifestar-se ao fim de horas, semanas ou meses e são devidos à exposição a altas doses de radiação, quando recebidas em grandes áreas do corpo, num determinado intervalo de tempo. Os sintomas podem ser náuseas, hemorragias, dores de cabeça, esterilidade, leucemias, tumores malignos e alterações genéticas.
- Os **efeitos a longo prazo** de doses subletais recebidas durante um longo período de tempo são mais difíceis de avaliar.

Os **efeitos biológicos** da radiação ionizante **dependem**, naturalmente, do **tipo de radiação**, da **dose de radiação absorvida**, variando esta de pessoa para pessoa e de ser vivo para ser vivo, e do **tipo de tecido irradiado**.

A **dose de radiação absorvida** é, por definição, a energia absorvida por unidade de massa do material sobre o qual incide a radiação.

$$\text{Dose de radiação absorvida} = \frac{\text{Energia absorvida}}{\text{Massa do material}}$$

A **unidade SI** de dose de radiação absorvida é o **gray, Gy**, que corresponde a um joule por quilograma.

$$1 \text{ Gy} = 1 \text{ J/kg}$$

Outra unidade muito usada, mas que não é unidade SI, é o **rad**: $1 \text{ rad} = 0,01 \text{ Gy}$.

Mas, como vimos, os efeitos nocivos da radiação não dependem só da dose de radiação absorvida. Dependem, também, do tipo de radiação e do tecido que é irradiado. Daí se definir o factor de **eficácia biológica relativa, RBE**, que compara a dose de radiação necessária para produzir efeitos biológicos num órgão ou tecido com a dose de uma radiação de raios X de 200 keV (radiação de referência) necessária para produzir os mesmos efeitos no mesmo órgão ou tecido.

A **dose-equivalente biológica** é, por definição, igual à dose de radiação absorvida multiplicada pelo factor de eficácia biológica relativa, RBE. Indica o grau de danos biológicos causados pela radiação ionizante.

$$\text{Dose-equivalente biológica} = \text{Dose de radiação absorvida} \times \text{RBE}$$

A **unidade SI** de dose-equivalente biológica é o **sievert, Sv**.

$$1 \text{ sievert} = 1 \text{ gray} \times \text{RBE} \quad \text{ou} \quad 1 \text{ Sv} = 1 \text{ Gy} \times \text{RBE}$$

Segundo recomendações da Comissão Internacional de Protecção Radiológica, a máxima exposição permitida ao ser humano não deve ultrapassar 1 mSv por ano.

► Aplicações da radiação ionizante

As aplicações mais importantes da radiação ionizante são, sem dúvida, na medicina, especialmente no campo do diagnóstico e no tratamento do cancro e de outras doenças.

O uso de computadores com maiores potencialidades na recolha e tratamento de informação e de detectores mais sensíveis veio também contribuir para o grande progresso observado nos últimos anos ao nível da medicina nuclear. A **tomografia axial computadorizada (TAC)**, a **tomografia por emissão de positrões (PET)** e a **ressonância magnética nuclear** são três exemplos dessas aplicações muito usadas nos nossos dias.

Os isótopos radioactivos também são muito usados em **tratamentos oncológicos** e como "**marcadores**". Neste caso, graças à emissão de radiação, é possível seguir o trajecto de substâncias radioactivas no interior do organismo, para observar lesões, o funcionamento de determinados órgãos, etc.

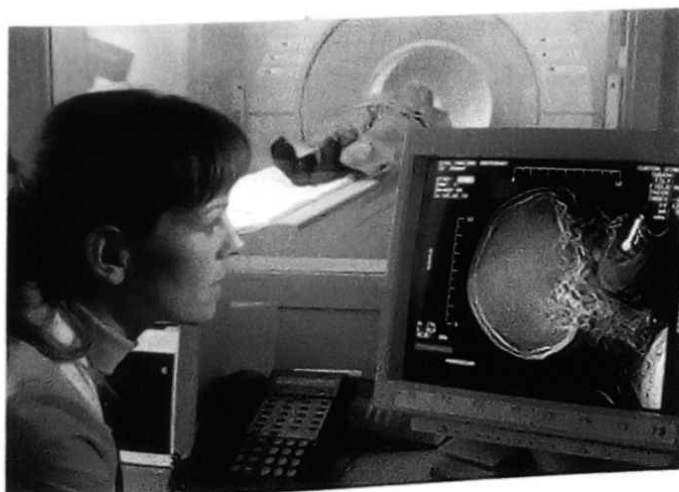


Fig. 3.23 Tomografia axial computadorizada (TAC).

A radiação ionizante também é importante em muitas **outras áreas**. Desde a arte à química, passando pela agricultura, geologia e zoologia, é usada uma técnica analítica extremamente precisa, conhecida por **análise por activação de neutrões**, que permite medir concentrações muito pequenas da maioria dos elementos da Tabela Periódica a partir da formação de isótopos radioactivos por absorção de neutrões. Antropólogos, arqueólogos e geólogos recorrem com frequência às propriedades de decaimento de certos radioisótopos para determinarem a idade de fósseis e artefactos.

A **indústria** oferece também um amplo campo de actividades que recorrem a fontes radioactivas para esterilizar e pasteurizar alimentos e produtos farmacêuticos, bem como no controlo de qualidade de produtos fabricados, para verificar soldaduras em oleodutos e aviões, etc.

| Valores aproximados do RBE | |
|----------------------------|-------|
| Tipo de radiações | RBE |
| Partículas β | 1-1,7 |
| Neutrões lentos | 4-5 |
| Neutrões rápidos | 10 |
| Protões | 10 |
| Partículas α | 10 |
| Iões pesados | 20 |

Tabela V

► Reacções nucleares: fissão e fusão nucleares

Muitas informações sobre os núcleos atómicos são obtidas bombardeando-os com vários tipos de partículas e observando os resultados. Em alguns casos, a partícula incidente é simplesmente desviada, mas noutros casos ocorre uma **reacção nuclear**.

As primeiras experiências, mesmo limitadas pela necessidade de se usar a reacção produzida por fontes naturais, levaram a muitas descobertas importantes. Em 1932, Cockcroft e Walton conseguiram produzir a reacção:

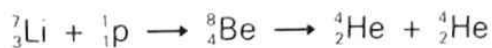


Fig. 3.24 Acelerador de partículas.

usando prótons acelerados artificialmente. Desde então, as técnicas usadas para acelerar e detectar partículas foram aperfeiçoadas e têm sido estudadas para muitas reacções nucleares e interações entre partículas elementares.

Entre as muitas reacções nucleares investigadas, temos a considerar duas especialmente importantes: as reacções de **fissão** ou **cisão nuclear** e as reacções de **fusão nuclear**.

Fissão ou cisão nuclear

A **fissão** ou **cisão nuclear** é um processo no qual um núcleo pesado se divide (divide) em dois outros núcleos de menor massa, com libertação de grande quantidade de energia.

Por exemplo, o urânio-235, ${}^{235}_{92}\text{U}$, cinde-se por captura de um neutrão:



Neste tipo de reacção, há uma sequência de reacções de fissão auto-sustentadas, uma vez que os neutrões formados podem induzir fissão noutros núcleos de urânio-235.

A energia libertada neste processo é de cerca de 200 MeV por cada núcleo que sofre fissão!...

Uma reacção de fissão descontrolada do urânio-235 esteve na base da primeira bomba nuclear.

É possível, no entanto, controlar as reacções de fissão nuclear e usá-las para fins pacíficos, como, por exemplo, na **produção de energia eléctrica**.



Fig. 3.25 Central nuclear.

Reacção em cadeia originada pela fissão nuclear



Fig. 3.26 Reacção nuclear em cadeia do urânio-235. Em poucos segundos, o número de fissões é muito grande e a reacção torna-se incontrolável, libertando-se uma elevada quantidade de energia.

Fusão nuclear

Na fusão nuclear, dois núcleos leves dão origem a um núcleo mais pesado, com libertação de energia. Por exemplo, o deutério, ${}^2_1\text{H}$, e o trítio, ${}^3_1\text{H}$, por fusão nuclear, originam um núcleo de hélio, ${}^4_2\text{He}$.



Nas estrelas com massa inferior ou igual à do Sol, as reações de fusão nuclear são do tipo **protão-protão**; forma-se um núcleo de hélio, além de outras partículas subatómicas, com emissão de radiação.

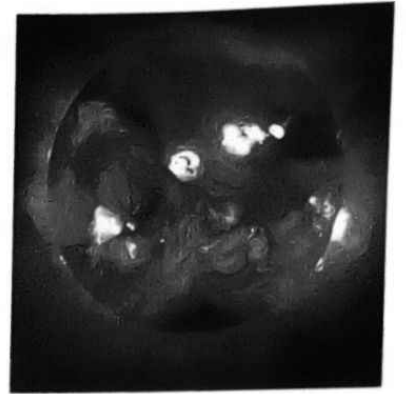


Fig. 3.27 No Sol ocorrem reacções de fusão nuclear.

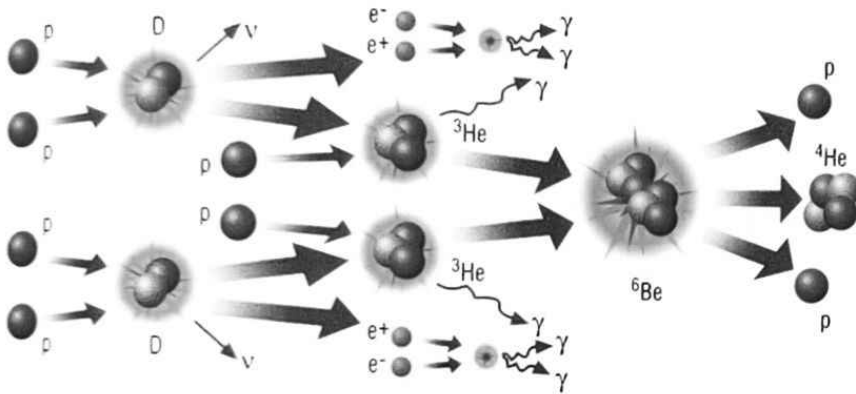


Fig. 3.28 Reacção de fusão nuclear do tipo protão-protão.

Nas estrelas com massas superiores à massa do Sol, **o ciclo CNO, carbono-nitrogénio-oxigénio**, constitui a fonte de energia dominante. Quatro protões fundem-se com núcleos de carbono, nitrogénio e oxigénio, produzindo uma partícula α , dois positrões e dois neutrinos. A aniquilação dos positrões com electrões ocorre com emissão de radiação γ .

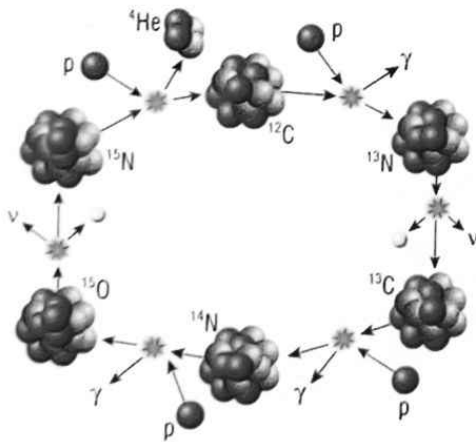


Fig. 3.29 Reacções de fusão nuclear do ciclo CNO.

Nas estrelas mais velhas, com grande abundância de hélio nos seus núcleos estelares, produzido pelas reacções protão-protão e CNO, ocorrem **reacções de fusão do tipo triplo alfa**, a temperaturas superiores a 100 milhões de kelvin. Neste processo, três núcleos de hélio transformam-se num núcleo de carbono.

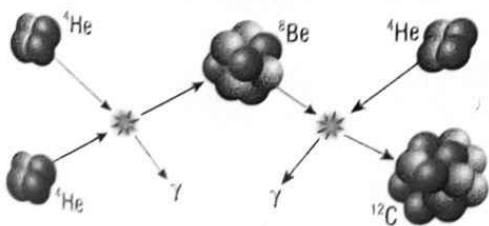


Fig. 3.30 Reacção de fusão nuclear do tipo triplo alfa.

A produção de energia a partir da fusão de núcleos leves vem sendo investigada com grande interesse, atendendo à relativa abundância do combustível e a riscos menores relativamente aos associados aos reactores de fissão.

Contudo, estas reacções de fusão ainda não foram exploradas comercialmente.

Síntese de conteúdos

- **Energia de ligação nuclear** – energia necessária para decompor o núcleo atómico nas partículas fundamentais: prótons e neutrões.
- **A massa total de um núcleo** é sempre menor que a soma das massas dos seus nucleões (prótons e neutrões).
- **Defeito de massa** – diminuição de massa correspondente à energia libertada no processo de formação de um núcleo.
- **Radioactividade** – transformação ou desintegração de núcleos instáveis com formação de núcleos mais estáveis por emissão de partículas ou radiação electromagnética.

- **Principais tipos de radiações nucleares:**

- **Decaimento α** – emissão de partículas α que são núcleos de átomos de hélio, ${}^4_2\text{He}$.
- **Decaimento β** – emissão de partículas β que são electrões, β^- , ou positrões, β^+ .
- **Decaimento γ** – emissão de ondas electromagnéticas de elevada frequência.

- **Lei do Decaimento Radioactivo:**

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

N_0 – número de núcleos no instante $t = 0$

λ – constante de decaimento

- **Taxa de decaimento, R :**

$$R = \lambda N_0 e^{-\lambda t} \Leftrightarrow R = \lambda N \text{ ou } R = R_0 e^{-\lambda t} \text{ com } R_0 = \lambda N_0$$

R_0 – taxa de decaimento no instante $t = 0$

- **Vida média, τ , de um núcleo** – inverso da constante de decaimento:

$$\tau = \frac{1}{\lambda}$$

- **Período de decaimento ou tempo de semivida ou período de semidesintegração, $T_{1/2}$** – tempo necessário para que o número de núcleos radioactivos se reduza a metade do valor inicial.

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} \Leftrightarrow T_{1/2} = \frac{0,693}{\lambda}$$

- **Actividade, A , de uma amostra radioactiva** – número de decaimentos que um núcleo sofre por unidade de tempo. É, portanto, uma medida da rapidez de desintegração de um núcleo. Exprime-se em becquerel, Bq.
- **Dose de radiação absorvida** – energia total absorvida por unidade de massa. Exprime-se em gray, Gy.
- **Dose-equivalente biológica** – grau de danos biológicos causados pela radiação. Exprime-se em sievert, Sv.
- **Fissão nuclear** – um núcleo pesado cinde-se formando núcleos mais pequenos e estáveis com libertação de grande quantidade de energia.
- **Fusão nuclear** – núcleos instáveis fundem-se e originam núcleos maiores e mais estáveis, com libertação de grande quantidade de energia.

▶ FÍSICA EM ACÇÃO

O uso da **fissão nuclear para produzir electricidade** teve um declínio nos últimos 30 anos, devido ao elevado risco de desastres nucleares nos reactores. Recentemente têm sido aprovados pelas agências de segurança internacionais novos desenhos de reactores que já não apresentam riscos de segurança elevados em caso de problemas de funcionamento. Outro factor importante que poderá resultar no renascer da fissão nuclear como fonte importante de produção de energia é que já existem algumas companhias interessadas na produção em série de pequenos reactores nucleares, que poderá tornar os custos de produção mais reduzidos.

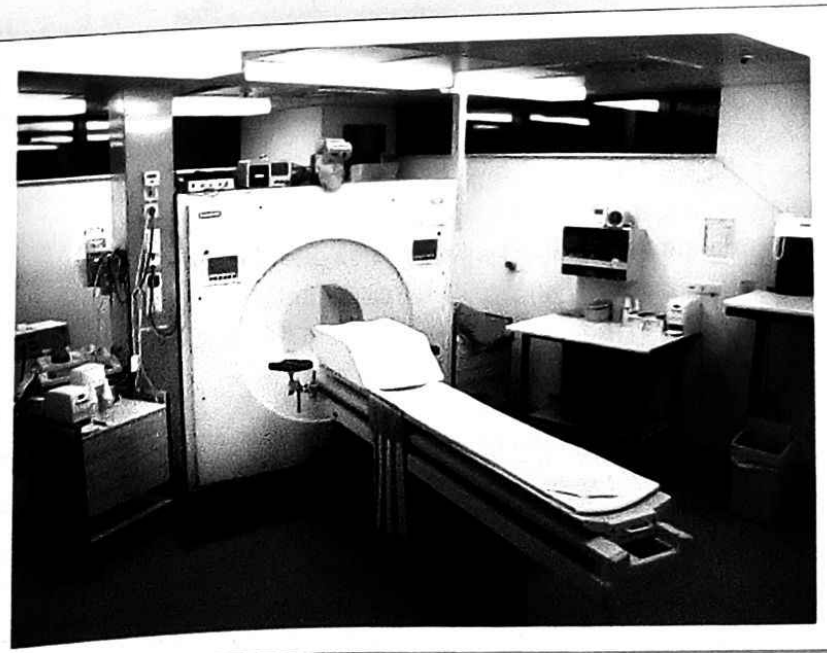
A vantagem dos reactores nucleares em relação a fontes mais limpas de energia, como a energia eólica, é que podem produzir grandes quantidades de energia quando for precisa, sem estarem limitados por factores imprevisíveis, como a falta de vento. A desvantagem é a inevitável produção de produtos secundários nocivos. Actualmente, a maior fonte de produção de energia é a combustão de combustíveis fósseis com grandes emissões de gases nocivos para a atmosfera. Os produtos nocivos da energia nuclear seriam mais fáceis de manter armazenados de forma controlada em locais seguros. Existem já alguns projectos de construção de centrais produtoras de energia a partir de combustíveis fósseis, com reaproveitamento dos gases tóxicos para produzir hidrogénio que possa ser utilizado nas células de combustível. A importância que poderão ter os reactores nucleares nos próximos anos dependerá do sucesso ou fracasso desses projectos.



A **tomografia de emissão de positrões, PET**, é uma técnica que permite ver o funcionamento dos órgãos e não apenas a sua estrutura, como noutras técnicas de tomografia (raios X, ressonância magnética, etc.).

Injectam-se no paciente **marcadores radioactivos**, que são isótopos com tempo de vida curta e decaimento β . O dispositivo consegue determinar a trajectória dos fotões detectados e desdobrar quando dois deles foram produzidos num mesmo ponto e no mesmo instante.

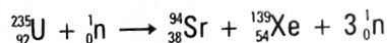
A determinação dos pontos onde ocorrem decaimentos radioactivos permite determinar o percurso do marcador radioactivo no corpo do paciente, dando informação sobre o funcionamento dos seus órgãos. A tomografia PET é particularmente útil para a detecção de cancro, doenças da artéria coronária e doenças cerebrais.



▶ QUESTÕES E PROBLEMAS

1. A massa do núcleo atômico do isótopo de ferro-56, ${}^{56}_{26}\text{Fe}$, é $m({}^{56}\text{Fe}) = 9,2857 \times 10^{-26}$ kg. Sabendo que a massa do próton é $m_p = 1,6726 \times 10^{-27}$ kg, que a massa do nêutron é $m_n = 1,6749 \times 10^{-27}$ kg e que $1 \text{ eV} = 1,602 \times 10^{-19}$ J, determine:

- 1.1. a soma das massas dos prótons e nêutrons do núcleo atômico do isótopo ${}^{56}_{26}\text{Fe}$;
 - 1.2. a diferença de massa calculada na alínea anterior, relativamente à massa do núcleo atômico;
 - 1.3. a percentagem de diferença de massa, $\frac{\Delta m}{m({}^{56}\text{Fe})}$ (%);
 - 1.4. a energia de ligação do núcleo de ${}^{56}_{26}\text{Fe}$, em MeV;
 - 1.5. a energia de ligação por nucleão, em MeV.
2. Todos sabemos que num processo nuclear pode ser obtida uma enorme quantidade de energia. Considere a seguinte reacção de fissão nuclear:



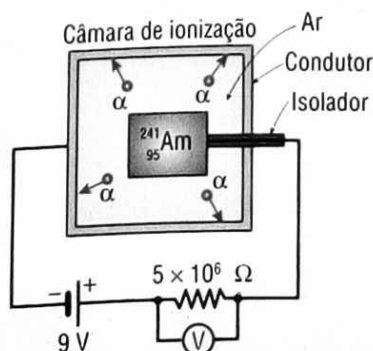
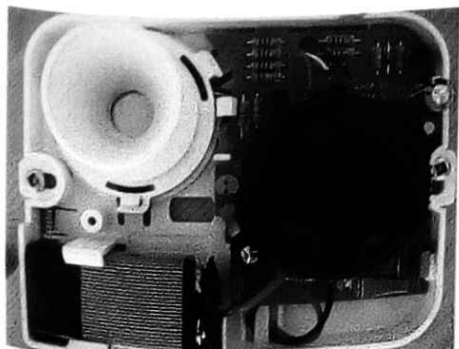
- 2.1. Utilizando os valores da tabela e atendendo a que $1 \text{ u} = 1,6605 \times 10^{-27}$ kg, calcule a variação de massa, Δm , durante o processo de fissão de um nuclídeo de urânio-235, em unidades SI.

| Partícula | Massa / u |
|--------------------------|-----------|
| ${}^{235}_{92}\text{U}$ | 235,0439 |
| ${}^{94}_{38}\text{Sr}$ | 93,9154 |
| ${}^{139}_{54}\text{Xe}$ | 138,9178 |
| ${}^1_0\text{n}$ | 1,0087 |

- 2.2. Calcule a energia equivalente à perda de massa observada, sabendo que $c = 2,998 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$.
3. Complete as seguintes equações de desintegrações nucleares, indicando, para cada caso, a partícula que é emitida.
- (A) ${}^{223}_{88}\text{Ra} \rightarrow {}^{219}_{86}\text{Rn} + ?$
 - (B) ${}^{241}_{94}\text{Pu} \rightarrow {}^{241}_{95}\text{Am} + ?$
 - (C) ${}^{56}_{27}\text{Co} \rightarrow {}^{56}_{26}\text{Fe} + ?$
 - (D) ${}^{87}_{35}\text{Br} \rightarrow {}^{86}_{35}\text{Br} + ?$
4. Complete as seguintes equações de desintegrações nucleares. Consulte a Tabela Periódica dos Elementos para identificar os elementos que precise.
- (A) $? \rightarrow {}^{234}_{91}\text{Pa} + {}^0_{-1}\beta + \bar{\nu}$
 - (B) ${}^{49}_{24}\text{Cr} \rightarrow ? + {}^0_{-1}\beta + \bar{\nu}$
 - (C) ${}^{126}_{53}\text{I} \rightarrow ? + {}^0_{+1}\beta + \nu$
 - (D) ${}^{214}_{83}\text{Bi} \rightarrow ? + {}^4_2\text{He}$

▶ QUESTÕES E PROBLEMAS

5. A constante de decaimento, λ , de um núcleo de rádon-222, ${}^{222}_{86}\text{Rn}$, é $1,8 \times 10^{-1} \text{ dia}^{-1}$. Calcule:
- 5.1. a massa de uma amostra com $4,5 \times 10^{-5} \text{ g}$ desse nuclídeo, decorrido o período de um mês;
 - 5.2. o tempo de meia-vida do ${}^{222}_{86}\text{Rn}$.
6. Considere uma amostra de um nuclídeo contendo inicialmente $6,0 \times 10^8$ átomos. Sabendo que a constante de decaimento é $\lambda = 6,931 \times 10^3 \text{ s}^{-1}$, determine:
- 6.1. a actividade inicial desta amostra;
 - 6.2. o tempo de meia-vida;
 - 6.3. a actividade da amostra decorridos $2,0 \times 10^2 \text{ s}$.
7. Um utensílio antigo de caça, feito de osso de animal, foi encontrado numa escavação arqueológica em África. Para datar este utensílio recorreu-se ao isótopo radioactivo carbono-14. A quantidade de carbono-14 medida é aproximadamente igual a $\frac{357}{500}$ da quantidade habitual. Sabendo que o tempo de meia-vida deste isótopo é de 5730 anos, determine a idade do utensílio.
8. O manganês-56, produzido a partir do bombardeamento do cobalto-59 com neutrões, não é estável, desintegrando-se com uma meia-vida de 2,6 h e formando ferro, que é estável:
- $${}^{56}_{25}\text{Mn} \rightarrow {}^{56}_{26}\text{Fe} + {}^0_{-1}\beta + \bar{\nu}$$
- 8.1. Indique os valores de Z , A e q .
 - 8.2. Considere uma amostra de manganês-56 com a massa de 150 g. Sabendo que a massa atómica relativa do manganês-56 é 55,939, determine:
 - 8.2.1. o número de átomos de manganês-56 que existiam inicialmente na amostra;
 - 8.2.2. a massa de manganês-56 que experimentou decaimento 30 min após a preparação.
9. Num detector de incêndios, usa-se uma pequena quantidade de amerício, ${}^{241}_{95}\text{Am}$, que é um núcleo radioactivo que sofre decaimento alfa. As partículas α emitidas servem para estabelecer uma corrente entre o eléctrodo central e as paredes de decaimento alfa. As partículas α emitidas servem para estabelecer uma corrente entre o eléctrodo central e as paredes de uma câmara de ionização com ar (cilindro preto na fotografia). Quando no ar entram partículas de fumo, estas absorvem a radiação alfa, fazendo diminuir a corrente no circuito. O circuito emite o som de alerta no altifalante (canto superior esquerdo na fotografia) quando a corrente for muito baixa. Se a massa de amerício num alarme for de 0,8 mg, e sabendo que o tempo de meia-vida desse isótopo é 432,2 anos e a sua massa atómica relativa é 241,06, determine:
- 9.1. o número inicial de átomos de amerício no detector;
 - 9.2. o número de partículas alfa produzidas por cada segundo;
 - 9.3. a corrente que circula pelo circuito, quando o ar não tiver partículas que absorvam a radiação alfa;
 - 9.4. a diferença de potencial medida no voltímetro V.



4

MECÂNICA DOS FLUIDOS – HIDRODINÂMICA

4.1. Hidrostática (revisão)

4.2. Hidrodinâmica

Objectivos:

- ▶ Aplicar a definição da vazão volúmica na resolução de exercícios concretos.
- ▶ Explicar o conceito de fluido ideal.
- ▶ Aplicar o Princípio de Continuidade na resolução de exercícios concretos.
- ▶ Aplicar o Princípio de Bernoulli na resolução de exercícios concretos.

4.1. Hidrostática (revisão)

Conteúdos

- Noção de fluido.
- Massa volúmica, densidade relativa, pressão e força de pressão.
- Lei Fundamental da Hidrostática.
- Lei de Pascal.
- Impulsão e Lei de Arquimedes.
- Equilíbrio de corpos flutuantes.

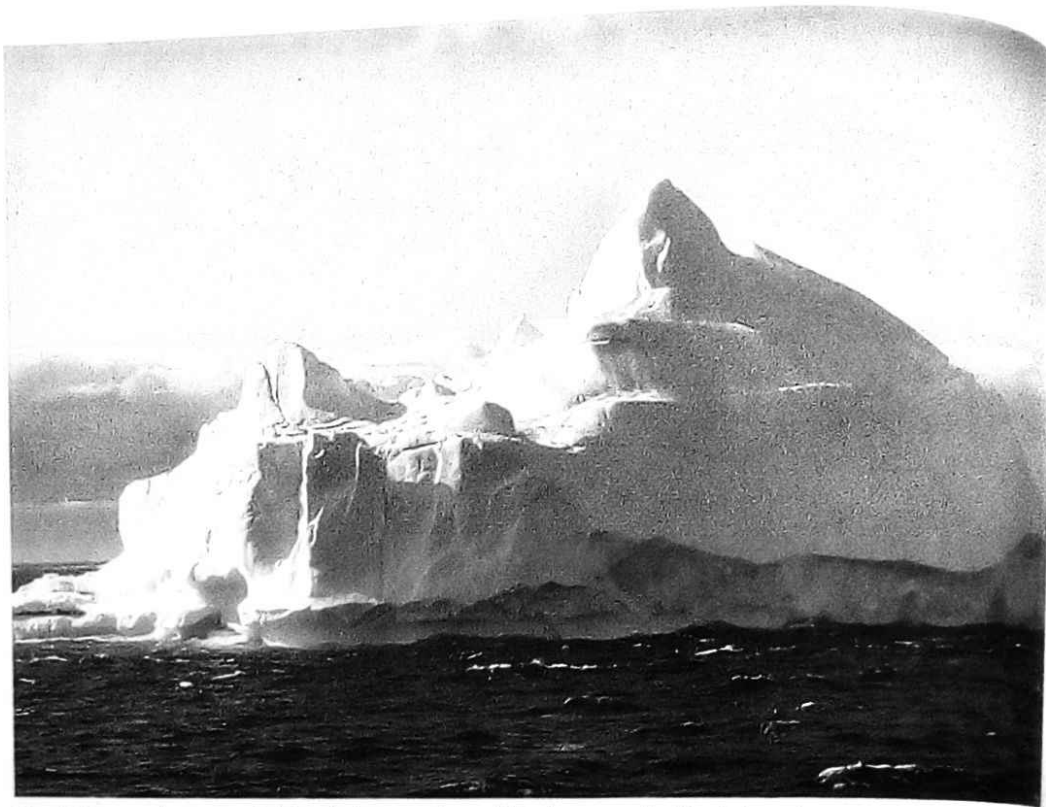


Fig. 4.1 Em geral, um material é mais denso na fase sólida do que na líquida. A água é uma exceção.

Para o estudo da Hidrodinâmica revelam-se essenciais os conceitos de Hidrostática já abordados na 9.^a classe. Impõe-se, pois, uma revisão desta matéria.

► Noção de fluido

A **Hidrostática** e a **Hidrodinâmica** são duas grandes áreas da Física que estudam a **mecânica dos fluidos**.

Apesar de o prefixo "hidro" significar água, a **Hidrostática** estuda qualquer **fluido em equilíbrio estático** e a **Hidrodinâmica** estuda qualquer **fluido em movimento**.

Mas o que é um fluido?

Um **fluido** é um material que se escoa, isto é, que flui com relativa facilidade.

Este comportamento deve-se às **forças de ligação de fraca intensidade** entre as suas partículas constituintes. **Os líquidos e os gases são fluidos**, embora apresentem características diferentes.

Por exemplo, os **líquidos** são **praticamente incompressíveis**, sob a ação das forças exteriores, enquanto os **gases** são **altamente compressíveis**; os **líquidos** tendem a **conservar** o seu **volume**, enquanto os **gases não, expandem-se** ocupando todo o volume disponível.

No nosso dia a dia deparamos com uma grande variedade de fluidos — **fluidos reais**: o ar, a água, o petróleo, o sangue, o mel, o dióxido de carbono, o fumo e muitos outros.

Um **fluido real** apresenta **viscosidade**, isto é, atritos internos que oferecem resistência ao escoamento de uma camada de fluido sobre as outras.

O nosso estudo vai incidir sobre o comportamento de **fluidos ideais**. Estes **fluidos ideais** são **homogêneos**, isto é, têm a mesma densidade em todos os pontos, e **não apresentam viscosidade**.



Fig. 4.2 Um fluido real apresenta viscosidade.

► Massa volúmica, densidade relativa, pressão e força de pressão

O estudo das propriedades dos fluidos em equilíbrio estático é feito com base nas grandezas físicas densidade e pressão, de que iremos fazer uma breve revisão.

Vimos, na 9.ª classe, que a **massa volúmica**, ρ , ou **densidade** de um material é, por definição, igual à massa contida na unidade de volume desse material.

$$\rho = \frac{m}{V}$$

A **unidade SI de massa volúmica** é o **quilograma por metro cúbico**, kg m^{-3} , embora se use com muita frequência o grama por centímetro cúbico, g cm^{-3} .

$$\frac{1 \text{ g}}{1 \text{ cm}^3} = \frac{10^{-3} \text{ kg}}{10^{-6} \text{ m}^3} \Leftrightarrow 1 \text{ g cm}^{-3} = 1 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$$

A massa volúmica dos sólidos e dos líquidos (fluidos incompressíveis) varia muito pouco com a temperatura e com a pressão; é praticamente constante. O mesmo não acontece com os gases; a massa volúmica destes depende da temperatura e da pressão.

Na **tabela I** indicam-se as **massas volúmicas de alguns materiais** (a 20 °C), excepto indicação contrária. Os valores para os gases referem-se à temperatura de 0 °C e à pressão normal.



Fig. 4.3 Mistura heterogénea de líquidos com densidades diferentes.

| Sólidos | | Líquidos | | Gases | |
|---------------|--------------------------------------|-----------------------|--------------------------------------|---------------|---------------------------|
| Material | $\rho / \text{kg m}^{-3}$ | Material | $\rho / \text{kg m}^{-3}$ | Material | $\rho / \text{kg m}^{-3}$ |
| Alumínio | $2,7 \times 10^3$ | Água (a 4 °C e 1 atm) | $1,0 \times 10^3$ | Ar | 1,293 |
| Chumbo | $11,3 \times 10^3$ | Água do mar | $(1,02 \text{ a } 1,04) \times 10^3$ | Nitrogénio | 1,251 |
| Cortiça | $(0,22 \text{ a } 0,26) \times 10^3$ | Azeite | $0,92 \times 10^3$ | Hélio | 0,179 |
| Ferro | $7,8 \times 10^3$ | Etanol | $0,79 \times 10^3$ | Hidrogénio | 0,090 |
| Gelo (a 0 °C) | $0,92 \times 10^3$ | Leite | $(1,03 \text{ a } 1,06) \times 10^3$ | Oxigénio | 1,429 |
| Madeira | $(0,4 \text{ a } 0,9) \times 10^3$ | Mercúrio | $13,6 \times 10^3$ | Vapor de água | 0,807 |
| Neve | $0,25 \times 10^3$ | Sangue | $1,05 \times 10^3$ | | |
| Platina | $21,4 \times 10^3$ | | | | |

Tabela I Massas volúmicas de alguns materiais.

Define-se, também, **densidade relativa**, d , de um material como a razão entre a massa volúmica desse material e a massa volúmica de uma substância-padrão.

$$d = \frac{\rho_{\text{material}}}{\rho_{\text{padrão}}}$$

- **No caso dos sólidos e líquidos**, o **padrão** é a **água** a 4 °C e à pressão atmosférica normal – $\rho_{\text{água}} = 1,0 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$.
- **No caso dos gases**, o **padrão** é o **ar**, nas condições normais de pressão e temperatura (a PTN) – $\rho_{\text{ar}} = 1,293 \text{ kg m}^{-3}$.

A **densidade relativa** não tem unidade; é uma grandeza adimensional, uma vez que resulta do quociente entre duas massas volúmicas.

Repare

A **densidade relativa** diz-nos quantas vezes um material é mais ou menos denso do que o padrão considerado.

Por exemplo, dizer que a densidade relativa do ferro é 7,8 ($d = 7,8$) significa que a massa de um dado volume de ferro é 7,8 vezes maior do que a massa de igual volume de água.

Pressão e força de pressão

Vimos que nos líquidos, fluidos incompressíveis, a massa volúmica é praticamente constante. Mas o mesmo não acontece com os gases. Quando um gás é comprimido, isto é, quando se aumenta a pressão sobre o gás, a sua massa volúmica aumenta, pois a mesma massa vai ocupar um volume menor.

A **pressão** é, portanto, uma grandeza física importante para o estudo do equilíbrio hidrostático dos fluidos.

Define-se **pressão**, p , como o módulo da força exercida perpendicularmente a uma superfície, por unidade de área.

$$p = \frac{F}{A}$$

Embora se defina a pressão a partir de uma força, a **pressão** é uma **grandeza física escalar**.

A **unidade SI** de pressão é o **newton por metro quadrado**, N m^{-2} , ou **pascal** Pa ($1 \text{ Pa} = 1 \text{ N m}^{-2}$).

Se a força \vec{F} não for exercida perpendicularmente à superfície, pode decompor-se numa componente perpendicular e noutra paralela à superfície, sendo que **apenas a componente perpendicular contribui para a pressão** exercida sobre a superfície.

No caso de um fluido, a componente paralela, isto é, tangencial à superfície, não faz com que o fluido deslizasse (se escoasse).

Portanto, num fluido em equilíbrio hidrostático (em repouso a nível macroscópico), as **forças** exercidas nas superfícies em contacto com o fluido são **perpendiculares** a essas **superfícies** em todos os pontos. Essas forças designam-se por **forças de pressão**.

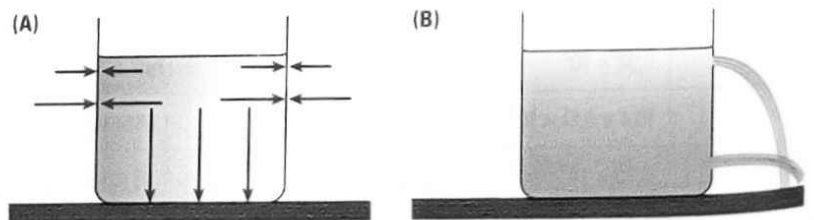


Fig. 4.5 (A) As forças de pressão exercidas pela água em repouso sobre as paredes do recipiente são perpendiculares a essas superfícies. (B) A água esguicha pelos orifícios perpendicularmente à parede devido às forças de pressão.

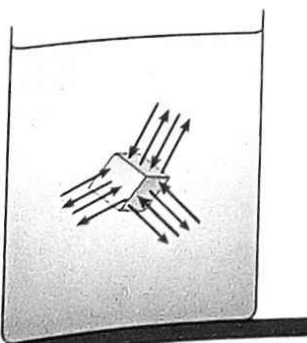


Fig. 4.6 Água em equilíbrio e um pequeno "cubo" isolado dessa própria água.

Imaginemos, agora, uma porção muito pequena de um fluido em equilíbrio. Seja, por exemplo, um "cubo" de água no interior de um recipiente com a própria água em repouso, como mostra a figura 4.6.

Considerando o "cubo" de água muito pequeno, podemos desprezar o seu peso. Nestas condições, a **resultante das forças de pressão**, que se exercem em todas as direcções e sentidos pelas moléculas de água circundante, **tem de ser nula**. Se assim não fosse, haveria deslocamento desse pequeno "cubo" de água dentro da própria água e ele deixaria de estar em equilíbrio.

Num fluido em equilíbrio hidrostático, a resultante das forças de pressão que se exercem em todas as direcções, num ponto de fluido, é nula.

Observe a figura 4.7. Nela está representada uma **cápsula manométrica** mergulhada num fluido em equilíbrio e ligada a um manómetro (aparelho que permite medir a pressão).

Qualquer que seja a orientação da cápsula manométrica em torno do mesmo ponto do fluido, exercem-se na sua membrana **pressões iguais**, pois a subida do líquido no manómetro é igual.

Se num ponto de um fluido em equilíbrio as pressões são iguais em todas as direcções, é porque as forças de pressão actuam igualmente em todas as direcções.

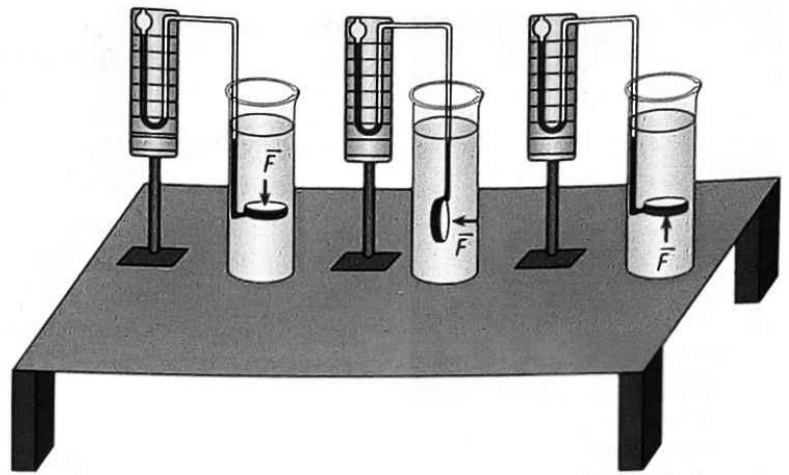


Fig. 4.7 Cápsula manométrica, em três posições diferentes, mergulhada num fluido em repouso e ligada a um manómetro.

A **pressão num ponto** de um fluido em equilíbrio é a **mesma em todas as direcções**.

► Lei Fundamental da Hidrostática

Certamente já todos sentiram nos ouvidos a **pressão da água quando se mergulha** na piscina ou no mar. Essa pressão faz-se sentir tanto mais quanto mais fundo se mergulha. Os mergulhadores têm de tomar certas precauções devido ao aumento da pressão da água com a profundidade, pois se a variação de pressão quando o mergulhador regressa, por exemplo, à superfície for demasiado brusca, pode mesmo provocar a morte.

Para compreendermos como aumenta a pressão com a profundidade, consideremos um **pequeno volume cilíndrico de um líquido homogéneo**, de altura h e área da base A , no interior do próprio líquido, em repouso, num recipiente.

Como o pequeno **cilindro de líquido** está **em repouso**, a **resultante das forças exteriores** que nele actuam tem de ser **nula**.

$$\sum \vec{F}_{\text{exteriores}} = \vec{0}$$

Neste caso, **as forças de pressão exercidas horizontalmente** na superfície lateral do cilindro de líquido **anulam-se**, mas **as forças de pressão segundo a vertical não se anulam** devido ao peso do líquido.

O peso do cilindro de líquido tem de ser equilibrado pelas forças de pressão, \vec{F}_A e \vec{F}_B , exercidas nas faces superior e inferior, respectivamente. Então, terá de ser:

$$\vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{P} = \vec{0} \quad \text{e} \quad F_B - F_A = P \quad (1)$$

Sendo p_A e p_B as pressões exercidas nas faces superior e inferior, respectivamente, e A a área de cada uma dessas faces, tem-se:

$$F_A = p_A A; \quad F_B = p_B A \quad \text{e} \quad P = mg$$

Substituindo em (1), fica:

$$p_B A - p_A A = mg \Leftrightarrow (p_B - p_A) A = mg$$

Atendendo a que:

$$\rho = \frac{m}{V} \Leftrightarrow m = \rho V \Leftrightarrow m = \rho A h$$



Fig. 4.8 A pressão da água aumenta com a profundidade.

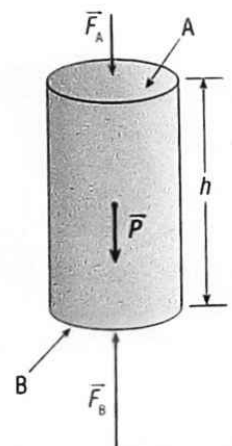


Fig. 4.9 Líquido homogéneo em equilíbrio e um pequeno "cilindro" isolado desse próprio líquido.

Questões Resolvidas

1. Um tubo em forma de U contém dois líquidos não miscíveis de massas volúmicas ρ_1 e ρ_2 , em equilíbrio hidrostático. Os pontos B e D encontram-se no mesmo plano horizontal.

$$\rho_{\text{H}_2\text{O}} = 1,0 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}; \quad \rho_0 = 1,01 \times 10^5 \text{ Pa} \quad \text{e} \quad g = 10 \text{ ms}^{-2}$$

- 1.1. Mostre que as alturas, h_1 e h_2 , das colunas de líquido em cada ramo são inversamente proporcionais às massas volúmicas dos líquidos ($\rho_1 h_1 = \rho_2 h_2$).

- 1.2. Qual é a diferença de pressão entre os pontos A e C? Justifique.

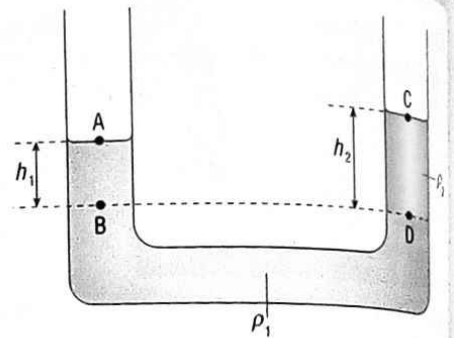
- 1.3. Com água e óleo de cozinha, verificou-se que as alturas h_1 e h_2 são, respectivamente, $h_1 = 6,4 \text{ cm}$ e $h_2 = 8,0 \text{ cm}$.

Determine:

- 1.3.1. a densidade relativa do óleo;

- 1.3.2. o valor da pressão nos pontos B e D;

- 1.3.3. a pressão que o líquido menos denso exerce na superfície de separação.



Resolução

1.

- 1.1. Pela Lei Fundamental da Hidrostática, é:

$$p_B = p_0 + \rho_1 g h_1 \quad \text{e} \quad p_D = p_0 + \rho_2 g h_2$$

Como os pontos B e D pertencem ao mesmo líquido e se encontram ao mesmo nível, as pressões nesses pontos são iguais. Então, tem-se:

$$p_0 + \rho_1 g h_1 = p_0 + \rho_2 g h_2 \Leftrightarrow \rho_1 h_1 = \rho_2 h_2 \Leftrightarrow \frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

- 1.2. Os pontos A e C são pontos que se encontram na superfície livre dos líquidos, logo, à pressão atmosférica. Portanto, a pressão é igual nos dois pontos, sendo a diferença de pressão nula ($\Delta p = 0$).

1.3.

- 1.3.1. De acordo com a alínea 1.1., fica: $\rho_1 h_1 = \rho_2 h_2$.

Substituindo pelos valores, tem-se:

$$1,0 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3} \times 6,4 \times 10^{-2} \text{ m} = \rho_2 \times 8,0 \times 10^{-2} \text{ m} \Leftrightarrow \rho_2 = 0,80 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$$

A massa volúmica do óleo de cozinha é $\rho_{\text{óleo}} = 0,80 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$.

A densidade relativa do óleo é dada por: $d = \frac{\rho_{\text{óleo}}}{\rho_{\text{água}}}$.

Sendo $\rho_{\text{água}} = 1,0 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$, é $d_{\text{óleo}} = 0,80$.

- 1.3.2. Os pontos B e D, como se encontram ao mesmo nível, estão à mesma pressão. Calculemos, por exemplo, a pressão em B.

$$p_B = p_0 + \rho_1 g h_1$$

Substituindo pelos valores, tem-se:

$$p_B = 1,01 \times 10^5 \text{ Pa} + 1,0 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3} \times 10 \text{ ms}^{-2} \times 6,4 \times 10^{-2} \text{ m} \Leftrightarrow p_B = 1,02 \times 10^5 \text{ Pa}$$

- 1.3.3. A pressão que é exercida no ponto D é devida à pressão atmosférica mais a pressão exercida pela coluna do líquido menos denso. Portanto:

$$p_{\text{liq. menos denso}} = 1,02 \times 10^5 \text{ Pa} - 1,01 \times 10^5 \text{ Pa} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p_{\text{liq. menos denso}} = 1,0 \times 10^3 \text{ Pa}$$

Repare

Num sistema de vasos comunicantes, com dois líquidos não miscíveis, em equilíbrio, as alturas dos líquidos são inversamente proporcionais às massas volúmicas dos líquidos.

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

A pressão atmosférica

De acordo com a Lei Fundamental da Hidrostática, a diferença de pressão entre dois pontos no interior de um fluido homogéneo em equilíbrio depende da massa volumica do fluido e da diferença de nível entre esses dois pontos ($P_2 = P_1 + \rho g h$).

Vimos que, no caso dos líquidos, como são praticamente incompressíveis, a sua massa volumica é constante e a diferença de pressão entre dois pontos do liquido é directamente proporcional à profundidade.

Já no caso dos gases contidos num recipiente fechado, podemos admitir que a pressão é a mesma em todos os pontos do gás. Como a massa volumica dos gases é muito pequena, a diferença de pressão entre dois pontos é insignificante comparada com a pressão do gás.

Ena atmosfera? A pressão atmosférica será a mesma em todos os locais?

Os barómetros (aparelhos que medem a pressão atmosférica) mostram que a pressão atmosférica diminui com a altitude. Efectivamente, devido à atracção gravitacional, há uma acumulação de moléculas dos gases constituintes do ar e de outras particulas poluentes nas camadas mais baixas da atmosfera, ou seja, há uma rarefacção do ar à medida que subimos na atmosfera e, portanto, a massa volumica do ar diminui com a altitude. Assim, a pressão atmosférica diminui com a altitude de uma forma não linear, como se mostra na figura 4.18.

A diminuição da pressão atmosférica com a altitude deve-se, principalmente, a esta rarefacção do ar, já que as altitudes de que estamos a falar (montanhas) são pequenas comparadas com a altitude total da atmosfera. A atmosfera não tem, portanto, uma densidade constante com a altitude.

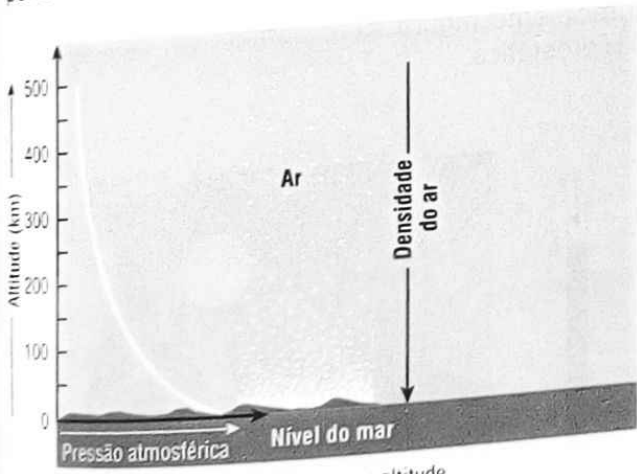


Fig. 4.18 Variação da pressão atmosférica com a altitude.



Fig. 4.19 A altitudes elevadas, como o ar está mais rarefeito, temos dificuldade em respirar.

A pressão atmosférica à superfície da Terra e ao nível do mar é cerca de $1,01 \times 10^5$ Pa (1 atm), o que é uma pressão relativamente elevada.

Por exemplo, se a superfície da nossa cabeça tiver uma área de 250 cm^2 , quando sujeita à pressão atmosférica normal ($1,01 \times 10^5$ Pa), estará submetida a uma força de pressão de 2500 N. Esta força equivale ao peso de um corpo de 250 kgf!

O corpo humano está, contudo, adaptado a esta pressão atmosférica. Não somos esmagados por ela pela simples razão de que também são exercidas forças de pressão, no sentido de dentro para fora do corpo, pelos fluidos que existem no interior das células.

Estas forças de pressão equilibram as forças de pressão atmosférica que são exercidas sobre qualquer corpo, em todas as direcções.



Fig. 4.17 A pressão que o gás exerce na garrafa é praticamente igual em todos os pontos



Fig. 4.20 Extraíndo o ar da lata, esta deforma-se por todos os lados devido às forças de pressão atmosférica que se exercem em todas as direcções.

Medidores de pressão

• Os barômetros

Os **barômetros** são dispositivos que permitem medir a pressão atmosférica.

Foi o físico italiano Torricelli (1608-1647) quem, em 1643, realizou a conhecida **experiência de Torricelli** que permitiu medir, pela primeira vez, a pressão atmosférica. Os **barômetros de mercúrio** baseiam-se, precisamente, nesta experiência. Por isso, são designados, muitas vezes, por **barômetros de Torricelli**.

Torricelli encheu com mercúrio um tubo de vidro, com cerca de 1 m de altura e diâmetro interior pequeno, tapou a abertura, inverteu-o numa tina também com mercúrio e destapou novamente a abertura. Verificou que o mercúrio desceu no tubo, ficando a **uma altura h** acima do nível do mercúrio na tina, o que acontece quando a **pressão do mercúrio no tubo é equilibrada pela pressão exterior**.

À pressão atmosférica normal, a altura da coluna de mercúrio é de 760 mm. De-se ter convencionado que a **pressão atmosférica normal**, ao nível do mar, é de **760 mmHg** ou de **76 cmHg**.

O **milímetro de mercúrio (mmHg)** ou **torr (Torr)** é outra unidade de pressão que se usa com frequência, como, por exemplo, quando se mede a pressão arterial.

• Os manómetros

Os **manómetros** são um outro tipo de dispositivo que permite medir a pressão de fluidos.

Há diversos tipos de manómetros.

Os **manómetros em U**, de tubo aberto, por exemplo, permitem medir a pressão de um gás dentro de um recipiente (figura 4.22). Constituem uma aplicação directa da Lei Fundamental da Hidrostática.

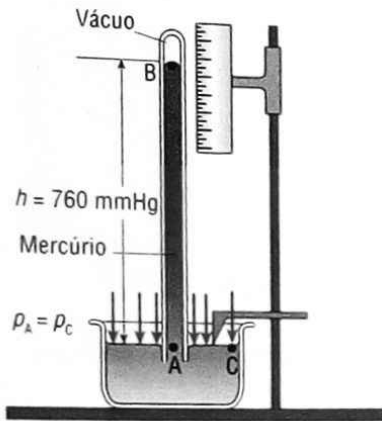


Fig. 4.21 Experiência de Torricelli, num local onde a pressão atmosférica é a pressão normal.

Curiosidades

Em locais elevados, a pressão atmosférica pode ser muito menor do que 76 cmHg.

Por exemplo, no ponto mais alto de Moçambique, o Monte Binga, a uma altura de 2436 m, a pressão atmosférica é de 56 cmHg.

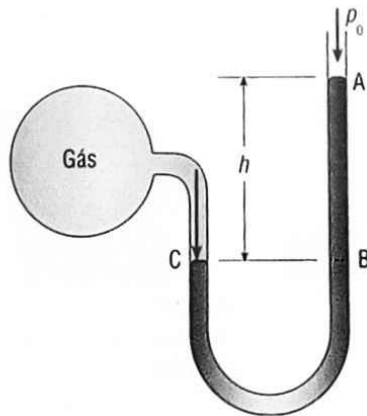


Fig. 4.22 Manómetro em U, de tubo aberto.



Fig. 4.23 A pressão arterial é medida, muitas vezes, com manómetros de mercúrio (esfingomanómetros).

Repare

Existem, basicamente, dois tipos de **barômetros**: os de **mercúrio** e os **metálicos**.

Os **barômetros metálicos** são menos rigorosos que os de mercúrio, mas mais práticos e transportáveis.

O tubo em U contém um líquido, como o mercúrio (Hg), que se eleva a diferentes níveis em cada lado. A pressão no ponto A é a pressão atmosférica, p_0 , pois o tubo é aberto.

A pressão no líquido do manómetro, em B, é $p_0 + \rho gh$, onde ρ é a densidade do fluido no manómetro. A pressão no ponto C, que é igual à pressão do gás encerrado no balão do manómetro, é igual à pressão no ponto B, pois estes pontos estão ao mesmo nível.

Algumas unidades de pressão

- pascal (Pa) – unidade SI de pressão
- atmosfera (atm)

$$1 \text{ atm} = 1,01325 \times 10^5 \text{ Pa}$$

$$1 \text{ atm} = 760 \text{ mmHg}$$

- milímetro de mercúrio (mmHg)

$$1 \text{ mmHg} = 1,33322 \times 10^2 \text{ Pa}$$

- torr (Torr)

$$1 \text{ Torr} = 1 \text{ mmHg}$$

- bar (bar)

$$1 \text{ bar} = 1 \times 10^5 \text{ Pa}$$

- libra por polegada quadrada (lbf in^{-2})

$$1 \text{ lbf in}^{-2} = 6,89476 \times 10^3 \text{ Pa}$$

► Lei de Pascal

Consideremos um líquido num vaso cilíndrico, com um êmbolo assente sobre o líquido, tal como mostra a figura 4.24 A.

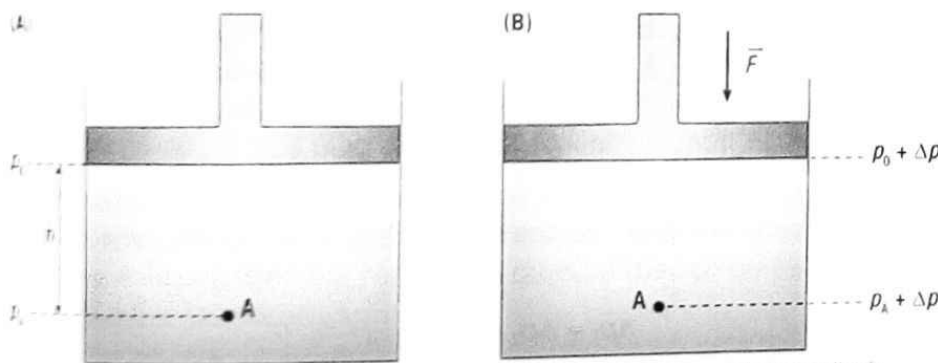


Fig. 4.24 O líquido transmite, a todos os seus pontos, qualquer pressão exterior que lhe seja aplicada



Blaise Pascal (1623-1662)

De acordo com a Lei Fundamental da Hidrostática, a pressão num ponto A do líquido é dada por:

$$p_A = p_0 + \rho gh$$

sendo p_0 a pressão exterior sobre o líquido.

Que sucederá se sobre o êmbolo actuar uma força \vec{F} que aumente a pressão exterior sobre o líquido? Como aumentará a pressão em A?

Para um fluido incompressível, se a pressão p_0 aumentar para $p_0 + \Delta p$, a pressão em A passa a ser:

$$p'_A = p_0 + \Delta p + \rho gh \iff p'_A = p_A + \Delta p$$

Portanto, o fluido transmite, a todos os seus pontos, qualquer pressão exterior que lhe seja aplicada.

Este resultado constitui a lei estabelecida, no século XVII, pelo físico e filósofo francês Blaise Pascal.

Lei de Pascal – qualquer variação de pressão exercida sobre um fluido em equilíbrio hidrostático transmite-se integralmente a todos os pontos do fluido e às paredes do recipiente que o contém.



Fig. 4.25 Seringa de Pascal que permite visualizar a lei por ele enunciada.

Esta lei aplica-se, portanto, a fluidos incompressíveis, isto é, a fluidos que não mudam de volume quando actuados por forças de pressão (e, portanto, cuja massa volúmica é constante).

Uma aplicação importante da Lei de Pascal é a **prensa hidráulica** (figura 4.26). Esta é constituída por um sistema de dois vasos comunicantes, de secções diferentes, contendo um líquido e um êmbolo, na extremidade de cada um dos vasos assente sobre o líquido.

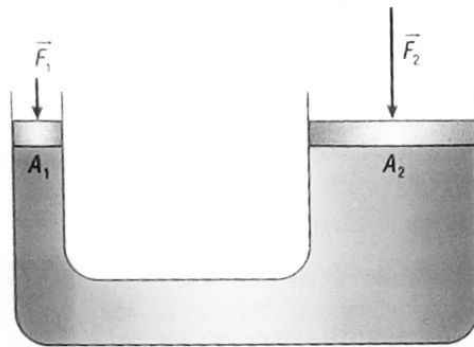


Fig. 4.26 Na prensa hidráulica, a pressão exercida em qualquer um dos êmbolos é transmitida integralmente ao outro êmbolo em contacto com o líquido.

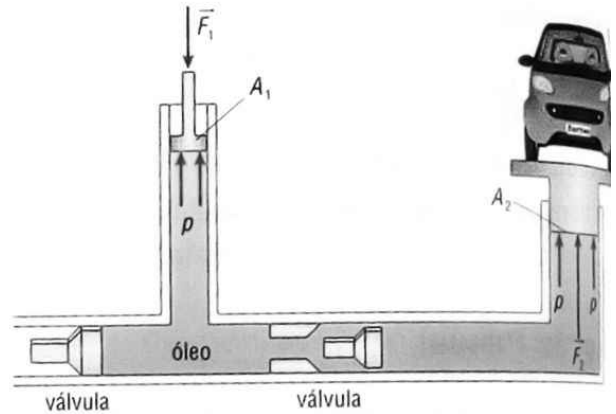


Fig. 4.27 Macaco hidráulico. O compressor injecta ar comprimido no reservatório que contém óleo. Este aumento de pressão é transmitido pelo óleo ao êmbolo, que eleva o carro.

A pressão devida a uma força \vec{F}_1 de pequena intensidade, aplicada ao êmbolo menor, de área A_1 , é transmitida integralmente, pelo líquido, ao êmbolo maior, de área A_2 .

Como as variações de pressão nos dois êmbolos são iguais, tem-se:

$$\Delta p_1 = \Delta p_2 \Rightarrow \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

Esta expressão, que traduz a **Lei de Pascal**, também pode ter a seguinte leitura: **“Num fluido, em equilíbrio hidrostático, as forças de pressão são proporcionais às áreas das superfícies em que actuam.”**

Com uma **prensa hidráulica**, consegue-se, portanto, obter uma força, \vec{F}_2 , elevada intensidade, à custa de uma força, \vec{F}_1 , de pequena intensidade, aplicada numa superfície de área reduzida.

O **macaco hidráulico** (figura 4.27), utilizado como elevador de automóveis, garagens e oficinas de mecânica, é uma prensa hidráulica.

Outra aplicação importante da Lei de Pascal são os **travões hidráulicos** dos automóveis.

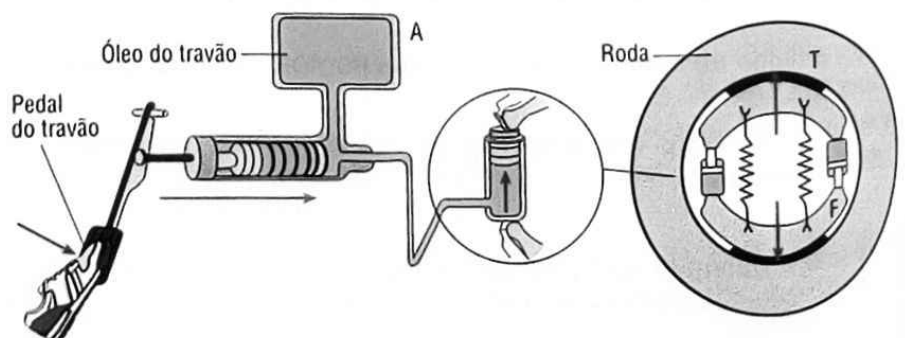


Fig. 4.28 Travão hidráulico.

Carregando com o pé no pedal do travão, aumenta a pressão no óleo do cilindro A. Este aumento de pressão é transmitido pelo óleo aos êmbolos ou pistões que comprimem os travões ou freios, F, contra o tambor da roda, impedindo-a de rodar.

► Impulsão e Lei de Arquimedes

Sabemos já que qualquer corpo mergulhado total ou parcialmente num fluido é actuado por uma força vertical, dirigida para cima, que se designa por **impulsão**, \bar{I} .

São inúmeros os exemplos do dia-a-dia que comprovam a existência de impulsão. Essa força é notória quando tomamos banho no mar ou na piscina ou quando pretendemos mergulhar na água uma bola de plástico ou um pedaço de cortiça.

Efectivamente, há uma aparente diminuição do peso de um corpo quando este está total ou parcialmente mergulhado num fluido.

Este facto pode ser verificado experimentalmente com a ajuda de um dinamómetro. Ele indica valores diferentes quando um corpo está suspenso no ar ou imerso num líquido.

O valor registado no dinamómetro quando o corpo está imerso num líquido é menor do que o valor determinado no ar. Essa diferença deve-se, portanto, à **impulsão**, \bar{I} , exercida pelo líquido.

O **módulo da impulsão**, \bar{I} , pode ser determinado pela **diferença** entre os valores registados nas duas leituras do dinamómetro: com o **corpo suspenso no ar** e com o **corpo suspenso no líquido**. No exemplo da figura 4.30, a impulsão é, portanto, de 0,50 N.

Conta a lenda que Arquimedes terá descoberto a lei que ficou conhecida por **Lei de Arquimedes** quando tentava resolver um problema que lhe fora posto pelo seu primo Hierão, rei de Siracusa. Este pretendia saber se a coroa de ouro que encomendara a um ourives era realmente de ouro maciço ou se teria sido falsificada sem, todavia, danificar a coroa.

Segundo a lenda, Arquimedes terá descoberto o processo de investigar a composição da coroa, quando, no banho, sentiu que o seu peso parecia menor.

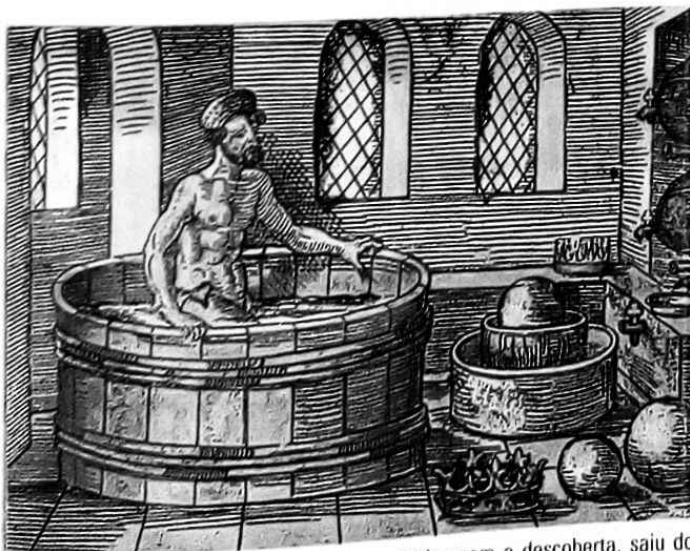


Fig. 4.31 Segundo a lenda, Arquimedes, eufórico com a descoberta, saiu do banho e correu pelas ruas de Siracusa gritando: "Eureca, ..." (que, em grego, significa *descobri*).

Lei de Arquimedes – qualquer corpo mergulhado total ou parcialmente num fluido sofre, da parte deste, uma impulsão vertical, dirigida de baixo para cima e de intensidade igual à do peso do volume de fluido deslocado pelo corpo.



Fig. 4.29 Quando se pretende mergulhar na água uma bola de plástico, sente-se bem a impulsão.

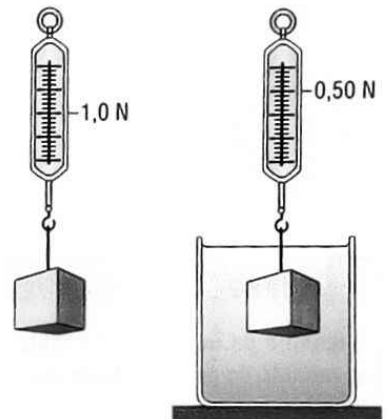
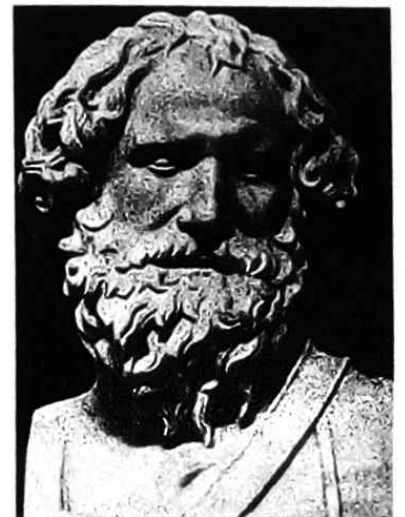


Fig. 4.30 O dinamómetro indica valores diferentes quando o corpo está suspenso no ar ou imerso na água.



Arquimedes
(287-212 a. C.)

Natural de Siracusa (Sicília), foi um matemático e físico grego do século III a. C.

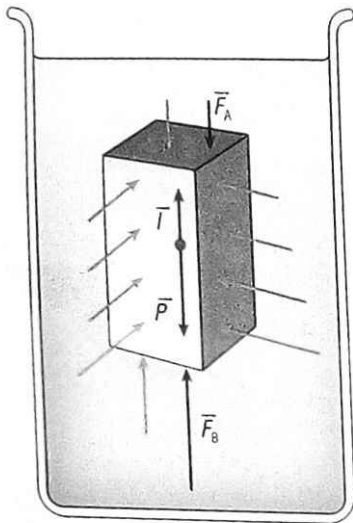


Fig. 4.32 A impulsão, \vec{I} , é a resultante das forças de pressão que o fluido exerce na porção de volume V , em forma de paralelepípedo.

A Lei de Arquimedes pode ser deduzida da Lei Fundamental da Hidrostática. Consideremos, então, um fluido, de massa volúmica ρ , no interior do qual tomamos uma porção de volume V , em forma de paralelepípedo. Essa porção de fluido fica em equilíbrio estático sob a ação do seu peso, \vec{P} , e das forças de pressão exercidas pelo resto do fluido, perpendicularmente às suas faces. A **impulsão**, \vec{I} , é a resultante de todas estas forças de pressão.

Como as forças de pressão segundo a horizontal se equilibram duas a duas, a resultante das forças de pressão segundo a vertical tem de equilibrar o peso do corpo, pois $\sum \vec{F}_{ext.} = \vec{0} \Rightarrow \vec{I} + \vec{P} = \vec{0}$.

$$\sum \vec{F}_{ext.} = \vec{0} \Rightarrow \vec{I} + \vec{P} = \vec{0}$$

Portanto, a resultante das forças de pressão exercidas sobre essa porção de fluido – a **impulsão**, \vec{I} , é igual à soma das forças de pressão verticais, \vec{F}_A e \vec{F}_B , com módulo igual ao do peso do fluido.

$$\vec{I} = \vec{F}_B + \vec{F}_A, \text{ sendo } I = F_B - F_A$$

De acordo com a Lei Fundamental da Hidrostática, é:

$$p_B = p_A + \rho gh$$

Uma vez que $p = \frac{F}{A}$ sendo A a área das bases do paralelepípedo, podemos escrever:

$$\frac{F_B}{A} = \frac{F_A}{A} + \rho gh \Leftrightarrow F_B - F_A = \rho ghA$$

Como $V = hA$, tem-se:

$$F_B - F_A = \rho gV$$

ou seja:

$$I = \rho gV \quad \text{ou} \quad I = mg$$

onde:

ρ – massa volúmica do fluido

V – volume do fluido deslocado

m – massa do fluido deslocado

Repare

O módulo da impulsão, I , é igual ao módulo do peso do fluido deslocado pelo corpo.

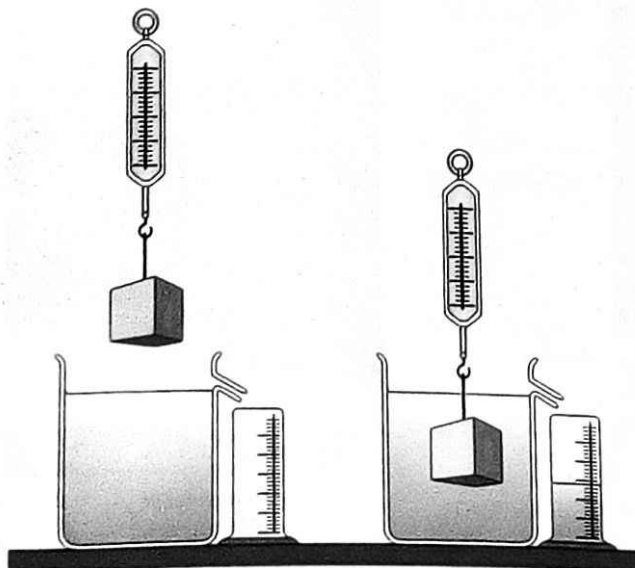


Fig. 4.33 Verificação experimental da Lei de Arquimedes.

A resultante das forças de pressão exercidas sobre o paralelepípedo de volume V será a mesma se, em vez de fluido, esse volume fosse ocupado por um outro corpo.

A **Lei de Arquimedes** pode ser **verificada experimentalmente** com um dinamómetro (ou uma balança), um copo parcialmente cheio de água até ao nível do tubo lateral e uma proveta, tal como mostra a figura 4.33.

Começa-se por suspender o corpo do dinamómetro e registar a leitura. Em seguida, mergulha-se o corpo no copo parcialmente cheio de água até ao nível do tubo lateral. Regista-se o novo valor lido no dinamómetro e mede-se o volume de água que vazou para a proveta. Verifica-se que a diferença entre os valores lidos no dinamómetro (valor da impulsão) é igual ao peso da água deslocada e que foi vertida para a proveta (isto é, $\rho_{\text{água}} (a 4^\circ\text{C}) = 1,0 \text{ g cm}^{-3}$ e 1 cm^3 de água tem a massa de

...aumentando com o...
 Este aumento de pressão...
 comprimem os travões ou freios, F, contra o...
 impedindo-a de...

Impulsão e Lei de Arquimedes

Sabemos já que qualquer corpo mergulhado total ou parcialmente num fluido é empurrado por uma força vertical, dirigida para cima, que se designa por **impulsão**, \vec{I} .

São numerosos os exemplos do dia-a-dia que comprovam a existência de impulsão: essa força é notória quando tomamos banho no mar ou na piscina ou quando nos mergulhamos na água uma bola de plástico ou um pedaço de cortiça.

Efectivamente, há uma aparente diminuição do peso de um corpo quando este é total ou parcialmente mergulhado num fluido.

Este facto pode ser verificado experimentalmente com a ajuda de um dinamómetro. Ele indica valores diferentes quando um corpo está suspenso no ar ou imerso num líquido.

O valor registado no dinamómetro quando o corpo está imerso num líquido é menor do que o valor determinado no ar. Essa diferença deve-se, portanto, à impulsão \vec{I} , exercida pelo líquido.

O módulo da impulsão, \vec{I} , pode ser determinado pela **diferença** entre os valores registados nas duas leituras do dinamómetro: com o **corpo suspenso no ar** e com o **corpo suspenso no líquido**. No exemplo da figura 4.30, a impulsão é, portanto, de 0,50 N.

Conta a lenda que Arquimedes terá descoberto a lei que ficou conhecida por **Lei de Arquimedes** quando tentava resolver um problema que lhe fora posto pelo seu primo Hierão, rei de Siracusa. Este pretendia saber se a coroa de ouro que recomendara a um ourives era realmente de ouro maciço ou se teria sido falsificada: sem, todavia, danificar a coroa.

Segundo a lenda, Arquimedes terá descoberto o processo de investigar a composição da coroa, quando, no banho, sentiu que o seu peso parecia menor.



Fig. 4.29 Quando se pretende mergulhar na água uma bola de plástico, sente-se bem a impulsão.

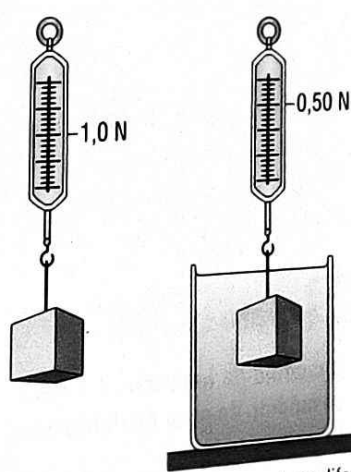


Fig. 4.30 O dinamómetro indica valores diferentes quando o corpo está suspenso no ar ou imerso na água.

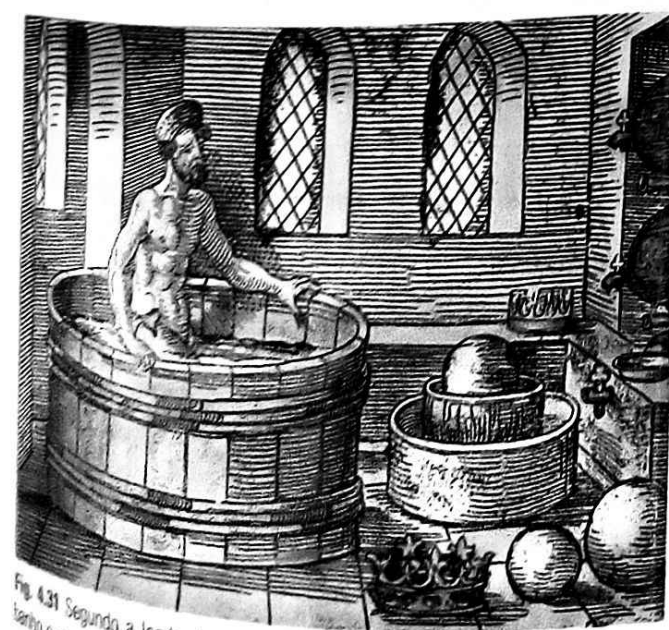
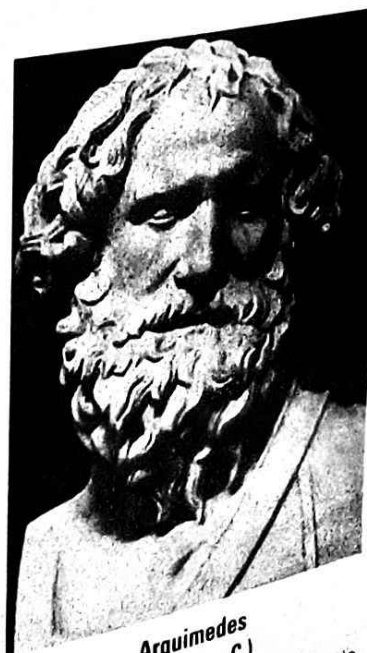


Fig. 4.31 Segundo a lenda, Arquimedes, eufórico com a descoberta, saiu do banho e correu pelas ruas de Siracusa gritando: "Eureka, ..." (que, em grego, significa descobri).



Arquimedes
 (287-212 a. C.)
 Natural de Siracusa (Sicília), foi um matemático e físico grego do século III a. C.

Arquimedes - qualquer corpo mergulhado total ou parcialmente num fluido, sofre, da parte deste, uma impulsão vertical, dirigida de baixo para cima, cujo módulo é igual à do peso do fluido deslocado.

A **impulsão** é uma força que se faz sentir sempre que um corpo está total ou parcialmente imerso num fluido, quer seja um líquido, quer seja um gás.

Por exemplo, qualquer corpo em contacto com o ar também sofre impulsão. Entretanto, como a densidade do ar é muito pequena, o valor da impulsão também é pequeno. Comparando-o com o peso do corpo, geralmente é desprezado, a não ser que o corpo em causa seja, por exemplo, um balão de ar quente. Neste caso, o volume do balão é grande para que o peso deslocado seja grande e consiga igualar o peso do balão. O ar quente dentro do balão tem massa menor que a do ar frio que é deslocado. A impulsão é, portanto, maior que o peso do ar no balão, permitindo que este suba.



Fig. 4.34 Quanto maior for o balão, maior é o peso de ar deslocado e maior é a impulsão.

Admitindo que o corpo está unicamente sob a acção do seu peso e da impulsão, podem verificar-se as situações:

• O corpo está em equilíbrio, sendo:

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P} + \vec{I} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P} = -\vec{I}$$

• O corpo não está em equilíbrio, sendo:

$$\sum \vec{F}_{ext} \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{P} + \vec{I} = m\vec{a}$$

Equilíbrio de corpos flutuantes

Quando um corpo maciço é totalmente imerso num fluido e, em seguida, é largado, **três situações podem ocorrer**: pode ir para o fundo, vir à superfície ou flutuar dentro do fluido. Porquê? Na verdade, isto tem a ver com a diferença de densidade entre o corpo e o fluido onde é imerso. Assim:

• Se $\rho_{corpo} > \rho_{fluido}$, o corpo afunda. Neste caso, é:

$$V_{corpo} = V_{fluido\ deslocado} \text{ e } \rho_{corpo} g V > \rho_{fluido} g V \Rightarrow P > I$$

• Se $\rho_{corpo} = \rho_{fluido}$, o corpo flutua no interior do fluido. Neste caso, é:

$$V_{corpo} = V_{fluido\ deslocado} \text{ e } \rho_{corpo} g V = \rho_{fluido} g V \Rightarrow P = I$$

• Se $\rho_{corpo} < \rho_{fluido}$, é $P < I$ e o corpo sobe, vindo a flutuar à superfície com uma parte imersa. Neste caso, como inicialmente é $P < I$, o corpo fica sujeito a uma aceleração vertical, de baixo para cima. Quando atinge a superfície livre do fluido, uma parte do corpo emerge. À medida que o corpo vai emergindo, o módulo da impulsão vai diminuindo, pois $V_{imerso} < V_{corpo}$, até que, em dado momento, é $P = I'$ e o corpo fica em equilíbrio.

Atingindo o equilíbrio, o módulo da impulsão é:

$$I' = \rho_{fluido} g V_{imerso} \text{ e } P = I'$$

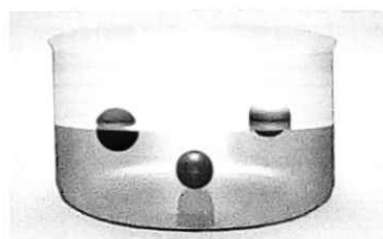


Fig. 4.35 Esferas maciças e do mesmo tamanho mas de materiais diferentes sofrem impulsões diferentes; o volume imerso é diferente.

Repare

Como o módulo do peso do corpo é dado por:

$$P = \rho_{\text{corpo}} g V_{\text{corpo}}$$

teremos para **condição de equilíbrio de um corpo flutuante**:

$$\rho_{\text{corpo}} g V_{\text{corpo}} = \rho_{\text{fluido}} g V_{\text{imerso}} \Leftrightarrow \rho_{\text{corpo}} V_{\text{corpo}} = \rho_{\text{fluido}} V_{\text{imerso}}$$

Sendo

$$\rho_{\text{corpo}} < \rho_{\text{fluido}}$$

tem-se, no equilíbrio:

$$V_{\text{imerso}} < V_{\text{corpo}}$$

Os **icebergues** são um exemplo desta situação. Mas, contrariamente ao que se possa pensar, o **volume da parte imersa de um icebergue é muito superior à parte emersa**, como podemos verificar.

Um icebergue flutua na água do mar deslocando um peso de água igual ao próprio peso ($P = I$):

$$\rho_{\text{gelo}} V_{\text{icebergue}} = \rho_{\text{água do mar}} V_{\text{imerso icebergue}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{V_{\text{imerso icebergue}}}{V_{\text{icebergue}}} = \frac{\rho_{\text{gelo}}}{\rho_{\text{água do mar}}}$$

Sendo $\rho_{\text{água do mar}} = 1,03 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ e $\rho_{\text{gelo}} \text{ (a } 0 \text{ °C)} = 0,92 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$, a **fracção do volume imerso de um icebergue** é, então:

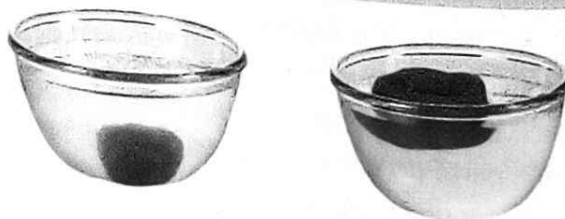
$$\frac{V_{\text{imerso icebergue}}}{V_{\text{icebergue}}} = \frac{0,92 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}}{1,03 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}} \Leftrightarrow \frac{V_{\text{imerso icebergue}}}{V_{\text{icebergue}}} = 0,89$$

Portanto, 89% do volume de um icebergue está imerso na água do mar, e apenas 11% do seu volume está emerso.



Fig. 4.36 O volume da parte emersa de um icebergue é de apenas 11%. A maior parte do icebergue está imersa na água do mar.

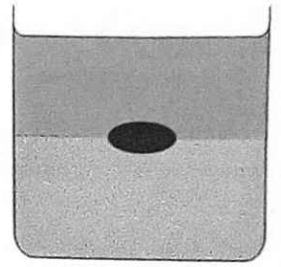
Desafio



Vimos que um corpo maciço flutua quando a sua densidade é inferior à densidade do fluido. Procure, então, explicar porque é que um navio, feito de ferro, flutua na água e um simples prego vai ao fundo numa tina com água, mas moldada em forma de barco vai... flutua.

Questões Resolvidas

2. Um corpo sólido e maciço, de massa 2,4 kg, está em equilíbrio na interface dos dois líquidos A e B, homogêneos e imiscíveis, tendo metade do seu volume imerso em cada um dos líquidos. As massas volúmicas dos líquidos A e B são, respectivamente, $\rho_A = 0,80 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ e $\rho_B = 1,6 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$.
- 2.1. Determine a massa volúmica do corpo.
 - 2.2. Deduza uma expressão que permita determinar o valor ρ da massa volúmica do corpo, em função das massas volúmicas, ρ_A e ρ_B , dos dois líquidos.



Resolução

- 2.1. O corpo está em equilíbrio quando:

$$\bar{T} + \bar{P} = \bar{O}, \text{ sendo } \bar{T} = \bar{T}_A + \bar{T}_B$$

Então, terá de ser:

$$I_A + I_B = P \Leftrightarrow \rho_A g V_A + \rho_B g V_B = m g \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho_A V_A + \rho_B V_B = m$$

Tendo em conta que $V_A = V_B = \frac{V}{2}$, tem-se: $\rho_A \frac{V}{2} + \rho_B \frac{V}{2} = m$ (1)

Substituindo pelos valores, fica:

$$0,80 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3} \times \frac{V}{2} + 1,6 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3} \times \frac{V}{2} = 2,4 \Leftrightarrow V = 2,0 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

Cálculo da massa volúmica do corpo:

$$\rho = \frac{m}{V}; \rho = \frac{2,4 \text{ kg}}{2,0 \times 10^{-3} \text{ m}^3} \Leftrightarrow \rho = 1,2 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$$

- 2.2. Retomando a expressão (1), onde $m = \rho V$, tem-se:

$$\rho_A \frac{V}{2} + \rho_B \frac{V}{2} = \rho V \Leftrightarrow \rho = \frac{\rho_A + \rho_B}{2}$$

Desafio

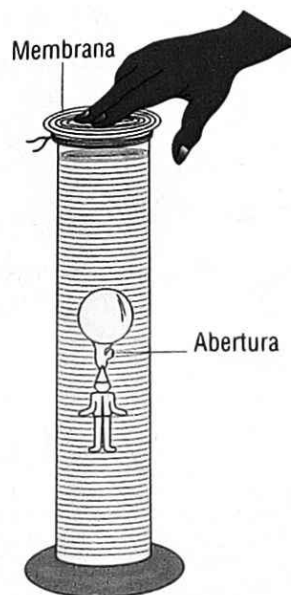
Construção de um ludião

As condições de equilíbrio dos corpos flutuantes explicam-nos o funcionamento do **ludião**, representado na figura.

O dispositivo é constituído por uma ampola que contém ar, lastrada por uma pequena figura de esmalte, e que tem um orifício na parte inferior. Este sistema mergulha numa proveta quase cheia de água, tapada por uma membrana de borracha.

Normalmente, o sistema formado pela ampola e pela figura mantém-se na parte superior do líquido da proveta, porque a impulsão que recebe é superior ao seu peso. Fazendo, porém, pressão sobre a membrana, a água penetra na ampola, aumentando o seu peso e fazendo-a descer. Cessando a pressão, a força elástica do ar interior expulsa a água que tinha entrado na ampola, e esta torna a subir.

Compreendido o funcionamento do ludião, **sugere-se a sua construção**. A ampola pode ser substituída por um tubo de ensaio invertido ou por um conta-gotas, quase cheios de água, que funcionam como flutuadores, e a proveta pode ser substituída por uma garrafa de plástico de 1,5 L.



Síntese de conteúdos

- Um **fluido** é um material que se escoia, isto é, que flui com relativa facilidade. Os líquidos e os gases são fluidos.
- A **massa volúmica**, ρ , ou **densidade** de um material é igual à massa contida na unidade de volume desse material.

$$\rho = \frac{m}{V}$$

- A **densidade relativa**, d , de um material é a razão entre a massa volúmica desse material e a massa volúmica de uma substância-padrão.

$$d = \frac{\rho_{\text{material}}}{\rho_{\text{padrão}}}$$

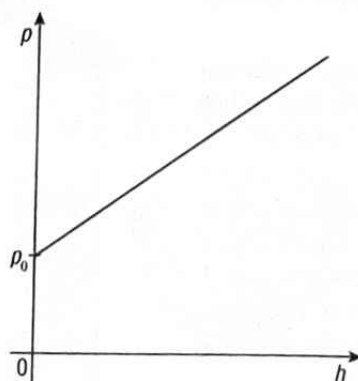
Para os sólidos e líquidos, o padrão é a **água** a 4 °C e à pressão atmosférica normal e, para os gases, o padrão é o **ar** nas condições normais de pressão e temperatura (a PTN).

- **Pressão** – módulo da intensidade da força exercida perpendicularmente a uma superfície, por unidade de área.

$$p = \frac{F}{A}$$

- **Força de pressão** – força perpendicular à superfície sobre a qual actua.
- **Num fluido em equilíbrio hidrostático**, as forças exercidas nas superfícies em contacto com o fluido são perpendiculares a essas superfícies em todos os pontos.
- **Num fluido em equilíbrio hidrostático**, a resultante das forças de pressão que se exercem, em todas as direcções, num ponto do fluido, é nula.
- A **pressão num ponto de um fluido** em equilíbrio é a mesma em todas as direcções.
- **Lei Fundamental da Hidrostática** – num líquido homogéneo, em equilíbrio hidrostático, a diferença de pressão entre dois pontos A e B, no interior do líquido, depende da massa volúmica do líquido e da diferença de nível entre esses dois pontos.

$$p_B = p_A + \rho g h$$



Os **barômetros** e os **manômetros** são medidores de pressão. Os barômetros servem para medir a pressão atmosférica e os manômetros em U de tubo aberto permitem medir a pressão de um gás dentro de um recipiente.

Lei de Pascal – qualquer variação de pressão exercida sobre um fluido em equilíbrio hidrostático transmite-se integralmente a todos os pontos do fluido e às paredes do recipiente que o contém.

$$\Delta p_1 = \Delta p_2 \Rightarrow \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

A **impulsão** é a resultante das forças de pressão que um fluido exerce sobre um corpo total ou parcialmente imerso nele.

Lei de Arquimedes – qualquer corpo mergulhado total ou parcialmente num fluido sofre, da parte deste, uma impulsão vertical, dirigida de baixo para cima e de intensidade igual à do peso do volume de fluido deslocado pelo corpo.

$$I = \rho g V \quad \text{ou} \quad I = mg$$

onde:

ρ – massa volúmica do fluido

V – volume do fluido deslocado

m – massa do fluido deslocado

O **módulo da impulsão, I** , é igual ao módulo do peso do fluido deslocado pelo corpo.

Equilíbrio de corpos flutuantes – quando um corpo maciço é totalmente imerso num fluido e, em seguida, é largado, três situações podem acontecer:

– Se $\rho_{\text{corpo}} = \rho_{\text{fluido}}$, o corpo flutua no interior do fluido, sendo:

$$V_{\text{corpo}} = V_{\text{fluido deslocado}} \quad \text{e} \quad P = I$$

– Se $\rho_{\text{corpo}} > \rho_{\text{fluido}}$, o corpo afunda, sendo:

$$V_{\text{corpo}} = V_{\text{fluido deslocado}} \quad \text{e} \quad P > I$$

– Se $\rho_{\text{corpo}} < \rho_{\text{fluido}}$, o corpo, inicialmente, sobe, sendo:

$$P < I$$

Uma vez atingido o equilíbrio, o corpo flutua à superfície, sendo:

$$V_{\text{imerso}} < V_{\text{corpo}} \quad \text{e} \quad P = I', \quad \text{com} \quad I' = \rho_{\text{fluido}} g V_{\text{imerso}}$$

Condição de equilíbrio de um corpo flutuante:

$$\rho_{\text{corpo}} V_{\text{corpo}} = \rho_{\text{fluido}} V_{\text{imerso}}$$

4.2. Hidrodinâmica

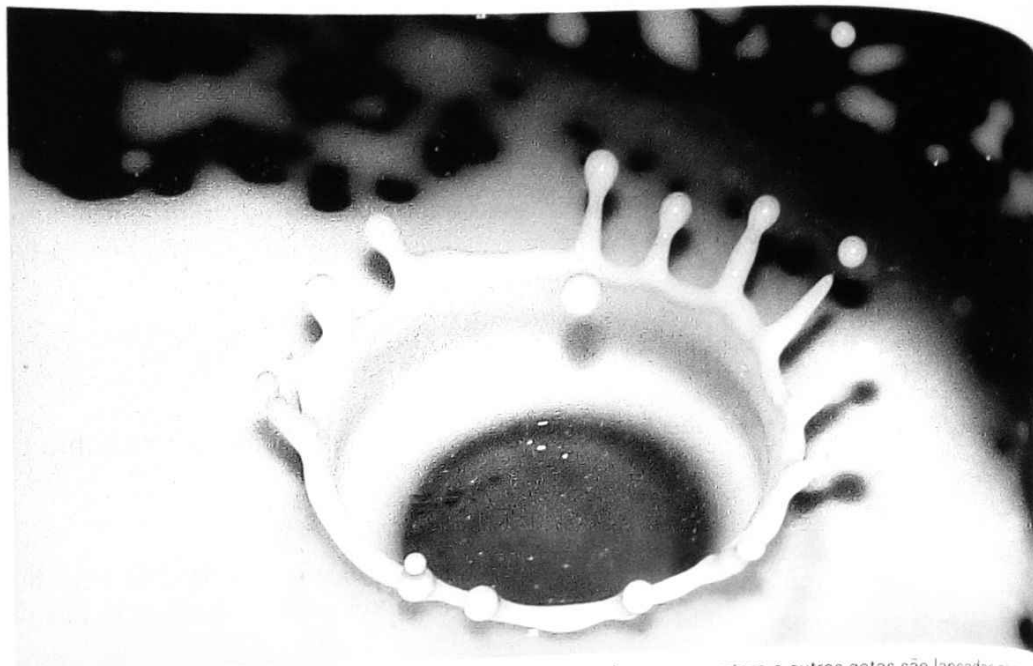


Fig. 4.37 Instantes após uma gota de leite ter batido na superfície, cria-se uma cratera e outras gotas são lançadas para cima.

► Movimento dos fluidos em regime estacionário

Na **Hidrostática** estudamos fluidos em equilíbrio estático. Agora, na **Hidrodinâmica**, vamos estudar o movimento dos fluidos.

O comportamento de um fluido em movimento pode ser muito complexo. Por exemplo, na parte central de um rio calmo, a água flui de uma forma regular, mas quando surge um declive no rio, o escoamento passa a ser turbulento. Também o fumo de um cigarro ou de uma vela eleva-se, inicialmente, numa corrente regular, mas, logo depois, torna-se turbulento.

Como é difícil descrever, em geral, o escoamento de um fluido, o nosso estudo vai limitar-se ao movimento de um **fluido ideal**.

Um **fluido ideal** apresenta as seguintes características:

- **Não é viscoso**, isto é, não há dissipação de energia no seu escoamento. Na prática, esta condição é sempre aproximada, pois todos os fluidos possuem viscosidade. A viscosidade no movimento dos fluidos é análoga ao atrito no movimento dos sólidos.
- **É incompressível**, isto é, a densidade é constante em qualquer ponto do fluido. Podemos considerar os líquidos, em geral, como incompressíveis. Quanto aos gases, apesar de serem altamente compressíveis, a variação de densidade pode ser insignificante em alguns casos e o fluido ser praticamente incompressível.

Um fluido ideal não é viscoso e é incompressível.

Por exemplo, quando um avião se desloca a velocidades muito menores que a do som no ar, no seu escoamento em torno das asas, o ar comporta-se como aproximadamente incompressível.

Um **escoamento diz-se em regime estacionário** quando a velocidade do fluido, em cada ponto, é constante ao longo do tempo, embora possa variar de ponto para ponto.

Isto significa que todos os elementos do fluido têm a velocidade \vec{v}_A quando passam por A, a velocidade \vec{v}_B quando passam por B, etc.

Conteúdo

- Movimentos dos fluidos em regime estacionário.
- Conservação da massa e equação de continuidade.
- Conservação de energia mecânica e equação de Bernoulli.
- Força de resistência em fluidos; coeficiente de viscosidade de um líquido.



Fig. 4.38 Fumo de uma vela.

Num escoamento regular de um fluido, a trajectória de uma partícula do fluido coincide com uma **linha de corrente**, que é uma linha tangente à velocidade, em cada ponto. As linhas de corrente de um fluido são, portanto, **linhas de um campo de velocidade**.

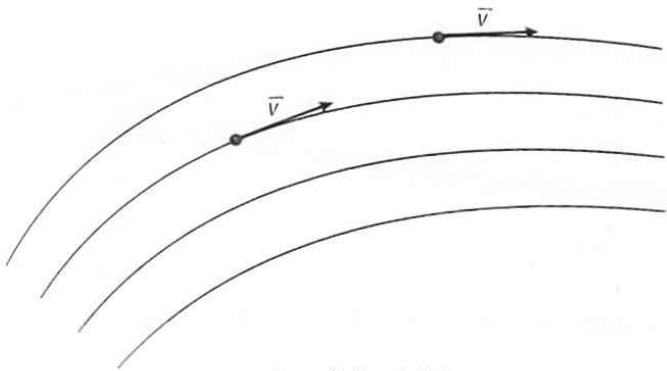


Fig. 4.39 As linhas de corrente de um fluido são linhas tangentes à velocidade em cada ponto.

Recorde

Os **vectores campo eléctrico, \vec{E}** , e **campo magnético, \vec{B}** , também são tangentes às respectivas linhas de campo.

Tal como as linhas de um campo eléctrico e de um campo magnético, estudadas na 10.ª classe:

- **As linhas de corrente nunca se cruzam.** Se se cruzassem, significava que havia mais do que uma velocidade de escoamento no mesmo ponto do fluido, o que não é possível.
- **Num escoamento em regime estacionário, uma maior densidade de linhas de corrente, numa dada região, significa maior velocidade de escoamento.**

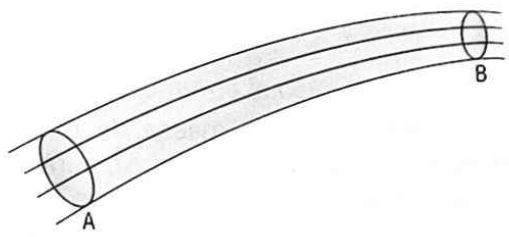


Fig. 4.40 Em B, a densidade das linhas de corrente é maior do que em A.

Quando o movimento de um fluido não se faz em regime regular, diz-se que o **escoamento é turbulento**.

O escoamento turbulento é um escoamento irregular, caracterizado por regiões de pequenos remoinhos, tal como o fumo do cigarro, as quedas-d'água, as vagas do maré, etc.

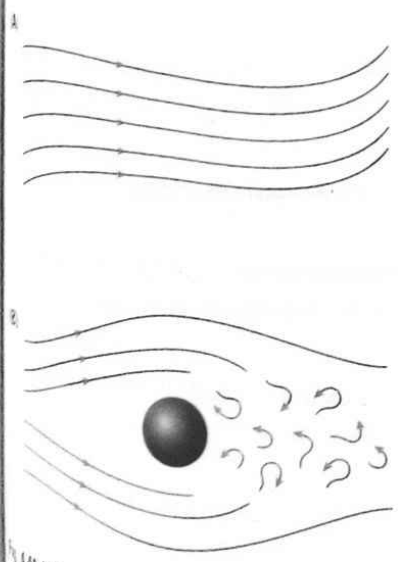
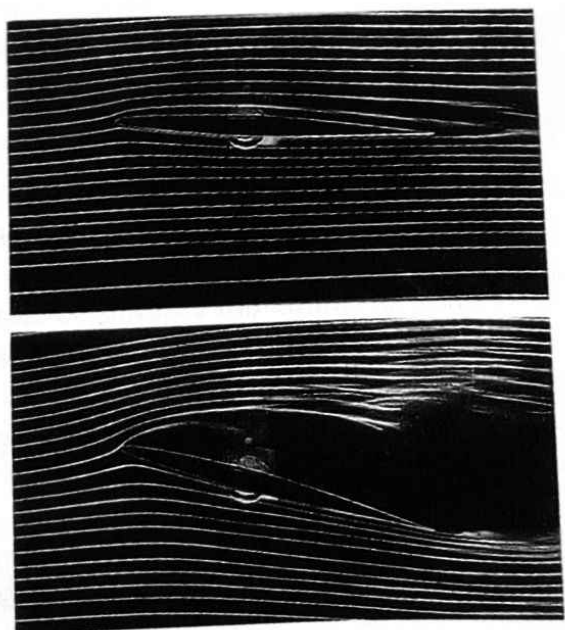


Fig. 4.41 (A) Linhas de corrente num escoamento estacionário;



(B) Linhas de corrente à passagem de um obstáculo, num escoamento turbulento.

► Conservação da massa e equação de continuidade

Consideremos o escoamento estacionário de um fluido ideal numa con-

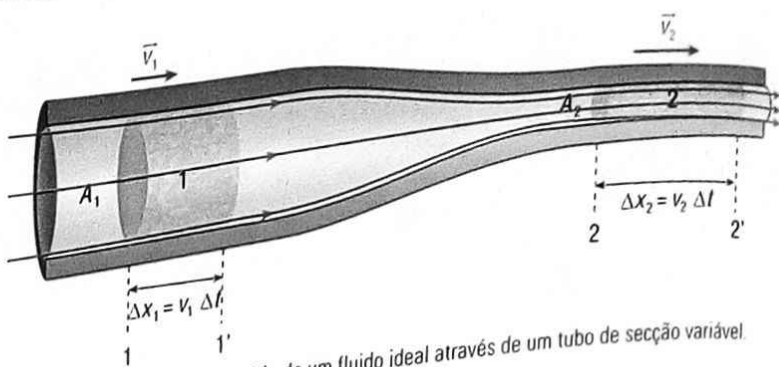


Fig. 4.42 Escoamento estacionário de um fluido ideal através de um tubo de seção variável

Repare

V – volume
 v – módulo da velocidade

Seja A_1 a área da seção recta do tubo, na região 1, e v_1 o módulo da velocidade do fluido, o volume de fluido que entra no tubo, num intervalo de tempo Δt , é:

$$\Delta V_1 = A_1 \Delta x_1 \Leftrightarrow \Delta V_1 = A_1 v_1 \Delta t$$

e a sua massa é:

$$m_1 = \rho A_1 v_1 \Delta t$$

Analogamente, a massa de fluido que sai do tubo, na região 2, durante mesmo intervalo de tempo, Δt , será:

$$m_2 = \rho A_2 v_2 \Delta t$$

Como se trata de um fluido ideal, estamos a admitir a incompressibilidade do fluido e, por isso, ρ é o mesmo nas regiões 1 e 2 da figura. Então, pela **conservação da massa**, tem-se:

$$m_1 = m_2 \Rightarrow A_1 v_1 = A_2 v_2$$

Esta expressão é a designada **equação de continuidade**, que traduz, no fundo a conservação da massa na dinâmica dos fluidos incompressíveis.

A equação de continuidade mostra que:

- **A velocidade** de um fluido **aumenta quando estreita o tubo** que o contém isto é, a velocidade de escoamento varia na razão inversa da área da seção recta através da qual o fluido esco.
- **As linhas de corrente adensam-se nos estrangulamentos.**

Define-se **caudal em volume** ou **caudal volumétrico**, que se representa pela letra grega ϕ , como o volume de fluido que escoa através de uma seção recta de um tubo, por unidade de tempo.

$$\phi = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

Atendendo a que $\Delta V = A v \Delta t$, tem-se:

$$\phi = A v$$

A **unidade SI** de caudal em volume é o **metro cúbico por segundo**, $m^3 s^{-1}$.

Repare

Como as seções rectas A_1 e A_2 são quaisquer, a **equação de continuidade** pode ser escrita na forma:

$$A v = \text{constante}$$

sendo A a área da seção recta do tubo num ponto qualquer e v o módulo da velocidade do fluido nesse ponto.

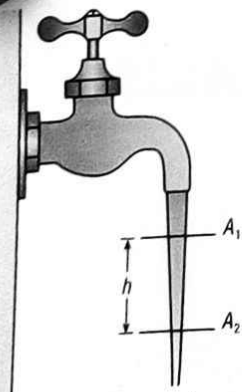
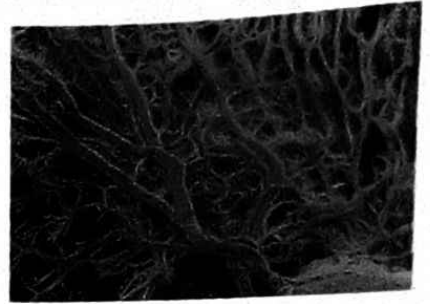


Fig. 4.43 À medida que a água cai da torneira, aumenta a sua velocidade, diminuindo a seção do jacto de água, de acordo com a equação de continuidade.

Repare

O **caudal em volume** é constante num **escoamento estacionário**.

1. O sangue, que flui numa artéria do corpo humano de raio 0,3 cm, à velocidade de 10 cm s^{-1} , entra num dado momento numa zona da artéria onde o raio se encontra reduzido para 0,2 cm devido ao espessamento das paredes arteriais (arteriosclerose).



Determine:

- 1.1. o módulo da velocidade do sangue, na região mais estreita da artéria;
- 1.2. o volume de sangue que passa por segundo numa secção recta da artéria;
- 1.3. o número de vasos capilares por onde vai fluir o sangue desta artéria, sabendo que o diâmetro de um capilar é cerca de $8 \times 10^{-4} \text{ cm}$ e a velocidade média com que o sangue flui nos capilares é de $5 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-1}$.

Resolução

1.1. Pela equação de continuidade, é:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2, \text{ sendo } A = \pi r^2$$

Substituindo pelos valores, tem-se:

$$\pi(0,3 \times 10^{-2} \text{ m})^2 \times 10 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-1} = \pi(0,2 \times 10^{-2} \text{ m})^2 \times v_2 \Leftrightarrow v_2 = 2,3 \times 10^{-1} \text{ m s}^{-1} \text{ (23 cm s}^{-1}\text{)}$$

1.2. O volume de sangue que passa por segundo numa secção recta da artéria é o caudal. Então, é:

$$\phi = A v; \phi = \pi(0,3 \times 10^{-2} \text{ m})^2 \times 10 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-1} \Leftrightarrow \phi = 2,8 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$$

1.3. Recorrendo novamente à equação de continuidade, onde A_2 é a área total dos capilares ($A_2 = n \times A_{\text{área capilar}}$), tem-se:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2; \pi(0,3 \times 10^{-2} \text{ m})^2 \times 10 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-1} = n \times \pi(4 \times 10^{-4} \times 10^{-2} \text{ m})^2 \times 5 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-1} \Leftrightarrow n = 1,1 \times 10^8 \text{ capilares}$$

Conservação de energia mecânica e equação de Bernoulli

A equação de Bernoulli, também conhecida por equação fundamental da Hidrodinâmica, relaciona pressão, o desnível e a velocidade de um fluido real, num escoamento estacionário, através de um tubo com área de secção recta variável.

Para deduzir esta equação, vamos recorrer à Lei de Conservação da Energia, pois ela exprime, no âmbito, a conservação da energia no escoamento dos fluidos.

Consideremos, então, um fluido ideal que se move em regime estacionário, num tubo de secção variável.

Consideremos o fluido que está inicialmente entre pontos 1 e 2 de uma mesma linha de corrente (ver figura 4.44).

Decorrido um intervalo de tempo Δt , o fluido deslocou-se no tubo e passou a ocupar a região entre os pontos 1' e 2'.

Seja $\Delta m = \rho \Delta V$ a massa de fluido deslocado.

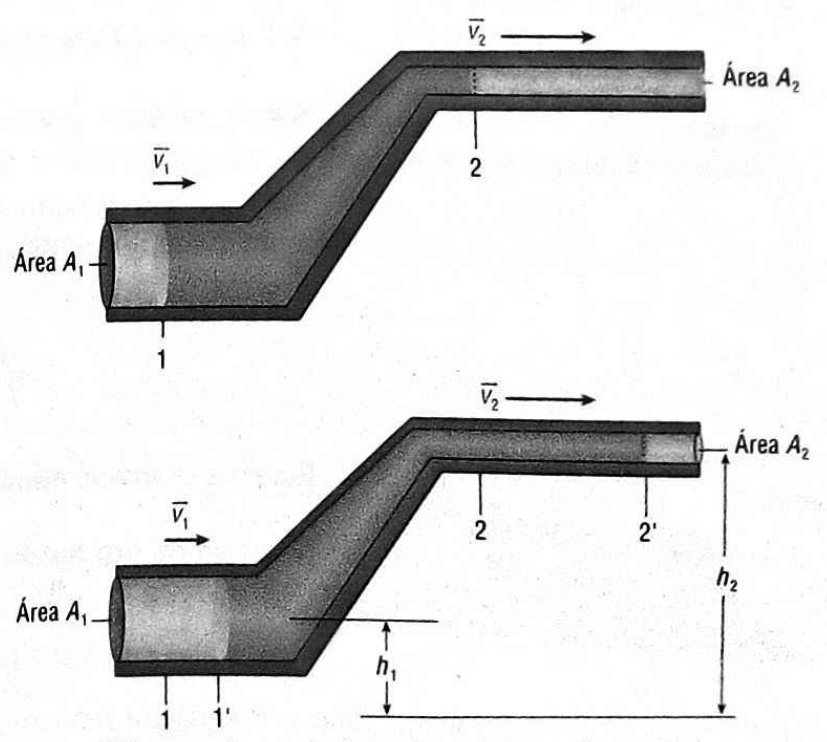


Fig. 4.44 Fluido escoando num tubo de área de secção recta e altura variáveis.



Daniel Bernoulli
(1700-1782)

Matemático e físico suíço que fez importantes descobertas na área da Hidrodinâmica.

Durante o intervalo de tempo Δt , a massa Δm de fluido foi elevada da altura y_1 para a altura y_2 e a velocidade passou de \vec{v}_1 para \vec{v}_2 .

A **variação da energia potencial** do fluido, de massa Δm , é, então:

$$\Delta E_p = \Delta m g (y_2 - y_1) \Leftrightarrow \Delta E_p = \rho \Delta V g (y_2 - y_1)$$

e a **variação da energia cinética** é:

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} \Delta m (v_2^2 - v_1^2) \Leftrightarrow \Delta E_c = \frac{1}{2} \rho \Delta V (v_2^2 - v_1^2)$$

Por sua vez, o fluido que está à esquerda do elemento de volume (à esquerda da parte mais azul na figura 4.44) exerce uma força de pressão \vec{F}_1 sobre o elemento de volume, de módulo $F_1 = p_1 A_1$.

O **trabalho realizado** por esta força \vec{F}_1 é:

$$W_{\vec{F}_1} = F_1 \Delta x_1 \Leftrightarrow W_{\vec{F}_1} = p_1 A_1 \Delta x_1 \Leftrightarrow W_{\vec{F}_1} = p_1 \Delta V$$

Simultaneamente, o fluido que está à direita do elemento de volume (à direita da parte mais azul na figura) exerce uma força de pressão \vec{F}_2 sobre o elemento de volume, de módulo $F_2 = p_2 A_2$.

O **trabalho realizado** por esta força \vec{F}_2 é negativo, pois opõe-se ao movimento.

$$W_{\vec{F}_2} = -F_2 \Delta x_2 \Leftrightarrow W_{\vec{F}_2} = -p_2 A_2 \Delta x_2 \Leftrightarrow W_{\vec{F}_2} = -p_2 \Delta V$$

O **trabalho total** realizado pelas forças de pressão \vec{F}_1 e \vec{F}_2 , no intervalo de tempo Δt , é:

$$W_{\text{total}} = p_1 \Delta V - p_2 \Delta V \Leftrightarrow W_{\text{total}} = (p_1 - p_2) \Delta V$$

Atendendo à conservação da energia mecânica

$$W_{\text{total}} = \Delta E_p + \Delta E_c$$

tem-se:

$$(p_1 - p_2) \Delta V = \rho \Delta V g (y_2 - y_1) + \frac{1}{2} \rho \Delta V (v_2^2 - v_1^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p_1 - p_2 = \rho g y_2 - \rho g y_1 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 - \frac{1}{2} \rho v_1^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \quad (1)$$

Uma vez que os pontos 1 e 2 são quaisquer, ao longo de uma mesma linha de corrente, podemos, então, escrever:

$$p + \rho g y + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{constante}$$

Esta é a chamada **equação de Bernoulli**.

No caso de um fluido em equilíbrio estático, é $v_1 = v_2 = 0$ e, então, a equação (1) reduz-se a:

$$p_1 + \rho g y_1 = p_2 + \rho g y_2 \Leftrightarrow p_1 - p_2 = \rho g (y_2 - y_1)$$

que é a equação fundamental da Hidrostática. Portanto, **a equação (ou Lei) de Bernoulli contém a Lei Fundamental da Hidrostática**.

Repare

Num mesmo intervalo de tempo Δt , o fluido deslocou-se Δx_1 em relação ao ponto 1 e Δx_2 em relação ao ponto 2. Como o fluido é suposto incompressível, os **volumes de fluido** são iguais.

$$\Delta V = A_1 \Delta x_1 = A_2 \Delta x_2$$

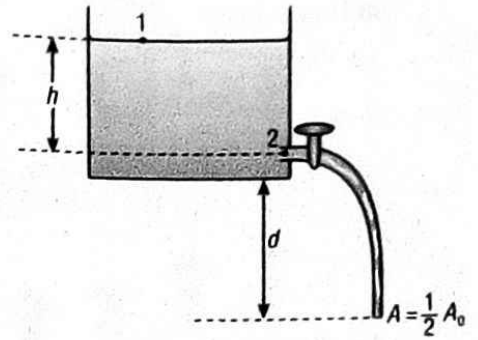
Problemas Resolvidos

2. Um reservatório largo com água está aberto para a atmosfera. A água escoar-se através do orifício colocado perto da base, onde se encontra uma torneira.

2.1. Deduza a expressão que permite determinar a velocidade com que a água sai da torneira.

2.2. Calcule o módulo da velocidade com que a água sai da torneira e o respectivo caudal em volume, se for $h = 80 \text{ cm}$ e a área do orifício de $6,0 \text{ cm}^2$ ($g = 10 \text{ m s}^{-2}$).

2.3. A que distância, d , abaixo do nível do reservatório, a área da secção recta do fluxo de água se reduz a metade da área do orifício?



Resolução

2.1. Aplicando a equação de Bernoulli nos pontos 1 e 2 da figura, tem-se:

$$p_1 + \rho gh + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \rho g \times 0 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \quad (1)$$

Pela equação de continuidade, é: $A_1 v_1 = A_2 v_2$

mas, como $A_2 \ll A_1$, tem-se $v_2 \gg v_1$, podendo considerar-se $v_1 = 0$.

Por outro lado, é:

$$p_1 = p_2 = p_{\text{atmosférica}}$$

Então, a equação (1) escreve-se:

$$\rho gh = \frac{1}{2} \rho v_2^2 \Rightarrow v_2 = \sqrt{2gh}$$

Notar que a velocidade de saída da água varia com a altura h a que se encontra o orifício de saída.

2.2. Substituindo pelos valores em $v_2 = \sqrt{2gh}$, tem-se:

$$v_2 = \sqrt{2 \times 10 \text{ m s}^{-2} \times 80 \times 10^{-2} \text{ m}} \Leftrightarrow v_2 = 4,0 \text{ m s}^{-1}$$

O caudal em volume, ϕ , é:

$$\phi = A v; \quad \phi = 6,0 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \times 4,0 \text{ m s}^{-1} \Leftrightarrow \phi = 2,4 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$$

2.3. Designemos por v_0 o módulo da velocidade da água à saída do orifício (v_2 das alíneas 2.1. e 2.2.), por A_0 a área do orifício, por v o módulo da velocidade à distância d e por A a área da secção recta do fluxo de água à distância d .

Pela equação de continuidade, é:

$$A_0 v_0 = A v \Leftrightarrow \frac{A_0}{A} = \frac{v}{v_0}$$

$$\text{Sendo } A = \frac{1}{2} A_0, \text{ tem-se: } \frac{v}{v_0} = 2 \Rightarrow \frac{v^2}{v_0^2} = 4$$

Por outro lado, sabe-se da cinemática que:

$$v^2 = v_0^2 + 2gd$$

$$\text{Então, tem-se: } v_0^2 + 2gd = 4v_0^2 \Rightarrow d = \frac{3v_0^2}{2g}$$

Substituindo pelos valores, obtém-se:

$$d = \frac{3 \times 4,0^2 \text{ m s}^{-2}}{2 \times 10 \text{ m s}^{-2}} \Leftrightarrow d = 2,4 \text{ m}$$

Repare

A velocidade de escoamento da água através do orifício é igual à velocidade que teria se caísse em queda livre da altura h .

$$v = \sqrt{2gh}$$

Este resultado constitui a **Lei de Torricelli**.

Aplicações da equação de Bernoulli

• Efeito Venturi

Consideremos um **tubo** horizontal com uma secção mais estreita (figura 4.45)

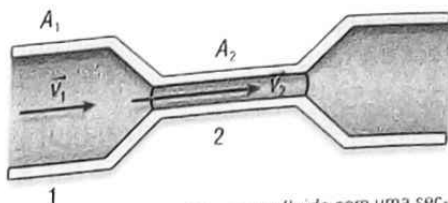


Fig. 4.45 Tubo percorrido por um fluido com uma secção mais estreita. A pressão é mais baixa no estrangulamento, onde o fluido tem maior velocidade.

Quando o fluido não muda de nível enquanto escoar, temos $y_1 = y_2$, e a equação de Bernoulli assume a forma:

$$\rho_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = \rho_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

ou seja:

$$\rho + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{constante}$$

Portanto, quando o fluido se move e entra na região estrangulada, a área torna-se menor e, de acordo com a equação de continuidade, a velocidade aumenta de modo que o caudal em volume, $A v$, permaneça constante.

Porém, atendendo à equação de Bernoulli, se $\rho + \frac{1}{2} \rho v^2$ permanece constante quando a velocidade aumenta, a pressão deve diminuir.

Então, a **pressão na parte estrangulada diminui**.

Efeito Venturi – num tubo horizontal, com uma secção mais estreita, quando a velocidade do fluido aumenta, a pressão diminui.

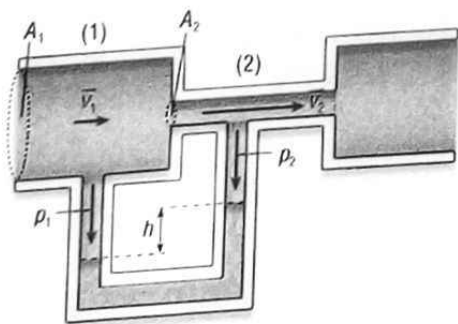


Fig. 4.46 Medidor de Venturi.

É este o princípio do funcionamento do **tubo ou medidor de Venturi** (figura 4.46) usado **para medir a velocidade de escoamento de um fluido e o caudal volumétrico**, a partir da medida de pressões com manómetros.

Sejam p_1 e v_1 , p_2 e v_2 os valores das pressões e velocidade nas secções larga e estreita, respectivamente. Pela Lei de Bernoulli, temos:

$$\rho_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = \rho_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \Leftrightarrow p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2)$$

Atendendo também à equação de continuidade, obtém-se o sistema

$$\begin{cases} p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) \\ A_1 v_1 = A_2 v_2 \end{cases}$$

Uma vez que A_1 , A_2 e ρ (fluido) são conhecidos e $(p_1 - p_2)$ é indicado pelos manómetros, este sistema permite calcular v_1 , v_2 e o caudal volumétrico.

A sustentabilidade dos aviões

A Lei de Bernoulli também explica o aparecimento de uma **força de sustentação** nas asas dos aviões.

Estas têm uma forma e uma inclinação tal que o ar é obrigado a passar pela **parte superior das asas** com **maior velocidade** do que pela parte inferior. Daí as linhas de corrente estarem mais próximas na parte de cima das asas.

Sendo a velocidade de deslocamento do ar maior na parte de cima das asas, a pressão será aí menor, de acordo com a Lei de Bernoulli. Portanto, a pressão é maior na parte inferior das asas.

Esta diferença de pressão entre a parte superior e inferior das asas origina uma força de sustentação, dirigida para cima e perpendicular ao eixo longitudinal da asa.

Para melhor compreender como aparece a **força de sustentação**, pode realizar a seguinte **experiência simples** (figura 4.48): segurar uma tira de papel, por uma das extremidades, e soprar pela face superior. A velocidade do ar aumenta na face superior e, conseqüentemente, a pressão diminui. A maior pressão da atmosfera na face inferior suspenderá o papel no ar.



Fig. 4.48 A velocidade do ar aumenta na face superior do papel e a pressão diminui. Logo, o papel sobe.



Fig. 4.49 A bola de ténis de mesa que flutua.

Paradoxos hidrodinâmicos

Porque será que uma bola de ténis de mesa flutua, sem cair, enquanto se sopra no estrangulamento de um funil invertido sobre uma mesa (figura 4.49)?

Porque será que, quando dois barcos passam um pelo outro, com uma certa velocidade, tendem a ser impelidos um contra o outro?

A bola de ténis de mesa flutua devido à corrente de ar que se cria entre a bola e a parede do funil. A velocidade do ar na parte superior da bola é superior por causa do estrangulamento do funil, e, conseqüentemente, a pressão na parte superior é menor do que a pressão na parte inferior (Lei de Bernoulli). Desta diferença de pressões resulta a força de sustentação dinâmica, dirigida para cima e superior ao peso da bola, que faz com que a bola flutue.

Quanto aos dois barcos que passam um pelo outro, com uma certa velocidade, cria-se uma zona de baixa pressão entre eles (Lei de Bernoulli). Em consequência, a pressão da água do lado oposto tende a empurrar um barco contra o outro, aproximando-os.

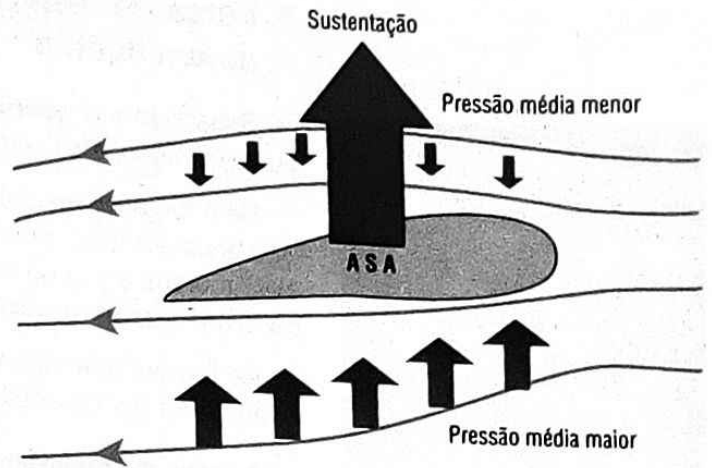
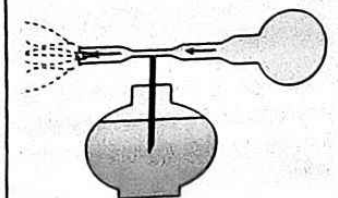


Fig. 4.47 Linhas de corrente indicando o escoamento do ar em torno de uma asa de avião.

Desafio

Também um atomizador ou *spray* funciona com base na Lei de Bernoulli. Procure explicar o seu funcionamento.



► Força de resistência em fluidos; coeficientes de viscosidade de um líquido



Fig. 4.50 Os pára-quedistas assumem esta disposição para aumentarem a força de resistência do ar e conseguem, assim, atingir mais rapidamente a velocidade terminal, prolongando o tempo de queda.

Sabemos que **quando um corpo se encontra em movimento** através de fluido (ar, água, etc.), este exerce no corpo uma **força de resistência** ao movimento.

Se a força de resistência for pequena, podemos desprezá-la, mas nem sempre isso pode ser feito. Ela é **útil**, por exemplo, **no movimento de um pára-quedista**, evitando que ele chegue ao solo com velocidade excessiva. Porém, é **indesejável**, por exemplo, no movimento dos automóveis.

As formas aerodinâmicas com que se fabricam veículos, como automóveis, aviões, têm por objectivo diminuir a resistência do ar.

A força de resistência ao movimento de um corpo através de um fluido depende:

- das **propriedades do fluido** (densidade, viscosidade, etc.);
- da **forma e dimensões do corpo**;
- do **módulo da velocidade do corpo**.

Verifica-se que **a força de resistência em fluidos aumenta quando a velocidade do corpo aumenta**.

Em geral, o **módulo da força de resistência** tem dois termos, um proporcional ao módulo da velocidade e outro proporcional ao quadrado desse módulo.

$$F_{\text{resist.}} = K'v + K_2v^2$$

O primeiro termo ($K'v$) depende da viscosidade do fluido onde o corpo se move e o segundo termo (K_2v^2) é devido à turbulência no fluido.

Vimos já, no ponto 4.1., que **um fluido ideal não apresenta viscosidade**, isto é, atritos internos que oferecem resistência ao escoamento de uma camada de fluido sobre as outras.

Na realidade, no **escoamento de fluidos**, excepto no dos gases de muito baixa densidade, há um deslizamento com **atrito de umas camadas sobre as outras** com diferente velocidade. Isso deve-se à oposição das forças intermoleculares ao movimento forçado de uma molécula em relação às vizinhas.

Existe uma velocidade típica para a qual os dois termos $K'v$ e K_2v^2 são iguais (figura 4.51). Se o módulo da velocidade for muito menor que esse valor, o termo K_2v^2 é desprezável e o **módulo da força de resistência no fluido** relaciona-se com a viscosidade e com o módulo da velocidade do corpo no fluido, pela expressão:

$$F_{\text{resist.}} = K\eta v$$

onde:

K – é uma constante que depende da forma e das dimensões do corpo; tem unidades de distância;

η – é o coeficiente de viscosidade do fluido; tem unidades de pressão vezes tempo.

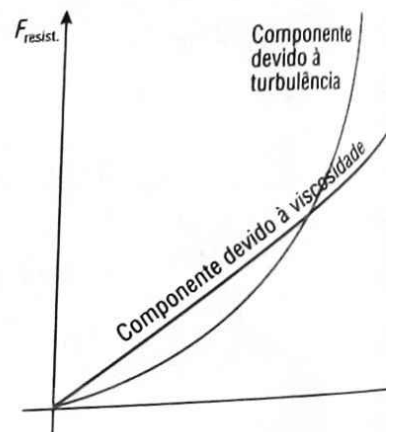


Fig. 4.51 Gráfico das componentes da força de resistência de um fluido em função do módulo da velocidade.

Repare

A **força de resistência** ao movimento de um corpo num fluido também depende da **viscosidade**.

Repare

A **unidade SI de coeficiente de viscosidade** é o **pascal segundo**, **Pas**, ou o **newton segundo por metro quadrado**, N s m^{-2} .

| Fluido | Coefficiente de viscosidade (Pa s)* |
|--------------------------|-------------------------------------|
| Água | $1,0 \times 10^{-3}$ |
| Etanol | $1,2 \times 10^{-3}$ |
| Glicerina | 1,49 |
| Parafina líquida | 1,00 |
| Plasma sanguíneo (37 °C) | $4,5 \times 10^{-3}$ |
| Sangue (37 °C) | $4,0 \times 10^{-3}$ |
| Ar | $1,8 \times 10^{-3}$ |

* A 20 °C, a menos que se indique outra temperatura.
Tabela II

Assim:

- **No caso de um pára-quedista**, como a viscosidade é reduzida, a velocidade rapidamente ultrapassa o valor em que o termo devido à turbulência, $K_2 v^2$, é muito maior que o termo que depende da viscosidade, $K' v$. O módulo da **força de resistência** é, neste caso, **proporcional ao quadrado da velocidade** ($F_{resist} \approx K_2 v^2$).

Como sabemos, inicialmente, a resistência do ar aumenta rapidamente com o aumento da velocidade, até que o módulo dessa força iguale o do peso. Nessa altura, a resultante das forças é nula ($\vec{F}_{resist.} = -\vec{P}$) e o movimento passa a ser uniforme. Diz-se que o pára-quedista atingiu a **primeira velocidade terminal**, cujo módulo é cerca de 200 km h^{-1} (56 m s^{-1}).

Quando o pára-quedas abre, devido à forma deste, a resistência do ar aumenta muito, fazendo diminuir muito a velocidade. A velocidade pode descer até cerca de 20 km h^{-1} ($5,6 \text{ m s}^{-1}$), num pequeno intervalo de tempo, velocidade com que o pára-quedista chega ao solo em segurança – **segunda velocidade terminal**.

- **No caso de uma pequena esfera metálica, em queda num líquido muito viscoso**, o módulo da força de resistência é proporcional ao módulo da velocidade do corpo ($F_{resist.} \approx K \eta v$).

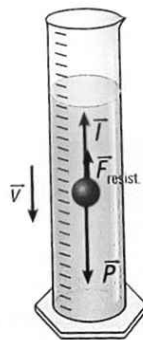


Fig. 4.53 Pequena esfera metálica em queda num líquido.

Como para uma esfera de raio r é $K = 6 \pi r$, tem-se:

$$F_{resist.} = 6 \pi r \eta v$$

A **velocidade terminal** é atingida quando for nula a resultante das forças que actuam na esfera; o movimento é, então, uniforme.

Essas forças são o peso da esfera, \vec{P} , a força de resistência ao movimento, $\vec{F}_{resist.}$, e a impulsão, \vec{I} .

$$\vec{P} + \vec{F}_{resist.} + \vec{I} = \vec{0} \Rightarrow P = I + F_{resist.}$$

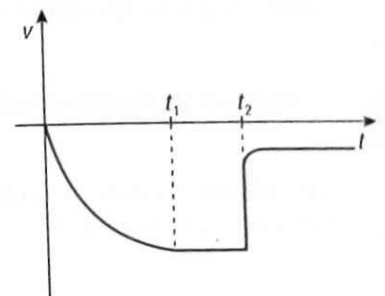


Fig. 4.52 Gráfico velocidade-tempo para o movimento de um pára-quedista. Em t_1 e t_2 são atingidas, respectivamente, a primeira e a segunda velocidades terminais.

Síntese de conteúdos

- Um **fluido ideal** é um fluido que não é viscoso e é incompressível.
- Um **fluido** escoa em **regime estacionário** quando a velocidade é sempre a mesma no mesmo ponto.
- As **linhas de corrente** são linhas tangentes à velocidade em cada ponto.
- Num escoamento em regime estacionário, as linhas de corrente coincidem com as trajectórias de uma pequena porção de fluido.
- Num escoamento em regime estacionário:
 - as linhas de corrente nunca se cruzam;
 - uma **maior densidade de linhas de corrente**, numa dada região, significa **maior velocidade de escoamento**.

- **Equação de continuidade:**

$$A v = \text{constante}$$

sendo A a área da secção recta do tubo num ponto qualquer e v o módulo da velocidade do fluido nesse ponto.

- A **equação de continuidade** traduz a conservação da massa na dinâmica dos fluidos.
- **Caudal em volume** ou **caudal volumétrico** – volume de fluido que escoa através de uma secção recta de um tubo por unidade de tempo:

$$\phi = \frac{\Delta V}{\Delta t} \quad \text{e} \quad \phi = A v$$

- O **caudal em volume** é constante num escoamento estacionário.

- **Equação de Bernoulli** ou **equação fundamental da Hidrodinâmica:**

$$p + \rho g y + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{constante}$$

- **Efeito Venturi** – num tubo horizontal, com uma secção mais estreita, quando a velocidade do fluido aumenta a pressão diminui.
- A **força de resistência ao movimento** de um corpo através de um fluido depende:
 - das **propriedades do fluido** (densidade, viscosidade, etc.);
 - da **forma e dimensões do corpo**;
 - do **módulo da velocidade do corpo**.
- A **força de resistência** depende da **viscosidade** do fluido e aumenta quando a **velocidade** do corpo aumenta.

Um barco flutua se a sua massa volúmica média for menor que a da água. Se o barco estiver construído em metal, com massa volúmica muito maior que a da água, será preciso que existam zonas com ar para que a sua **massa volúmica média** seja reduzida.



No caso de um submarino, a situação é mais complexa, pois é necessário controlar a sua flutuabilidade. O submarino tem de poder mergulhar e regressar à superfície. Isso consegue-se usando garrafas de gás comprimido. Um gás comprimido ocupa um volume pequeno.

Se a maior parte do volume de uma **câmara de compressão** estiver preenchida com água, a massa volúmica será elevada e o submarino afundará. Quando se quer que o submarino suba para a superfície, liberta-se algum gás das garrafas; a expansão do gás nas câmaras de compressão desloca alguma água para fora, o que faz com que a massa volúmica média diminua e o submarino flutue.

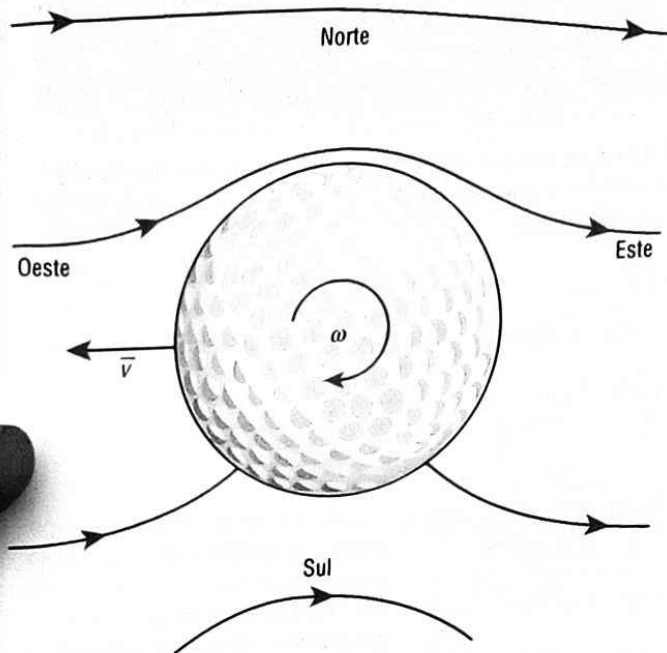


Quando um mergulhador mergulha, o aumento da pressão implica que o azoto presente no ar que respira se dissolva mais facilmente no sangue. Quando o mergulhador regressa à superfície, a diminuição da pressão faz diminuir a solubilidade do azoto no sangue. Para evitar a formação de bolhas no sangue, o mergulhador deve subir lentamente para o organismo se adaptar e conseguir expelir o excesso de azoto através da respiração.

A produção de bolhas de azoto no sangue reduziria o fluxo de sangue, afectando a transmissão dos impulsos nervosos e podendo provocar a morte. Para mergulhos a profundidades superiores a 50 m, costuma usar-se uma **mistura de hélio e oxigénio**, designada heliox, uma vez que a solubilidade do hélio no sangue é muito menor do que a do azoto. Também são usadas câmaras de descompressão onde o mergulhador entra antes de ser transportado para a superfície; dentro da câmara de descompressão, a pressão é diminuída gradualmente até alcançar a pressão atmosférica.



A equação de Bernoulli é válida apenas para fluidos ideais. Na prática, os fluidos são viscosos e têm uma tendência a "colarem-se" aos objectos, produzindo atrito. No caso de um objecto em movimento dentro de um fluido, forma-se uma **camada-limite** que é um volume de fluido à volta do objecto, que acompanha o movimento do objecto. Fora da camada-limite, o escoamento é muito aproximadamente o escoamento de um fluido ideal. Assim, a equação de Bernoulli é ainda útil para dar uma explicação qualitativa das forças sobre o objecto. Nomeadamente, podemos usar o princípio de que a pressão será menor onde as linhas de corrente estiverem mais juntas.



Esse princípio explica a **curvatura da trajectória** de uma bola de golfe, de basebol ou de futebol, lançada com rotação à volta do seu centro. Por exemplo, se estivermos a olhar para a trajectória da bola desde cima, e a bola for lançada de este para oeste, com rotação no sentido dos ponteiros do relógio, o ar que passa pelo lado norte da bola será acelerado pela rotação da bola e o ar que passa pelo lado sul será travado. A diferença de velocidades nos lados norte e sul implica linhas de corrente mais juntas no lado norte e mais afastadas no lado sul. Assim, a pressão no lado norte será menor, produzindo uma força resultante de sul para norte, que curva a trajectória da bola nesse sentido.

Vimos também que uma análise semelhante explica a força de sustentação dos aviões: o escoamento do ar por cima da asa é mais rápido do que o escoamento por baixo. É de salientar que para produzir essas diferenças de velocidade não é preciso que o perfil da asa apresente um comprimento maior na parte de cima. De facto, o perfil das asas usadas nos aviões supersónicos é bastante simétrico, para diminuir o atrito com o ar. Um factor muito importante é o **ângulo de ataque**, nomeadamente a inclinação da asa em relação à horizontal.



A força de sustentação aumenta com o aumento da velocidade ou do ângulo de ataque; quando a velocidade do avião é menor, na aterragem, é preciso compensar a velocidade baixa com um ângulo de ataque maior: o avião inclina-se mais. Acima de um determinado ângulo de ataque, que depende do perfil da asa, aparece turbulência por cima da asa, que faz diminuir drasticamente a força de sustentação. Um método usado nos aviões comerciais para permitir ângulos de ataque elevados sem turbulência consiste em deslocar **flaps** na frente e **slats** na parte posterior da asa. O perfil da asa fica mais curvo e permite a passagem do ar entre os **flaps**, **slats** e a asa, evitando assim o aparecimento de turbulência.



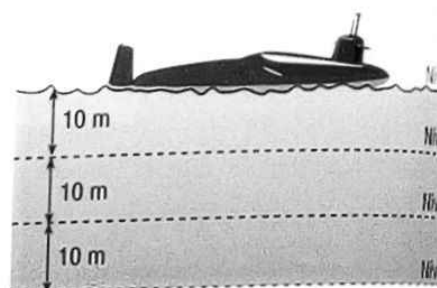
▶ QUESTÕES E PROBLEMAS

Com base na definição de calado de um navio e nos dados da tabela de massas volúmicas, classifique as afirmações seguintes de verdadeiras ou falsas.

- Se um navio estiver num porto como o de Maputo, no oceano Índico, o seu calado será maior do que se estiver num porto de Marrómeu, no rio Zambeze.
- Se um navio-tanque estiver carregado com óleo lubrificante, o seu calado será maior do que se estiver carregado com volume igual de gasolina.
- Quando o calado de um navio aumenta, a pressão total na parte mais baixa do seu casco também aumenta.
- Se a pressão atmosférica no local onde o navio se encontra aumentar, o seu calado também aumentará.

6. Um submarino, inicialmente em repouso à superfície da água (nível 0), indicado na figura, inunda os seus compartimentos de lastro e afunda verticalmente, passando sucessivamente pelos níveis 1, 2 e 3.

Considere que a pressão atmosférica é normal e que a massa volúmica da água, suposta homogénea, é de $1,0 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$.



- 6.1. Calcule o acréscimo de pressão registado pelos manómetros do submarino quando o mesmo desce de um dos níveis referidos para o imediatamente inferior.

- 6.2. Trace o gráfico da pressão total (em atm) em função da profundidade, quando o submarino desce do nível 0 ao nível 3.

7. Um mergulhador imerge num lago, munido de um manómetro capaz de medir a pressão total a que está submetido. A dada altura, verifica que o aparelho regista o valor de 2,0 atm.

Sabendo que o organismo humano pode ser submetido, sem consequências danosas, a uma pressão de $4,0 \times 10^5 \text{ N m}^{-2}$ e que a densidade da água do lago é de $1,0 \text{ g cm}^{-3}$, determine a distância máxima a que poderá descer em segurança para além do ponto em que se encontra.

8. Quando submerso num lago, um mergulhador constata que a pressão absoluta no medidor que se encontra no seu pulso corresponde a $1,6 \times 10^5 \text{ N m}^{-2}$. Um barómetro à superfície indica ser a pressão atmosférica local igual a $1,0 \times 10^5 \text{ N m}^{-2}$. Considere a massa volúmica da água do lago igual a $1,0 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$. Calcule, em relação à superfície, a profundidade a que se encontra o mergulhador.

9. Um agricultor pretende comprar uma bomba de vácuo para retirar água de um poço com 20 m de profundidade. Será possível retirar a água deste poço utilizando este método? (Sugestão: determine qual é a altura máxima que a água pode atingir no tubo de bombagem.)

10. Considere um recipiente de forma cúbica, com 1,0 m de aresta, aberto na face superior e cheio até à borda, com mercúrio e água, à pressão normal. A água e o mercúrio são líquidos imiscíveis de massas volúmicas $1,0 \text{ g cm}^{-3}$ e $13,6 \text{ g cm}^{-3}$, respectivamente.

10.1. Calcule qual deverá ser a altura da camada de mercúrio para que o valor da pressão no fundo do recipiente seja o dobro da pressão atmosférica.

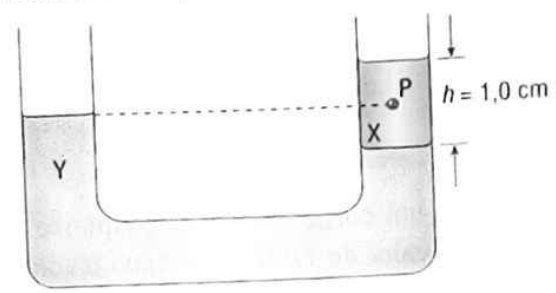
10.2. Calcule a intensidade das forças de pressão exercidas pelos dois líquidos, no fundo do recipiente, nas mesmas condições da alínea anterior.

11. Um proprietário pretende ligar a canalização da sua nova casa ao depósito de água da cidade, que se encontra situado 100 m acima do nível da casa. Sabendo que a pressão da água nas canalizações ao nível do depósito é de 2,0 atm e que a pressão máxima que os canos da habitação podem suportar é de 7,0 atm, diga, justificando com os cálculos necessários, se o proprietário deve ou não fazer a ligação.

QUESTÕES E PROBLEMAS

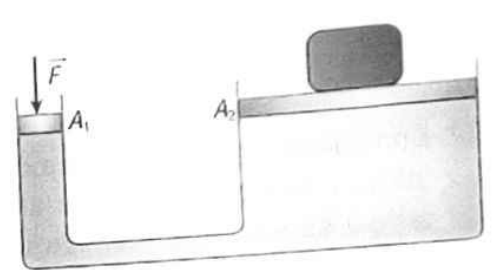
Coloca-se no prato de uma balança um bloco de madeira com a massa volúmica de $0,4000 \text{ g cm}^{-3}$. A balança é de seguida equilibrada colocando no outro prato um objecto com a massa de $20,0000 \text{ g}$ e massa volúmica de $8,0000 \text{ g cm}^{-3}$. Sabendo que a massa volúmica do ar é de $1,2041 \times 10^{-3} \text{ g cm}^{-3}$, determine o valor da massa do bloco de madeira, considerando a impulsão do ar nos dois objectos.

Considere um tubo em forma de U contendo dois líquidos imiscíveis, X e Y, com $\rho_X = 6,0 \text{ g cm}^{-3}$ e $\rho_Y = 13,6 \text{ g cm}^{-3}$.



Determine a pressão exercida pelo líquido X no ponto P.

Um êmbolo de área transversal A_1 está ligado a um outro êmbolo de área transversal A_2 através de um vaso comunicante como ilustrado na figura. Se os diâmetros dos êmbolos forem $5,0 \text{ cm}$ e $20,0 \text{ cm}$, respectivamente, qual é o módulo da força que é necessário exercer no pistão menor de modo que no maior possa ser colocado um corpo com a massa de $2,5$ toneladas, em equilíbrio?



15. Numa prensa hidráulica usa-se um pequeno pistão, de área a de secção transversal, para aplicar uma pequena força \vec{F} no líquido contido na prensa. Um tubo estabelece a ligação deste líquido com o outro pistão maior, de área de secção transversal A .

15.1. Escreva a expressão do módulo da força \vec{F} que suportará o pistão de maior diâmetro.

15.2. Sabendo que o pistão menor tem $2,0 \text{ cm}$ de diâmetro e o maior 50 cm , determine o valor do peso que deverá ser colocado sobre o menor de forma a suportar $3,0$ toneladas colocadas sobre o pistão maior.

16. Um corpo, com o peso de 400 N , é suspenso por meio de um cabo e introduzido num líquido de massa volúmica $0,80 \text{ g cm}^{-3}$. Sabendo que o volume do corpo é igual a 10 dm^3 , determine:

- 16.1. o valor da impulsão exercida sobre o corpo;
- 16.2. o valor da tensão no cabo.

17. Durante as férias de Verão, dois amigos, cada um com uma massa de 65 kg , decidiram construir uma jangada, para descerem um rio. Para o efeito utilizaram troncos de madeira, de massa volúmica $0,80 \text{ g cm}^{-3}$, com um diâmetro médio de 10 cm e um comprimento de $2,0 \text{ m}$. Qual o número mínimo de troncos de madeira necessários para que a jangada flutue com os dois amigos em cima, sabendo que a carga que pretendem transportar pesa 100 N ?

18. Um corpo oco feito de chumbo pesa $3,00 \text{ N}$ no vácuo e $2,50 \text{ N}$ quando é totalmente mergulhado em água. Sabendo que a massa volúmica do chumbo é $11,4 \text{ g cm}^{-3}$, calcule o volume da cavidade existente no seu interior.

19. Um corpo maciço pesa 200 N no vácuo e 150 N quando está totalmente imerso em água. Determine o valor da massa volúmica do material de que o corpo é feito.

▶ QUESTÕES E PROBLEMAS

20. Calcule a composição de uma liga de cobre ($\rho_{Cu} = 8,89 \text{ g cm}^{-3}$) e ouro ($\rho_{Au} = 19,3 \text{ g cm}^{-3}$) que pesa 2,50 N no ar e 2,35 N na água.

21. Observe a figura. Os líquidos A e B não são miscíveis e estão inicialmente ao mesmo nível, com a torneira T fechada.

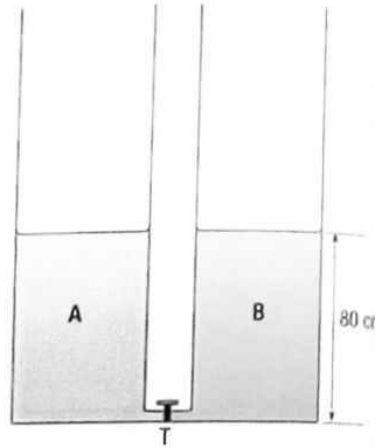
Despreze a espessura do tubo de ligação.

$$\rho_A = 6,0 \text{ g cm}^{-3} ; \quad \rho_B = 1,5 \text{ g cm}^{-3}.$$

Realizaram-se com este dispositivo as seguintes experiências:

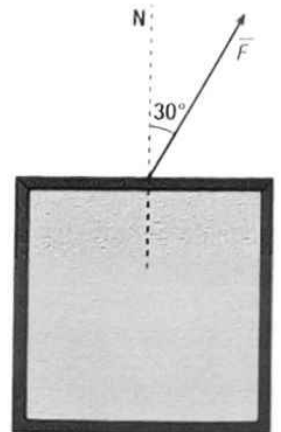
21.1. Mergulhou-se totalmente no líquido A um corpo maciço C, suspenso de um dinamômetro. O dinamômetro indica o valor de 1,0 N. Determine o volume do corpo C sabendo que tem massa igual a 340 g.

21.2. Retirou-se o corpo C e abriu-se em seguida a torneira T. Determine o desnível a que acabam por ficar as superfícies livres dos dois líquidos.



22. Considere uma caixa cúbica de aresta 22,4 cm munida de uma tampa amovível. No interior dessa caixa existe ar a uma pressão de $8,0 \times 10^{-2} \text{ atm}$. Suponha que a tampa se encontra fechada apenas pela acção da diferença de pressão entre a pressão atmosférica e a pressão no interior da caixa. Para retirar a tampa da caixa aplica-se uma força \vec{F} formando um ângulo de 30° com a direcção da normal ao plano da tampa, conforme ilustrado na figura.

Calcule o módulo mínimo de \vec{F} para retirar a tampa da caixa, sabendo que a tampa só pode mover-se na direcção normal.



23. Considere um tubo em U contendo mercúrio. Verete-se um líquido imiscível com o mercúrio num dos ramos do tubo, até que a altura do líquido atinja um nível de 48 cm acima do nível do mercúrio. Verifica-se que no outro ramo o nível do mercúrio sobe 1,4 cm. Sabendo que $\rho_{Hg} = 13,6 \text{ g cm}^{-3}$, determine a massa volúmica do líquido introduzido no tubo.

24. Quando totalmente imerso em água, o peso aparente de um corpo oco, de massa 100 g, é 60 gf. Determine o valor do volume da cavidade interior, sabendo que a densidade relativa da substância que constitui o corpo é 4,0.

25. Prende-se ao fundo de um recipiente, que se encontra cheio com um líquido, um corpo maciço. O volume do corpo é $0,30 \text{ cm}^3$, a sua densidade relativa é 0,60 e a densidade relativa do líquido é 0,90.

25.1. Determine o módulo da tensão do fio que prende o corpo ao fundo.

25.2. A dada altura, corta-se o fio que sustém o corpo e este sobe até à superfície.

25.2.1. Considerando desprezável a viscosidade do líquido, calcule o módulo da aceleração adquirida pelo corpo.

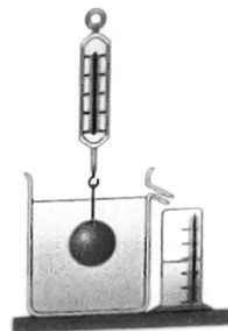
25.2.2. Determine o volume imerso do corpo quando flutuar à superfície.

▶ QUESTÕES E PROBLEMAS

26. Observe a figura. O dinamómetro marca 2,450 N e o volume de água que verteu do vaso maior foi de $50,0 \text{ cm}^3$.

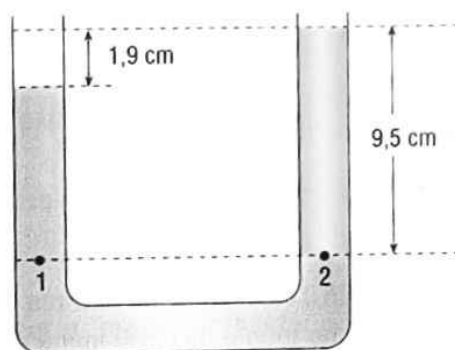
26.1. Calcule a densidade relativa do corpo.

26.2. Se substituirmos a água do vaso maior por outro líquido, a indicação do dinamómetro será igual ou diferente? Justifique.



27. A figura representa, em esquema, um tubo em U contendo dois líquidos imiscíveis, água e um óleo de automóvel. A altura da coluna de óleo é $9,5 \text{ cm}$. O desnível entre as superfícies livres dos dois líquidos é $1,9 \text{ cm}$.

Considere $\rho_{\text{água}} = 1,0 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$.



27.1. Calcule a massa volúmica do óleo de automóvel.

27.2. Um corpo homogéneo pesa $1,00 \text{ N}$ no ar e $0,40 \text{ N}$ quando está completamente imerso no óleo de automóvel.

Calcule:

27.2.1. o módulo da impulsão exercida pelo óleo sobre o corpo;

27.2.2. a massa volúmica do material de que é feito o corpo.

28. Uma esfera homogénea, de massa volúmica $7,0 \times 10^2 \text{ kg m}^{-3}$, encontra-se em equilíbrio numa tina que contém dois líquidos, A e B, imiscíveis, de densidades relativas iguais a $1,0$ e $0,60$, respectivamente.

Determine a fracção do volume da esfera que está mergulhada no líquido B.

29. Considere um copo, parcialmente cheio de água, assente sobre uma balança. O conjunto pesa $2,30 \text{ N}$. Quando um pedaço de metal suspenso de um fio é totalmente imerso no copo, sem tocar no fundo, a balança indica $2,75 \text{ N}$.

Sabendo que a massa volúmica da água é de $1,0 \text{ g cm}^{-3}$, calcule o volume do pedaço de metal.

30. Um regador feito de um material de massa volúmica ρ tem peso P e capacidade V .

Indique, em função de P , $\rho_{\text{água}}$, ρ e V , as intensidades das forças que se têm de exercer para segurar o regador, preso a uma corda:

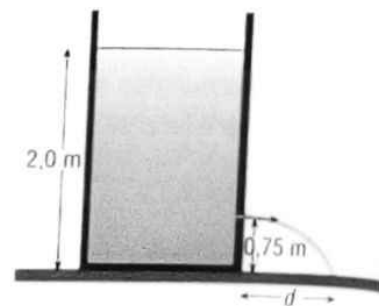
30.1. quando o regador está completamente imerso na água de um poço;

30.2. quando o regador, cheio de água, se encontra fora do poço.

▶ QUESTÕES E PROBLEMAS

31. Para encher um balde de 20 L, utiliza-se uma mangueira de 2,0 cm de diâmetro. Sabendo que demora 1,0 min a encher o balde, determine o módulo da velocidade com que a água sai da mangueira.

32. Um reservatório de água da chuva está cheio até 2,0 m de altura. Sabendo que o reservatório tem um pequeno orifício a 0,75 m de altura, conforme ilustrado na figura, calcule:



32.1. o módulo da velocidade com que a água sai do orifício;

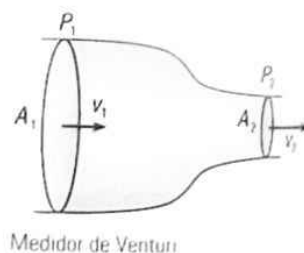
32.2. a distância, d , entre a vertical que contém o orifício e o ponto onde cai a água.

33. Um escoamento de água flui através de uma tubagem, de área de secção recta de $3,0 \text{ cm}^2$, com velocidade de módulo $5,0 \text{ m s}^{-1}$. A tubagem desce gradualmente 8,0 m, enquanto a sua área de secção recta se reduz a metade do seu valor inicial.

33.1. Calcule o módulo da velocidade da água no nível mais baixo.

33.2. Admitindo que a pressão no nível superior é de 1,5 atm, calcule a pressão no nível mais baixo.

34. Um medidor de Venturi possui um diâmetro de 15,0 cm no tubo de entrada e de 7,5 cm no estrangulamento de saída. A pressão da água no tubo é de 0,540 atm e no estrangulamento é de 0,410 atm. Nestas condições, calcule o caudal volumétrico da água.



35. Na tragédia de Nova Orleães, provocada pelo furacão Katrina em Agosto de 2005, o telhado do estádio Superdome foi arrancado porque a pressão no interior (ar em repouso) era maior que no exterior, onde sopravam ventos com velocidades da ordem de 200 km h^{-1} ($\rho_{\text{ar}} = 1,29 \text{ kg m}^{-3}$).

35.1. Assumindo a validade do teorema de Bernoulli, calcule a diferença de pressão entre o interior e o exterior do Superdome.

35.2. Calcule o valor da força que uma tal diferença de pressão origina sobre uma área de 1,0 ha ($1,0 \times 10^4 \text{ m}^2$), aproximadamente a área de um campo de futebol.

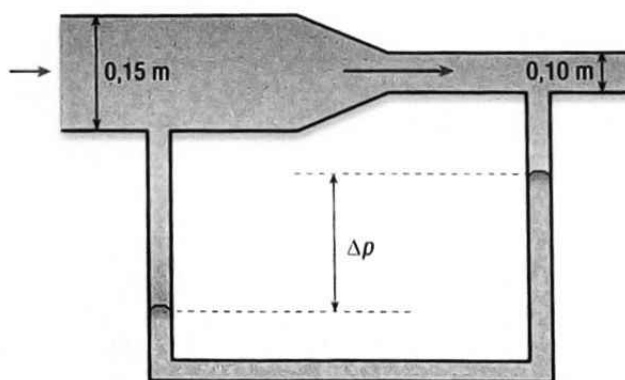
36. Uma avioneta tem uma área de asa (cada asa) de $9,0 \text{ m}^2$. A uma certa velocidade, o ar escoava sobre a superfície superior da asa com velocidade de módulo 50 m s^{-1} e sobre a superfície inferior com 40 m s^{-1} . Assumindo a validade do teorema de Bernoulli, desprezando a diferença de altura da fuselagem, supondo que o avião voa a velocidade constante e considerando a massa volúmica do ar igual a $1,2 \text{ kg m}^{-3}$, calcule o peso do avião.

37. Uma mangueira de jardim possui um diâmetro interior de 2,0 cm e está ligada a um irrigador que consiste num recipiente munido de 30 orifícios, cada um dos quais com 0,14 cm de diâmetro. O módulo da velocidade da água na mangueira é de $0,85 \text{ m s}^{-1}$. Calcule o módulo da velocidade da água ao sair dos orifícios.

38. Um grupo de alunos pretendia determinar a viscosidade de um óleo. Para o efeito, largaram uma pequena esfera metálica, de massa 10,0 g, para dentro de uma proveta cheia de óleo. Verificaram que, pouco tempo depois de ter sido lançada, a esfera descia com velocidade constante. Repetindo a experiência mais vezes e recorrendo a sensores de movimento, conseguiram determinar que a velocidade terminal da esfera era de $3,0 \text{ cm s}^{-1}$. Calcule a viscosidade do óleo, considerando que a esfera tem um diâmetro de 1,50 cm e que $\rho_{\text{óleo}} = 0,90 \text{ g cm}^{-3}$.

▶ QUESTÕES E PROBLEMAS

39. Uma seringa é um equipamento munido de uma agulha muito utilizado pelos profissionais de saúde. Esta contém uma parte móvel, o êmbolo, que contribui para uma variação de volume de um determinado líquido nela contido. Admita que a área do bico de uma seringa é 10 vezes inferior à área da secção mais larga da seringa. Se deslocarmos o êmbolo com uma velocidade de módulo $1,0 \text{ cm s}^{-1}$, determine o módulo da velocidade com que o fluido sai no bico.
40. A cidade suíça de Genebra é mundialmente conhecida pelo seu repuxo de água, o *Jet d'Eau*. É capaz de lançar água a uma altitude de 140 m, com um caudal de 500 L s^{-1} . O módulo da velocidade da água à saída do repuxo é de 200 km h^{-1} . Desprezando os efeitos da resistência do ar, calcule a área da secção recta do repuxo, nas seguintes situações:
- 40.1. na base;
- 40.2. à altura de 100 m.
41. Num cano horizontal de diâmetro 6,0 cm, flui água com velocidade de módulo $2,0 \text{ m s}^{-1}$. A jusante há um estrangulamento onde o raio mede 1,50 cm. Calcule:
- 41.1. o módulo da velocidade da água ao passar no aperto;
- 41.2. o caudal volumétrico;
- 41.3. a diferença de pressão do líquido entre as secções do cano mais larga e mais estreita.
42. Através de uma conduta horizontal, com a forma apresentada na figura abaixo, circula água a um caudal de $2,8 \times 10^{-2} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$. Considerando que não há perdas de carga por atrito, que $\rho_{\text{Hg}} = 1,36 \times 10^4 \text{ kg m}^{-3}$ e que $\rho_{\text{H}_2\text{O}} = 1,0 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$, calcule a diferença de pressão medida pelo manómetro de mercúrio, em mmHg.



43. Na canalização de uma habitação, ao nível do rés-do-chão, circula água quente com velocidade de módulo $0,50 \text{ m s}^{-1}$ e à pressão de 3,0 atm, num tubo de 4,0 cm de diâmetro. Admitindo que o tubo não se ramifica, determine o módulo da velocidade e a pressão da água numa secção do tubo com 2,6 cm de diâmetro situado no primeiro andar, 5,0 m acima.
44. Devido a problemas de arteriosclerose, o sangue que flui através de uma artéria com 3,0 mm de raio, à velocidade de módulo 10 cm s^{-1} , é forçado a passar numa região situada ao mesmo nível, mas parcialmente obstruída. Nessa região o raio da artéria está reduzido para 2,0 mm. A densidade relativa do sangue é de aproximadamente 1,05.
- 44.1. Determine o módulo da velocidade do sangue na zona obstruída.
- 44.2. Desprezando a viscosidade do sangue, determine a queda de pressão sanguínea nessa região.

constante. O valor dessa constante depende da temperatura, T , e da quantidade de gás, isto é, do número de moles, n . Estes resultados podem ser sintetizados por:

$$pV = k \quad (T \text{ e } n \text{ constantes})$$

Esta relação é conhecida como **Lei de Boyle-Mariotte**.

Lei de Boyle-Mariotte – o volume e a pressão de uma quantidade fixa de um gás ideal são inversamente proporcionais, a uma dada temperatura.

A figura 5.5 ilustra o gráfico do volume, V , em função da pressão, p , de uma dada quantidade de gás a uma dada temperatura. Uma dependência linear pode ser obtida representando o volume em função do inverso da pressão (figura 5.6).

Curiosidade

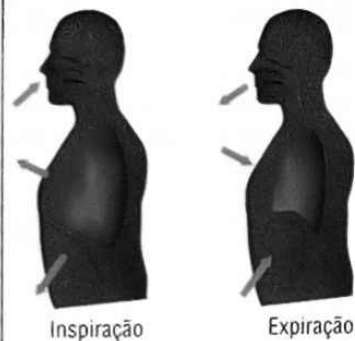


Fig. 5.4

Uma aplicação da Lei de Boyle-Mariotte ocorre sempre que respiramos. Entre respirações, a pressão do gás no interior dos nossos pulmões é igual à pressão atmosférica. O volume dos pulmões é regulado pela caixa torácica, que pode se expandir e contrair, e pelo diafragma, o músculo abaixo dos pulmões. Quando inspiramos há uma expansão da caixa torácica e o diafragma move-se para baixo. Em consequência, o volume dos pulmões aumenta e a pressão do gás no interior dos pulmões diminui. Assim, a pressão atmosférica força o ar para dentro dos pulmões até a pressão pulmonar igualar novamente a pressão atmosférica. Na expiração, o processo ocorre no sentido inverso.

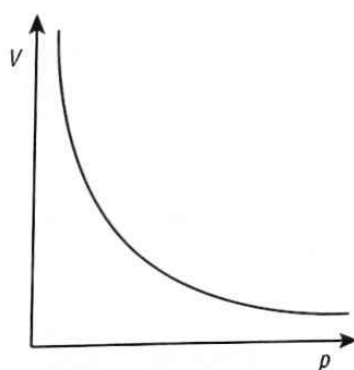


Fig. 5.5 Gráfico do volume em função da pressão de acordo com a Lei de Boyle-Mariotte.

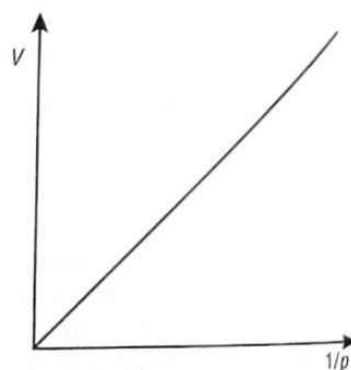


Fig. 5.6 Gráfico do volume em função do inverso da pressão de acordo com a Lei de Boyle-Mariotte.

A relação entre o volume de gás e a temperatura foi estabelecida em 1787 pelo físico francês **Jacques Charles**. Utilizando hidrogênio, dióxido de carbono e ar demonstrou que estes gases se expandiam à mesma quantidade relativa quando aquecidos a pressão constante, isto é, o volume de uma dada amostra de gás aumenta linearmente com a temperatura, a uma dada pressão. Mais tarde, o seu compatriota **Gay-Lussac** mostrou que muitos mais gases se comportavam da mesma forma, destacando que, a pressão constante, por cada grau Celsius o aumento do volume de cada gás é de $1/273$ do seu volume a 0°C . O gráfico da figura 5.7 ilustra este modo de variação.

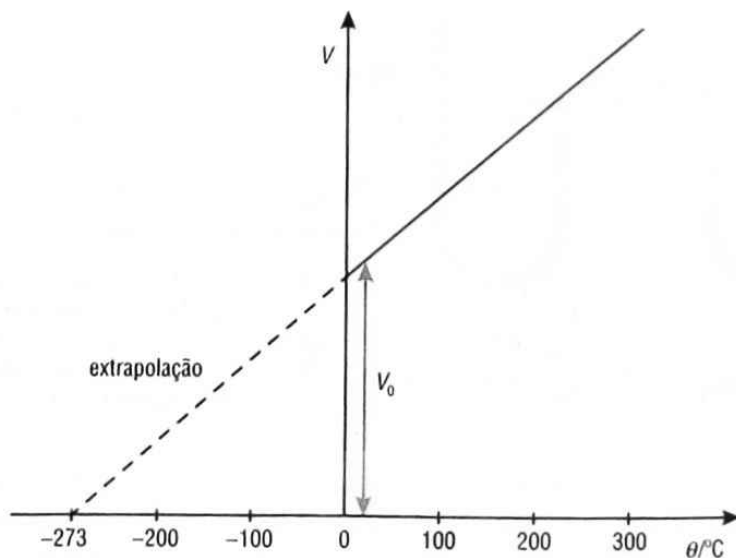


Fig. 5.7 Representação gráfica da Lei de Charles ou de Gay-Lussac.

A equação da recta representada no gráfico da figura 5.7 pode ser escrita da seguinte forma:

$$V = a(\theta + 273) \quad (p \text{ e } n \text{ constantes})$$

onde V é o volume do gás, θ a temperatura Celsius e a o declive da recta. Como a relação entre a temperatura na escala absoluta, T , e a temperatura na escala Celsius, é dada por $T(K) = \theta(^{\circ}C) + 273$, podemos reescrever a expressão anterior na forma:

$$V = aT \quad (p \text{ e } n \text{ constantes})$$

Esta relação traduz a chamada **Lei de Charles ou de Gay-Lussac**.

Lei de Charles ou de Gay-Lussac – o volume e a temperatura absoluta de uma quantidade fixa de um gás ideal são directamente proporcionais, a uma dada pressão.

Em 1811, o italiano **Amedeo Avogadro** sugeriu que volumes iguais de gases diferentes, quando medidos nas mesmas condições de pressão e temperatura, contêm o mesmo número de moléculas. Esta explicação é hoje conhecida como **princípio de Avogadro**.

Princípio de Avogadro – o volume de uma amostra de gás ideal, a uma dada pressão e temperatura, é directamente proporcional ao número de moléculas nessa amostra.

Este princípio pode ser traduzido pela expressão seguinte:

$$V \propto n \quad (T \text{ e } p \text{ constantes})$$

A partir da Lei de Boyle-Mariotte, de Charles e Gay-Lussac e do princípio de Avogadro, podemos concluir que, mantendo-se constantes duas grandezas quaisquer, entre os parâmetros de estado, se verifica a seguinte proporcionalidade:

$$V \propto \frac{nT}{p}$$

A relação anterior pode ser escrita como uma igualdade:

$$V = R \frac{nT}{p}$$

onde R é uma constante de proporcionalidade. Habitualmente, esta relação é expressa na forma:

$$pV = nRT$$

sendo conhecida por **equação de estado do gás ideal**. A constante de proporcionalidade, R , é conhecida por **constante universal do gás ideal**, sendo o seu valor no SI igual a:

$$R = 8,3144 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$$

Questões Resolvidas

- Determine o volume ocupado por uma mole de gás ideal quando submetida à pressão de uma atmosfera e à temperatura de zero graus Celsius, isto é, nas condições PTN.
Dados: $R = 0,08206 \text{ L atm K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$

Resolução

$$1. \quad p = 1 \text{ atm}; \quad \theta = 0^{\circ}C \Rightarrow T = 273,15 \text{ K}; \quad n = 1 \text{ mol}$$

$$V = \frac{nRT}{p} \Rightarrow V = \frac{1 \times 0,08206 \text{ L atm K}^{-1} \text{ mol}^{-1} \times 273,15 \text{ K}}{1 \text{ atm}} \Leftrightarrow V = 22,4 \text{ L mol}^{-1}$$

(Volume molar de um gás ideal nas condições PTN.)

Curiosidade



Fig. 5.8

Os balões de ar quente sobem visto que o ar expande-se ao ser aquecido. O ar quente no interior do balão torna-se, assim, menos denso do que o ar atmosférico, à mesma pressão. Esta diferença de densidades origina a ascensão do balão.

► Isoprocessos

Denominam-se **isoprocessos** todas as transformações gasosas em que a quantidade de substância, isto é, o número de moles, e um dos parâmetros de estado permanecem constantes. Assim, no decurso de uma transformação gasosa podemos considerar três isoprocessos: **isobárico**, **isovolumétrico** e **isotérmico**. Habitualmente, representam-se graficamente estes isoprocessos recorrendo aos chamados **diagramas pT** , pressão em função da temperatura, **diagramas pV** , pressão em função do volume, e **diagramas TV** , temperatura em função do volume. De seguida, iremos analisar cada um destes isoprocessos.

Um processo diz-se **isobárico** quando a transformação gasosa se processa a pressão constante.

Partindo da equação de estado do gás ideal, facilmente se conclui que num processo isobárico o volume de uma dada amostra de gás é directamente proporcional à sua temperatura absoluta. Se n moles de gás a pressão constante p sofrerem um processo isobárico, ocorre uma transformação, passando o sistema gasoso de um estado inicial, com volume V_i e temperatura absoluta T_i , a um estado final, com volume V_f e temperatura absoluta T_f :

$$V_i = \frac{nR}{p} T_i \quad \text{e} \quad V_f = \frac{nR}{p} T_f$$

Dividindo, ordenadamente, uma equação pela outra, obtém-se:

$$\frac{V_f}{V_i} = \frac{T_f}{T_i}$$

Verifica-se tratar-se da Lei de Charles ou de Gay-Lussac anteriormente analisada. A figura 5.9 ilustra diferentes diagramas de processos isobáricos.

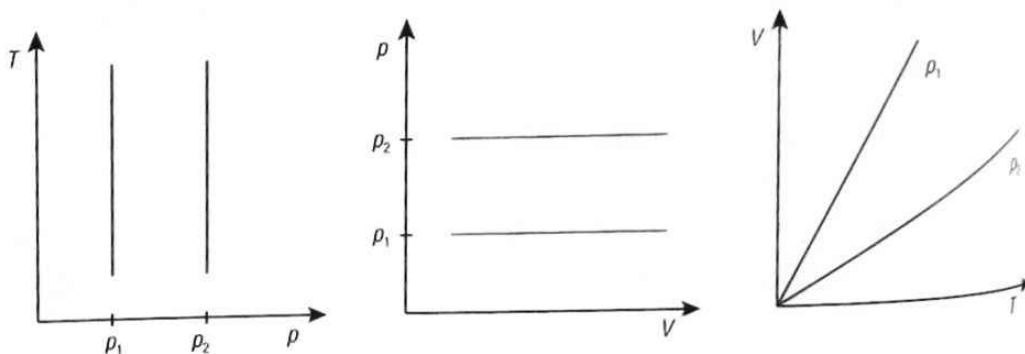


Fig. 5.9 Diagramas de processos isobáricos.

Questões Resolvidas

2. Um gás ideal ocupa um volume de 1,0 L a 20 °C. Se a temperatura do sistema aumentar de 30 °C calcule o novo volume do gás, admitindo que a pressão permaneceu constante.

Resolução

2. Trata-se de um processo isobárico, pelo que podemos escrever:

$$\frac{V_i}{V_f} = \frac{T_i}{T_f} \Leftrightarrow V_f = \frac{T_f}{T_i} V_i$$

$$T_i = 20 \text{ °C} = 293 \text{ K}$$

$$T_f = 50 \text{ °C} = 323 \text{ K}$$

$$V_f = \frac{323 \text{ K}}{293 \text{ K}} \times 1,0 \text{ L} \Leftrightarrow V_f = 1,1 \text{ L}$$

Um processo diz-se **isovolumétrico**, ou **isocórico**, quando a transformação gasosa se processa a volume constante.

Partindo da equação de estado do gás ideal, facilmente se conclui que, num processo isovolumétrico, a pressão de uma dada amostra de gás é directamente proporcional à sua temperatura absoluta. Se n moles de gás a volume constante V sofrerem um processo isovolumétrico, ocorre uma transformação, passando o sistema gasoso de um estado inicial, com pressão p_i e temperatura absoluta T_i , a um estado final, com pressão p_f e temperatura absoluta T_f :

$$p_i = \frac{nR}{V} T_i \quad \text{e} \quad p_f = \frac{nR}{V} T_f$$

Dividindo, ordenadamente, uma equação pela outra, obtém-se:

$$\frac{p_f}{p_i} = \frac{T_f}{T_i}$$

A figura 5.10 ilustra diferentes diagramas de processos isovolumétricos.

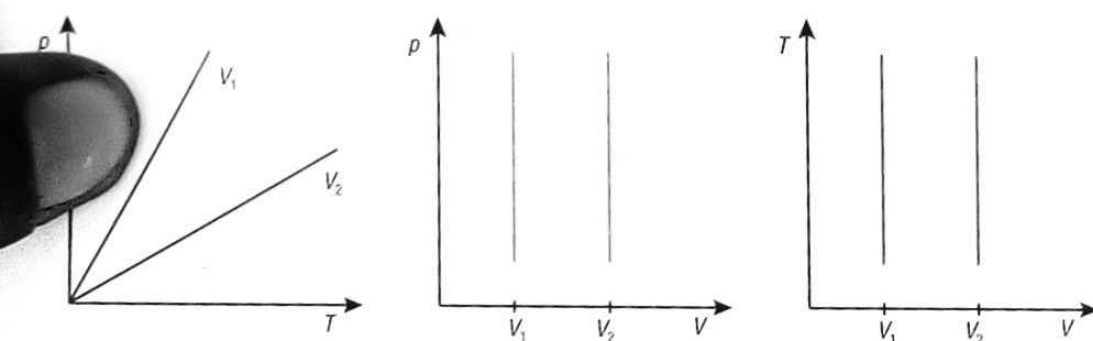


Fig. 5.10 Diagramas de processos isovolumétricos

Questões Resolvidas

3. Um gás ideal encontra-se à pressão de 760 mmHg a 300 K. Se a temperatura do sistema aumentar de 100 K, calcule a nova pressão do gás, admitindo que o volume permaneceu constante.

Resolução

3. Trata-se de um processo isovolumétrico, pelo que podemos escrever:

$$\frac{p_f}{p_i} = \frac{T_f}{T_i} \Leftrightarrow p_f = \frac{T_f}{T_i} p_i \Rightarrow p_f = \frac{400 \text{ K}}{300 \text{ K}} \times 760 \text{ mmHg} \Leftrightarrow p_f = 1013 \text{ mmHg}$$

Um processo diz-se **isotérmico** quando a transformação gasosa se processa a temperatura constante.

Partindo da equação de estado do gás ideal, facilmente se conclui que, num processo isotérmico, a pressão de uma dada amostra de gás é inversamente proporcional ao seu volume. Se n moles de gás a temperatura constante T sofrerem um processo isotérmico, ocorre uma transformação, passando o sistema gasoso de um estado inicial, com pressão p_i e volume V_i , a um estado final, com pressão p_f e volume V_f .

$$p_i V_i = nRT \quad \text{e} \quad p_f V_f = nRT$$

Dividindo, ordenadamente, uma equação pela outra, obtém-se:

$$\frac{p_f}{p_i} = \frac{V_i}{V_f}$$

Verifica-se tratar-se da Lei de Boyle-Mariotte anteriormente analisada. A figura 5.11 ilustra diferentes diagramas de processos isotérmicos.

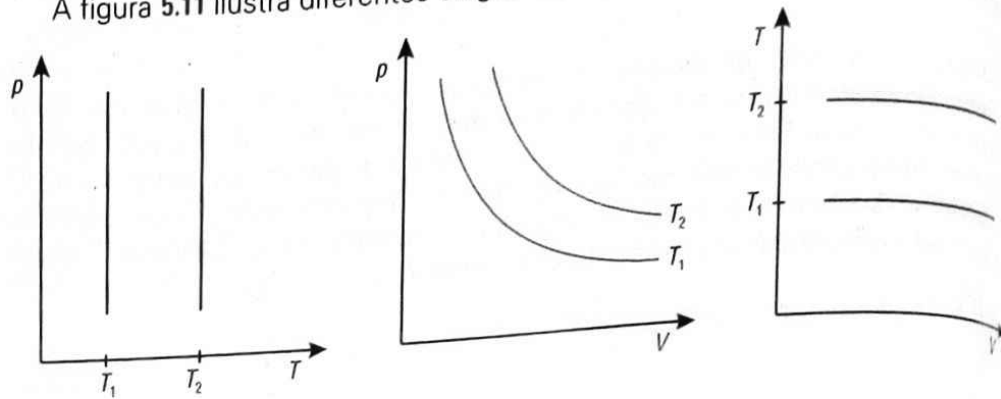


Fig. 5.11 Diagramas de processos isotérmicos.

Questões Resolvidas

4. Um gás ideal é encerrado num aparelho da Lei de Boyle-Mariotte. O seu volume é de 300 mL à pressão de 650 mmHg. Aumentando a pressão para 790 mmHg, determine qual será o novo volume ocupado pelo gás, admitindo que a temperatura permaneceu constante.

Resolução

4. Trata-se de um processo isotérmico, pelo que podemos escrever:

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 \Leftrightarrow V_2 = \frac{p_1}{p_2} V_1$$

$$V_2 = \frac{650 \text{ mmHg}}{790 \text{ mmHg}} \times 300 \text{ mL} \Leftrightarrow V_2 = 247 \text{ mL}$$

► Processo adiabático

Ao contrário do que sucede com os isoprocessos, num processo adiabático não ocorrem trocas de energia sob a forma de calor com a vizinhança, podendo a temperatura, a pressão e o volume variarem.

Um processo diz-se **adiabático** quando a transformação gasosa se processa sem trocas de energia sob a forma de calor com a vizinhança, $\Delta Q = 0$.

Este tipo de transformação é muito comum em sistemas isolados, como, por exemplo, uma garrafa-termo, ou em processos muito rápidos, não havendo tempo para o sistema trocar energia sob a forma de calor com a vizinhança. A figura 5.12 mostra o diagrama pV para um processo adiabático.

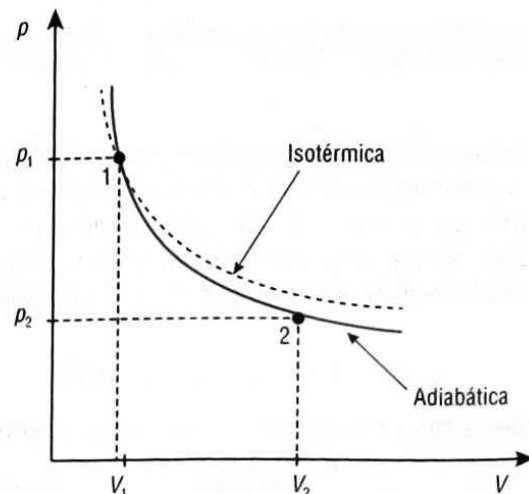


Fig. 5.12 Diagrama pV de processo adiabático.

Síntese de conteúdos

- Num **gás ideal**, o volume ocupado pelas suas partículas é desprezável, por comparação com o volume do recipiente que o encerra, desprezando-se as forças de interacção entre essas partículas, excepto durante as colisões perfeitamente elásticas.
- Numa dada amostra de gás há três grandezas físicas mensuráveis que caracterizam o seu estado, denominadas **parâmetros de estado**. Estas são o **volume**, a **pressão** e a **temperatura**. Estas grandezas, ou variáveis, encontram-se matematicamente relacionadas entre si através de uma equação conhecida como **equação de estado do gás ideal**.
- **Lei de Boyle-Mariotte** – o volume e a pressão de uma quantidade fixa de um gás ideal são inversamente proporcionais, a uma dada temperatura:

$$pV = k \quad (T \text{ e } n \text{ constantes})$$

- **Lei de Charles ou de Gay-Lussac** – o volume e a temperatura absoluta de uma quantidade fixa de um gás ideal são directamente proporcionais, a uma dada pressão:

$$V = aT \quad (p \text{ e } n \text{ constantes})$$

- **Princípio de Avogadro** – o volume de uma amostra de gás ideal, a uma dada pressão e temperatura, é directamente proporcional ao número de moléculas nessa amostra:

$$V \propto n \quad (T \text{ e } p \text{ constantes})$$

- **Equação de estado do gás ideal:**

$$pV = nRT$$

onde R é uma constante de proporcionalidade, conhecida como constante universal do gás ideal, sendo o seu valor no SI igual a: $R = 8,3144 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$.

- Denominam-se **isoprocessos** todas as transformações gasosas em que a quantidade de substância, isto é, o número de moles, e um dos parâmetros de estado permanecem constantes. Assim, no decurso de uma transformação gasosa podemos considerar três isoprocessos: isobárico, isovolumétrico e isotérmico.

- Um processo diz-se **isobárico** quando a transformação gasosa se processa a pressão constante, verificando-se a relação:

$$\frac{V_i}{V_f} = \frac{T_i}{T_f}$$

- Um processo diz-se **isovolumétrico**, ou **isocórico**, quando a transformação gasosa se processa a volume constante, verificando-se a relação:

$$\frac{p_i}{p_f} = \frac{T_i}{T_f}$$

- Um processo diz-se **isotérmico** quando a transformação gasosa se processa a temperatura constante, verificando-se a relação:

$$\frac{p_i}{p_f} = \frac{V_f}{V_i}$$

- Um processo diz-se **adiabático** quando a transformação gasosa se processa sem trocas de energia sob a forma de calor com a vizinhança, $\Delta Q = 0$.

5.2. Termodinâmica

Conteúdos

- Trabalho termodinâmico.
- Primeira lei da Termodinâmica e os isoprocessos.
- Segunda lei da Termodinâmica e a entropia.



Fig. 5.13 Lançamento de uma nave espacial. Não é possível construir máquinas capazes de criarem energia a partir do nada, violando a primeira lei da Termodinâmica.

A **termodinâmica** é o ramo da Física que se ocupa dos fenómenos de transferência de energia entre **sistemas constituídos por um grande número de partículas**. Estes sistemas complexos, que não podem ser tratados como uma partícula, denominam-se **sistemas termodinâmicos**. O enfoque não está no que se passa com cada uma das inúmeras partículas que constituem o sistema, mas, sim, no seu conjunto. Dá, portanto, uma visão macroscópica e trata de **propriedades macroscópicas**, como, por exemplo, a **temperatura**, a **pressão** e o **volume**. Este pequeno número de propriedades permite a descrição de **estados de equilíbrio**, isto é, situações em que não ocorrem alterações perceptíveis do sistema. Havendo intervenções exteriores, os sistemas evoluem até atingirem outro estado de equilíbrio, estado esse em que as propriedades assumem novos valores estacionários. É por esta razão que, habitualmente, também se designam as propriedades termodinâmicas por **variáveis de estado**.

A termodinâmica revela-se tão poderosa que encontra inúmeras aplicações em todas as ciências, apesar de se basear em apenas três leis de carácter empírico, isto é, assentes na experiência. O seu desenvolvimento surgiu pela necessidade prática de se aumentar a eficiência das primeiras máquinas a vapor. Hoje, permitem-nos descrever um grande número de fenómenos naturais e facultam-nos o conhecimento necessário ao serviço da Humanidade. Iremos centrar o nosso estudo nas duas leis mais importantes que impõem limites às possibilidades de transformações que podem ter lugar num dado sistema, começando por abordar a noção de trabalho termodinâmico.

► Trabalho termodinâmico

O contacto entre dois sistemas termodinâmicos que se encontram a temperaturas diferentes poderá conduzir, ou não, a uma variação nos estados de ambos os sistemas. Tal circunstância irá depender da natureza da superfície de contacto, ou fronteira, entre os dois sistemas. Havendo variação, diz-se que a **fronteira é condutora de calor ou diatérmica** e os sistemas dizem-se em **contacto térmico**. Não havendo variação, diz-se que a **fronteira é isoladora ou adiabática** e os sistemas dizem-se **termicamente isolados**. Na unidade 1, lidámos com sistemas em contacto térmico e aprendemos a calcular a energia transferida sob a forma de calor. Coloca-se, agora, a questão de saber se será possível transferir energia para sistemas termicamente isolados. A resposta a esta pergunta foi dada pelo físico britânico James Joule. Este verificou o princípio da conservação da energia ao fazer a primeira determinação experimental do chamado "equivalente mecânico do calor".



James Joule
(1818-1889)

Joule baseou o seu estudo num dispositivo experimental, por si construído, ilustrado na figura 5.14. Este dispositivo é constituído por uma corda enrolada numa rolana que segura duas massas suspensas no ar. Soltando as massas, um eixo gira produzindo, por sua vez, a rotação dos braços presos às pás que agitam a água que se encontra no interior de um recipiente fechado com paredes adiabáticas. Depois de as massas caírem de uma altura de cerca de 1,5 m, eram recolocadas na posição inicial e deixadas cair novamente. Este processo era repetido cerca de vinte vezes.

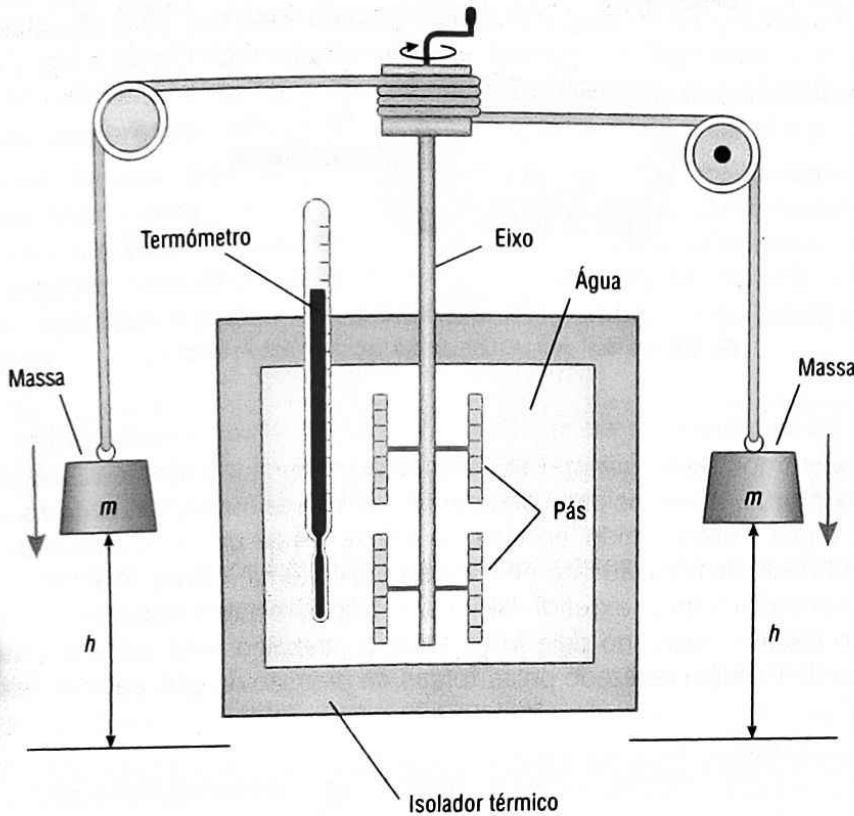


Fig. 5.14 Esquema do dispositivo experimental utilizado por Joule.

A fricção gerada pelo movimento das pás produz o aquecimento da água registado pelo termómetro. Deste estudo experimental resultou, em 1850, a publicação de um trabalho intitulado "O equivalente mecânico do calor", onde Joule escreveu:

"Eu concluo, tendo em conta os resultados experimentais relatados neste documento:

- que a quantidade de calor produzida pela fricção dos corpos, no estado sólido ou líquido, é sempre proporcional à quantidade de força despendida;
- que a quantidade de calor capaz de aumentar, em 1 °F, a temperatura de 1 libra de água (pesada em vácuo entre 50 °C e 60 °C) é equivalente à energia produzida por uma força mecânica responsável pela queda de 772 libras de uma altura de 1 pé."

A força peso produziu o movimento de queda das massas e consequentemente o movimento das pás, realizando trabalho. Podemos então dizer que se **transferiu energia para um sistema termicamente isolado realizando trabalho**.

Há outras formas de transferir energia, por meio de trabalho, para sistemas que não podem receber calor do exterior. Uma dessas formas baseia-se na passagem de corrente eléctrica num resistor situado no interior do sistema. Neste caso, há transferência de energia para o sistema realizando-se **trabalho eléctrico**. Numa chaleira eléctrica, por exemplo, realiza-se trabalho eléctrico na resistência interior, aquecendo-se assim a água. Outra dessas formas consiste na variação de volume de um líquido ou de um gás contido num recipiente. Nestas compressões ou expansões **as forças de pressão realizam trabalho**. Ao encher um pneu de bicicleta, por exemplo, verifica-se que o ar que é forçado para o interior aquece.

Repare

Uma diferença de temperatura de 1,8 °F equivale à de 1 °C. Como a variação de temperatura sofrida é pequena, o termómetro a utilizar tem de ter uma grande sensibilidade. Joule utilizou um termómetro com uma sensibilidade de 1/100 °F, o que equivale aproximadamente a 0,0055 °C.

De todas estas diferentes formas de trabalho termodinâmico, iremos, de seguida, centrar o nosso estudo no trabalho das forças de pressão sobre um gás.

O sistema termodinâmico que vamos analisar é constituído por um gás ideal contido num cilindro munido de um êmbolo que pode deslizar sem atrito, conforme ilustrado na figura 5.15.

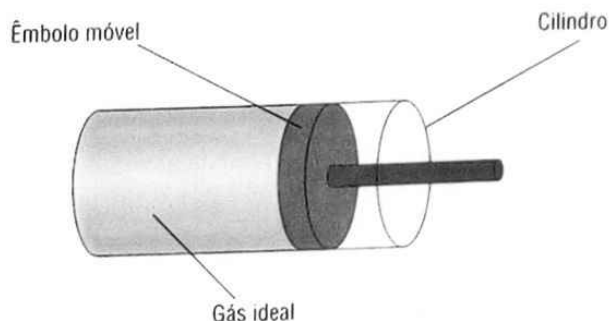


Fig. 5.15 Gás ideal encerrado em cilindro munido de êmbolo móvel

Repare

Nas condições referidas, o processo é efectuado com uma lentidão tal que se pode considerar o sistema sempre infinitamente próximo de um estado de equilíbrio durante a evolução. Diz-se um processo quase-estático a pressão constante.

Consideremos que inicialmente o sistema se encontra em equilíbrio. Ao aplicar, suavemente, e a velocidade constante, uma força exterior ao sistema sobre o êmbolo, o gás é comprimido lentamente até se atingir um novo estado de equilíbrio. Em virtude da pressão interna e externa o sistema exerce uma força sobre o êmbolo simétrica à força exterior. Ambas as forças realizam trabalho. Nestas condições, o trabalho realizado pela força exterior, trabalho feito sobre o sistema, é simétrico do trabalho realizado pelas forças de pressão do gás, trabalho feito pelo sistema.

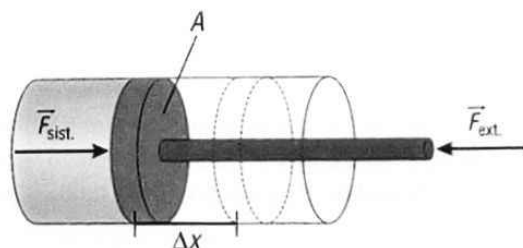


Fig. 5.16 Forças exercidas sobre o êmbolo num processo lento de compressão do gás encerrado no cilindro.

A pressão, p , que a força $\vec{F}_{\text{sist.}}$ exerce sobre o êmbolo, é dada pela razão entre o seu módulo e a área da superfície do êmbolo, A . Como o deslocamento, Δx , tem a mesma direcção e sentido oposto ao da força, podemos escrever:

$$W_{\vec{F}_{\text{sist.}}} = |\vec{F}_{\text{sist.}}| \Delta x$$

visto, neste caso, $\Delta x < 0$ e o trabalho realizado pelo sistema ser negativo.

Da definição de pressão, resulta que:

$$p = \frac{|\vec{F}_{\text{sist.}}|}{A} \Leftrightarrow \vec{F}_{\text{sist.}} = pA$$

pele que a expressão do trabalho das forças de pressão do gás poderá ser escrita na forma:

$$W_{\vec{F}_{\text{sist.}}} = pA \Delta x$$

O termo correspondente ao produto da área pelo deslocamento não é mais do que a variação de volume, ΔV . Assim, podemos finalmente escrever que o trabalho termodinâmico realizado pelo sistema é dado pela relação:

$$W_{\text{F}_{\text{sist.}}}^- = p \Delta V$$

Da análise desta equação decorre que, no caso da **compressão** do gás, o **trabalho realizado pelo gás será negativo** porque a variação de volume é negativa. Quando o gás é descomprimido lentamente também realiza trabalho. A equação anterior é igualmente válida nessa situação. Neste caso, o **trabalho realizado pelo gás na descompressão será positivo** porque a variação de volume é positiva.

Do ponto de vista físico, os sinais negativo e positivo do trabalho representam, nada mais nada menos, do que um fluxo de energia através das paredes do sistema. Quando o trabalho realizado pelo gás, isto é, o trabalho realizado pelo sistema é negativo, caso da compressão, sai energia do sistema. Quando o trabalho realizado pelo sistema é positivo, caso da expansão, entra energia para o sistema. Resumindo:

- Na compressão: $W_{\text{F}_{\text{sist.}}}^- < 0 \Rightarrow$ entra energia para o sistema.
- Na expansão: $W_{\text{F}_{\text{sist.}}}^- > 0 \Rightarrow$ sai energia do sistema.

A unidade SI de trabalho é o **joule (J)**. É o trabalho realizado por um gás à pressão de 1 Pa quando o seu volume aumenta de 1 m³:

$$1 \text{ J} = 1 \text{ Pa} \times 1 \text{ m}^3$$

Questões Resolvidas

1. Considere inicialmente uma mole de gás ideal submetida à pressão de uma atmosfera e à temperatura de zero graus Celsius, isto é, nas condições PTN. Posteriormente, comprime-se este gás, a pressão constante, até o volume se reduzir a metade do valor inicial. Calcule:

1.1. o volume ocupado pelo gás, nas condições iniciais;

1.2. o trabalho realizado pelo gás na compressão.

Dados: $R = 0,08206 \text{ L atm K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$

Resolução

1.1. $p = 1 \text{ atm}$

$\theta = 0 \text{ }^\circ\text{C} \Rightarrow T = 273,15 \text{ K}$

$n = 1 \text{ mol}$

$$V = \frac{nRT}{p}$$

$$V = \frac{1 \times 0,08206 \text{ L atm K}^{-1} \text{ mol}^{-1} \times 273,15 \text{ K}}{1 \text{ atm}} \Leftrightarrow V = 22,4 \text{ L mol}^{-1}$$

1.2. $p = 1 \text{ atm} = 1,013 \times 10^5 \text{ Pa}$

$V_i = 22,4 \text{ L mol}^{-1}$

$$V_f = \frac{1}{2} V_i$$

$$\Delta V = V_f - V_i \Rightarrow \Delta V = \frac{1}{2} V_i - V_i \Leftrightarrow \Delta V = -\frac{1}{2} V_i$$

$$W_{\text{F}_{\text{sist.}}}^- = p \Delta V \Rightarrow W_{\text{F}_{\text{sist.}}}^- = 1,013 \times 10^5 \text{ Pa} \times \left(-\frac{1}{2} \times 22,4 \text{ L mol}^{-1} \right) \Leftrightarrow W_{\text{F}_{\text{sist.}}}^- = -1,13 \times 10^6 \text{ J}$$

Curiosidade

Os diagramas pV surgiram pela primeira vez no século XVIII como ferramentas para melhorar a compreensão da eficiência das máquinas a vapor.

As transformações sofridas pelos gases, quando são conhecidas as condições iniciais e finais de estado, podem ser representadas através de uma trajetória gráfica. Essa representação gráfica é geralmente conhecida como diagrama de processo ou diagrama de ciclo e constitui um recurso muito útil na resolução de problemas.

Como o trabalho é uma função da pressão e do volume, ao representarmos graficamente um processo, recorrendo a estas grandezas, obtemos um **diagrama de processo** denominado **diagrama de pressão-volume (pV)** ou simplesmente **diagrama pV** , conforme ilustrado na figura 5.17.

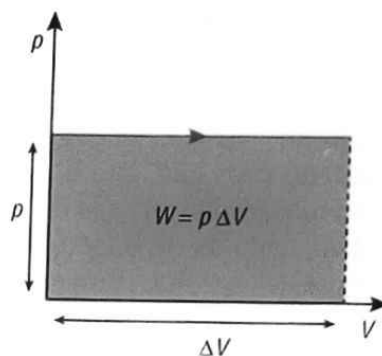


Fig. 5.17 Diagrama pV de uma expansão a pressão constante.

Neste diagrama pV , representa-se uma expansão a pressão constante. O valor do trabalho de expansão é numericamente igual à "área" sob o gráfico. Saliente-se que esta "área" não é fisicamente uma área, no sentido literal do termo, desde logo porque apresenta unidades de energia e porque pode ser positiva (na expansão) ou negativa (na compressão).

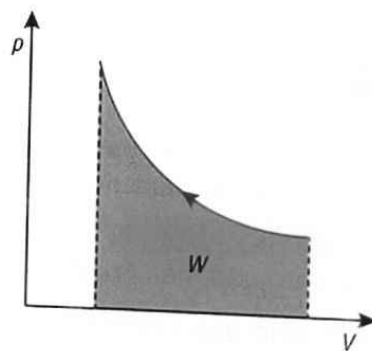


Fig. 5.18 Diagrama pV de uma compressão a pressão variável.

Se a transformação se processar a pressão variável, revela-se igualmente válido calcular o trabalho realizado a partir do cálculo da "área" sob o gráfico. A figura 5.18 ilustra um desses processos. O trabalho realizado é numericamente igual à área sombreada, sendo neste caso negativo, visto tratar-se de uma compressão.

No caso das transformações cíclicas, em que o estado final do sistema coincide com o estado inicial, os diagramas pV são denominados **diagramas de ciclo**

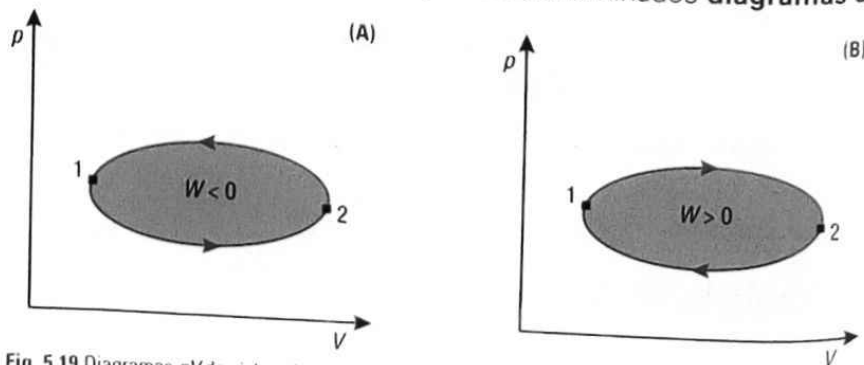


Fig. 5.19 Diagramas pV de ciclo refrigerador (A) e motor (B).

Curiosidade

As transformações cíclicas revestem-se de grande importância no nosso quotidiano. As máquinas térmicas que utilizamos diariamente, como o motor do automóvel e a geleira, funcionam deste modo.

Como se pode verificar na figura 5.19, num diagrama pV de ciclo a curva é fechada. Neste caso, o cálculo da "área" dentro da curva corresponde ao valor numérico do trabalho realizado no ciclo. Se o **ciclo for gerado no sentido anti-horário**, em que o trabalho realizado na compressão é maior do que o trabalho na expansão, o **trabalho total é negativo** e o ciclo é designado por **ciclo refrigerador** (figura 5.19 A). Caso o **ciclo seja gerado no sentido horário**, em que o trabalho realizado na expansão é maior do que o trabalho na compressão, o **trabalho total é positivo** e o ciclo é designado por **ciclo motor** (figura 5.19 B).

► Primeira lei da Termodinâmica e os isoprocessos

A primeira lei da Termodinâmica não é mais do que a aplicação do princípio de conservação da energia aos processos termodinâmicos e ao calor. Afirma que a energia de um sistema isolado não varia, independentemente das alterações produzidas. O físico alemão Julius Mayer foi o primeiro a propor a equivalência de todas as formas de energia, incluindo o calor, e a formular a conservação da energia total. Estas ideias foram posteriormente corroboradas experimentalmente por James Joule, conforme já referimos.

A energia no interior do sistema, chamada **energia interna**, habitualmente representada por U , não é mais do que a energia cinética e potencial total de todas as partículas que constituem o sistema e que pode ser transferida directamente sob a forma de calor. O seu valor depende, entre outras, da massa e da temperatura do sistema. Quanto maior for a massa maior é a energia interna, para a mesma temperatura. Quanto maior for a temperatura maior é a energia interna, para a mesma massa. Se o sistema for **termicamente isolado** pode **receber energia** do exterior devido à realização de **trabalho**, aumentando, assim, a sua temperatura, mesmo sem ter sido aquecido por uma fonte de calor. Neste caso, verifica-se um **aumento da energia interna**, visto no estado final o sistema ter mais energia do que no estado inicial. Caso o **sistema não seja termicamente isolado**, pode **receber energia** não só como **trabalho**, como também sob a forma de **calor**. Em qualquer uma das situações verifica-se um aumento da energia interna.

As situações descritas acima permitem concluir que um sistema não isolado pode sofrer **variações da sua energia interna**, ΔU . Efectivamente, tal pode ser conseguido por transferência de massa, pela realização de trabalho, W , ou por fluxo de calor, Q . Assim, a variação de energia interna de um sistema de massa constante é dada por:

$$\Delta U = W + Q$$

A expressão anterior traduz a primeira lei da Termodinâmica, cujo enunciado é:

Primeira lei da Termodinâmica – A energia interna de um sistema de massa constante pode sofrer variações tanto pela realização de trabalho como por transferência de calor.

A variação de energia interna resulta do balanço das energias que entram ou saem do sistema. Usa-se a convenção de sinais ilustrada na figura 5.20.

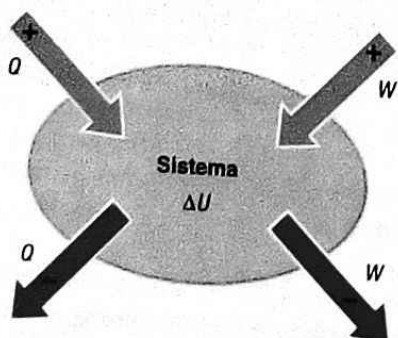


Fig. 5.20 Convenção de sinais. A energia que entra é positiva, $\Delta U > 0$, e a energia que sai é negativa, $\Delta U < 0$.



Um copo de água fervente está a maior temperatura do que a água do oceano. No entanto, a água do oceano possui maior energia interna do que um copo de água, por possuir maior massa. O copo de água fervente não consegue fundir um icebergue, mas a água do mar consegue...

Como aplicação da primeira lei da Termodinâmica, iremos de seguida analisar **isoprocessos em sistemas fechados**.

Num **processo isotérmico**, a temperatura permanece constante. Como a energia interna depende da temperatura, sendo $\Delta T = 0$, será também $\Delta U = 0$.

$$0 = W + Q \Leftrightarrow Q = -W$$

Assim, o fluxo de calor foi usado na realização de trabalho, conforme ilustrado na figura 5.21.

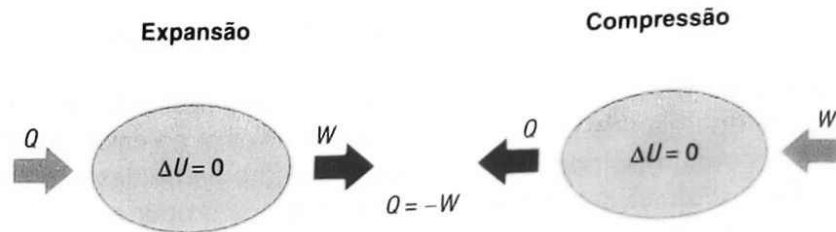


Fig. 5.21 Processo isotérmico.

Num **processo isobárico**, a pressão permanece constante. Neste caso, realiza-se trabalho e a variação de energia interna não é nula.

Assim, isto significa que o calor fornecido é usado no aumento da energia interna do sistema, conforme ilustrado na figura 5.22.

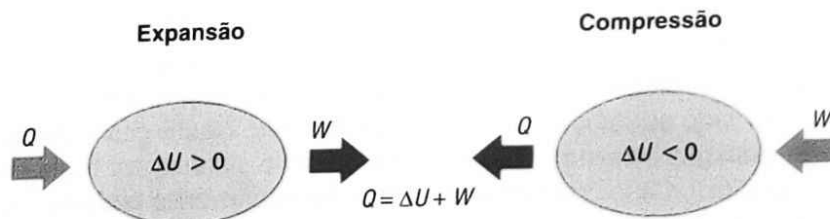


Fig. 5.22 Processo isobárico.

Num **processo isovolumétrico**, o volume permanece constante. Neste caso, como a variação de volume é nula, não há trabalho realizado.

Assim, o fluxo de calor é integralmente usado no aumento da energia interna, conforme ilustrado na figura 5.23.

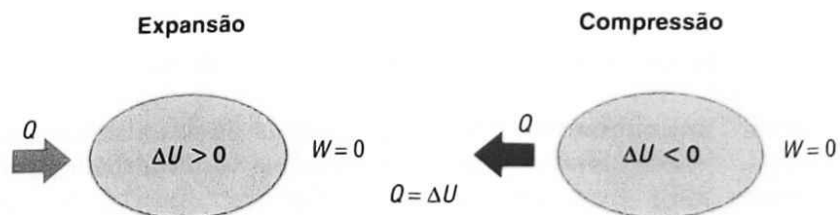


Fig. 5.23 Processo isovolumétrico.

Num **processo adiabático**, o fluxo de calor é nulo. Assim, toda a variação de energia interna é devida ao trabalho, conforme ilustrado na figura 5.24.

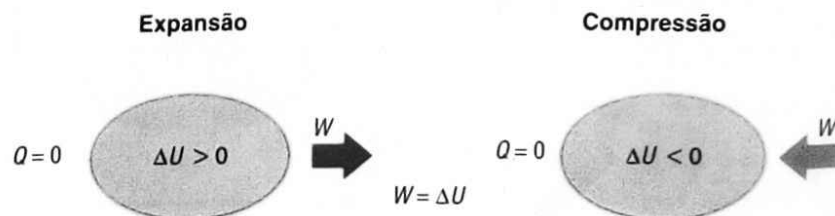


Fig. 5.24 Processo adiabático.

Questões Resolvidas

2. Determine a variação de energia interna nas seguintes situações:
- 2.1. num processo isovolumétrico, um sistema gasoso recebe do exterior 400 cal, sob a forma de calor;
 - 2.2. num processo isobárico, um gás realiza o trabalho de 250 J, quando recebe do meio exterior um fluxo de calor de 600 J;
 - 2.3. num sistema sobre o qual se realiza um trabalho de 2000 J, fornecendo-se ao exterior 300 cal no mesmo intervalo de tempo;
 - 2.4. num processo adiabático, o volume aumenta 100 cm^3 à pressão de $1,0 \times 10^5 \text{ Pa}$.

Dados: $1 \text{ cal} = 4,18 \text{ J}$

Resolução

2.1. $Q = 400 \text{ cal} = 1672 \text{ J}$

Numa transformação isovolumétrica o volume permanece constante, ou seja, $\Delta V = 0$, pelo que o trabalho é $W = 0$. O calor recebido é transformado em variação da energia interna. Logo,

$$\Delta U = W + Q \Rightarrow \Delta U = 0 + 1672 \text{ J} \Leftrightarrow \Delta U = 1672 \text{ J}$$

2.2. $W = -250 \text{ J}$

$Q = 600 \text{ J}$

$$\Delta U = W + Q \Rightarrow \Delta U = -250 \text{ J} + 600 \text{ J} \Leftrightarrow \Delta U = 350 \text{ J}$$

2.3. $W = 2000 \text{ J}$

$Q = -300 \text{ cal} = -1254 \text{ J}$

$$\Delta U = W + Q \Rightarrow \Delta U = 2000 \text{ J} - 1254 \text{ J} \Leftrightarrow \Delta U = 746 \text{ J}$$

2.4. Num processo adiabático o fluxo de calor é nulo, ou seja, $Q = 0$.

$$\Delta U = W \Leftrightarrow \Delta U = p \Delta V \Rightarrow \Delta U = 1,0 \times 10^5 \text{ Pa} \times 100 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \Leftrightarrow \Delta U = 10 \text{ J}$$

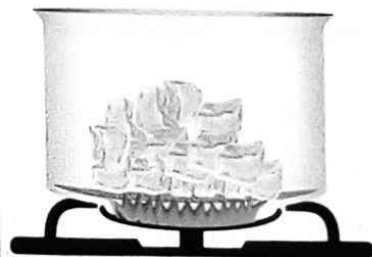
É possível variar a energia interna de um sistema a partir do trabalho ou do calor. Ambos correspondem a transferências de energia que se processam entre o sistema e o exterior. Na realidade, **nenhum sistema possui trabalho ou calor. Possui, isso sim, energia interna que pode variar pela realização de trabalho ou fluxo de calor.** A primeira lei da Termodinâmica nada nos diz, no entanto, sobre a forma como estas transferências de energia ocorrem nem impõe qualquer tipo de restrições.

► Segunda lei da Termodinâmica e a entropia

Vimos já que a primeira lei da Termodinâmica estabelece a conservação de energia em qualquer transformação. A segunda lei estabelece a forma como essas transformações termodinâmicas podem ocorrer. Para descrever o sentido da ocorrência de um processo irreversível recorreu-se a uma grandeza física chamada **entropia**. Etimologicamente, o termo entropia significa "em transformação" e foi escolhido por analogia com a palavra energia, que significa "em acção".

Já nos deparamos com fenómenos irreversíveis no nosso estudo. Quando falamos do equilíbrio térmico que se estabelece entre dois corpos que se encontram a temperaturas diferentes, o fluxo de calor ocorre sempre do corpo mais quente para o corpo mais frio. O processo inverso não ocorre espontaneamente. Quando falamos da experiência de Joule, o aquecimento da água ocorria enquanto um corpo caía. O processo inverso, subida de um corpo à custa do arrefecimento de uma fonte, nunca foi observado! Estes processos ocorrem apenas num sentido, não podendo ocorrer por si só no sentido inverso. É por esta razão que são designados por **processos irreversíveis**.

Repare



A água aquecida num tacho não pode formar cubos de gelo, pois tal acontecimento corresponderia a uma transferência de calor da água para a chama! A transferência de calor é irreversível, espontaneamente.

A segunda lei da Termodinâmica determina que a **entropia dos sistemas isolados aumenta sempre que o processo é irreversível**. A entropia é uma grandeza que não se conserva.

Nos fenómenos reversíveis, em sistemas isolados, verifica-se que a entropia não aumenta nem diminui. Podemos enunciar a segunda lei da Termodinâmica da seguinte forma:

Segunda lei da Termodinâmica – A entropia de um sistema isolado aumenta nos processos irreversíveis e mantém-se nos processos reversíveis.

Microscopicamente, a entropia é vista como a grandeza que mede a desordem de um sistema. A fusão de um cubo de gelo é acompanhada por um aumento da desordem do sistema, visto as moléculas no estado líquido apresentarem maior desorganização do que no estado sólido (figura 5.25). Espontaneamente, os processos irreversíveis ocorrem no sentido de maior para menor organização.

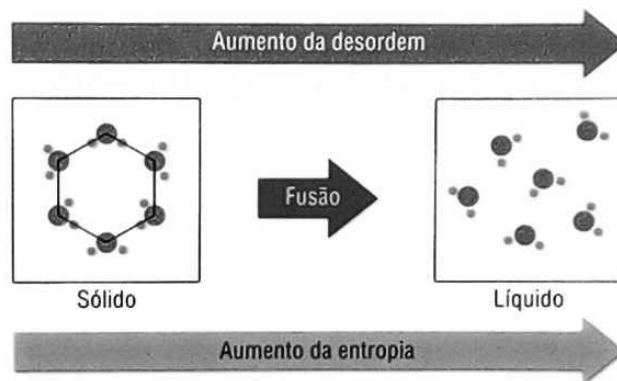


Fig. 5.25 Quanto maior o grau de desordem, maior a entropia.

A segunda lei pode ser enunciada de modos muito diferentes, embora equivalentes. Colocando a ênfase no fluxo de calor, poderemos escrever:

Num sistema isolado não é possível um processo termodinâmico que se traduza na passagem de um fluxo de calor de um corpo mais frio para outro mais quente.

Colocando a ênfase no trabalho realizado, poderemos escrever:

Não é possível um processo termodinâmico que se traduza na transformação integral em trabalho a partir do fluxo procedente de uma fonte de calor.

A entropia, que se representa pela letra S , serve, assim, para determinar o sentido em que um processo natural decorre.

Simbolicamente, podemos representar a segunda lei da Termodinâmica da seguinte forma:

- Num processo irreversível, num sistema isolado, $\Delta S > 0$.
- Num processo reversível, num sistema isolado, $\Delta S = 0$.

Se o **sistema não for isolado**, então nada podemos afirmar acerca da entropia. Tanto pode aumentar como diminuir ou permanecer constante.

Para os diferentes estados de equilíbrio de um sistema isolado, a entropia é um parâmetro de estado com um valor bem determinado, que depende de outras propriedades, como o volume e a temperatura. Num processo isotérmico, num sistema não isolado termicamente, a variação de entropia do sistema é dada por

$$\Delta S = \frac{Q}{T}$$

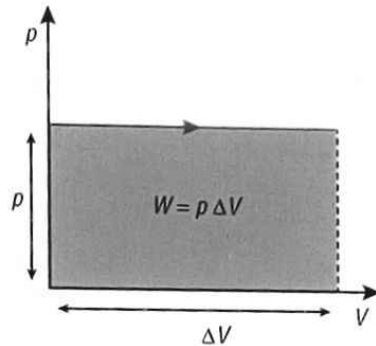
A unidade de entropia no SI é o **joule por kelvin**, $J K^{-1}$.

Síntese de conteúdos

- Trabalho termodinâmico, realizado pelas forças de pressão de um gás:

$$W_{F_{\text{sist}}}^- = p \Delta V$$

- Do ponto de vista físico, os sinais negativo e positivo do trabalho representam, nada mais nada menos, do que um fluxo de energia através das paredes do sistema:
 - Na compressão: $W_{F_{\text{sist}}}^- < 0 \Rightarrow$ entra energia para o sistema.
 - Na expansão: $W_{F_{\text{sist}}}^- > 0 \Rightarrow$ sai energia do sistema.
- Num **diagrama pV** o valor do trabalho é numericamente igual à "área" sob o gráfico.



- Num **diagrama pV de ciclo**, se este for gerado no sentido anti-horário, em que o trabalho realizado na compressão é maior do que o trabalho na expansão, o **trabalho total é negativo** e o ciclo é designado por **ciclo refrigerador**.
- Num **diagrama pV de ciclo**, se este for gerado no sentido horário, em que o trabalho realizado na expansão é maior do que o trabalho na compressão, o **trabalho total é positivo** e o ciclo é designado por **ciclo motor**.
- **Primeira lei da Termodinâmica** – A energia interna, U , de um sistema de massa constante pode sofrer variações tanto pela realização de trabalho, W , como por transferência de calor, Q . Essa variação de energia interna, ΔU , pode ser traduzida simbolicamente por:

$$\Delta U = W + Q$$

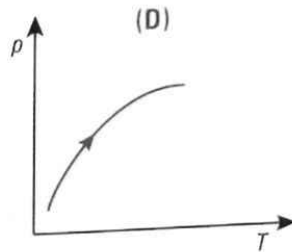
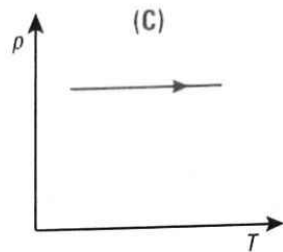
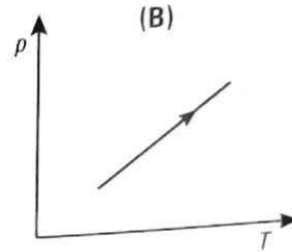
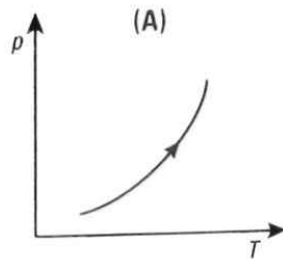
- A **entropia, S** , serve para determinar o sentido em que um processo natural decorre. É uma medida do estado de desorganização de um sistema.
- **Segunda lei da Termodinâmica:**
 - A entropia de um sistema isolado aumenta nos processos irreversíveis e mantém-se nos processos reversíveis.
 - Num sistema isolado não é possível um processo termodinâmico que se traduza na passagem de um fluxo de calor de um corpo mais frio para outro mais quente.
 - Não é possível um processo termodinâmico que se traduza na transformação integral em trabalho a partir do fluxo procedente de uma fonte de calor.
 - Num processo irreversível, num sistema isolado, $\Delta S > 0$.
 - Num processo reversível, num sistema isolado, $\Delta S = 0$.
- Num **processo isotérmico**, num sistema não isolado termicamente, a variação de entropia do sistema é dada por:

$$\Delta S = \frac{Q}{T}$$

- A unidade de entropia no SI é o **joule por kelvin, $J K^{-1}$** .

▶ QUESTÕES E PROBLEMAS

1. Um automóvel movido a gás natural encontra-se estacionado num local exposto ao sol. Admitindo que o gás encerrado no reservatório do automóvel apresenta comportamento ideal, seleccione o gráfico que melhor representa a pressão em função da temperatura do gás.

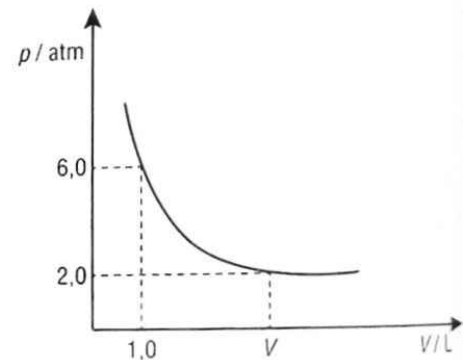


2. A pressão de um gás ideal varia com o volume de acordo com o ramo hiperbólico representado no gráfico.

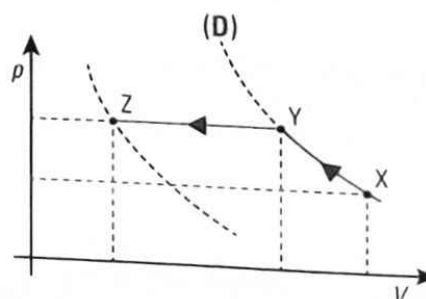
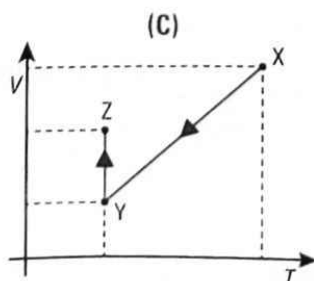
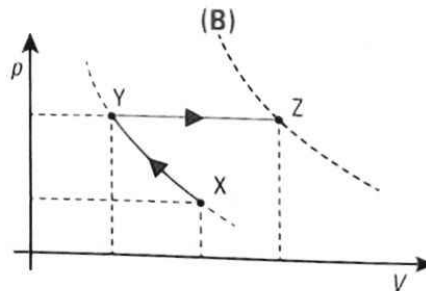
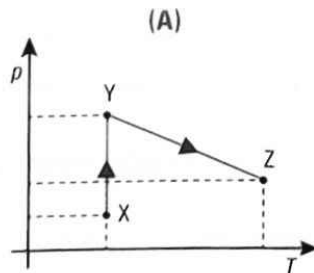
2.1. Calcule o volume correspondente à pressão de 2,0 atm.

2.2. Determine a temperatura a que se encontra a amostra de gás quando a pressão é de 6,0 atm, sabendo que essa amostra contém 1,5 mol do gás.

Dados: $R = 0,082 \text{ atm L K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$

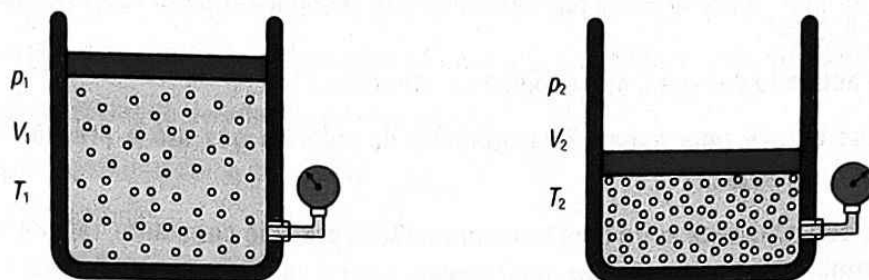


3. Um gás ideal sofre uma transformação $X \rightarrow Y \rightarrow Z$. Sabe-se que o processo de transformação $X \rightarrow Y$ é isotérmico, enquanto no processo $Y \rightarrow Z$ o gás é isobaricamente aquecido. Dos diagramas seguintes, seleccione o que poderá representar a referida transformação.



▶ QUESTÕES E PROBLEMAS

4. Uma dada massa de um gás ideal, à pressão de 0,5 atm, ocupa um volume de 20 dm³ a 30 °C.



Determine a nova pressão do gás quando a sua temperatura é de 100 °C e o seu volume é de 10 dm³.

5. Uma massa de gás ideal ocupa um volume de 300 mm³, à temperatura de 20 °C. Aquece-se este gás até duplicar a sua temperatura, mantendo a pressão constante. Das expressões seguintes, seleccione a que permite determinar o volume final.

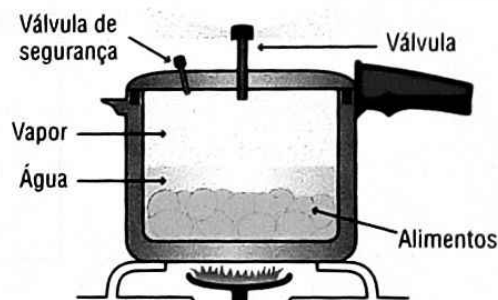
(A) $V_f = \left(\frac{2 \times 20}{20}\right) \times 300 \times 10^{-9}$

(B) $V_f = \left(\frac{20}{2 \times 20}\right) \times 300 \times 10^{-9}$

(C) $V_f = \left(\frac{313}{293}\right) \times 300 \times 10^{-9}$

(D) $V_f = \left(\frac{313}{293}\right) + 300 \times 10^{-9}$

6. Uma forma de cozinhar os alimentos em menos tempo, poupando assim energia, consiste na utilização de uma panela de pressão. Nesta panela, os alimentos são cozidos a temperaturas acima dos 100 °C, ponto de ebulição da água à pressão ambiente. São fabricadas com tampas que vedam hermeticamente o seu interior e de válvulas para que o vapor escape controladamente permitindo uma utilização segura, conforme ilustrado. Ao fechar a panela, o ar que fica encerrado no interior encontra-se a uma pressão igual à pressão atmosférica. Como se encontra hermeticamente vedada, ao aquecermos, os vapores de água vão sendo libertados fazendo com que a pressão interna se torne ainda maior. Com uma alta pressão, o líquido demora mais para entrar em ebulição e cozinhando, assim, mais rapidamente os alimentos.



Considere que uma panela de pressão, à temperatura ambiente de 20 °C, é fechada e aquecida até uma temperatura de 100 °C. Sabendo que a pressão inicial da panela é p_0 e que o volume permaneceu constante durante o aquecimento, seleccione, das opções seguintes, a que permite afirmar que o processo é...

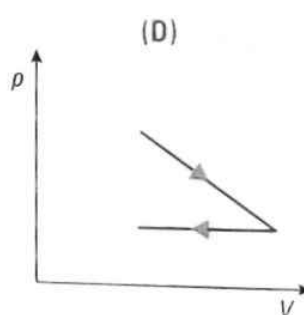
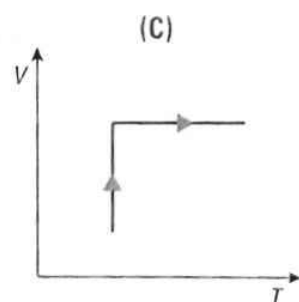
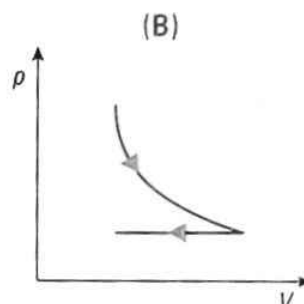
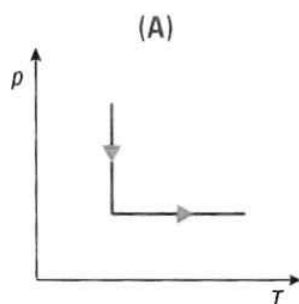
- (A) ... isovolumétrico e a pressão final é aproximadamente $5/4 p_0$.
- (B) ... isovolumétrico e a pressão final da panela é aproximadamente $1/5 p_0$.
- (C) ... isobárico e o volume da panela permanece constante.
- (D) ... isobárico e apenas a temperatura variou.
- (E) ... isovolumétrico e a pressão final da panela é aproximadamente $5 p_0$.
7. O gás contido num recipiente, de volume variável, sofre um aumento da sua temperatura de 20 °C para 100 °C numa transformação isobárica. Seleccione, das opções seguintes, a que permite afirmar que a densidade do gás...
- (A) ... torna-se 5 vezes maior.
- (B) ... torna-se 5 vezes menor.
- (C) ... aumenta, mas não chega a duplicar.
- (D) ... diminui, mas não chega a reduzir-se a metade.

▶ QUESTÕES E PROBLEMAS

8. Um cilindro munido de um êmbolo encerra 1,0 mol de gás ideal à pressão de 3,0 atm e à temperatura de 22 °C.

Dados: $R = 0,082 \text{ atm L K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$

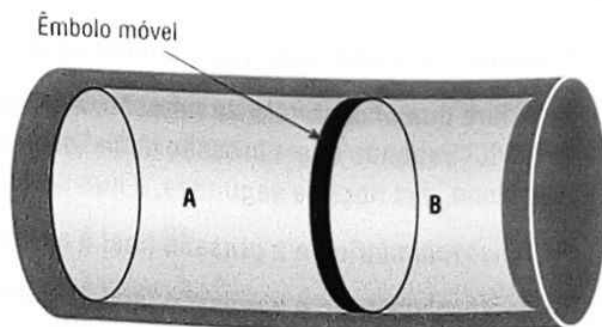
- 8.1. Calcule o volume ocupado pelo gás, nas condições referidas.
 8.2. Admita, agora, que ocorre uma expansão isotérmica do referido gás até a pressão se reduzir para metade. Calcule o novo valor do volume.
 8.3. Considere, agora, que o sistema sofre uma transformação, a pressão constante, tal que o volume regressa ao seu valor inicial. Determine, nestas condições, qual passou a ser o valor da sua temperatura.
 8.4. Dos diagramas seguintes, seleccione o que poderá representar as referidas transformações.



9. Na figura ao lado representa-se um cilindro fechado, de comprimento interior 20,0 cm, dividido em duas secções A e B. O êmbolo móvel que separa essas cavidades é um condutor térmico e pode mover-se sem atrito. As cavidades A e B contêm, respectivamente, 3,0 mol e 1,0 mol de um gás ideal.

Estando o êmbolo móvel em repouso, seleccione das opções seguintes a que representa a sua posição de equilíbrio em relação à extremidade esquerda do cilindro.

- (A) 11,7 cm (B) 12,5 cm
 (C) 15,0 cm (D) 17,5 cm



10. Considere um sistema termodinâmico fechado no qual ocorreu um processo em que se verificaram trocas de energia entre o sistema e a sua vizinhança, sob a forma de calor e de trabalho.

Nesse processo, a energia interna do sistema manteve-se constante, tendo o sistema transferido para a sua vizinhança 5000 cal sob a forma de trabalho.

Calcule a energia transferida, sob a forma de calor, em unidades SI e refira o sentido (do sistema para a vizinhança ou da vizinhança para o sistema) dessa transferência.

▶ QUESTÕES E PROBLEMAS

11. Uma garrafa de vidro fechada encerra, no seu interior, um gás à temperatura ambiente. Recorrendo a cubos de gelo, consegue-se arrefecer esse gás de forma a ceder 3,00 kJ de energia sob a forma de calor.

11.1. Indique qual é o valor do trabalho realizado pelo gás durante o arrefecimento. Justifique.

11.2. Determine o valor da variação da energia interna do gás.

11.3. Das opções seguintes seleccione a correcta.

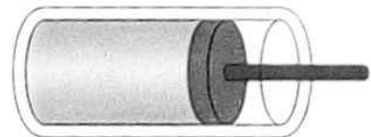
- (A) O processo é isotérmico.
- (B) O processo é adiabático.
- (C) A pressão do gás aumenta.
- (D) A temperatura do gás diminui.

12. Das opções seguintes, qual é a que poderá constituir o enunciado da primeira lei da Termodinâmica?

- (A) Se dois sistemas estiverem em equilíbrio térmico com um terceiro, também estão em equilíbrio entre si.
- (B) É impossível um sistema receber energia como calor e transformá-la integralmente em trabalho.
- (C) É impossível a ocorrência de um processo no qual há um decréscimo total da entropia do sistema.
- (D) A energia total transferida para o sistema é igual à variação da sua energia interna.

13. Um gás ideal contido num cilindro de paredes condutoras é comprimido. Durante essa compressão o êmbolo realizou o trabalho de 500 J e a energia interna diminuiu de 300 J. O valor da energia transferida sob a forma de calor entre o gás e a vizinhança é de:

- (A) - 200 J
- (B) - 800 J
- (C) 200 J
- (D) 800 J



Seleccione a opção correcta.

14. Um gás está contido num cilindro com êmbolo móvel. O sistema está isolado termicamente do exterior. O gás expande-se, deslocando o êmbolo, sendo realizado pelo sistema um trabalho de 500 J. Para esta transformação pode concluir-se que...

- (A) ... o gás arrefece e a sua energia interna diminui 500 J.
- (B) ... o gás aquece e a sua energia interna aumenta 500 J.
- (C) ... a energia interna do gás diminui 500 J, mas a sua temperatura não varia.
- (D) ... a energia interna do gás aumenta 500 J, mas a sua temperatura não varia.
- (E) ... a energia interna e a temperatura do gás permanecem constantes, visto estar isolado termicamente do exterior.

Seleccione a opção correcta.

15. Para os diferentes estados de equilíbrio de um sistema isolado, a entropia é um parâmetro de estado com um valor bem determinado, que depende de outras propriedades, como o volume e a temperatura. Num processo isotérmico, num sistema não isolado termicamente, a variação de entropia do sistema é dada por:

- (A) $\Delta S = Q + T$
- (B) $\Delta S = Q \times T$
- (C) $\Delta S = \frac{Q}{T}$
- (D) $\Delta S = \frac{T}{Q}$

Seleccione a opção correcta.

6.1. Movimentos oscilatórios

Conteúdos

- Lei de Hooke.
- Equação do movimento harmónico simples.
- Características de um oscilador harmónico simples: período, frequência e frequência angular; alongação e amplitude.
- Velocidade e aceleração de um oscilador harmónico simples.
- Energia de um oscilador harmónico simples.
- Movimento harmónico amortecido.
- O pêndulo gravítico como exemplo de um movimento harmónico simples.



Fig. 6.1 O movimento de subida e descida característico de um carrossel é um exemplo de um movimento oscilatório

Se pensarmos um pouco nos fenómenos que observamos diariamente à nossa volta, somos capazes de referir muitos e variados **movimentos periódicos**. É o caso do movimento da Lua à volta da Terra, da sucessão dos dias e das noites, das ondas do mar, dos batimentos cardíacos, do movimento do pêndulo de um relógio, das vibrações de um diapasão, do movimento do êmbolo (pistão) do cilindro de um automóvel, etc.

Um movimento periódico é um movimento em que um corpo:

- Percorre repetidamente a **mesma trajectória**.
- Passa pela **mesma posição**, com a **mesma velocidade** e a **mesma aceleração**, ao fim de um **intervalo de tempo igual a um período, T** .

Se a trajectória é percorrida em ambos os sentidos, como ocorre num **movimento de vaivém**, o movimento periódico designa-se por **movimento oscilatório** (se é relativamente lento) ou **movimento vibratório** (se é rápido) e o sistema que oscila em torno de uma posição de equilíbrio designa-se por **oscilador**.

Muitos **movimentos** são **deste tipo**: o movimento de um pêndulo, as vibrações das cordas num instrumento musical, as oscilações das moléculas num sólido em torno das posições de equilíbrio, as ondas electromagnéticas, etc.

Um movimento oscilatório ou vibratório é um movimento periódico em que a trajectória é percorrida em ambos os sentidos, em torno de uma posição de equilíbrio.

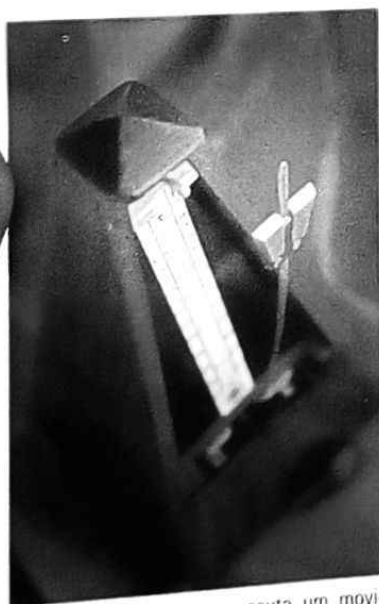


Fig. 6.2 O metrónomo executa um movimento oscilatório, marcando pequenos intervalos de tempo iguais. É usado como marcador do compasso nos diversos andamentos musicais.

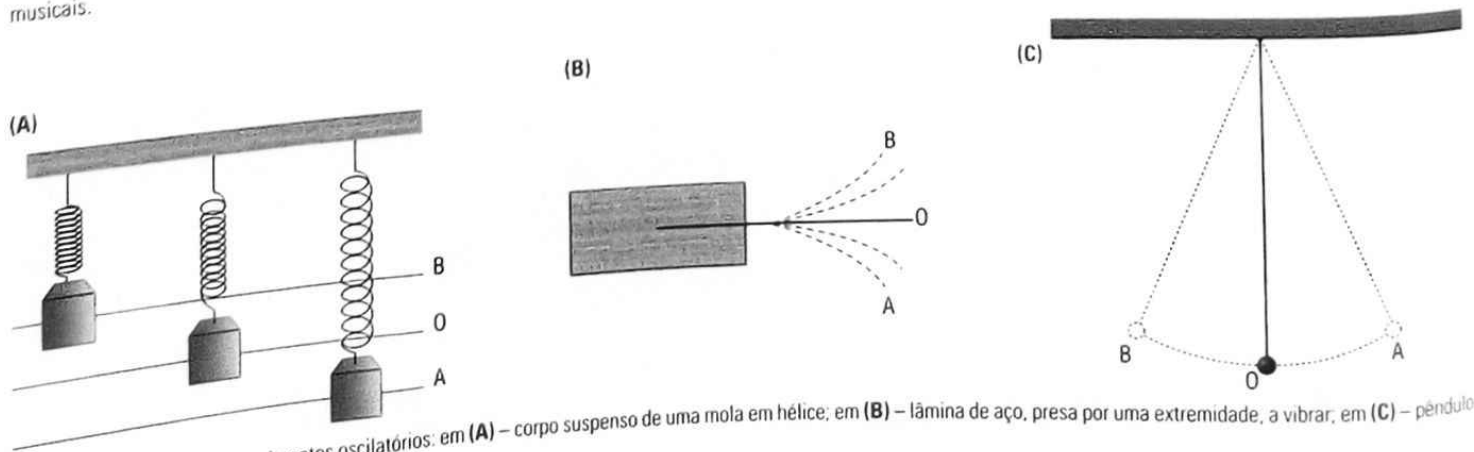


Fig. 6.3 Três exemplos de movimentos oscilatórios: em (A) – corpo suspenso de uma mola em hélice; em (B) – lâmina de aço, presa por uma extremidade, a vibrar; em (C) – pêndulo gravítico.

Lei de Hooke

De todos os movimentos oscilatórios, o mais importante é o **movimento harmónico simples** (MHS). Além de ser o movimento oscilatório mais simples de analisar, constitui uma descrição bastante precisa de muitas oscilações que se observam na Natureza.

O nosso estudo vai centrar-se neste tipo de movimento. Para isso, **analisemos o movimento de um corpo ligado a uma mola** (leve), numa superfície plana e horizontal de **atrito desprezável**. O eixo do referencial Ox , considerado segundo a direcção de oscilação da mola, tem origem na posição de equilíbrio.

Neste sistema ideal, o corpo desliza ao longo da superfície horizontal sob a acção de **três forças**:

- O peso, \vec{P} ;
- A reacção normal, \vec{R}_n ;
- A força elástica ou força restauradora, \vec{F} .

Como a reacção normal, \vec{R}_n , exercida pela superfície, é igual e oposta ao peso, \vec{P} , do bloco, a **força resultante** exercida sobre o bloco é a **força elástica**, \vec{F} , da mola.

Mas que força é esta?

Observemos a figura 6.4, para melhor compreendermos.

• **Durante a compressão da mola**, esta tende a regressar à posição de equilíbrio ($x = 0$). A força exercida pela mola, responsável por esse efeito, é a **força elástica**, \vec{F} .

A força elástica, \vec{F} , é, portanto, uma **força restauradora**, pois tende a levar a mola à sua posição de equilíbrio.

Como durante a compressão é $x < 0$, a força elástica actua no sentido contrário, **sentido positivo** ($F > 0$).

• **Durante a distensão da mola**, esta tende, também, a regressar à posição de equilíbrio ($x = 0$). A força exercida pela mola, responsável por esse efeito, continua a ser a **força elástica**, \vec{F} .

Como durante a distensão $x > 0$, a força elástica actua no **sentido negativo** ($F < 0$).

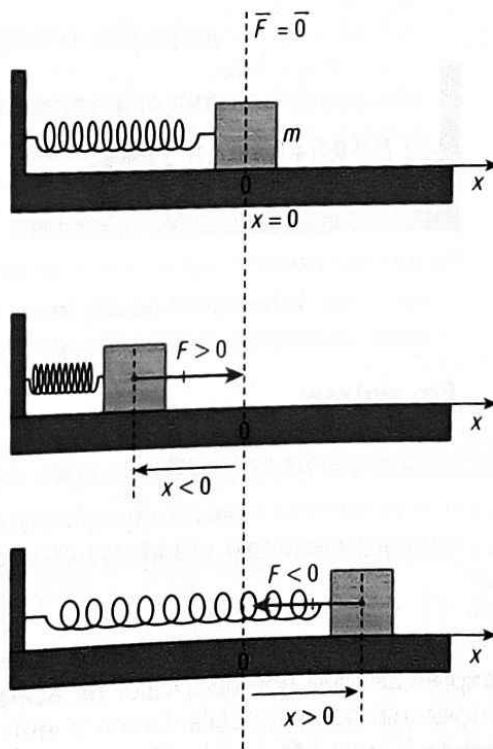


Fig. 6.4 A força elástica é uma força restauradora, pois tende sempre a levar a mola à sua posição de equilíbrio.

O **sentido** da força elástica é tal que aponta sempre para a **posição de equilíbrio**.

A coordenada de posição x chama-se **elongação**. Esta corresponde à medida da deformação da mola relativamente à sua posição de equilíbrio. À elongação máxima chama-se **amplitude**.

Considera-se a **elongação positiva** ($x > 0$) na **distensão** e **negativa** ($x < 0$) na **compressão**.

A **elongação**, x , e a componente escalar da **força elástica** têm sempre **sinais opostos**.

Repare

Na **posição de equilíbrio**, $x = 0$, a **força elástica** é nula ($F = 0$).

Verifica-se, experimentalmente, que o **valor da força elástica é directamente proporcional** e de sinal contrário à elongação da mola, seja ela positiva ou negativa – **Lei de Hooke**.

$$F = -kx$$

- F – valor da força elástica
- k – constante elástica da mola
- x – elongação

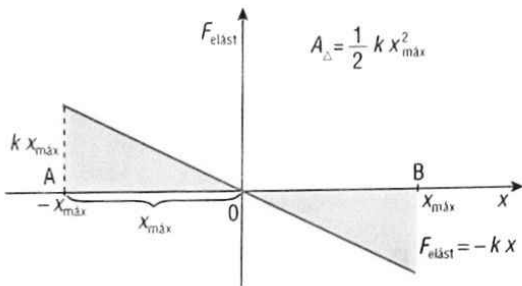


Fig. 6.5 O valor da força elástica varia continuamente com a elongação.

Esta é a expressão que traduz a **Lei de Hooke**, onde a constante k – **constante elástica da mola** – é uma característica da mola. Mede a sua rigidez, isto é, a intensidade da força elástica (ou da força deformadora), por unidade de alongamento. As molas “duras” ou “fortes” têm valores elevados de k .

A **unidade SI** da constante elástica, k , é o **newton por metro**, N m^{-1} .

A figura 6.5 mostra como o valor da força elástica varia com a elongação. De acordo com a Lei de Hooke, **a força elástica é tanto mais intensa quanto maior for a deformação da mola**.

Repare

A **força deformadora** é a força que provoca a deformação (compressão ou distensão) na mola em equilíbrio.

A **força elástica** e a **força deformadora** constituem um **par acção-reacção**:

$$\vec{F}_{\text{elástica}} = -\vec{F}_{\text{deformadora}}$$

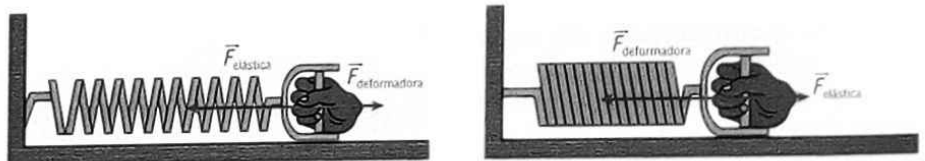


Fig. 6.6 A força elástica e a força deformadora têm sentidos opostos e, em cada instante, a mesma intensidade.

Em síntese:

- Uma mola diz-se elástica quando a força elástica obedece à Lei de Hooke.
- Um movimento harmónico simples (MHS) é um movimento oscilatório de um corpo sujeito a uma força elástica.

Combinando a **Lei de Hooke** com a **Segunda Lei de Newton**, obtemos a expressão que nos dá o valor da **aceleração** com que se move o corpo ligado à mola quando esta oscila. Como o atrito é considerado desprezável, a **força resultante** é igual à **força elástica**. Então, tem-se:

$$\begin{cases} F = -kx \\ F = ma \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{k}{m}x$$

Esta expressão mostra que a **aceleração** do movimento **não é constante**.

Num movimento harmónico simples, a aceleração é, em cada instante, proporcional e de sentido contrário à elongação do oscilador.

Como se compreende, **durante a oscilação, a velocidade varia** em módulo e em sentido.

À medida que o oscilador se aproxima da **posição de equilíbrio**, a velocidade aumenta. Nessa posição, a **velocidade é máxima**.

Nas **posições extremas**, a **velocidade é nula** e o oscilador inverte o sentido do movimento.

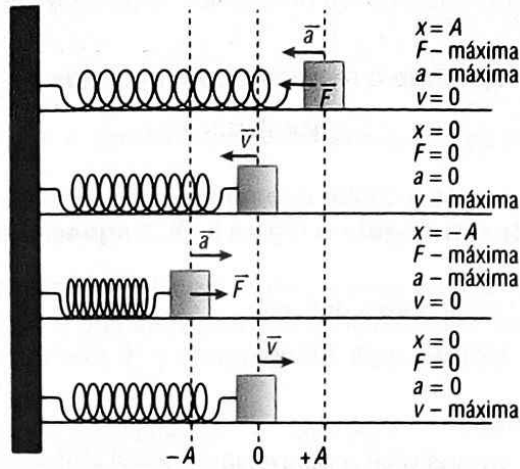


Fig. 6.7 Entre as posições extremas do oscilador, as grandezas alongação, força elástica, aceleração e velocidade passam sucessiva e periodicamente por todos os valores, desde um valor mínimo a um valor máximo.

► Equação do movimento harmónico simples

Para deduzir a equação do **movimento harmónico simples** vamos relacionar este movimento e um movimento circular uniforme, com o mesmo período. O **movimento harmónico simples** pode considerar-se como a **projectão do movimento circular uniforme sobre o diâmetro da circunferência**, segundo o eixo dos yy ou dos xx .

Na figura 6.8 representa-se a **projectão, num plano horizontal**, do movimento circular de uma partícula M que gira com velocidade constante, num plano perpendicular ao primeiro.

À medida que a **partícula** descreve a **circunferência**, a sua **projectão** desloca-se, neste caso, sobre o diâmetro da circunferência, ao longo do eixo dos xx , com **movimento harmónico simples**.

Suponhamos que, no instante inicial ($t = 0$), a partícula que descreve o movimento circular se encontra na posição P_0 .

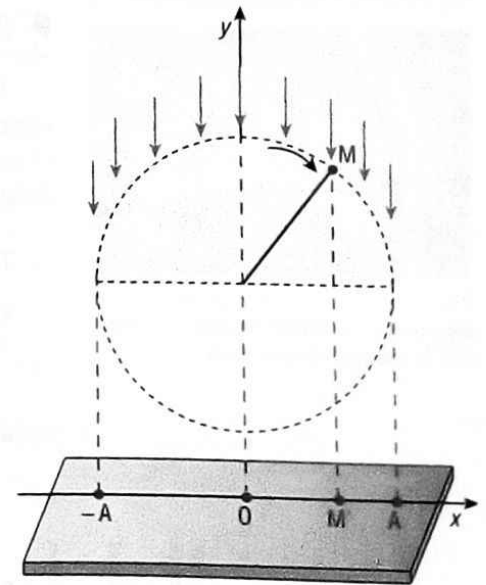


Fig. 6.8 Movimento harmónico simples como projectão de um movimento circular uniforme.

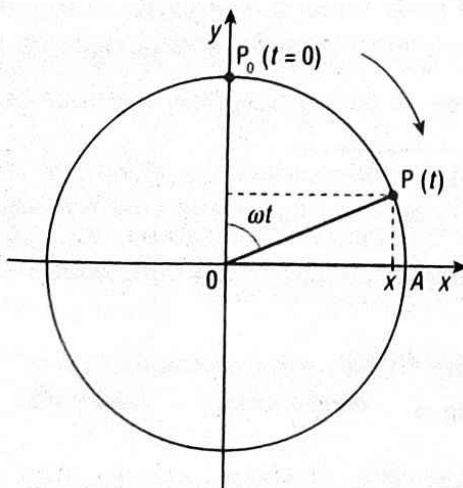


Fig. 6.9 A coordenada de posição x corresponde à projectão de OP segundo o eixo dos xx , quando o ângulo descrito é ωt .

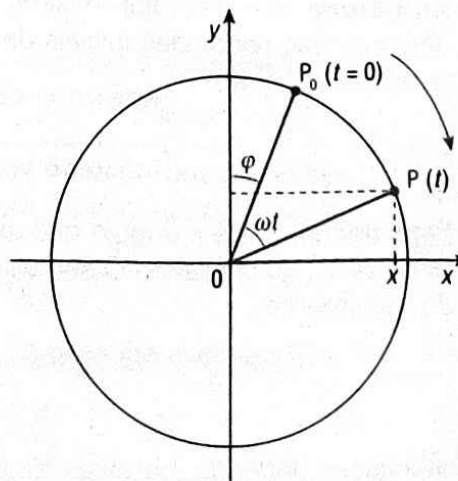


Fig. 6.10 A coordenada de posição x corresponde à projectão de OP , segundo o eixo dos xx , quando o ângulo descrito é ωt mais o ângulo φ no ponto inicial P_0 .

No instante de tempo t , a partícula vai-se encontrar na posição P , tendo descrito um arco cujo ângulo ao centro é $\theta = \omega t$. **Sobre o eixo dos xx** , o deslocamento foi:

$$x = R \sin \omega t \iff x = A \sin \omega t$$

A **amplitude, A** , do movimento harmónico simples é igual ao **raio, R** , da circunferência.

Se tivéssemos projectado o movimento **no eixo dos yy** , a equação seria:

$$y = A \cos \omega t$$

No caso de começarmos a contar o tempo ($t = 0$) a partir da posição P_0 , **quando inicialmente já existe um ângulo φ** (figura 6.10), a **equação do movimento harmónico simples** seria:

$$x = A \sin (\omega t + \varphi) \text{ sobre o eixo dos } xx$$

$$y = A \cos (\omega t + \varphi) \text{ sobre o eixo dos } yy$$

com A , ω e f constantes.

No nosso estudo, vamos usar a expressão: $x = A \sin(\omega t + \varphi)$ (1)

como **equação do movimento harmónico simples**.

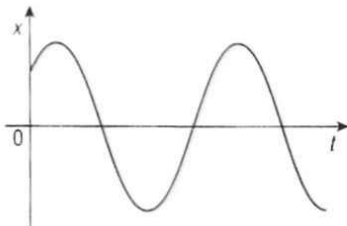


Fig. 6.11 Gráfico da posição de um oscilador em função do tempo.



Fig. 6.12 Embora não sejam perceptíveis, os movimentos periódicos também se produzem na estrutura de uma ponte.

► Características de um oscilador harmónico simples

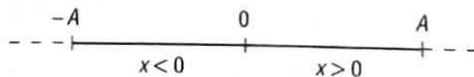
Três das **grandezas características de um oscilador harmónico simples** (elongação, amplitude e frequência angular) aparecem na equação do movimento. O período e a frequência, embora não surjam de forma explícita na equação, são duas grandezas características de todos os movimentos periódicos.

Temos, então, a considerar:

- **Período, T** – é o tempo que decorre entre duas passagens consecutivas pela mesma fase de vibração, ou seja, é o tempo correspondente a uma vibração completa (ou a um ciclo completo). A sua unidade SI é o segundo.
- **Frequência, f** – é o número de oscilações completas (ou ciclos) por unidade de tempo. A unidade SI é o segundo menos um, s^{-1} , ou hertz, Hz.

$$f = \frac{1}{T}$$

- **Elongação, x** – é a coordenada de posição do oscilador, em qualquer instante, relativamente à posição de equilíbrio.
- **Amplitude, A** – é o valor máximo que pode tomar a elongação. O seu valor depende das condições iniciais do movimento (posição e velocidade no instante inicial ($t = 0$)).



- **Fase inicial, φ** – é o ângulo que indica o estado de vibração ou fase, no instante $t = 0$, do oscilador. O seu valor também depende das condições iniciais do movimento.

Para $t = 0$, tem-se, pela equação do movimento:

$$x_0 = A \sin \varphi$$

A elongação depende, portanto, da fase inicial.

- **Fase do movimento, $\omega t + \varphi$** – é o ângulo que indica o estado de vibração ou fase do movimento, em qualquer instante. Exprime-se em radianos.

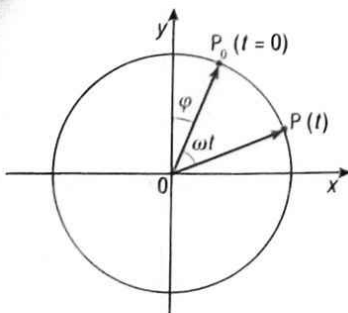


Fig. 6.13 O ângulo entre o vector posição da partícula e o eixo dos yy , no instante $t = 0$, é a fase inicial, φ .

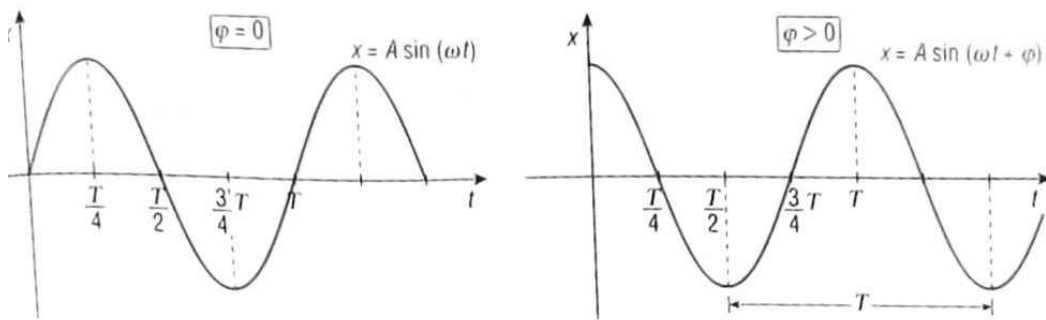


Fig. 6.14 A diferença na fase inicial, φ , determina que os mesmos valores da elongação (máximos, zero, etc.) ocorram em instantes diferentes.

- **Frequência angular**, ω – é uma característica do oscilador, também designada por pulsação, e que se exprime em radianos por segundo, rad s^{-1} . Relaciona-se com o período, T , e a frequência, f , através das expressões:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{e} \quad \omega = 2\pi f$$

► Velocidade e aceleração de um oscilador harmónico simples

A velocidade e a aceleração de um oscilador harmónico simples obtêm-se, tal como acontece para qualquer movimento, por derivação da **lei geral do movimento**:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi)$$

Como este movimento é retilíneo, é:

$$v = \frac{dx}{dt} \quad \text{e} \quad a = \frac{dv}{dt} \quad \text{ou} \quad a = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Então, derivando, obtêm-se:

$$v = A\omega \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{e} \quad a = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$$

Por outro lado, sendo $x = A \sin(\omega t + \varphi)$, é, também:

$$a = -\omega^2 x \quad (1)$$

Esta expressão mostra-nos, mais uma vez, que a **aceleração** é **proporcional** à **elongação**, mas de **sentido contrário**.

Na figura 6.15 representam-se os **gráficos posição-tempo**, **velocidade-tempo** e **aceleração-tempo** para um movimento harmónico simples.

Observar que:

- Há um **desfasamento** de um **quarto de período**, $\frac{T}{4}$, entre a **elongação** e a **velocidade**.
- Há um **desfasamento** de **meio período**, $\frac{T}{2}$, entre a **elongação** e a **aceleração** e de um **quarto de período**, $\frac{T}{4}$, entre a **velocidade** e a **aceleração**.

Repare

Para uma **vibração completa**, a fase $(\omega t + \varphi)$ aumenta em 2π radianos e o tempo em T segundos

Então:

$$\omega t + (\varphi + 2\pi) = \omega(t + T) + \varphi$$

o que permite concluir que:

$$\omega T = 2\pi \Leftrightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Recorde

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$$

$$\frac{d}{dx} \sin kx = k \cos kx$$

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx} \cos kx = -k \sin kx$$

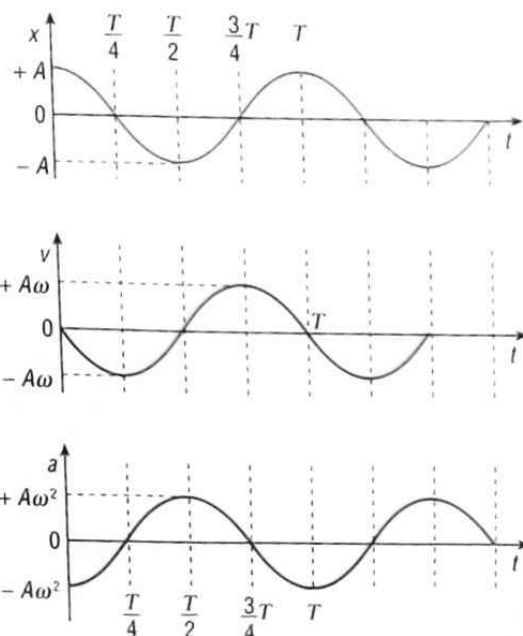


Fig. 6.15 Gráficos posição-tempo, velocidade-tempo e aceleração-tempo para um movimento harmónico simples.

Atividade experimental

Pêndulo gravítico

Material:

Esferas metálicas de 100 g, 200 g e 300 g; suporte e fio, fita métrica e craveira, balança e cronómetro

Procedimento:

- Conceber um procedimento experimental que permita, para pequenas oscilações:
 - determinar o período do pêndulo em função da sua amplitude.
 - verificar que o período do pêndulo não depende da massa do oscilador.
 - determinar o período do pêndulo em função do comprimento.
- Organizar os dados recolhidos em tabelas e determinar o período do pêndulo nos diferentes ensaios.
- Traçar os gráficos $T = f(\ell)$ e $T^2 = f(\ell)$.
- Determinar o valor de g a partir do declive da recta que melhor se ajusta aos dados experimentais no gráfico $T^2 = f(\ell)$.
- Analisar os resultados obtidos e confrontá-los com os previstos teoricamente e com os dos colegas, apresentando explicações para eventuais diferenças.
- Elaborar o relatório da actividade.

- Quando a **elongação** é **máxima** em módulo ($x = \pm A$), a **velocidade** é **nula** ($v = 0$) e a **aceleração** é **máxima** em módulo ($a = \mp A\omega^2$).
- Quando a **elongação** é **nula** ($x = 0$), a **velocidade** é **máxima** em módulo ($v = \pm A\omega$) e a **aceleração** é **nula** ($a = 0$).
- A **elongação** e a **aceleração** estão **em oposição de fase**, isto é, quando uma tem valor máximo positivo, a outra tem valor máximo negativo.

| | | |
|-----------------|-------------------|------------------|
| $v = 0$ | $v = \pm A\omega$ | $v = 0$ |
| $-A$ | 0 | A |
| $a = A\omega^2$ | $a = 0$ | $a = -A\omega^2$ |

Fig. 6.16 A velocidade e a aceleração dependem da elongação

Vimos já, na página 172, que, **aplicando a Segunda Lei de Newton a um oscilador**, na direcção do movimento, tem-se:

$$\begin{cases} F = -kx \\ F = ma \end{cases} \Rightarrow ma = -kx \quad (2)$$

Como $a = \frac{d^2x}{dt^2}$, a expressão (2) escreve-se, também, da seguinte forma:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

sendo a solução desta equação do tipo:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi)$$

que é, como sabemos, a equação do movimento harmónico simples.

Por outro lado, **se igualarmos as expressões:**

$$a = -\omega^2 x \quad \text{e} \quad a = -\frac{k}{m} x$$

verifica-se que:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Conclui-se, assim, que a **frequência angular, ω** , característica de um oscilador, **depende apenas da constante de elasticidade e da massa do oscilador.**

Atendendo a que $\omega = \frac{2\pi}{T}$ e $\omega = 2\pi f$, verifica-se, também, que:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{e} \quad f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

O **período** e a **frequência** de um oscilador também só **dependem da constante de elasticidade e da massa do oscilador**. Não dependem da amplitude do movimento.

Qualquer que seja a amplitude, o tempo que demora a executar uma oscilação completa é sempre o mesmo.

No movimento harmónico simples, **o período não depende da amplitude do movimento**. Depende apenas da constante de elasticidade e da massa do oscilador.

Questões Resolvidas

1. Um oscilador harmónico é constituído por uma massa de 5,0 g, ligada a uma mola elástica. No instante $t = 0$, encontra-se a 4,0 cm da posição de equilíbrio com uma velocidade $v_0 = 87 \text{ cm s}^{-1}$. Sabendo que a frequência do movimento é de 2,0 Hz, determine:
- 1.1. a fase inicial e a amplitude do movimento;
 - 1.2. a elongação e o valor da velocidade no instante $t = 0,5 \text{ s}$;
 - 1.3. o valor máximo da velocidade e da aceleração do oscilador;
 - 1.4. a constante elástica da mola;
 - 1.5. a intensidade da força elástica máxima;
 - 1.6. a elongação do oscilador quando se move com uma velocidade de 60 cm s^{-1} .

Resolução

1.

- 1.1. A partir das equações do movimento e da velocidade deduz-se que, no instante $t = 0$, é:

$$x_0 = A \sin \varphi \quad \text{e} \quad v_0 = A \omega \cos \varphi$$

Atendendo aos dados fornecidos, é possível calcular φ a partir de $\tan \varphi$.

$$\text{Assim, vem: } \tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \Leftrightarrow \tan \varphi = \frac{\omega x_0}{v_0} \Leftrightarrow \tan \varphi = \frac{2\pi f x_0}{v_0}$$

$$\text{Substituindo pelos valores, tem-se: } \tan \varphi = \frac{2\pi \times 2,0 \text{ Hz} \times 0,040 \text{ m}}{0,87 \text{ m s}^{-1}} \Leftrightarrow \tan \varphi = 0,58 \Leftrightarrow \varphi = 30^\circ \Rightarrow \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

A amplitude do movimento pode, agora, ser calculada a partir da equação do movimento, para $t = 0$.

$$x_0 = A \sin \varphi; \quad 0,040 \text{ m} = A \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow A = 0,080 \text{ m} \quad (8,0 \text{ cm})$$

- 1.2. A equação do movimento é: $x = 0,080 \text{ m} \sin\left(4\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$, onde $\omega = 2\pi f \Rightarrow \omega = 4\pi \text{ rad s}^{-1}$

$$\text{Então, para } t = 0,5 \text{ s, a elongação é: } x = 0,080 \text{ m} \sin\left(4\pi \times 0,5 + \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x = 0,040 \text{ m}$$

e o valor da velocidade, para esse mesmo instante, será:

$$v = \frac{dx}{dt}; \quad v = 0,080 \text{ m} \times 4\pi \text{ rad s}^{-1} \cos\left(4\pi \times 0,5 + \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow v = \cos \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow v = 0,87 \text{ m s}^{-1}$$

Deve ter verificado que estes valores coincidem com os valores iniciais, para $t = 0$. Isto significa que, ao fim de 0,5 s, o movimento se repete.

A partir do valor da frequência, $f = 2,0 \text{ Hz}$, pode confirmar-se que o período é, efectivamente, 0,5 s

$$\left(T = \frac{1}{f}; \quad T = \frac{1}{2,0 \text{ Hz}} \Leftrightarrow T = 0,5 \text{ s}\right).$$

- 1.3. O valor máximo da velocidade é dado por: $v = \pm A\omega \Leftrightarrow v = \pm 0,080 \text{ m} \times 4\pi \text{ rad s}^{-1} \Leftrightarrow v = \pm 1,0 \text{ m s}^{-1}$
O valor máximo da aceleração é dado por: $a = \pm A\omega^2 \Leftrightarrow a = \pm 0,080 \text{ m} \times (4\pi \text{ rad s}^{-1})^2 \Leftrightarrow a = \pm 13 \text{ m s}^{-2}$

- 1.4. Atendendo a que $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, tem-se: $\omega^2 = \frac{k}{m} \Leftrightarrow k = \omega^2 m; \quad k = (4\pi \text{ rad s}^{-1})^2 \times 5,0 \times 10^{-3} \text{ kg} \Leftrightarrow \Leftrightarrow k = 0,79 \text{ N m}^{-1}$

- 1.5. A força elástica é máxima quando a elongação é máxima ($x = A$). Então, vem:

$$F = -kA; \quad F = -0,79 \text{ N m}^{-1} \times 0,080 \text{ m} \Leftrightarrow F = -6,3 \times 10^{-2} \text{ N}$$

A intensidade da força elástica máxima é $F = 6,3 \times 10^{-2} \text{ N}$.

- 1.6. Designemos por ϕ a fase do movimento nesse instante. Então, temos: $x = A \sin \phi$ e $v = A\omega \cos \phi$
Recorrendo à equação da velocidade, calcula-se o valor de ϕ , que depois se substitui na equação do movimento, para se calcular a elongação. Assim, teremos:

$$v = A\omega \cos \phi; \quad 0,60 \text{ m s}^{-1} = 0,080 \text{ m} \times 4\pi \text{ rad s}^{-1} \cos \phi \Leftrightarrow \cos \phi = 0,597 \Rightarrow \phi = 53^\circ$$

$$x = A \sin \phi; \quad x = 0,080 \text{ m} \sin 53^\circ \Leftrightarrow x = 0,064 \text{ m} \quad (6,4 \text{ cm})$$

► Energia de um oscilador harmônico simples

Para o estudo da energia de um oscilador harmônico simples, continuemos a considerar o **movimento de um corpo ligado a uma mola elástica**, numa superfície plana e horizontal de **atrito desprezável**.

Durante o movimento oscilatório, há **transformação de energia potencial em energia cinética e vice-versa**, e, portanto, mantém-se a energia mecânica e o **oscilador atinge sempre as mesmas posições extremas**.

Sabemos já que a **energia mecânica** de um sistema permanece **constante** quando sobre ele só actuam **forças conservativas**. Este é o caso da **força elástica**, que é uma **força conservativa**.

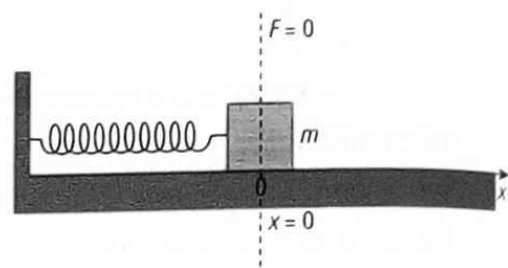


Fig. 6.17 Um oscilador animado de MHS possui energia cinética e energia potencial.

Energia potencial elástica

Sendo a **força elástica** uma força conservativa, é possível definir uma **energia potencial elástica**, $E_{\text{Pelást}}$, da mesma forma que ao peso se associa uma energia potencial gravítica.

Sabemos, também, que **o trabalho realizado por uma força conservativa é simétrico da variação da energia potencial**. Assim:

$$W_{\vec{p}} = -\Delta E_{\text{pgravit}} \quad \text{e} \quad W_{\vec{F}_{\text{elást}}} = -\Delta E_{\text{Pelást}}$$

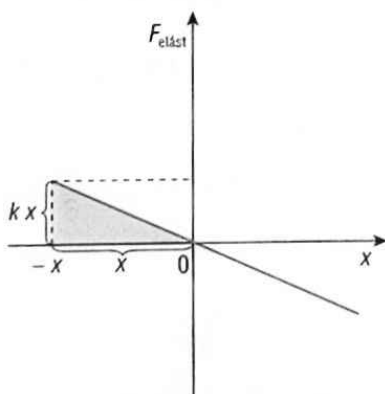


Fig. 6.18 Gráfico da intensidade da força elástica em função da posição. O $W_{\vec{F}_{\text{elást}}}$ é dado pela área sombreada.

Escolhendo a posição de equilíbrio como ponto de referência para a energia potencial elástica, o **trabalho da força elástica**, $W_{\vec{F}_{\text{elást}}}$, pode ser calculado através da **área sombreada** no gráfico da intensidade da força elástica em função da posição. Assim:

• **O trabalho da força elástica, durante a distensão ou compressão da mola**, $W_{\vec{F}_{\text{elást}}(0 \rightarrow x)}$, isto é, sempre que a mola se afasta da sua posição de equilíbrio, é dado pela expressão:

$$W_{\vec{F}_{\text{elást}}(0 \rightarrow x)} = -\frac{1}{2} k x^2 \quad (W < 0)$$

• **O trabalho da força elástica, sempre que a mola regressa à posição de equilíbrio**, $W_{\vec{F}_{\text{elást}}(x \rightarrow 0)}$, é dado pela expressão:

$$W_{\vec{F}_{\text{elást}}(x \rightarrow 0)} = \frac{1}{2} k x^2 \quad (W > 0)$$

Como:

$$W_{\vec{F}_{\text{elást}}(0 \rightarrow x)} = -\Delta E_{\text{Pelást}}$$

é

$$W_{\vec{F}_{\text{elást}}} = -(E_{\text{Pelást}(x)} - E_{\text{Pelást}(0)}) \Leftrightarrow W_{\vec{F}_{\text{elást}}} = -E_{\text{Pelást}(x)}$$

pelo que:

$$E_{\text{Pelást}} = \frac{1}{2} k x^2 \quad (1) \Leftrightarrow E_{\text{Pelást}} = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

Recorde

A **energia potencial elástica** depende da **elongação** e da **constante de elasticidade**.

Como $\omega^2 = \frac{k}{m}$, também se pode escrever:

$$E_{\text{pot. elást.}} = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

Esta mesma dedução poderia ter sido feita a partir do trabalho da força elástica, sempre que a mola regressa à posição de equilíbrio.

A expressão (1) mostra-nos que:

- A **energia potencial elástica** é tanto **maior** quanto **maior** for a **elongação**.
- **Nas posições extremas** ($x = \pm A$), onde o oscilador inverte o sentido do movimento ($v = 0$), a **energia potencial elástica** é **máxima** (o oscilador possui apenas energia potencial elástica).

$$E_{\text{pot. elást. máx.}} = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2$$

- **Na posição de equilíbrio** ($x = 0$), a **energia potencial elástica** é **nula** (o oscilador possui apenas energia cinética).
- Se as molas de **dois osciladores** forem **diferentes**, a **energia potencial elástica**, para a mesma elongação, será **maior** no **oscilador** com **maior constante elástica**.

Energia cinética

No movimento harmónico simples, é:

$$v = A \omega \cos(\omega t + \varphi)$$

Substituindo, então, a velocidade na expressão da **energia cinética**

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

obtém-se:

$$E_c = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

Mas, como $\omega^2 = \frac{k}{m}$, também é:

$$E_c = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

Na posição de equilíbrio, o oscilador só possui energia cinética. Sendo, nessa posição, $v_{\text{máx.}} = \omega A$, é:

$$E_{c\text{máx.}} = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2$$

Energia mecânica

A energia mecânica para um oscilador harmónico simples, em que o atrito é desprezável, será, então:

$$E_m = E_c + E_{\text{pot. elást.}} \Leftrightarrow E_m = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E_m = \frac{1}{2} k A^2 [\cos^2(\omega t + \varphi) + \sin^2(\omega t + \varphi)]$$

Como $\cos^2(\omega t + \varphi) + \sin^2(\omega t + \varphi) = 1$, tem-se:

$$E_m = \frac{1}{2} k A^2 \Leftrightarrow E_m = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2$$

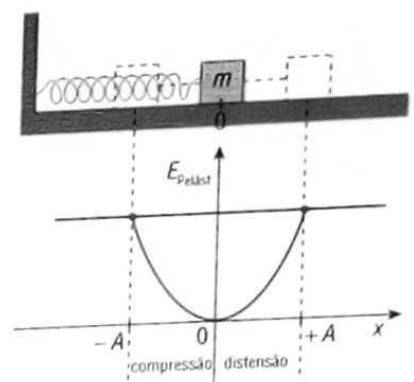


Fig. 6.19 Gráfico da energia potencial elástica em função da elongação

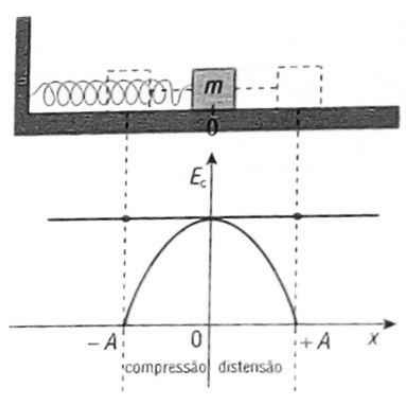


Fig. 6.20 Gráfico da energia cinética em função da elongação.

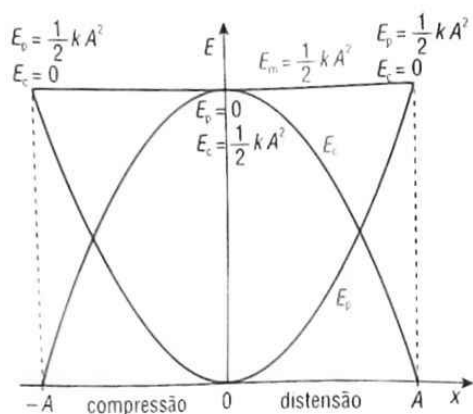


Fig. 6.21 Gráfico da variação da energia cinética e da energia potencial elástica, de um MHS, com a elongação.

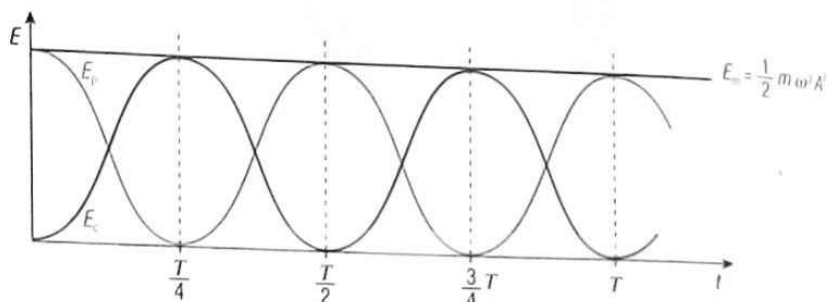


Fig. 6.22 Gráfico da variação da energia cinética e da energia potencial elástica, de um MHS, com o tempo.

Num movimento harmônico simples, com atrito desprezável:

- A energia potencial elástica varia com o quadrado da elongação.
- Há conversão de energia potencial elástica em energia cinética e vice-versa, mas a energia mecânica é sempre constante e igual a $\frac{1}{2} k A^2$.

Questões Resolvidas

- Um corpo de massa 500 g está ligado a uma mola cuja constante de elasticidade é $k = 18 \text{ N m}^{-1}$. O sistema executa um movimento harmônico simples de amplitude $A = 50 \text{ mm}$ e fase inicial $\varphi = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$. Considere o atrito desprezável.
 - Determine a frequência angular das oscilações.
 - Deduza uma expressão para a velocidade do corpo em função da elongação e, usando essa expressão, calcule o módulo da velocidade do corpo em $x = 30 \text{ mm}$.
 - Estabeleça uma expressão que permita calcular a elongação do corpo, relativamente à posição de equilíbrio, em função da velocidade, e use essa expressão para determinar a elongação quando $v = 0,12 \text{ m s}^{-1}$.
 - Calcule a energia mecânica do oscilador.
 - Exprima a energia potencial elástica e a energia cinética em função do tempo e verifique a conservação da energia mecânica.

Resolução

- A frequência angular, ω , é: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$; $\omega = \sqrt{\frac{18}{0,500}} \Leftrightarrow \omega = 6,0 \text{ rad s}^{-1}$
 - Atendendo à conservação da energia mecânica, temos:

$$E_m = E_c + E_{\text{pot. elást.}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 \Leftrightarrow k A^2 = m v^2 + k x^2$$
 Resolvendo esta equação em ordem a v , vem: $v^2 = \frac{k}{m} (A^2 - x^2) \Rightarrow v = \omega \sqrt{A^2 - x^2}$
 O módulo da velocidade em $x = 30 \text{ mm}$ é: $v = 6,0 \text{ rad s}^{-1} \times \sqrt{0,050^2 \text{ m}^2 - 0,030^2 \text{ m}^2} \Leftrightarrow v = 0,24 \text{ m s}^{-1}$
 - Atendendo à conservação da energia mecânica, temos novamente:

$$\frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 \Leftrightarrow k A^2 = m v^2 + k x^2$$
 Resolvendo, agora, esta equação em ordem a x , vem: $x^2 = A^2 - \frac{m}{k} v^2 \Rightarrow x = \sqrt{A^2 - \left(\frac{v}{\omega}\right)^2}$
 Assim, quando $v = 0,12 \text{ m s}^{-1}$, é: $x = \sqrt{0,050^2 \text{ m}^2 - \left(\frac{0,12}{6,0}\right)^2 \text{ m}^2} \Leftrightarrow x = 0,046 \text{ m} (46 \text{ mm})$

2.4. A energia mecânica é:

$$E_m = \frac{1}{2} k A^2; E_m = \frac{1}{2} \times 18 \text{ N m}^{-1} \times 0,050^2 \text{ m}^2 \Leftrightarrow E_m = 0,022 \text{ J}$$

2.5. A energia potencial elástica é: $E_{\text{pelást}} = \frac{1}{2} k x^2$. Expressa em função do tempo, toma a forma:

$$E_{\text{pelást}} = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

$$\text{sendo, neste caso: } E_{\text{pelást}} = \frac{1}{2} \times 18 \text{ N m}^{-1} \times 0,050^2 \text{ m}^2 \sin^2\left(6,0t + \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow E_{\text{pelást}} = 0,022 \text{ J} \sin^2\left(6,0t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (SI)}$$

$$\text{A energia cinética é: } E_c = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

$$\text{sendo, neste caso: } E_c = \frac{1}{2} \times 18 \text{ N m}^{-1} \times 0,050^2 \text{ m}^2 \cos^2\left(6,0t + \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow E_c = 0,022 \text{ J} \cos^2\left(6,0t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (SI)}$$

Pela conservação da energia mecânica, tem-se:

$$E_m = E_c + E_{\text{pelást}}; E_m = 0,022 \text{ J} \left[\cos^2\left(6,0t + \frac{\pi}{2}\right) + \sin^2\left(6,0t + \frac{\pi}{2}\right) \right]$$

$$\text{Como } \cos^2\left(6,0t + \frac{\pi}{2}\right) + \sin^2\left(6,0t + \frac{\pi}{2}\right) = 1, \text{ vem } E_m = 0,022 \text{ J}$$

Há conservação da energia mecânica; a soma da E_c com a $E_{\text{pelást}}$ é, em cada instante, constante.

► Movimento harmónico amortecido

Estudámos o movimento harmónico simples considerando **oscilações ideais**, isto é, oscilações em que são desprezáveis os efeitos do atrito. Sendo os atritos desprezáveis, há **conservação da energia** mecânica. A **amplitude** de oscilação **mantém-se**, podendo o sistema oscilar indefinidamente.

Mas nos **osciladores reais** não é isso o que se verifica. Devido às **forças dissipativas**, a **energia mecânica diminui** durante o movimento. Consequentemente, a **amplitude** das oscilações **vai diminuindo** ao longo do tempo. As **oscilações** dizem-se **amortecidas** e o **movimento deixa de ser harmónico simples**.

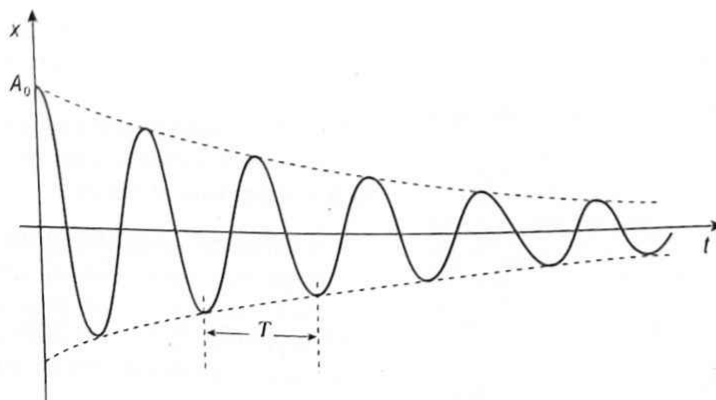


Fig. 6.24 Gráfico elongação-tempo de uma oscilação amortecida.

Se houver um processo de fornecer energia ao oscilador real, é possível mantê-lo a oscilar com uma amplitude constante. Isso consegue-se através de uma força impulsora externa. O oscilador real passa a ter, neste caso, **oscilações forçadas**. É o caso, por exemplo, de alguém que empurra uma criança num balanço. O balanço passa a executar oscilações forçadas devido à força exterior aplicada. Se a acção desta força exterior compensar a das forças dissipativas, é possível manter constante a amplitude de oscilação.



Fig. 6.23 Os amortecedores do sistema de suspensão de um avião reduzem a amplitude de oscilação quando este entra em oscilação devido ao mau estado da pista.



Fig. 6.25 Quando uma criança é empurrada num balanço, este passa a executar oscilações forçadas.

► PENSAMENTO FÍSICO

Fenómenos de ressonância

Quando se aplica uma força exterior a um oscilador, o seu comportamento pode ser muito diferente, dependendo da força.

Se a frequência da **vibração forçada** for muito próxima da frequência natural do oscilador (frequência do sistema quando oscila livremente), este adquire um **movimento de grande amplitude**; diz-se que o **oscilador entra em ressonância**.

A ressonância não se deve a uma força impulsora grande. Deve-se, sim, ao facto de a força exterior actuar com uma frequência próxima da frequência natural do sistema oscilante. Desta forma, a amplitude do movimento torna-se grande, sem ser devido à intensidade da força exterior aplicada.

Retomemos o exemplo da **criança num baloiço** a ser empurrada por alguém.

Se fizermos o baloiço oscilar, mesmo com pequenos empurrões, mas com uma frequência muito próxima da sua frequência natural, produz-se um movimento de grande amplitude.

Acontece que, quando a amplitude das oscilações aumenta excessivamente, pode provocar a ruptura do oscilador ou prejudicar seriamente a sua estrutura interna.

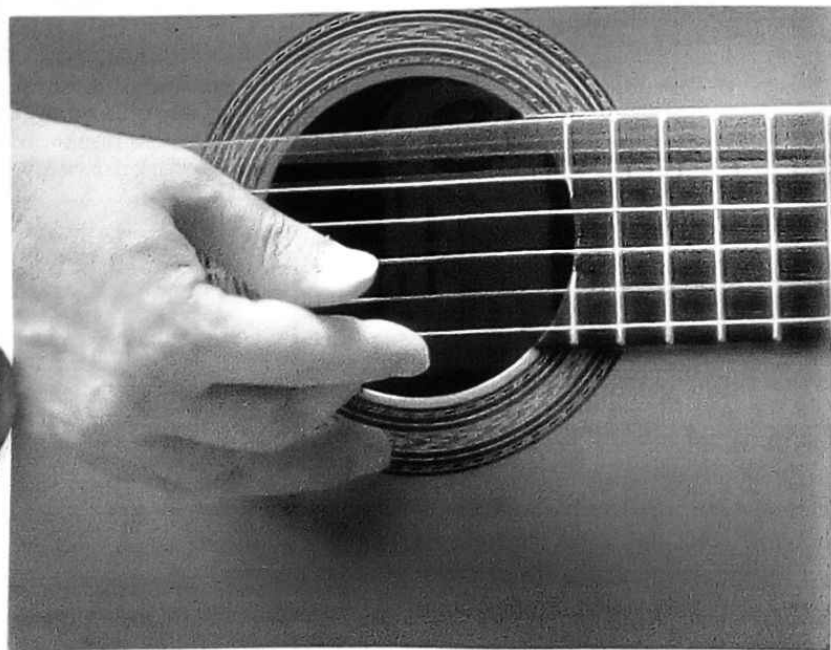
Foi o que sucedeu, por exemplo, **em 1831, numa ponte suspensa, no Reino Unido**. A ponte estava degradada e as **vibrações de ressonância** induzidas por **soldados que atravessavam a ponte marchando fizeram com que ela caísse**. Quando uma coluna de militares atravessa uma pequena ponte, marchando, geralmente é-lhes ordenado para destroçar, exactamente para prevenir fenómenos de ressonância.

Outro **acidente** que ficou na História ocorreu na manhã do dia 7 de Novembro de 1940, **com a ponte de Tacoma Narrows**, em Washington, nos Estados Unidos.

Esta ponte suspensa, com 855 m de comprimento e 12 m de largura, tinha sido inaugurada quatro meses antes. As **vibrações** da ponte **deveram-se** não a uma marcha militar mas sim à **força impulsora do vento**. Um vento lateral e moderado, que soprava com velocidades entre os 64 e 72 km/h, fez a ponte oscilar, com uma frequência próxima da frequência natural, o que provocou um aumento alarmante da amplitude de vibração da estrutura central da ponte, como se de um baloiço gigante se tratasse, até que a ponte entrou em colapso. Nada o fazia prever.



Colapso da ponte Tacoma Narrows, nos Estados Unidos, devido a um fenómeno de ressonância



Mas **nem todos os fenómenos de ressonância são indesejáveis**. A ressonância é útil em muitos casos:

- A **caixa de ressonância de uma guitarra** está desenhada de forma que a frequência das cordas seja próxima da frequência do ar que vibra dentro da caixa e assim aumente a intensidade do som.
- Um **aparelho de rádio ou de televisão** sintoniza-se de forma que entre em ressonância com os sinais que recebe.

Nota: As **guitarras eléctricas** não necessitam de caixa de ressonância, porque o som é amplificado eletronicamente.

► O pêndulo gravítico como exemplo de um movimento harmónico simples

Vamos, agora, ver que o **pêndulo gravítico**, para **pequenas oscilações**, é um exemplo de movimento harmónico simples.

Afastando o **pêndulo** da sua posição vertical, o centro de massa do corpo **descreve, num plano vertical, um movimento circular de vaivém**, em relação à posição de equilíbrio. O pêndulo passa, portanto, a ter um **movimento oscilatório em torno da posição de equilíbrio** – posição vertical.

Desprezando a resistência do ar, o pêndulo está sujeito ao seu **peso, \vec{P}** , e à **tensão do fio, \vec{T}** .

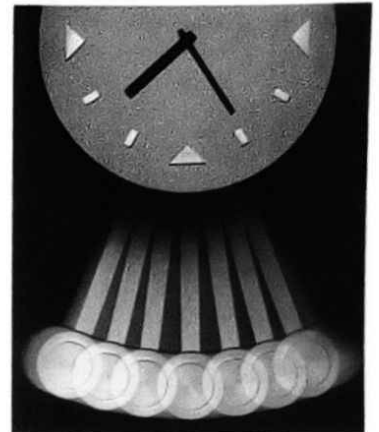


Fig. 6.26 Relógio de pêndulo.

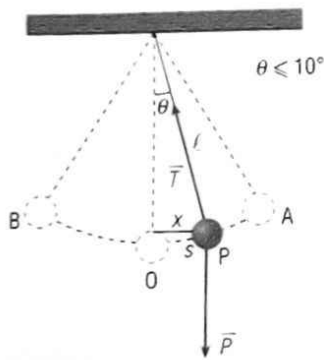


Fig. 6.27 Forças que actuam no pêndulo, considerando a resistência do ar desprezável.

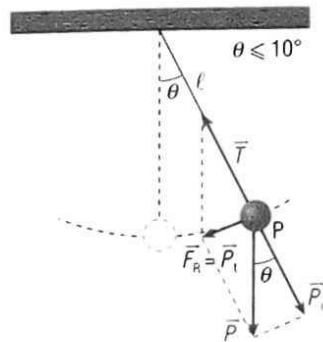


Fig. 6.28 Diagrama de forças do pêndulo gravítico, com a decomposição do peso, P , nas componentes P_t e P_n .

Para uma posição genérica P , é:

$$\vec{F}_R = \vec{P} + \vec{T}$$

Relativamente a um sistema de eixos, solidário com o pêndulo, segundo as direcções normal e tangencial à trajectória, verifica-se que:

$$\vec{F}_{R_t} = \vec{P}_t \quad \text{e} \quad \vec{F}_{R_n} = \vec{T} + \vec{P}_n$$

sendo $P_t = -mg \sin \theta$

A **componente tangencial do peso, \vec{P}_t** , actua em sentido oposto ao deslocamento, sempre **orientada para a posição de equilíbrio**, pelo que é uma **força restauradora** responsável pela variação do módulo da velocidade, $v = \frac{ds}{dt}$.

Para **pequenas oscilações** ($\theta \leq 10^\circ$), podemos considerar $\sin \theta \approx \theta$, desde que θ esteja expresso em radianos.

$$P_t = -mg \theta$$

Então, para pequenas oscilações, o arco descrito pelo pêndulo, s , aproxima-se de um segmento de recta, x (ver figura 6.27), sendo:

$$v \approx \frac{dx}{dt} \quad \text{e} \quad \sin \theta \approx \theta \approx \frac{x}{\ell}$$

Repare

- O sinal negativo de P_t tem a ver com a variação do ângulo θ a partir da posição de equilíbrio:
 - se $\theta > 0$, P_t é negativo;
 - se $\theta < 0$, P_t é positivo.

pelo que

$$P_t = -\frac{mg}{\ell} x$$

Sendo $\frac{mg}{\ell}$ constante, vem:

$$P_t = -kx \quad \text{com} \quad k = \frac{mg}{\ell}$$

o que comprova que a **componente tangencial do peso**, \bar{P}_t , é uma **força restauradora**, pois **satisfaz a Lei de Hooke** ($F = -kx$).

Vimos, na página 176, que o **período** de um **movimento harmónico simples** era dado pela expressão:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Então, sendo o movimento oscilatório de um pêndulo gravítico, para pequenas oscilações, um movimento harmónico simples, o **período de oscilação de um pêndulo gravítico**, será:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \Leftrightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\frac{mg}{\ell}}} \Leftrightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

Concluimos, assim, que o **período de oscilação de um pêndulo gravítico**:

- **Não depende** da **massa do pêndulo** nem da **amplitude de oscilação** (para pequenas oscilações).
- **Depende** só do seu **comprimento** e da **aceleração da gravidade**.

Uma das aplicações desta **equação de Thompson** consiste na **determinação experimental do valor da aceleração da gravidade**. Para tal, basta colocar um pêndulo gravítico em oscilação, $\theta \leq 10^\circ$, e medir o tempo de 20 oscilações, por exemplo, de forma a poder determinar com mais exactidão o período. Repetindo estes procedimentos para diferentes comprimentos do fio do pêndulo, pode traçar-se um gráfico do comprimento do fio em função do quadrado do período, conforme ilustrado na figura 6.29.

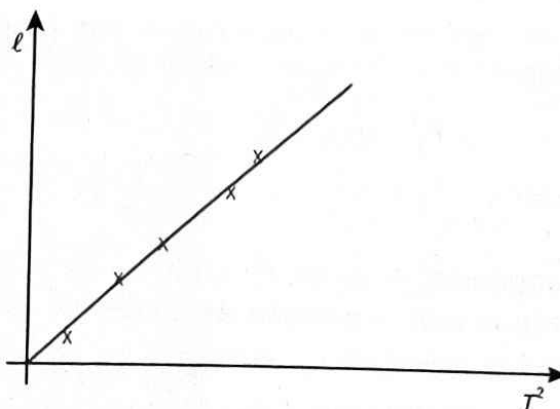


Fig. 6.29 Gráfico do comprimento do fio de um pêndulo gravítico em função do quadrado do período.

O **declive da recta de ajuste linear obtido**, m , é fisicamente equivalente a $m = \frac{g}{4\pi^2}$, como facilmente se pode concluir pela equação de Thompson ao quadrado. Assim, determina-se o valor de g multiplicando $4\pi^2$ pelo declive obtido: $g = 4\pi^2 m$.

Curiosidade

equações $T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$ para o pêndulo gravítico e $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ para o pêndulo elástico são conhecidas por **equações de Thompson**.

Questões Resolvidas

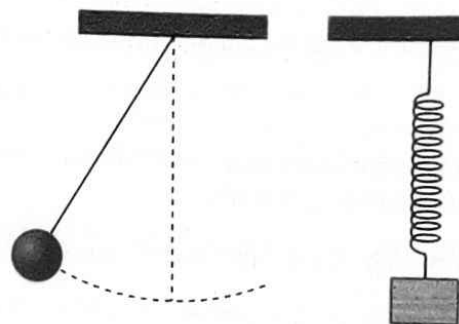
3. O pêndulo de um relógio, com 1,0 m de comprimento, oscila, ao nível do mar, com a mesma frequência que uma massa de 10 kg pendurada numa mola elástica.

Despreze os atritos e considere $g = 10 \text{ m s}^{-2}$.

3.1. Determine a constante elástica da mola.

3.2. Qual seria a frequência de oscilação vertical da mola elástica se fosse levada para um satélite com órbita de raio igual ao dobro do raio da Terra? Justifique.

3.3. O relógio de pêndulo adiantava-se ou atrasava-se se fosse levado para o local referido em 3.2? Justifique.



Resolução

3.

3.1. A constante elástica da mola pode calcular-se igualando o período do pêndulo ao período da mola. Então, será:

$$2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \Leftrightarrow \frac{\ell}{g} = \frac{m}{k} \Leftrightarrow k = \frac{mg}{\ell}$$

$$\text{Substituindo pelos valores, tem-se: } k = \frac{10 \text{ kg} \times 10 \text{ m s}^{-2}}{1,0 \text{ m}} \Leftrightarrow k = 100 \text{ N m}^{-1}$$

3.2. A frequência seria a mesma, pois $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$ e a massa é constante, pois não depende da posição do oscilador, e a constante elástica da mola também não varia, pois é uma característica da mola.

3.3. O período de oscilação de um pêndulo gravítico depende da aceleração da gravidade ($T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$). Como esta varia com a distância desde o centro da Terra, o período do pêndulo seria maior, pois, a maior altura, a aceleração da gravidade é menor. O relógio atrasava-se, portanto.

Síntese de conteúdos

- Um **movimento periódico** é um movimento em que um corpo:
 - percorre repetidamente a **mesma trajetória**;
 - passa pela **mesma posição**, com a **mesma velocidade** e a **mesma aceleração**, ao fim de um **intervalo de tempo igual a um período, T**.
- Um **movimento oscilatório** ou **vibratório** é um movimento periódico em que a trajetória é percorrida em ambos os sentidos, em torno de uma posição de equilíbrio.
- Um corpo ligado a uma mola executa um **movimento harmónico simples (MHS)**, quando oscila periodicamente em torno da posição de equilíbrio, sob a acção de uma força cuja intensidade é proporcional ao alongamento ou compressão produzida na mola - **Lei de Hooke**.

$$F = -kx$$

- A **constante elástica k** é uma característica da mola que mede a intensidade da força elástica por unidade de alongamento. A coordenada **x - alongação** - representa o alongamento da mola relativamente à posição de equilíbrio.

- **Equação do movimento harmónico simples:**

$$x = A \sin(\omega t + \varphi)$$

- x - alongação
- A - amplitude
- ω - frequência angular ou pulsação
- φ - fase inicial
- $\omega t + \varphi$ - fase do movimento

Síntese de conteúdos

- **Segunda Lei de Newton para o movimento harmónico simples:**

$$-kx = m \frac{d^2x}{dt^2}, \text{ sendo } a = \frac{d^2x}{dt^2} \text{ e } a = -\frac{k}{m}x$$

Uma partícula que se move com movimento harmónico simples tem aceleração proporcional à elongação, mas de sentido contrário.

- **Período, T** – tempo correspondente a uma oscilação completa.
- **Frequência, f** – número de oscilações completas (ciclos) por unidade de tempo.

$$f = \frac{1}{T}$$

- **Frequência angular, ω** – é definida pela expressão:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\omega \rightarrow \text{rad s}^{-1})$$

- **Velocidade e aceleração de um oscilador harmónico simples:**

$$v = A\omega \cos(\omega t + \varphi); \quad a = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{e} \quad a = -\omega^2 x$$

sendo $v_{\text{máx}} = A\omega$ e $a_{\text{máx}} = A\omega^2$

- Quando a **elongação é máxima** ($x = \pm A$), a **velocidade é nula** ($v = 0$) e a **aceleração é máxima** em módulo ($a = \pm A\omega^2$).
- Quando a **elongação é nula** ($x = 0$), a **velocidade é máxima** ($v = \pm A\omega$) e a **aceleração é nula** ($a = 0$).
- No **movimento harmónico simples**, o **período** depende da massa e da constante de elasticidade, mas não depende da amplitude.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{e} \quad f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- A toda a **força conservativa** está associada uma **energia potencial**.
- O **trabalho realizado por uma força conservativa** (como o peso e a força elástica) é simétrico da variação da energia potencial.

$$W_{\vec{P}} = -\Delta E_{\text{pgravit}} \quad \text{e} \quad W_{\vec{F}_{\text{elást}}} = -\Delta E_{\text{pelást}}$$

- **Trabalho da força elástica durante a distensão ou compressão da mola:**

$$W_{\vec{F}_{\text{elást}}} = +\frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2)$$

- **Energia potencial elástica:**

$$E_{\text{pelást}} = \frac{1}{2}kx^2 \quad \text{e} \quad E_{\text{pelást}} = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \quad \text{e} \quad E_{\text{pelást}} = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

$$E_{\text{pelást máx}} = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \quad (\text{nas posições extremas})$$

- **Energia cinética:**

$$E_c = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi) \quad \text{e} \quad E_c = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

$$E_{c\text{máx}} = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \quad (\text{na posição de equilíbrio})$$

- **Energia mecânica:**

$$E_m = \frac{1}{2}kA^2 \quad \text{e} \quad E_m = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$$

- **Oscilações amortecidas** – ocorrem nos osciladores reais, quando há forças dissipativas cujo trabalho leva à diminuição da energia mecânica.
- Um **pêndulo gravítico** efectua um movimento harmónico simples (MHS) para pequenas oscilações.
- O **período** de oscilação de um pêndulo (para pequenas oscilações) não depende da amplitude da oscilação nem da massa do pêndulo. Depende só do seu comprimento e da aceleração da gravidade.

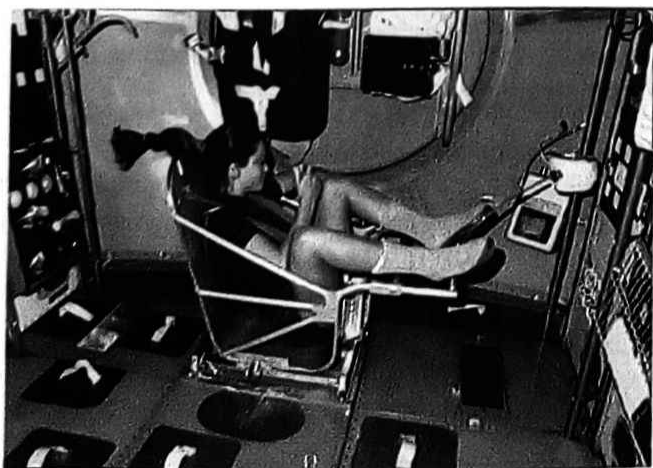
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

Uma alteração significativa do peso de uma pessoa pode indicar a presença de problemas de saúde ou emocionais. No caso dos astronautas, que podem passar longos períodos de tempo num meio favorável ao aparecimento desse tipo de problemas, e sem contacto directo com os seus médicos, é bastante importante manter um registo do peso.



O problema é que, no Espaço, o peso dos astronautas é nulo. Normalmente, medimos o nosso peso como uma forma de calcular a nossa massa corporal, que é proporcional ao peso se a aceleração da gravidade for constante. Mas quando há imponderabilidade este método não funciona; é preciso encontrar outras formas de determinar a massa corporal.

O período de oscilação de um objecto ligado a uma mola é directamente proporcional à raiz quadrada da sua massa. Essa relação é a base do funcionamento de um **dispositivo** usado nas sondas espaciais **para medir a massa corporal dos astronautas**.



O dispositivo de medição da massa corporal consiste numa cadeira ligada a uma mola, com um cronómetro digital, que permite calcular o período de oscilação com muita precisão. O dispositivo é inicialmente calibrado com a cadeira vazia, para compensar a massa do próprio dispositivo. Em seguida, o astronauta senta-se na cadeira e, em menos de 10 segundos, consegue obter o valor da sua massa.

Outra situação onde as forças elásticas entram em acção é o **bungee-jumping**. O saltador realiza inicialmente uma queda livre, até ao momento em que a corda está totalmente esticada, e, a partir desse momento, entra em movimento harmónico devido à elasticidade da corda.

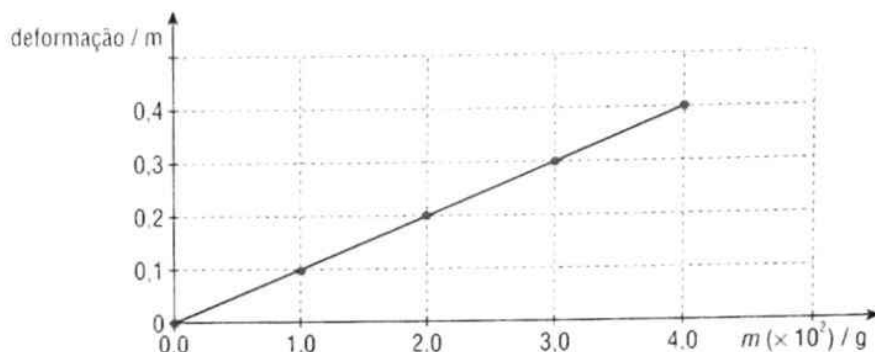


No início do salto, o saltador terá uma energia potencial gravítica directamente proporcional ao seu peso e à altura inicial. Parte dessa energia será transformada em energia cinética, durante a queda livre, e a seguir será convertida em energia elástica na corda esticada.

No ponto mais baixo do salto, quando a corda atingir o seu alongamento máximo, a energia cinética será nula; a energia elástica da mola, $\frac{1}{2} k A^2$, será aproximadamente igual à diferença de energia potencial gravítica desde o ponto mais alto até ao ponto mais baixo (aproximadamente, porque existe alguma perda de energia mecânica devida ao atrito com o ar). Conhecendo o peso do saltador, o comprimento da corda e o valor da constante elástica, é possível calcular a amplitude, A , do movimento harmónico.

▶ QUESTÕES E PROBLEMAS

1. O gráfico da figura representa o resultado de uma experiência em que quatro corpos de massas diferentes ($1,0 \times 10^2$ g; $2,0 \times 10^2$ g; $3,0 \times 10^2$ g e $4,0 \times 10^2$ g) foram sucessivamente suspensos de uma mola vertical, ideal. Em cada caso, mediu-se a deformação da mola.



1.1. Determine a constante elástica da mola.

- 1.2. Numa segunda fase da experiência, suspendeu-se da mola o corpo de massa $m = 4,0 \times 10^2$ g e, depois de atingido o equilíbrio, distendeu-se a mola de 5,0 cm, largando-se em seguida (instante $t = 0$) sem velocidade inicial. Admitindo que a lei do movimento é dada pela expressão:

$$y(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

Determine:

1.2.1. as constantes A , ω e φ_0 que satisfazem as condições do problema;

1.2.2. os valores da velocidade e da aceleração do corpo no instante $t = \frac{T}{8}$, sendo T o período do movimento.

2. Suspende-se um corpo, de massa $m = 40$ g, da extremidade de uma mola vertical, ideal, cuja constante elástica é $k = 4,0 \text{ N m}^{-1}$.

2.1. Determine a razão entre a deformação da mola na Terra e a deformação que a mesma mola teria se fosse colocada na Lua, depois de atingido o equilíbrio (aceleração da gravidade na Lua: $g = 1,6 \text{ m s}^{-2}$).

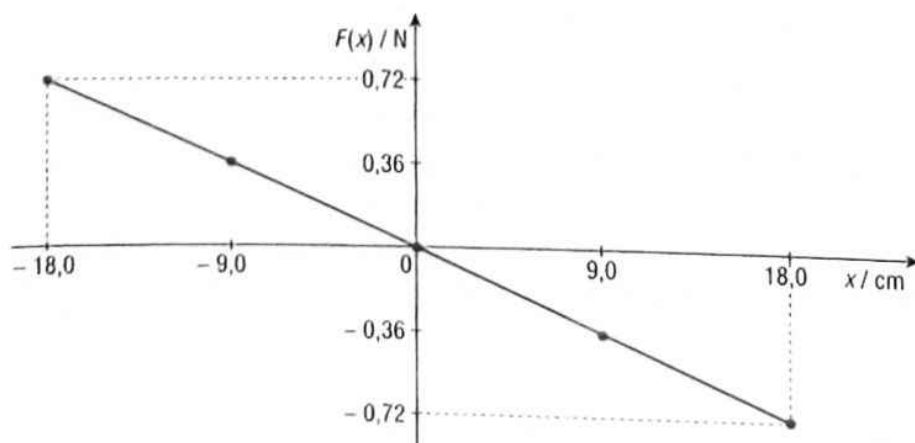
2.2. Distende-se a mola de 5,0 cm, relativamente à posição referida na alínea anterior, e abandona-se o corpo sem velocidade inicial (instante $t = 0$). A mola executa em seguida um movimento harmónico simples.

Determine:

2.2.1. o período, T , das oscilações;

2.2.2. a energia cinética e a energia potencial do sistema, no instante $t = \frac{T}{4}$.

3. Uma partícula de 2,5 g de massa move-se, segundo Ox (entre os pontos $x = -18$ cm e $x = 18$ cm), sob acção de uma força $\vec{F} = F(x) \vec{e}_x$. A lei da variação de $F(x)$ com a coordenada da partícula está representada graficamente na figura.



▶ QUESTÕES E PROBLEMAS

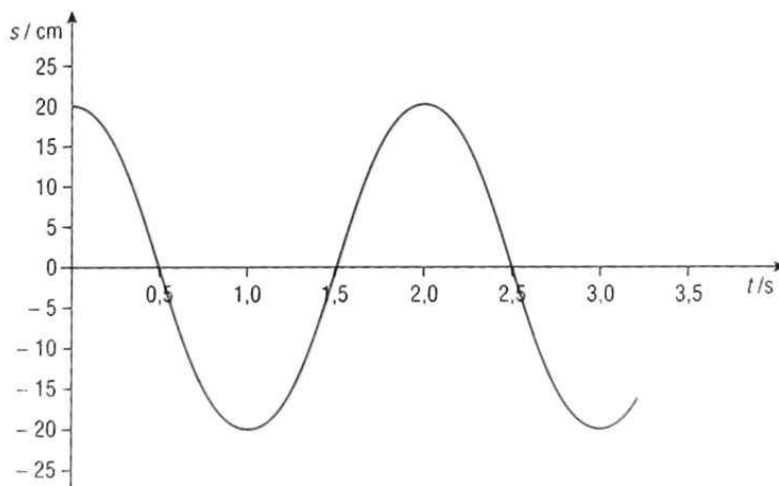
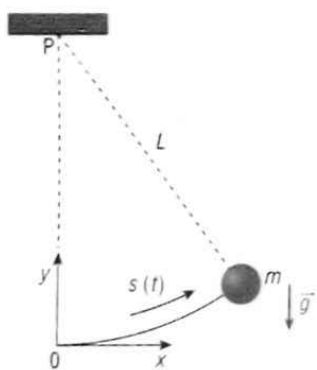
O vector posição da partícula em qualquer instante t , relativamente à origem do referencial, O , é:

$$\vec{r}(t) = x_m \sin(\omega t + \varphi) \vec{e}_x$$

- 3.1. Dê um exemplo de um sistema físico que realize a descrição apresentada.
- 3.2. Sabendo que, no instante $t = 0$, a partícula se encontra no ponto de abcissa $x = 18$ cm, determine:
 - 3.2.1. os valores de x_m , ω e φ ;
 - 3.2.2. a expressão do valor da velocidade, $v(t)$. Trace o gráfico de $v(t)$ em função do tempo, no intervalo $\left[0, \frac{T}{2}\right]$, onde T é o período do movimento;
 - 3.2.3. o trabalho realizado por \vec{F} quando a partícula se desloca entre os pontos $x = 0$ e $x = 18$ cm. Verifique que este trabalho é igual à variação da energia cinética da partícula, quando esta se desloca entre as posições referidas.
4. O pêndulo da figura ($L = 1,0$ m; $m = 4,0$ g) executa um movimento periódico no plano Oxy .

O gráfico da figura representa a lei de evolução temporal da coordenada $s(t)$:

$$s(t) = s_m \cos(\omega t)$$



- 4.1. A partir da análise do gráfico, calcule os valores de s_m e da frequência angular, ω .
- 4.2. Determine as grandezas das componentes normal e tangencial da força resultante, \vec{F} , que actua, em qualquer instante t , sobre a partícula suspensa.
5. Considere uma partícula em movimento harmónico simples regido pela seguinte equação da elongação:

$$x = 2,0 \times 10^{-3} \sin(\pi t) \quad (\text{SI})$$

- 5.1. Determine o período, a frequência, a frequência angular e a amplitude.
- 5.2. Escreva as equações da velocidade e da aceleração da partícula vibrante.
- 5.3. Determine:
 - 5.3.1. o instante em que a partícula atinge, pela primeira vez, a elongação máxima negativa;
 - 5.3.2. os valores da velocidade e da aceleração no instante anterior;
 - 5.3.3. o instante em que a partícula atinge, pela segunda vez, a elongação máxima positiva;
 - 5.3.4. os valores da velocidade e da aceleração no instante anterior.
- 5.4. Compare os valores da elongação, da velocidade e da aceleração nos instantes $t_1 = 0,5$ s e $t_2 = 2,5$ s.

▶ QUESTÕES E PROBLEMAS

6. Considere o deslocamento retilíneo de uma partícula entre duas posições extremas, distanciadas de 8,0 cm, com MHS. Sabe-se que, ao passar na posição de equilíbrio, a sua velocidade é $2\pi \text{ m s}^{-1}$. A contagem dos tempos teve início no preciso instante em que a partícula se encontrava à distância de 4,0 cm da posição de equilíbrio, aproximando-se dela pela primeira vez.
- 6.1. Escreva a equação do movimento da partícula.
 - 6.2. Calcule a elongação da partícula no instante $t = 0,02 \text{ s}$.
 - 6.3. Determine o módulo da aceleração da partícula numa das posições extremas.
7. Suspende-se de uma mola, cuja constante elástica é $k = 1,0 \times 10^2 \text{ N m}^{-1}$, um corpo de massa 40 g. Determine o período e a frequência das vibrações harmônicas obtidas.
8. Foi, em 1656, na cidade de Haia, Holanda, que Christian Huygens (1629-1695) concebeu um relógio de pêndulo. Essa invenção permitiu reduzir a margem de erro dos relógios de cerca de quinze minutos por dia para uns meros dez ou quinze segundos. Determine qual deverá ser o comprimento de um pêndulo gravítico simples capaz de "bater os segundos", isto é, que demora 1,00 s a passar de uma posição extrema à outra, a menos de uma centésima, num lugar onde a aceleração da gravidade é $g = 9,80 \text{ m s}^{-2}$.
9. Um corpo, de massa 100 g, descreve um MHS demorando 0,25 s a executar uma oscilação completa. Determine, para uma elongação de 4,0 cm:
- 9.1. o módulo da aceleração;
 - 9.2. o módulo da força restauradora.
10. Um oscilador, de massa 40 g, executa um MHS vertical dado pela equação:
- $$y = 2,0 \times 10^{-2} \sin\left(4\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{SI})$$
- Determine:
- 10.1. a energia potencial (elástica + gravítica) do oscilador no instante $t = 0,20 \text{ s}$, admitindo que a energia potencial é nula na posição de equilíbrio;
 - 10.2. a energia cinética no instante $t = 0,40 \text{ s}$;
 - 10.3. a energia mecânica total.
11. Uma partícula, de massa $m = 50 \text{ g}$, executa um MHS demorando 2,0 s entre duas posições extremas que distam entre si 20 mm. A elongação da partícula no instante inicial é $x_0 = 5,0 \text{ mm}$.
- 11.1. Determine o período, a frequência, a frequência angular e a amplitude.
 - 11.2. Determine a fase inicial.
 - 11.3. Escreva as equações da:
 - 11.3.1. elongação;
 - 11.3.2. velocidade;
 - 11.3.3. aceleração.

▶ QUESTÕES E PROBLEMAS

- 11.4. Determine o menor intervalo de tempo ao fim do qual a elongação se anula.
- 11.5. Determine a energia mecânica total da partícula nos instantes $t = \frac{T}{4}$ e $t = \frac{T}{2}$.
12. Um oscilador MHS, de massa 4,0 g, vibra ao longo do eixo dos xx com amplitude de 2,0 cm e posição de equilíbrio em $x = 0$. A aceleração do oscilador nos extremos da trajetória é de $3,2 \times 10^2 \text{ m s}^{-2}$.
- 12.1. Determine o número de ciclos na unidade de tempo.
- 12.2. Calcule a energia do oscilador.
- 12.3. Determine o módulo da velocidade na posição de equilíbrio e na posição $x = 1,2 \text{ cm}$.
- 12.4. Escreva a equação da força restauradora em função:
- 12.4.1. do tempo;
- 12.4.2. da posição.
13. Uma mola elástica vibra com uma amplitude de 1,0 mm. A velocidade máxima de uma partícula, situada na extremidade da mola, é de $2,0 \text{ m s}^{-1}$.
- 13.1. Determine o tempo correspondente a um ciclo completo.
- 13.2. Determine o número de ciclos que executa num segundo.
- 13.3. Escreva a equação da elongação da partícula em função do tempo.
14. Um oscilador harmónico, de massa 100 g, executa oscilações de amplitude constante de 40 mm, demorando 0,50 s entre posições extremas. Quando o oscilador passa pela posição de equilíbrio dá-se início à contagem dos tempos.
- 14.1. Classifique, justificando, a afirmação: "As oscilações são amortecidas".
- 14.2. Determine as elongações nos instantes $t = \frac{5}{4} \text{ s}$, $t = \frac{3}{2} \text{ s}$ e $t = \frac{7}{4} \text{ s}$.
- 14.3. Calcule a energia mecânica deste oscilador.

15. A equação do movimento de um oscilador é:

$$y = 4,0 \times 10^{-2} \sin\left(\frac{\pi}{3} t\right) \quad (\text{SI})$$

Calcule:

- 15.1. o máximo afastamento da posição de equilíbrio;
- 15.2. o número de oscilações descritas num minuto;
- 15.3. a distância percorrida pelo oscilador durante um período.
16. Um corpo é ligado a uma mola que se encontra num plano horizontal sem atrito. A mola é comprimida no sentido positivo do eixo dos xx e depois largada. O corpo passa a executar um movimento harmónico simples, que obedece à equação:

$$x = A \sin\left(\frac{\pi}{8} t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{SI})$$



▶ QUESTÕES E PROBLEMAS

16.1. Tendo em conta a situação descrita, seleccione a afirmação correcta.

- (A) No instante inicial, a força elástica tem o sentido positivo do referencial.
- (B) O período do movimento é 8 s.
- (C) No instante $t = 0$ s, a aceleração é nula.
- (D) No instante inicial, a energia potencial do oscilador é máxima.

16.2. Para a situação descrita, indique:

- a condição que permite calcular os instantes, t , em que o módulo da velocidade do corpo é máximo;
- a expressão que representa o módulo da velocidade máxima do corpo.

17. A aceleração de um corpo ao longo de uma trajectória rectilínea, em função da sua posição x , é dada por:

$$a = -4\pi^2 x$$

17.1. Classifique, justificando, o movimento da partícula.

17.2. Deduza a lei do movimento da partícula, $x = x(t)$, admitindo que o corpo se encontra na origem das posições no instante inicial e que a sua distância máxima à origem é 8 m.

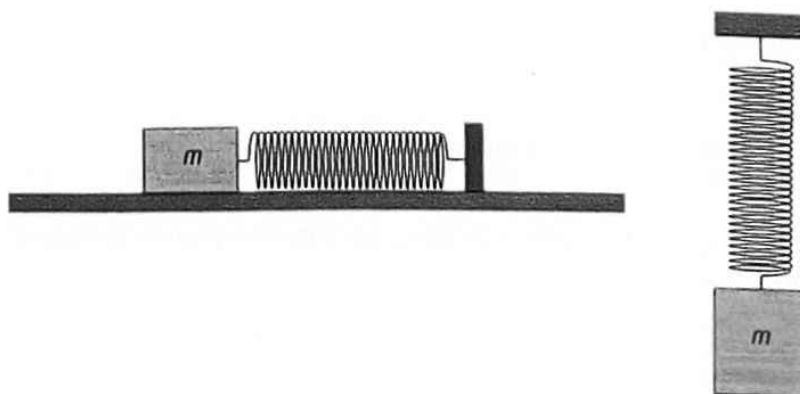
18. Uma esfera, de massa 5,0 kg, é ligada a uma mola que se encontra no plano horizontal sem atrito e posta a oscilar. Sabendo que a constante elástica da mola é $2,0 \text{ N cm}^{-1}$, calcule:

18.1. a frequência angular do movimento;

18.2. o período das oscilações;

18.3. o módulo da força elástica quando a mola se deforma de 10 cm.

19. Um corpo, de massa m , é ligado a uma mola que se encontra no plano horizontal e presa na outra extremidade. A mola é desviada da sua posição de equilíbrio e depois largada, oscilando com uma frequência de 4,0 Hz. Posteriormente, a mesma mola e o mesmo corpo, de massa m , são suspensos verticalmente.



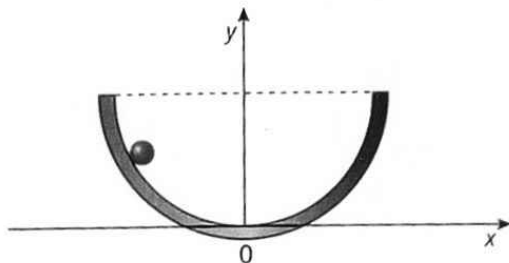
Determine:

19.1. a frequência das oscilações verticais;

19.2. o deslocamento da posição de equilíbrio da mola devido à massa m suspensa.

▶ QUESTÕES E PROBLEMAS

20. Um berlinde é abandonado de uma altura de 5,0 cm, no interior da cavidade de uma superfície semiesférica de atrito desprezável, executando um movimento oscilatório de período $T = 2,0$ s.



Determine:

- 20.1. o raio de curvatura da superfície semiesférica;
- 20.2. o módulo da aceleração no ponto mais baixo da trajetória;
- 20.3. o módulo da aceleração no ponto mais alto da trajetória.
21. Quando se aplica uma força de $7,2 \times 10^{-1}$ N de intensidade a uma mola elástica, produz-se um alongamento de 4,5 cm do seu estado de equilíbrio. Liga-se um corpo, de massa 1,0 kg, à extremidade dessa mola, afasta-se 20 cm da sua posição de equilíbrio ao longo de um plano horizontal sem atrito e, então, solta-se. O sistema assim construído passa a executar um movimento harmónico simples.
- 21.1. Calcule a constante elástica da mola.
- 21.2. Determine o módulo da força exercida pela mola sobre o corpo, no momento em que esta é solta.
- 21.3. Escreva a equação das elongações do movimento do corpo.
- 21.4. Determine o período de oscilação do corpo.
- 21.5. Qual é o máximo afastamento da posição de equilíbrio?
- 21.6. Calcule o módulo da velocidade e da aceleração máximas.
- 21.7. Calcule, quando o corpo se encontra a meio caminho entre a sua posição inicial e a posição de equilíbrio:
- 21.7.1. o módulo da velocidade;
- 21.7.2. o módulo da aceleração;
- 21.7.3. a energia cinética;
- 21.7.4. a energia potencial.
- 21.8. Calcule a energia total do sistema oscilante.
22. Um corpo executa um movimento harmónico simples com uma amplitude de 10 cm e frequência de 2,0 vibrações por segundo. Calcule:
- 22.1. o módulo da aceleração e da velocidade máximas;
- 22.2. o módulo da aceleração e da velocidade quando o deslocamento é de 5,0 cm;
- 22.3. o tempo necessário para o corpo se afastar 5,0 cm da posição de equilíbrio.

Unidade 1 – Ondas electromagnéticas. Radiação do corpo negro (págs. 39 a 43)

1. (B).

2.1. $f = 3654,2 \text{ MHz} = 3654,2 \times 10^6 \text{ Hz}$

$$c = \lambda f \Leftrightarrow \lambda = \frac{c}{f}$$

$$\lambda = \frac{3,0 \times 10^8}{3654,2 \times 10^6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 8,2097 \times 10^{-2} \text{ m} \Leftrightarrow \lambda = 8,2 \text{ cm}$$

2.2. $d = 35\,797 \text{ km} = 35\,797 \times 10^3 \text{ m}$

$$c = \frac{d}{\Delta t} \Leftrightarrow \Delta t = \frac{d}{c}$$

$$\Delta t = \frac{35\,797 \times 10^3}{3,0 \times 10^8} \Leftrightarrow \Delta t = 0,11932 \text{ s} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Delta t = 119,32 \text{ ms}$$

3. (D).

4.1. $f = 1,00 \times 10^{15} \text{ Hz}$

$$c = \lambda f \Leftrightarrow \lambda = \frac{c}{f}$$

$$\lambda = \frac{3,0 \times 10^8}{1,00 \times 10^{15}} \Leftrightarrow \lambda = 3,00 \times 10^{-7} \text{ m} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 300 \text{ nm}$$

4.2. Radiação ultravioleta.

5. (D).

6. $m = 150 \text{ g} = 0,150 \text{ kg}$

$$C = mc$$

$$C = 0,150 \times 443 \Leftrightarrow C = 66,5 \text{ J } ^\circ\text{C}^{-1}$$

7.

7.1. $m_{\text{H}_2\text{O}} = m_{\text{Cu}} = 300 \text{ g} = 0,300 \text{ kg}$

$$\theta_1 = 25,0 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$\theta_e = 30,0 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$Q_{\text{cedido}} + Q_{\text{absorvido}} = 0 \Leftrightarrow Q_{\text{cedido}} = -Q_{\text{absorvido}}$$

Quantidade de calor absorvido pela água:

$$c_{\text{H}_2\text{O}} m_{\text{H}_2\text{O}} (\theta_e - \theta_1)$$

Quantidade de calor absorvido pelo vaso

$$\text{de cobre: } c_{\text{Cu}} m_{\text{Cu}} (\theta_e - \theta_1)$$

Assim:

$$Q_{\text{cedido}} = -[c_{\text{H}_2\text{O}} m_{\text{H}_2\text{O}} (\theta_e - \theta_1) + c_{\text{Cu}} m_{\text{Cu}} (\theta_e - \theta_1)]$$

Substituindo:

$$Q_{\text{cedido}} = -[4,186 \times 0,300 (30,0 - 25,0) + 385 \times 0,300 (30,0 - 25,0)]$$

$$Q_{\text{cedido}} = -6856,5 \text{ J}$$

7.2. $Q = C \Delta T \Leftrightarrow C = \frac{Q}{\Delta T}$

Substituindo:

$$C = \frac{-6856,5}{30,0 - 100} \Leftrightarrow C = 98,0 \text{ J } \text{kg}^{-1}$$

7.3. $m = 213 \text{ g} = 0,213 \text{ kg}$

$$C = mc \Leftrightarrow c = \frac{C}{m}$$

Substituindo:

$$c = \frac{98,0}{0,213} \Leftrightarrow c = 460 \text{ J } \text{kg}^{-1} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

Pela consulta da tabela V, conclui-se que a esfera metálica é feita de aço.

8. $m_{\text{café}} = 100 \text{ g} = 0,100 \text{ kg}; \theta_1 = 80 \text{ } ^\circ\text{C}$

$$m_{\text{Al}} = 50 \text{ g} = 0,050 \text{ kg}; \theta_2 = 20 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$Q_{\text{café}} + Q_{\text{Al}} = 0$$

Quantidade de calor cedido pelo café:

$$c_{\text{café}} m_{\text{café}} (\theta_1 - \theta_e)$$

Quantidade de calor absorvido pela tigela de alumínio: $c_{\text{Al}} m_{\text{Al}} (\theta_e - \theta_2)$

Assim:

$$c_{\text{café}} m_{\text{café}} (\theta_1 - \theta_e) + c_{\text{Al}} m_{\text{Al}} (\theta_e - \theta_2) = 0$$

Substituindo:

$$0,100 \times 4200 (80 - \theta_e) + 0,050 \times 900 (\theta_e - 20) = 0$$

$$\Leftrightarrow \theta_e = 87,2 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Como esta temperatura é relativamente alta e o alumínio é bom condutor de calor, o colega correrá o risco de se queimar.

9.

9.1. (C).

9.2. $P = \frac{Q}{\Delta t} \Leftrightarrow Q = P \Delta t$

Como $Q = mc \Delta \theta$, virá:

$$P \Delta t = mc \Delta \theta \Leftrightarrow c = \frac{P \Delta t}{m \Delta \theta}$$

A partir da recta do gráfico sabemos que, por exemplo, para $\Delta t = 2,0 \text{ min}$, teremos $\Delta \theta = 10,0 \text{ } ^\circ\text{C}$.

Assim, substituindo:

$$c = \frac{2,50 \times 10^3 \times 2,0}{1,30 \times 10,0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c = 3,8 \times 10^2 \text{ J } \text{kg}^{-1} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

10.

10.1. $P = \frac{Q}{\Delta t} \Leftrightarrow Q = P \Delta t$

Como $Q = C \Delta \theta$, virá:

$$P \Delta t = C \Delta \theta \Leftrightarrow C = \frac{P \Delta t}{\Delta \theta}$$

Assim, como a fonte de aquecimento é a mesma:

$$\frac{P \Delta t_x}{C_x} = \frac{\Delta \theta_x}{\Delta t_y} \Leftrightarrow \frac{C_x}{C_y} = \frac{\Delta \theta_y \times \Delta t_x}{\Delta \theta_x \times \Delta t_y}$$

Se considerarmos intervalos de tempo

iguais, $\Delta t_x = \Delta t_y$, então: $\frac{C_x}{C_y} = \frac{\Delta \theta_y}{\Delta \theta_x}$

Para $\Delta t = 40 \text{ s}$, será $\Delta \theta_x = 40 \text{ } ^\circ\text{C}$ e $\Delta \theta_y = 20 \text{ } ^\circ\text{C}$.

Assim, substituindo:

$$\frac{C_x}{C_y} = \frac{20}{40} \Leftrightarrow \frac{C_x}{C_y} = \frac{1}{2}$$

10.2. $P = \frac{Q}{\Delta t} \Leftrightarrow Q = P \Delta t$

Como $Q = mc \Delta \theta$, virá:

$$P \Delta t = mc \Delta \theta \Leftrightarrow c = \frac{P \Delta t}{m \Delta \theta}$$

A partir da recta do gráfico sabemos que, por exemplo, para $\Delta t = 20 \text{ s}$, teremos $\Delta \theta = 20 \text{ } ^\circ\text{C}$.

Assim, substituindo:

$$c = \frac{64,5 \times 20}{586 \times 20} \Leftrightarrow c = 0,110 \text{ cal } \text{g}^{-1} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

O material X é aço.

10.3. $P \Delta t = mc \Delta \theta$

Assim, para a recta do gráfico do material Y, teremos:

$$\frac{P \Delta t_1}{P \Delta t_2} = \frac{m c \Delta \theta_1}{m c \Delta \theta_2} \Leftrightarrow \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \frac{\Delta \theta_1}{\Delta \theta_2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Delta \theta_1 = \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} \times \Delta \theta_2$$

Para:

$$\Delta t_1 = 2 \text{ min} = 120 \text{ s}$$

$$\Delta t_2 = 40 \text{ s}; \Delta \theta_2 = 20 \text{ } ^\circ\text{C}$$

virá:

$$\Delta \theta_1 = \frac{120}{40} \times 20 \Leftrightarrow \Delta \theta_1 = 60 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$\Delta \theta = \theta - \theta_0 \Leftrightarrow \theta = \Delta \theta + \theta_0$$

$$\theta = 60 + 20 \Leftrightarrow \theta = 80 \text{ } ^\circ\text{C}$$

11.

11.1. $Q_{\text{cedido}} = Q_{\text{absorvido}}$

$$m_{\text{aço}} c_{\text{aço}} \Delta \theta_{\text{aço}} = m_{\text{H}_2\text{O}} c_{\text{H}_2\text{O}} \Delta \theta_{\text{H}_2\text{O}}$$

$$0,050 \times 4,60 \times 10^2 (80 - \theta_e) =$$

$$= 0,250 \times 4,18 (\theta_e - 20) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \theta_e = 21 \text{ } ^\circ\text{C}$$

11.2. $\Delta \theta_{\text{aço}} = \theta_e - \theta_0 \Rightarrow \Delta \theta_{\text{aço}} = 21 - 80 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \Delta \theta_{\text{aço}} = -59 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$\Delta \theta_{\text{H}_2\text{O}} = \theta_e - \theta_0 \Rightarrow \Delta \theta_{\text{H}_2\text{O}} = 21 - 20 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Delta \theta_{\text{H}_2\text{O}} = 1 \text{ } ^\circ\text{C}$$

12. Como a energia transferida pelo disco é a mesma, será:

$$Q_{\text{Cu}} = Q_{\text{Al}} \Leftrightarrow m_{\text{Cu}} c_{\text{Cu}} \Delta T_{\text{Cu}} = m_{\text{Al}} c_{\text{Al}} \Delta T_{\text{Al}}$$

Como a massa das panelas é igual, virá:

$$c_{\text{Cu}} \Delta T_{\text{Cu}} = c_{\text{Al}} \Delta T_{\text{Al}}$$

Assim, será maior o aumento da temperatura na panela com menor calor específico. Neste caso, na panela de cobre.

13. (B).

14. (A).

15. (B).

16. Ocorre uma maior variação de temperatura na garrafa B, pois as superfícies negras absorvem melhor a radiação solar do que as superfícies brancas.

17.
17.1. (D).
17.2. (B).
18. (B).
19. (D).

20. (C).

$$21. I = e\sigma T^4$$

Para o pequeno objecto:

$$I = 0,90 \times 5,67 \times 10^{-8} \times (50 + 273,15)^4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow I = 5,6 \times 10^7 \text{ W m}^{-2}$$

Para a superfície de apoio:

$$I = 0,90 \times 5,67 \times 10^{-8} \times (25 + 273,15)^4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow I = 4,0 \times 10^7 \text{ W m}^{-2}$$

Unidade 2 – Física atómica (págs. 74 a 77)

1. (B).
2. (D).
3.
3.1. $E = hf \Leftrightarrow E = \frac{hc}{\lambda}$
$$E = \frac{6,626 \times 10^{-34} \times 3,0 \times 10^8}{510 \times 10^{-9}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow E = 3,90 \times 10^{-19} \text{ J}$$

3.2. A energia de um fóton é igual a um *quantum* de energia: $3,90 \times 10^{-19} \text{ J}$.
3.3. $E = Nhf \Rightarrow N = \frac{2,35 \times 10^{-18}}{3,90 \times 10^{-19}} \Leftrightarrow N = 6,03$
O olho humano necessitará de receber no mínimo 7 fótons.
4. (A).
 $E = hf$
 $E = 6,626 \times 10^{-34} \times 1,0 \times 10^{15} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow E = 6,6 \times 10^{-19} \text{ J} = 4,1 \text{ eV}$
5.
5.1. Se $hf = E_1$, $E_c = 0$. Substituindo na equação do efeito fotoelétrico, $\phi = E_1$. Assim, E_1 é igual à função trabalho do metal.
5.2. Porque a energia de um fóton não é suficiente para permitir que um electrão escape do metal.
5.3. O excesso de energia E_1 é convertido em energia cinética do electrão extraído do metal.
6.
6.1. $E_c = \frac{hc}{\lambda} - \phi$
$$E_c = \frac{6,626 \times 10^{-34} \times 3,0 \times 10^8}{12,7 \times 10^{-9}} - 4,25 \times 1,60 \times 10^{-19} \\ \Leftrightarrow E_c = 1,497 \times 10^{-17} \text{ J} \Leftrightarrow E_c = 93,6 \text{ eV}$$

6.2. Falsa. O aumento da intensidade da radiação implica mais fótons e, portanto, mais electrões ejectados, mas a energia cinética não aumenta porque a energia de cada fóton também não aumentou.
6.3. A frequência limiar é:
 $f_0 = \frac{\phi}{h} \Rightarrow f_0 = \frac{4,25 \times 1,60 \times 10^{-19}}{6,626 \times 10^{-34}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow f_0 = 1,03 \times 10^{15} \text{ Hz}$
Como a frequência que se pretende utilizar é menor, o chumbo não seria recomendável.

7. (B).

$$E_c = \frac{hc}{\lambda} - \phi$$

$$E_c = \frac{6,626 \times 10^{-34} \times 3,0 \times 10^8}{2000 \times 10^{-10}} - 2,36 \times 1,60 \times 10^{-19} \\ \Leftrightarrow E_c = 6,16 \times 10^{-19} \text{ J} \Leftrightarrow E_c = 3,9 \text{ eV}$$

8. (C).

9. (A) Falsa. A função trabalho do metal M_1 é maior do que a energia dos fótons da radiação X e a do metal M_2 é menor.

(B) Falsa. Se as energias fossem iguais, produziam o mesmo efeito fotoelétrico nos dois metais. A ocorrência do efeito não depende da intensidade da radiação.

(C) Verdadeira. Pelo enunciado fica claro que a energia dos fótons é maior na radiação Y do que na X. Maior energia dos fótons implica maior energia cinética dos electrões removidos.

(D) Falsa. Como a energia dos fótons é maior na radiação Y do que na X, a radiação Y tem maior frequência e, portanto, menor comprimento de onda.

10. (A).

$$\frac{hc}{\lambda_c} = \phi \Leftrightarrow \lambda_c = \frac{hc}{\phi}$$

$$\lambda_c = \frac{6,626 \times 10^{-34} \times 3,0 \times 10^8}{4,25 \times 1,60 \times 10^{-19}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \lambda_c = 2,92 \times 10^{-7} \text{ m} = 292 \text{ nm}$$

11. (B).

12.

$$12.1. f_0 = \frac{\phi}{h} \Rightarrow f_0 = \frac{5,81 \times 1,60 \times 10^{-19}}{6,626 \times 10^{-34}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow f_0 = 1,40 \times 10^{15} \text{ Hz}$$

$$12.2. E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

$$E_c = \frac{1}{2} \times 9,10 \times 10^{-31} \times (9,4 \times 10^{-5})^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow E_c = 4,02 \times 10^{-19} \text{ J}$$

$$\lambda = \frac{hc}{hf} \Leftrightarrow \lambda = \frac{hc}{\phi + E_c} \\ \lambda = \frac{6,626 \times 10^{-34} \times 3,0 \times 10^8}{3,68 \times 10^{-19} + 4,02 \times 10^{-19}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \lambda = 2,58 \times 10^{-7} \text{ m}$$

13. (C).

$$eU = \frac{hc}{\lambda_{\min}} \Leftrightarrow \lambda_{\min} = \frac{hc}{eU}$$

$$\lambda_{\min} = \frac{6,626 \times 10^{-34} \times 3,0 \times 10^8}{1,60 \times 10^{-19} \times 30 \times 10^3} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \lambda_{\min} = 4,1 \times 10^{-11} \text{ m}$$

14.

$$14.1. E = \frac{hc}{\lambda}$$

$$E_k = \frac{6,626 \times 10^{-34} \times 3,0 \times 10^8}{1,79 \times 10^{-10}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow E_k = 1,11 \times 10^{-15} \text{ J} = 6,94 \text{ keV}$$

$$E_k = \frac{6,626 \times 10^{-34} \times 3,0 \times 10^8}{1,62 \times 10^{-10}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow E_k = 1,23 \times 10^{-15} \text{ J} = 7,67 \text{ keV}$$

14.2. Apenas o Fe absorve K_{α} e deixa passar K_{β} .

15. (B).

16. (D).

17.

17.1. Os valores das energias E_1 , E_2 e E_3 em eV.

$$E_n = -\frac{13,6}{n^2} \text{ eV}$$

$$E_1 = -\frac{13,6}{1^2} \Leftrightarrow E_1 = -13,6 \text{ eV}$$

$$E_2 = -\frac{13,6}{2^2} \Leftrightarrow E_2 = -3,40 \text{ eV}$$

$$E_3 = -\frac{13,6}{3^2} \Leftrightarrow E_3 = -1,51 \text{ eV}$$

17.2. A riscas menos energética da série de Lyman corresponde à transição de $n=2$ para $n=1$.

$$\Delta E = E_2 - E_1 \Rightarrow E_2 - E_1 = hf \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E_2 - E_1 = h \frac{c}{\lambda}$$

$$[-3,40 - (-13,6)] \times 1,60 \times 10^{-19} =$$

$$= 6,626 \times 10^{-34} \times \frac{3,0 \times 10^8}{\lambda} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 1,22 \times 10^{-7} \text{ m} \Leftrightarrow \lambda = 122 \text{ nm}$$

17.3. A risca de radiação visível de maior comprimento de onda corresponde à transição de $n=3$ para $n=2$

$$\Delta E = E_3 - E_2 \Rightarrow E_3 - E_2 = hf$$

$$[-1,51 - (-3,40)] \times 1,60 \times 10^{-19} =$$

$$= 6,626 \times 10^{-34} \times f \Leftrightarrow f = 4,56 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

18. (C).

Unidade 3 – Física nuclear (págs. 102 a 103)

- 1.1. $26 \times 1,6726 \times 10^{-27} + 30 \times 1,6749 \times 10^{-27} = 9,3735 \times 10^{-26} \text{ kg}$
- 1.2. $\Delta m = 9,3735 \times 10^{-26} - 9,2857 \times 10^{-26} \Leftrightarrow \Delta m = 8,78 \times 10^{-28} \text{ kg}$
- 1.3. $100 \times \frac{8,78 \times 10^{-28}}{9,2857 \times 10^{-26}} = 0,95\%$
- 1.4. $\Delta E = \Delta m c^2$
 $\Delta E = 8,78 \times 10^{-28} \times 9 \times 10^{16} \Leftrightarrow \Delta E = 7,902 \times 10^{-11} \text{ J} \Leftrightarrow \Delta E = 493,88 \text{ MeV}$
- 1.5. $\frac{\Delta E}{56} = 8,819 \text{ MeV}$
- 2.1. É conveniente trabalhar em unidades de massa atômica e no fim fazer a conversão para quilogramas:
 $\Delta m = (93,9154 + 138,9178 + 3 \times 1,0087) - (235,0439 + 1,0087) = -0,1933 \text{ u} \Leftrightarrow \Delta m = -3,2097 \times 10^{-28} \text{ kg}$
- 2.2. $\Delta E = |\Delta m| c^2 = 3,2097 \times 10^{-28} (2,998 \times 10^8)^2 = 2,885 \times 10^{-11} \text{ J}$
3. (A) ${}_{88}^{226}\text{Ra} \rightarrow {}_{86}^{218}\text{Rn} + {}_2^4\text{He}$
 (B) ${}_{94}^{241}\text{Pu} \rightarrow {}_{95}^{241}\text{Am} + {}_{-1}^0\beta + \bar{\nu}$
 (C) ${}_{27}^{60}\text{Co} \rightarrow {}_{26}^{60}\text{Fe} + {}_{+1}^0\beta + \nu$
 (D) ${}_{35}^{87}\text{Br} \rightarrow {}_{35}^{87}\text{Br} + {}_1^0n$

19.

19.1. A transição visível corresponde à transição L.

$$\Delta E = E_5 - E_2 \Rightarrow E_5 - E_2 = h \frac{c}{\lambda}$$

$$[-0,54 - (-3,40)] \times 1,60 \times 10^{-19} =$$

$$= 6,626 \times 10^{-34} \times \frac{3,0 \times 10^8}{\lambda} \Leftrightarrow \lambda = 4,34 \times 10^{-7} \text{ m} \Leftrightarrow \lambda = 434 \text{ nm}$$

19.2. A transição ultravioleta corresponde à transição K.

$$\Delta E = E_3 - E_1 \Rightarrow E_3 - E_1 = hf$$

$$[-1,51 - (-13,6)] \times 1,60 \times 10^{-19} =$$

$$= 6,626 \times 10^{-34} \times f \Leftrightarrow f = 2,92 \times 10^{15} \text{ Hz}$$

$q = -1$, por conservação da carga.

4. (A) ${}_{90}^{234}\text{Th} \rightarrow {}_{91}^{234}\text{Pa} + {}_{-1}^0\beta + \bar{\nu}$
 (B) ${}_{24}^{49}\text{Cr} \rightarrow {}_{25}^{49}\text{Mn} + {}_{-1}^0\beta + \bar{\nu}$
 (C) ${}_{53}^{126}\text{I} \rightarrow {}_{52}^{126}\text{Te} + {}_{+1}^0\beta + \nu$
 (D) ${}_{83}^{214}\text{Bi} \rightarrow {}_{81}^{210}\text{Tl} + {}_2^4\text{He}$
- 5.1. $m = m_0 e^{-\lambda t} = 4,5 \times 10^{-5} e^{-0,18 \times 30} = 2,03 \times 10^{-7} \text{ g}$
- 5.2. $T_{\frac{1}{2}} = \tau \ln 2 = \frac{\ln 2}{0,18} = 3,85 \text{ dias}$
- 6.1. $R_0 = \lambda N_0 = 6,931 \times 10^3 \times 6,0 \times 10^8 = 4,16 \times 10^{12} \text{ Bq}$
- 6.2. $T_{\frac{1}{2}} = \tau \ln 2 = \frac{\ln 2}{6,931 \times 10^3} = 1,00 \times 10^{-4} \text{ s}$
- 6.3. $6,931 \times 10^3 \times 6,0 \times 10^8 e^{-6,931 \times 10^3 \times 2 \times 10^2} = 0$
7. $\tau = \frac{5730}{\ln 2} = 8267 \text{ anos}$
 $\frac{357}{500} N_0 = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow t = 8267 \ln \left(\frac{500}{357} \right) = 2785 \text{ anos}$
- 8.1. $Z = 26$, que é o número atômico do elemento Fe.
 $A = 56$, por conservação do número de nucleões.

8.2.

$$8.2.1. N_0 = \frac{150 \times 6,0221 \times 10^{23}}{55,939} = 1,61 \times 10^{24}$$

$$8.2.2. \tau = \frac{2,6}{\ln 2} = 3,75 \text{ h} \Rightarrow \Delta m = m_0 - m_0 e^{-\frac{0,5}{3,75}} = 18,7 \text{ g}$$

9.

$$9.1. N_0 = \frac{0,8 \times 10^{-3} \times 6,022 \times 10^{23}}{240,88} \Leftrightarrow N_0 = 2,00 \times 10^{18}$$

9.2. A constante de decaimento é:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{432,2 \times 365 \times 24 \times 60 \times 60} \Leftrightarrow \lambda = 5,09 \times 10^{-11} \text{ s}^{-1}$$

e o número de partículas alfa emitidas em cada segundo é igual à actividade radioactiva:

$$N_{\alpha} = \lambda N_0 = 1,02 \times 10^8$$

9.3. Cada partícula α transporta duas unidades de carga elementar:

$$I = 2e N_{\alpha} = 2 \times 1,6 \times 10^{-19} \times 1,02 \times 10^8 \Leftrightarrow I = 3,26 \times 10^{-11} \text{ A}$$

$$9.4. U = I R = 3,26 \times 10^{-11} \times 5 \times 10^6 \Leftrightarrow U = 1,63 \times 10^{-4} \text{ V (0,163 mV)}$$

Unidade 4 – Mecânica dos fluidos – hidrodinâmica (págs. 137 a 143)

1. Como o icebergue flutua, então:

$$I = P \Leftrightarrow \rho_{\text{mar}} g V_i = mg \Leftrightarrow V_i = \frac{m}{\rho_{\text{mar}}}$$

Como $\rho_{\text{gelo}} = \frac{m}{V}$ e $V = V_i + V_e$, virá:

$$V_e = V - V_i \Leftrightarrow V_e = \frac{m}{\rho_{\text{gelo}}} - \frac{m}{\rho_{\text{mar}}} \Leftrightarrow V_e = m \left(\frac{1}{\rho_{\text{gelo}}} - \frac{1}{\rho_{\text{mar}}} \right)$$

Substituindo:

$$V_e = 150 \times 10^3 \times \left(\frac{1}{0,917 \times 10^3} - \frac{1}{1,025 \times 10^3} \right)$$

$$\Leftrightarrow V_e = 17,2 \text{ m}^3$$

2. Cálculo dos volumes de prata e mercúrio:

$$V_{\text{Ag}} = \frac{m_{\text{Ag}}}{\rho_{\text{Ag}}}, V_{\text{Ag}} = \frac{40}{10,50} \Leftrightarrow V_{\text{Ag}} = 3,81 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{Hg}} = \frac{m_{\text{Hg}}}{\rho_{\text{Hg}}}, V_{\text{Hg}} = \frac{50}{13,60} \Leftrightarrow V_{\text{Hg}} = 3,68 \text{ cm}^3$$

A massa volúmica da amálgama será:

$$\rho = \frac{m_{\text{total}}}{V_{\text{total}}} \Leftrightarrow \rho = \frac{m_{\text{Ag}} + m_{\text{Hg}}}{V_{\text{Ag}} + V_{\text{Hg}}}$$

$$\rho = \frac{40 + 50}{3,81 + 3,68} \Leftrightarrow \rho = 12 \text{ g cm}^{-3}$$

A densidade relativa é: $d = 12$.

3.

3.1. A pressão sobre as paredes do barril aumentou tanto que as suas aduelas não suportaram e o barril rebentou.

3.2.

$$3.2.1. \rho = \rho_0 + \rho g h$$

$$\rho = 1,01 \times 10^3 + 0,980 \times 10^3 \times 10 \times 1,00 \Leftrightarrow \rho = 1,11 \times 10^5 \text{ Pa}$$

$$3.2.2. \rho = 1,01 \times 10^3 + 0,980 \times 10^3 \times 10 \times (1,00 + 10,0) \Leftrightarrow \rho = 2,09 \times 10^5 \text{ Pa}$$

4. $\rho = \rho g h \Leftrightarrow h = \frac{\rho}{\rho g}$

$h = \frac{9,0 \times 10^3}{1,0 \times 10^3 \times 10} \Leftrightarrow h = 0,90 \text{ m}$

5. (A) Falsa. O valor da impulsão é o mesmo nas duas situações (igual ao peso). Como $l = \rho g V_i$, quando ρ é maior (Maputo) V_i é menor, diminuindo assim o calado.

(B) Verdadeira. Quando o barco estiver carregado com óleo, o peso será maior do que carregado com o mesmo volume de gasolina, porque $\rho_{\text{óleo}} > \rho_{\text{gasolina}}$. Consequentemente, o valor da impulsão (igual ao peso) terá de ser superior. Isto significa que V_i será maior, aumentando assim o calado.

(C) Verdadeira. Se o calado aumenta, o volume imerso também aumenta, ficando a parte mais baixa do casco a maior profundidade, aumentando assim a pressão.

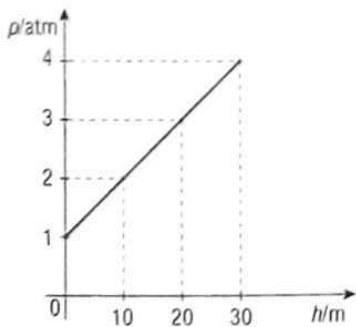
(D) Falsa. O calado é apenas função da carga e da densidade da água.

6.

6.1. $\Delta p = \rho g \Delta h$

$\Delta p = 1,0 \times 10^3 \times 10 \times 10 \Leftrightarrow \Delta p = 1,0 \times 10^5 \text{ Pa}$

6.2.



7. $2,0 \text{ atm} = 2,0 \times 10^5 \text{ Pa}$

$\rho = \rho_0 + \rho g h$

$4,0 \times 10^5 = 2,0 \times 10^5 + 1,0 \times 10^3 \times 10 \times h \Leftrightarrow h = 20 \text{ m}$

Para além do ponto em que se encontra, o mergulhador poderá descer mais 20 m.

8. $\rho = \rho_0 + \rho g h \Leftrightarrow h = \frac{\Delta \rho}{\rho g}$

$h = \frac{1,6 \times 10^5 - 1,0 \times 10^5}{1,0 \times 10^3 \times 10} \Leftrightarrow h = 6,0 \text{ m}$

9. A altura atingida pela água será tal que a sua pressão iguala a da atmosfera. Assim:

$\rho_{\text{água}} = \rho_{\text{atm}} \Rightarrow \rho_{\text{água}} g h = \rho_{\text{atm}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow h = \frac{\rho_{\text{atm}}}{\rho_{\text{água}} g}$

$h = \frac{1,0 \times 10^5}{1,0 \times 10^3 \times 10} \Leftrightarrow h = 10 \text{ m}$

A altura máxima que a água pode atingir no tubo de bombagem, 10 m, é inferior à profundidade, pelo que, com este método, não será possível retirar a água do poço.

10.

10.1. Seja h a altura de mercúrio e a a aresta do cubo.

A altura de água será, então: $h_{H_2O} = a - h$.

A pressão no fundo será dada por:

$\rho = \rho_0 + \rho_{H_2O} g h_{H_2O} + \rho_{Hg} g h$

$2 \rho_0 = \rho_0 + \rho_{H_2O} g (1,0 - h) + \rho_{Hg} g h$

$2 \times 1,0 \times 10^5 = 1,0 \times 10^5 + 1,0 \times 10^3 \times 10 (1,0 - h) + 13,6 \times 10^3 \times 10 h \Leftrightarrow h = 0,79 \text{ m}$

10.2. Se a pressão no fundo do recipiente é o dobro da pressão atmosférica, então a pressão exercida pelos dois líquidos é igual à pressão atmosférica.

$F = \rho_0 a^2 \Rightarrow F = 1,0 \times 10^5 \times 1,0^2 \Leftrightarrow F = 1,0 \times 10^5 \text{ N}$

11. $\rho = \rho_0 + \rho g h$

$\rho = 2,0 \times 10^5 + 1,0 \times 10^3 \times 10 \times 100 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \rho = 1,2 \times 10^6 \text{ Pa} = \frac{1,2 \times 10^6}{1,0 \times 10^5} \text{ atm} = 12 \text{ atm}$

O proprietário não deverá fazer a ligação.

12. Como a balança está equilibrada, os valores de R_N em cada prato são iguais.

Assim, para o bloco de madeira é $R_N = P_m - I_m$ e para o objecto é $R_N = P_0 - I_0$.

$P_m - I_m = P_0 - I_0$

$m_m g - \rho_{\text{ar}} g V_m = m_0 g - \rho_{\text{ar}} g V_0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m_m - \frac{\rho_{\text{ar}}}{\rho_m} m_m = m_0 - \frac{\rho_{\text{ar}}}{\rho_0} m_0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m_m \left(1 - \frac{\rho_{\text{ar}}}{\rho_m} \right) = \left(1 - \frac{\rho_{\text{ar}}}{\rho_0} \right) m_0 \Leftrightarrow$

$1 - \frac{\rho_{\text{ar}}}{\rho_m} \Leftrightarrow m_m = \frac{\rho_m}{1 - \frac{\rho_{\text{ar}}}{\rho_0}} m_0$

Substituindo, virá:

$m_m = \frac{1,2041 \times 10^{-3}}{8,0000} \times 20,0000 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m_m = 1,0029 \times 20,0000 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m_m = 20,0574 \text{ g}$

13. Sejam A e B dois pontos do líquido Y situados em cada um dos ramos do tubo e ao mesmo nível da superfície de separação de X com Y. Será, então:

$\rho_A = \rho_B$

$\rho_0 + \rho_Y g h_A = \rho_0 + \rho_X g h \Leftrightarrow h_A = \frac{\rho_X}{\rho_Y} h$

$h_A = \frac{6,0}{13,6} \times 1,0 \Leftrightarrow h_A = 0,44 \text{ cm}$

Assim, o ponto P encontra-se a uma profundidade de:

$h_P = 1,0 - 0,44 \Leftrightarrow h_P = 0,56 \text{ cm}$

A pressão exercida pelo líquido será dada por:

$\rho_P = \rho_X g h_P$

$\rho_P = 6,0 \times 10^3 \times 10 \times 0,56 \times 10^{-2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \rho_P = 3,4 \times 10^2 \text{ Pa}$

14. $\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \cdot \frac{F_1}{\pi r_1^2} = \frac{m g}{\pi r_2^2} \Leftrightarrow F_1 = \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 m g$

$F_1 = \left(\frac{2,5}{10,0} \right)^2 \times 2,5 \times 10^3 \times 10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow F_1 = 1,6 \times 10^3 \text{ N}$

15.

15.1. $\frac{f}{a} = \frac{F}{A} \Leftrightarrow F = \frac{A}{a} f$

15.2. $f = \frac{a}{A} F$

$f = \frac{\pi \times 1,0^2}{\pi \times 25^2} \times 3,0 \times 10^3 \times 10 \Leftrightarrow f = 48 \text{ N}$

O valor do peso a colocar será de 48 N.

16.

16.1. $l = \rho_{\text{liq}} g V_i$

$l = 0,80 \times 10^3 \times 10 \times 10 \times 10^{-3} \Leftrightarrow l = 80 \text{ N}$

16.2. $T + l = P \Leftrightarrow T = P - l$

$T = 400 - 80 \Leftrightarrow T = 320 \text{ N}$

17. Seja P o valor do peso de uma pessoa, V_0 o volume médio de um tronco e N o número de troncos.

Para que a jangada flutue, deverá ser $l = P_{\text{total}}$

$l = 2P + P_{\text{carga}} + P_{\text{troncos}}$

$\rho_{\text{liq}} g N V = 2P + P_{\text{carga}} + \rho_m g N V$

$1,0 \times 10^3 \times 10 \times N \times \pi \times r^2 \times l =$

$= 2 \times 65 \times 10 + 100 + 0,80 \times 10^3 \times 10 \times N \times \pi \times r^2 \times l \Leftrightarrow$

$157 \text{ N} = 1400 + 125,6 \text{ N} \Leftrightarrow 31,4 \text{ N} = 1400 \Leftrightarrow N = 44,6$

Conclui-se, assim, que os amigos irão necessitar, no mínimo, de 45 troncos.

18. Cálculo do volume, V , do corpo:

$l = \rho_{H_2O} g V \Leftrightarrow P_i - P_a = \rho_{H_2O} g V \Leftrightarrow$

$V = \frac{P_i - P_a}{\rho_{H_2O} g} \Rightarrow V = \frac{3,00 - 2,50}{1,0 \times 10^3 \times 10} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow V = 5,00 \times 10^{-5} \text{ m}^3$

Cálculo do volume, V_{Pb} , da substância que constitui o corpo:

$V_{Pb} = \frac{m_{Pb}}{\rho_{Pb}} \Leftrightarrow V_{Pb} = \frac{P_i}{\rho_{Pb}} \Leftrightarrow V_{Pb} = \frac{P_i}{\rho_{Pb} g}$

$V_{Pb} = \frac{3,00}{11,4 \times 10^3 \times 10} \Leftrightarrow V_{Pb} = 2,63 \times 10^{-5} \text{ m}^3$

Cálculo do volume, V_0 , da cavidade:

$$V_0 = V - V_{p_0}$$

$$V_0 = 5,00 \times 10^{-5} - 2,63 \times 10^{-5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V_0 = 2,37 \times 10^{-5} \text{ m}^3$$

19. $l = P_i - P_s$

$$l = 200 - 150 \Leftrightarrow l = 50 \text{ N}$$

$$l = \rho_{H_2O} g V \Leftrightarrow l = \rho_{H_2O} g \frac{m}{\rho} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow l = \rho_{H_2O} g \frac{g}{\rho} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow l = \rho_{H_2O} \frac{P}{\rho} \Leftrightarrow \rho = \frac{P}{l} \rho_{H_2O}$$

$$\rho = \frac{200}{50} \times 1,0 \Leftrightarrow \rho = 4,0 \text{ g cm}^{-3}$$

20. Cálculo do valor da impulsão, l :

$$l = P_i - P_s$$

$$l = 2,50 - 2,35 \Leftrightarrow l = 0,15 \text{ N}$$

Cálculo do volume do corpo, V :

$$l = \rho_{H_2O} g V \Leftrightarrow V = \frac{l}{\rho_{H_2O} g}$$

$$V = \frac{0,15}{1,0 \times 10^3 \times 10} \Leftrightarrow V = 1,5 \times 10^{-5} \text{ m}^3$$

Como $V = V_{Cu} + V_{Au}$, será, então:

$$V_{Cu} + V_{Au} = 1,5 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \quad (1)$$

Por outro lado, sabemos que:

$$P_i = (m_{Cu} + m_{Au}) g$$

$$P_i = (\rho_{Cu} V_{Cu} + \rho_{Au} V_{Au}) g$$

$$2,50 = (8,89 \times 10^3 V_{Cu} + 19,3 \times 10^3 V_{Au}) \times 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8,89 \times 10^3 V_{Cu} + 19,3 \times 10^3 V_{Au} = 0,250 \quad (2)$$

Combinando as equações (1) e (2), obtemos:

$$\begin{cases} V_{Cu} + V_{Au} = 1,5 \times 10^{-5} \\ 8,89 \times 10^3 V_{Cu} + 19,3 \times 10^3 V_{Au} = 0,250 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} V_{Cu} = 3,79 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \\ V_{Au} = 1,12 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \end{cases}$$

A composição da liga é, em % em volume:

25,3% de Cu e 74,7% de Au.

21.

21.1. $l = \rho_A g V_C$

$$P_i - P_s = \rho_A g V_C \Leftrightarrow V_C = \frac{P_i - P_s}{\rho_A g}$$

$$V_C = \frac{0,340 \times 10 - 1,0}{6,0 \times 10^3 \times 10} \Leftrightarrow V_C = 4,0 \times 10^{-5} \text{ m}^3$$

21.2. Como o líquido B é menos denso, irá subir.

Seja Δh o desnível das superfícies livres e 1 e 2 dois pontos situados em cada um dos ramos e ao mesmo nível da superfície de separação de A com B.

Será, então: $\rho_1 = \rho_2$

$$\rho_0 + \rho_A g h_1 = \rho_0 + \rho_B g h_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho_A h_1 = \rho_B h_2 \Leftrightarrow h_1 = \frac{\rho_B}{\rho_A} h_2$$

$$h_1 = \frac{1,5}{6,0} \times 80 \Leftrightarrow h_1 = 20 \text{ cm}$$

Assim:

$$\Delta h = h_2 - h_1$$

$$\Delta h = 80 - 20 \Leftrightarrow \Delta h = 60 \text{ cm}$$

22. $p_{ext} = 8,0 \times 10^{-2} \text{ atm} = 8,0 \times 10^{-2} \times 1,0 \times 10^5 \text{ Pa}$

$$= 8,0 \times 10^3 \text{ Pa}$$

$$F \cos 30^\circ = p_{atm} A - p_{ext} A \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F = \frac{p_{atm} - p_{ext}}{\cos 30^\circ} A$$

$$F = \frac{1,0 \times 10^5 - 8,0 \times 10^3}{\cos 30^\circ} \times (22,4 \times 10^{-2})^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F = 5,3 \times 10^3 \text{ N}$$

23. Seja A um ponto da superfície de separação dos dois líquidos e B um ponto situado ao mesmo nível de A, mas no outro ramo.

Será: $p_A = p_B$

$$\rho_0 + \rho g h = \rho_0 + \rho_{Hg} g h_{Hg} \Leftrightarrow \rho = \frac{h_{Hg}}{h} \rho_{Hg}$$

Se o nível de mercúrio sobe 1,4 cm num ramo, desce 1,4 cm no outro. Assim,

$$h_{Hg} = 2 \times 1,4 = 2,8 \text{ cm}$$

$$\rho = \frac{2,8}{48} \times 13,6 \Leftrightarrow \rho = 0,79 \text{ g cm}^{-3}$$

24. Cálculo do valor da impulsão:

$$l = P_i - P_s$$

$$l = 0,100 \times 10 - 0,60 \Leftrightarrow l = 0,40 \text{ N}$$

Cálculo do volume do corpo, V :

$$l = \rho_{H_2O} g V \Leftrightarrow V = \frac{l}{\rho_{H_2O} g}$$

$$V = \frac{0,40}{1,0 \times 10^3 \times 10} \Leftrightarrow V = 4,0 \times 10^{-5} \text{ m}^3$$

Cálculo do volume da substância de que o corpo é feito, V_S :

$$\rho_S = \frac{m}{V_S} \Leftrightarrow V_S = \frac{m}{\rho_S}$$

$$V_S = \frac{0,100}{4,0 \times 10^3} \Leftrightarrow V_S = 2,5 \times 10^{-5} \text{ m}^3$$

Cálculo do volume da cavidade, V_0 :

$$V_0 = V - V_S$$

$$V_0 = 4,0 \times 10^{-5} - 2,5 \times 10^{-5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V_0 = 1,5 \times 10^{-5} \text{ m}^3$$

25.

25.1. Como a densidade do corpo é inferior à densidade do líquido, este tende a subir.

Como está preso ao fio, este fica tenso.

$$F_R = 0 \Rightarrow F_R = l - T - P \Leftrightarrow T = l - P$$

$$T = \rho_{liq} g V - \rho_c g V \Leftrightarrow T = (\rho_{liq} - \rho_c) g V$$

$$T = (0,90 \times 10^3 - 0,60 \times 10^3) \times 10 \times 0,30 \times 10^{-5}$$

$$\Leftrightarrow T = 9,0 \times 10^{-4} \text{ N}$$

25.2.

25.2.1. Ao cortar o fio, será $F_R = l - P$

$$m a = \rho_{liq} g V - \rho_c g V \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho V a = \rho_{liq} g V - \rho_c g V$$

$$a = \left(\frac{\rho_{liq}}{\rho} - 1 \right) g \Leftrightarrow a = \left(\frac{0,90}{0,60} - 1 \right) \times 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = 5,0 \text{ m s}^{-2}$$

25.2.2. Quando flutuar à superfície, o novo valor da impulsão, l , será igual ao peso: $l = P$

$$\rho_{liq} g V_i = \rho_c g V \Leftrightarrow V_i = \frac{\rho_c}{\rho_{liq}} V$$

$$V_i = \frac{0,60}{0,90} \times 0,30 \Leftrightarrow V_i = 0,20 \text{ cm}^3$$

26.

26.1. $P_i = T + P_s$

$$\rho g V = \rho_{liq} g V + P_s$$

$$\rho = \frac{\rho_{liq} g V + P_s}{V g}$$

$$\rho = \frac{1,0 \times 10^3 \times 10 \times 50,0 \times 10^{-3} + 2,450}{50,0 \times 10^{-3} \times 10} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho = 5,9 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$$

A densidade relativa do corpo é de 5,9.

26.2. A indicação do dinamómetro seria diferente.

$$P_s = P_i - l \Leftrightarrow P_s = P_i - \rho_{liq} g V$$

Se ρ_{liq} aumentar, P_s diminui e assim o valor lido no dinamómetro será inferior.

27.

27.1. Os pontos 1 e 2, pertencentes ao mesmo líquido, estão ao mesmo nível, pelo que:

$$\rho_1 = \rho_2$$

$$\rho_0 + \rho_{H_2O} g h_{H_2O} = \rho_0 + \rho_{líneo} g h_{líneo} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho_{H_2O} h_{H_2O} = \rho_{líneo} h_{líneo} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho_{líneo} = \frac{h_{H_2O}}{h_{líneo}} \rho_{H_2O}$$

Da análise da figura, conclui-se que:

$$h_{H_2O} = 9,5 - 1,9 \Leftrightarrow h_{H_2O} = 7,6 \text{ cm}$$

$$\rho_{líneo} = \frac{7,6}{9,5} \times 1,0 \times 10^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho_{líneo} = 8,0 \times 10^2 \text{ kg m}^{-3}$$

27.2.

27.2.1. $l = P_i - P_s$

$$l = 1,00 - 0,40 \Leftrightarrow l = 0,60 \text{ N}$$

27.2.2. $\rho = \frac{m}{V}$, como $P = m g \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow m = \frac{P}{g} \text{ e } l = \rho_{líneo} g V \Leftrightarrow V = \frac{l}{\rho_{líneo} g}$$

$$\text{obtemos: } \rho = \frac{\frac{P}{g}}{\frac{l}{\rho_{líneo} g}} \Leftrightarrow \rho = \frac{P}{l} \times \rho_{líneo}$$

$$\rho = \frac{1,00}{0,60} \times 8,0 \times 10^2 \Leftrightarrow \rho = 1,3 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$$

28. $P = l_A + l_B \Leftrightarrow \rho V = \rho_A V_A + \rho_B V_B$

Como $V_A = V - V_B$, virá:

$$\rho V = \rho_A (V - V_B) + \rho_B V_B \Leftrightarrow V_B = \frac{\rho_A - \rho}{\rho_A - \rho_B} V \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V_B = \frac{1,0 - 0,70}{1,0 - 0,60} V \Leftrightarrow V_B = \frac{3}{4} V$$

29. A diferença de valores lidos na balança é devida a uma força de reacção, exercida pelo metal sobre o líquido, e à impulsão, exercida pelo líquido sobre o metal.

Assim:

$$l = 2,75 - 2,30 \Leftrightarrow l = 0,45 \text{ N}$$

Por outro lado, sabemos que $l = \rho_{H_2O} g V$.

$$V = \frac{l}{\rho_{H_2O} g} \Rightarrow V = \frac{0,45}{1,0 \times 10^3 \times 10} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V = 4,5 \times 10^{-5} \text{ m}^3$$

30.

$$30.1. T = P + P_{H_2O} - l$$

$$T = P + \rho_{H_2O} g V - \rho_{H_2O} g V'$$

$$T = P + \rho_{H_2O} g (V - V') \quad (1)$$

O peso do regador pode ser calculado por:

$$P = \rho g (V - V) \Leftrightarrow V' - V = \frac{P}{\rho g}$$

Assim, a expressão (1) será:

$$T = P + \rho_{H_2O} g \left(- \frac{P}{\rho g} \right) \Leftrightarrow T = P - \frac{\rho_{H_2O}}{\rho} P \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow T = P \left(1 - \frac{\rho_{H_2O}}{\rho} \right)$$

$$30.2. T = P + P_{H_2O}$$

$$T = P + \rho_{H_2O} g V$$

$$31. \Delta V = 20 \text{ L} = 20 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$d = 2,0 \text{ cm} \Rightarrow r = 1,0 \text{ cm} = 1,0 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$\Delta t = 1,0 \text{ min} = 60 \text{ s}$$

$$\phi = \frac{\Delta V}{\Delta t} \text{ e } \phi = A v, \text{ então:}$$

$$A v = \frac{\Delta V}{\Delta t} \Leftrightarrow v = \frac{\Delta V}{A \Delta t} \Leftrightarrow v = \frac{\Delta V}{\pi r^2 \Delta t}$$

Substituindo:

$$v = \frac{20 \times 10^{-3}}{\pi \times (1,0 \times 10^{-2})^2 \times 60} \Leftrightarrow v = 1,1 \text{ m s}^{-1}$$

32.

$$32.1. H = 2,0 \text{ m}; h = 0,75 \text{ m}$$

Aplicando a equação de Bernoulli, tem-se:

$$\rho_0 + \rho g H = \rho_0 + \rho g h + \frac{1}{2} \rho v^2 \Rightarrow$$

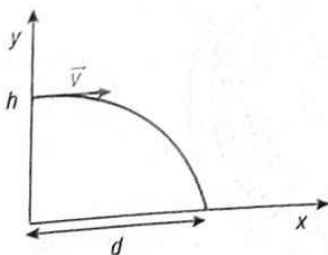
$$\Rightarrow v = \sqrt{2g(H - h)}$$

Substituindo:

$$v = \sqrt{2 \times 10 \times (2,0 - 0,75)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v = 5,0 \text{ m s}^{-1}$$

32.2.



$$\begin{cases} x = vt \\ y = h - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Ao atingir o solo, $y = 0$.

$$\begin{cases} d = vt \\ 0 = h - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d = v \sqrt{\frac{2h}{g}} \\ \text{---} \end{cases}$$

$$d = 5,0 \times \sqrt{\frac{2 \times 0,75}{10}} \Leftrightarrow d = 1,9 \text{ m}$$

33.

$$33.1. A_1 = 3,0 \text{ cm}^2 \quad A_2 = \frac{1}{2} A_1$$

$$v_1 = 5,0 \text{ m s}^{-1} \quad v_2$$

Pela equação de continuidade, é:

$$A_2 v_2 = A_1 v_1 \Leftrightarrow v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1$$

$$v_2 = 2 v_1 \Rightarrow v_2 = 2 \times 5,0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v_2 = 10 \text{ m s}^{-1}$$

$$33.2. y_1 = 8,0 \text{ m} \quad y_2 = 0$$

$$\rho_1 = 1,5 \text{ atm} = 1,5 \times 10^5 \text{ Pa}$$

Aplicando a equação de Bernoulli, tem-se:

$$\rho_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = \rho_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho_2 = \rho_1 + \rho g (y_1 - y_2) + \frac{1}{2} \rho (v_1^2 - v_2^2)$$

Substituindo:

$$\rho_2 = 1,5 \times 10^5 + 1,0 \times 10^3 \times 10 (8,0 - 0) +$$

$$+ \frac{1}{2} \times 1,0 \times 10^3 \times (5,0^2 - 10^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho_2 = 1,9 \times 10^5 \text{ Pa} = 1,9 \text{ atm}$$

34. Aplicando a equação de Bernoulli a um escoamento horizontal ($\Delta y = 0$), tem-se:

$$\rho_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = \rho_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

Por outro lado, pela equação de continuidade, é:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \Leftrightarrow v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1$$

Substituindo na equação anterior, tem-se:

$$\rho_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = \rho_2 + \frac{1}{2} \rho \left(\frac{A_1}{A_2} v_1 \right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho_1 - \rho_2 = \frac{1}{2} \rho \left[\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 v_1^2 - v_1^2 \right]$$

Como $d_1 (15,0 \text{ cm})$ é duplo de $d_2 (7,5 \text{ cm})$, então:

$$A_1 = 4 A_2 \text{ e } \rho_1 - \rho_2 = \frac{1}{2} \rho v_1^2 (4^2 - 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho_1 - \rho_2 = \frac{15}{2} \rho v_1^2$$

$$\text{Sendo: } \rho_1 = 0,540 \text{ atm} = 5,47 \times 10^4 \text{ Pa}$$

$$\rho_2 = 0,410 \text{ atm} = 4,15 \times 10^4 \text{ Pa e}$$

$$\rho = 1,0 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$$

Podemos calcular v_1 :

$$5,47 \times 10^4 - 4,15 \times 10^4 =$$

$$= \frac{15}{2} \times 1,0 \times 10^3 \times v_1^2 \Leftrightarrow v_1 = 1,33 \text{ m s}^{-1}$$

O fluxo será, então: $\phi = A_1 v_1$

$$\phi = \pi \times \left(\frac{15,0}{2} \times 10^{-2} \right)^2 \times 1,33 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \phi = 2,35 \times 10^{-7} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$$

35.

$$35.1. v_{\text{ext}} = 200 \text{ km h}^{-1} = 55,6 \text{ m s}^{-1}$$

$$\rho_{\text{int}} - \rho_{\text{ext}} = \frac{1}{2} \rho (v_{\text{ext}}^2 - v_{\text{int}}^2)$$

$$\rho_{\text{int}} - \rho_{\text{ext}} = \frac{1}{2} \times 1,29 \times (55,6^2 - 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho_{\text{int}} - \rho_{\text{ext}} = 1,99 \times 10^3 \text{ Pa}$$

$$35.2. \rho_{\text{int}} - \rho_{\text{ext}} = \frac{F}{A} \Leftrightarrow F = (\rho_{\text{int}} - \rho_{\text{ext}}) A$$

$$F = 1,99 \times 10^3 \times 1,0 \times 10^4 \Leftrightarrow F = 1,99 \times 10^7 \text{ N}$$

$$36. F_{\text{sust}} = P$$

Como $F_{\text{sust}} = \Delta p A_{\text{total}}$, virá:

$$P = \Delta p A_{\text{total}} \Leftrightarrow P = \frac{1}{2} \rho (v_{\text{sup}}^2 - v_{\text{inf}}^2) A_{\text{total}}$$

$$P = \frac{1}{2} \times 1,2 \times (50^2 - 40^2) \times 2 \times 9,0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P = 9,72 \times 10^3 \text{ N}$$

$$37. d_1 = 2,0 \text{ cm} \Rightarrow r_1 = 1,0 \text{ cm};$$

$$d_2 = 0,14 \text{ cm} \Rightarrow r_2 = 0,070 \text{ cm}$$

Pela equação de continuidade, é:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \Leftrightarrow v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1$$

$$v_2 = \frac{\pi \times r_1^2}{30 \times \pi \times r_2^2} v_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v_2 = \frac{\pi \times 1,0^2}{30 \times \pi \times 0,070^2} \times 0,85 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v_2 = 5,8 \text{ m s}^{-1}$$

38. Nas condições do problema, o módulo da força de resistência, F_{res} , será:

$$F_{\text{res}} = 6\pi r \eta v$$

A velocidade terminal é atingida quando for nula a resultante das forças que actuam na esfera:

$$l + F_{\text{res}} - P = 0$$

$$\rho_{\text{oleo}} g V + 6\pi r \eta v - mg = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6\pi r \eta v = mg - \rho_{\text{oleo}} g \times \frac{4}{3} \pi r^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \eta = \frac{m - \frac{4}{3} \rho_{\text{oleo}} \pi r^3}{6\pi r v} g$$

$$\eta = \frac{10,0 \times 10^{-3} - \frac{4}{3} \times 0,90 \times 10^3 \times \pi \times (0,75 \times 10^{-2})^3}{6\pi \times 0,75 \times 10^{-2} \times 3,0 \times 10^{-2}} \times 10$$

$$\Leftrightarrow \eta = 19,8 \text{ Pa s}$$

39.

$$A_1 = 10 A_2 \quad A_2$$

$$v_1 = 1,0 \text{ cm s}^{-1} \quad v_2$$

Pela equação de continuidade, é:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \Leftrightarrow v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1$$

$$v_2 = 10 v_1 \Leftrightarrow v_2 = 10 \times 1,0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v_2 = 10 \text{ cm s}^{-1}$$

40. $\phi = 500 \text{ L s}^{-1} = 500 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$
 $v_1 = 200 \text{ km h}^{-1} = 55,6 \text{ m s}^{-1}$
 O caudal em volume, ϕ , é:
 $\phi = A_1 v_1 \Leftrightarrow A_1 = \frac{\phi}{v_1}$
 $A_1 = \frac{500 \times 10^{-3}}{55,6} \Leftrightarrow A_1 = 8,99 \times 10^{-3} \text{ m}^2$

40.2 Cálculo do valor da velocidade, v_2 , à altura de 100 m:
 $\frac{1}{2} \rho v_1^2 = \rho g h_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$, visto ser $y_1 = 0$ e $\rho_1 = \rho_2 = \rho_{\text{ar}}$
 $v_2^2 = v_1^2 - 2 g h_2$
 $v_2 = \sqrt{55,6^2 - 2 \times 10 \times 100} \Leftrightarrow v_2 = 33,0 \text{ m s}^{-1}$
 Cálculo da área da secção recta, A_2 , à altura de 100 m:
 $A_2 = \frac{v_1}{v_2} A_1 \Rightarrow A_2 = \frac{55,6}{33,0} \times 8,99 \times 10^{-3} \Leftrightarrow A_2 = 1,51 \times 10^{-2} \text{ m}^2$

41. $d_1 = 6,0 \text{ cm} \Rightarrow r_1 = 3,0 \text{ cm}; r_2 = 1,5 \text{ cm}$
 $v_1 = 2,0 \text{ m s}^{-1}$
 Pela equação de continuidade, é:
 $A_1 v_1 = A_2 v_2 \Leftrightarrow v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1 \Leftrightarrow v_2 = \frac{\pi r_1^2}{\pi r_2^2} v_1 \Leftrightarrow v_2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 v_1$
 $v_2 = \left(\frac{3,0}{1,5}\right)^2 \times 2,0 \Leftrightarrow v_2 = 8,0 \text{ m s}^{-1}$

41.2 $\phi = A_1 v_1$
 $\phi = \pi r_1^2 v_1$
 $\phi = \pi \times (3,0 \times 10^{-2})^2 \times 2,0 \Leftrightarrow \phi = 5,7 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$

41.3. Aplicando a equação de Bernoulli a um escoamento horizontal, vem:
 $\rho_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = \rho_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \Leftrightarrow \rho_1 - \rho_2 = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2)$
 $\Delta \rho = \frac{1}{2} \times 1,0 \times 10^3 \times (8,0^2 - 2,0^2) \Leftrightarrow \Delta \rho = 3,0 \times 10^4 \text{ Pa}$

42. $d_1 = 0,15 \text{ m} \Rightarrow r_1 = 0,075 \text{ m}$
 $d_2 = 0,10 \text{ m} \Rightarrow r_2 = 0,050 \text{ m}$
 Partindo da definição de caudal volumétrico, podemos calcular o módulo da velocidade, v_1 :
 $\phi = A_1 v_1 \Leftrightarrow v_1 = \frac{\phi}{A_1} \Leftrightarrow v_1 = \frac{\phi}{\pi r_1^2}$
 $v_1 = \frac{2,8 \times 10^{-2}}{\pi \times 0,075^2} \Leftrightarrow v_1 = 1,6 \text{ m s}^{-1}$
 Aplicando a equação de continuidade, podemos calcular o módulo da velocidade, v_2 :
 $A_1 v_1 = A_2 v_2 \Leftrightarrow v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1 \Leftrightarrow v_2 = \frac{\pi r_1^2}{\pi r_2^2} v_1 \Leftrightarrow v_2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 v_1$
 $v_2 = \left(\frac{0,075}{0,050}\right)^2 \times 1,6 \Leftrightarrow v_2 = 3,6 \text{ m s}^{-1}$

Aplicando a equação de Bernoulli a um escoamento horizontal, vem:
 $\Delta \rho = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2)$
 $\Delta \rho = \frac{1}{2} \times 1,0 \times 10^3 \times (3,6^2 - 1,6^2) \Leftrightarrow \Delta \rho = 5,2 \times 10^3 \text{ Pa}$
 $\Delta \rho = 5,2 \times 10^3 \times \frac{760 \text{ mmHg}}{1,013 \times 10^5 \text{ Pa}} \Leftrightarrow \Delta \rho = 39 \text{ mmHg}$

43. $v_1 = 0,50 \text{ m s}^{-1}$
 $\rho_1 = 3,0 \text{ atm} = 3,0 \times 10^5 \text{ Pa}$
 $d_1 = 4,0 \text{ cm} \Rightarrow r_1 = 2,0 \text{ cm}$
 $d_2 = 2,6 \text{ cm} \Rightarrow r_2 = 1,3 \text{ cm}$
 $y_1 = 0$
 $y_2 = 5,0 \text{ m}$

Pela equação de continuidade, é:
 $A_1 v_1 = A_2 v_2 \Leftrightarrow v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1 \Leftrightarrow v_2 = \frac{\pi r_1^2}{\pi r_2^2} v_1 \Leftrightarrow v_2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 v_1$
 $v_2 = \left(\frac{2,0}{1,3}\right)^2 \times 0,50 \Leftrightarrow v_2 = 1,2 \text{ m s}^{-1}$
 Pela equação de Bernoulli, é:
 $\rho_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = \rho_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$
 $\rho_2 = \rho_1 + \frac{1}{2} \rho (v_1^2 - v_2^2) - \rho g y_2$
 $\rho_2 = 3,0 \times 10^5 + \frac{1}{2} \times 1,0 \times 10^3 (0,50^2 - 1,2^2) - 1,0 \times 10^3 \times 10 \times 5,0 \Leftrightarrow \rho_2 = 2,5 \times 10^5 \text{ Pa}$

44. $r_1 = 3,0 \text{ mm}$
 $r_2 = 2,0 \text{ mm}$
 $v_1 = 10 \text{ cm s}^{-1}$
 Pela equação de continuidade, é:
 $A_1 v_1 = A_2 v_2 \Rightarrow v_2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 v_1$
 $v_2 = \left(\frac{3,0}{2,0}\right)^2 \times 10 \Leftrightarrow v_2 = 22,5 \text{ cm s}^{-1} = 22 \text{ cm s}^{-1}$

44.2. Pela equação de Bernoulli, é:
 $\Delta \rho = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2)$
 $\Delta \rho = \frac{1}{2} \times 1,05 \times 10^3 \times (22,5^2 - 10^2) \times 10^{-4} \Leftrightarrow \Delta \rho = 21 \text{ Pa}$

Unidade 5 – Gases. Termodinâmica (págs. 164 a 167)

1. (B).
 2.
 2.1. $pV = nRT$
 Pelo gráfico, a transformação é isotérmica:
 $pV = \text{constante} \Rightarrow p_1 V_1 = p_2 V_2 \Leftrightarrow V_2 = \frac{p_1}{p_2} V_1$
 $V_2 = \frac{6,0}{2,0} \times 1,0 \Leftrightarrow V_2 = 3,0 \text{ L}$
 2.2. $pV = nRT \Leftrightarrow T = \frac{pV}{nR}$
 $T = \frac{6,0 \times 1,0}{1,5 \times 0,082} \Leftrightarrow T = 49 \text{ K}$

3. (B).
 4. $\begin{cases} n_1 \\ p_1 = 0,5 \text{ atm} \\ V_1 = 20 \text{ dm}^3 \\ T_1 = 30 \text{ }^\circ\text{C} = 303 \text{ K} \end{cases} \quad \begin{cases} n_2 = n_1 \\ p_2 = ? \\ V_2 = 10 \text{ dm}^3 \\ T_2 = 100 \text{ }^\circ\text{C} = 373 \text{ K} \end{cases}$
 $pV = nRT \Leftrightarrow \frac{pV}{T} = nR$
 $\frac{pV}{T} = \text{constante}$
 $\frac{p_2 V_2}{T_2} = \frac{p_1 V_1}{T_1} \Leftrightarrow p_2 = \frac{T_2 V_1}{T_1 V_2} p_1$
 $p_2 = \frac{373 \times 20}{303 \times 10} \times 0,5 \Leftrightarrow p_2 = 1,2 \text{ atm}$

5. (C).
 $V = 300 \text{ mm}^3 = 300 \times 10^{-3} \text{ m}^3$
 $T_1 = 20 \text{ }^\circ\text{C} = 293 \text{ K}$
 $T_2 = 40 \text{ }^\circ\text{C} = 313 \text{ K}$
 Numa transformação isobárica:
 $\frac{V}{T} = \text{constante} \Rightarrow \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \Leftrightarrow V_2 = \frac{T_2}{T_1} V_1 \Rightarrow V_2 = \left(\frac{313}{293}\right) \times 300 \times 10^{-3}$
 6. (A).
 $T_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C} = 293 \text{ K}; T_1 = 100 \text{ }^\circ\text{C} = 373 \text{ K}$
 $pV = nRT$

O volume é constante \Rightarrow transformação isovolumétrica:

$$\frac{p}{T} = \text{constante} \Rightarrow \frac{p_0}{T_0} = \frac{p_1}{T_1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p_1 = \frac{T_1}{T_0} p_0 \Rightarrow p_1 = \frac{373}{293} p_0 \Leftrightarrow p_1 \approx \frac{5}{4} p_0$$

7. (D).

$$T_1 = 20^\circ\text{C} = 293\text{ K}; \quad T_2 = 100^\circ\text{C} = 373\text{ K}$$

$$pV = nRT$$

Numa transformação isobárica:

$$\frac{V}{T} = \text{constante} \Rightarrow \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \Leftrightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

Sendo $\rho = \frac{m}{V}$ e a massa constante \Rightarrow

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 \Leftrightarrow \rho_2 = \frac{V_1}{V_2} \rho_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho_2 = \frac{T_1}{T_2} \rho_1 \Rightarrow \rho_2 = \frac{293}{373} \rho_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho_2 = 0,786 \rho_1$$

8.

8.1. $n = 1,0\text{ mol}; p = 3,0\text{ atm}; T = 22^\circ\text{C} = 295\text{ K}$

$$pV = nRT \Leftrightarrow V = \frac{nRT}{p}$$

$$V = \frac{1,0 \times 0,082 \times 295}{3,0} \Leftrightarrow V = 8,1\text{ L}$$

8.2. $pV = nRT$

Numa transformação isotérmica:

$$pV = \text{constante} \Rightarrow p_1 V_1 = p_2 V_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V_2 = \frac{p_1}{p_2} V_1$$

$$V_2 = \frac{p_1}{\frac{1}{2} p_1} V_1 \Leftrightarrow V_2 = 2V_1 \Leftrightarrow V_2 = 16,2\text{ L}$$

8.3. $pV = nRT$

Numa transformação isobárica:

$$\frac{V}{T} = \text{constante} \Rightarrow \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow T_2 = \frac{V_2}{V_1} T_1$$

$$T_2 = \frac{2V_1}{V_1} T_1 \Leftrightarrow T_2 = 2T_1 \Leftrightarrow T_2 = 590\text{ K}$$

8.4. (B).

9. (C).

$$pV = nRT$$

Como o êmbolo está em equilíbrio, $p_A = p_B$, e como é condutor térmico:

$$T_A = T_B \Rightarrow \frac{V_A}{n_A} = \frac{V_B}{n_B} \Leftrightarrow V_A = \frac{n_A}{n_B} V_B$$

$$x A_{\text{base}} = \frac{3,0}{1,0} (20,0 - x) A_{\text{base}} \Leftrightarrow x = 15,0\text{ cm}$$

10. $W = -5000\text{ cal} = -20\,900\text{ J}; \Delta U = 0\text{ J}$

$$\Delta U = W + Q \Rightarrow Q = -20\,900\text{ J}$$

Como $Q < 0 \Rightarrow$ a energia transfere-se, como calor, do sistema para a vizinhança.

11.

11.1. $W = 0$

$W = p \Delta V$. Como o volume é constante $\Rightarrow W = 0\text{ J}$

11.2. $Q = -3,0 \times 10^3\text{ J}; W = 0$

$$\Delta U = W + Q \Rightarrow \Delta U = -3,0 \times 10^3\text{ J}$$

11.3. (D).

12. (D).

13. (B).

$$W = 500\text{ J}; \Delta U = 300\text{ J}$$

$$\Delta U = W + Q \Rightarrow Q = -800\text{ J}$$

14. (A).

$$W = -500\text{ J}; Q = 0$$

$$\Delta U = W + Q \Rightarrow \Delta U = -500\text{ J}$$

15. (C).

Unidade 6 – Oscilações mecânicas (págs. 188 a 193)

1.

1.1. $F = k \Delta \ell \Leftrightarrow k = \frac{F}{\Delta \ell}$

Neste caso, a força deformadora é o peso do corpo suspenso, pelo que: $k = \frac{mg}{\Delta \ell}$

Seja d o declive da recta representada no gráfico. Virá: $d = \frac{\Delta \ell}{m}$, pelo que: $k = \frac{g}{d}$

$$d = \frac{0,2 - 0,1}{2,0 \times 10^{-2} - 1,0 \times 10^{-2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d = 1 \times 10^{-3}\text{ m g}^{-1} \Leftrightarrow d = 1\text{ m kg}^{-1}$$

$$\text{Assim: } k = \frac{10}{1} \Leftrightarrow k = 10\text{ N m}^{-1}$$

$$t = \frac{1}{8} T \Rightarrow t = \frac{1}{8} \times \frac{2\pi}{5} \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{20}$$

$$v = \frac{dy}{dt} \Rightarrow v = 25 \times 10^{-2} \cos\left(5,0t + \frac{3\pi}{2}\right)$$

Substituindo:

$$v = 25 \times 10^{-2} \cos\left(5,0 \times \frac{\pi}{20} + \frac{3\pi}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v = 25 \times 10^{-2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v = 25 \times 10^{-2} \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v = 1,8 \times 10^{-1}\text{ m s}^{-1}$$

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow a = -125 \times 10^{-2} \sin\left(5,0t + \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\text{Substituindo: } a = -125 \times 10^{-2} \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = +8,8 \times 10^{-1}\text{ m s}^{-2}$$

2.

2.1. $F = k \Delta \ell \Leftrightarrow \Delta \ell = \frac{F}{k} \Leftrightarrow \Delta \ell = \frac{mg}{k}$

$$\text{Assim: } \frac{\Delta \ell_T}{\Delta \ell_L} = \frac{m g_T}{m g_L} \Leftrightarrow \frac{\Delta \ell_T}{\Delta \ell_L} = \frac{g_T}{g_L}$$

$$\text{Substituindo: } \frac{\Delta \ell_T}{\Delta \ell_L} = \frac{10}{1,6} \Leftrightarrow \frac{\Delta \ell_T}{\Delta \ell_L} = 6,3$$

2.2.

2.2.1. $m = 40\text{ g} = 40 \times 10^{-3}\text{ kg}$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \Leftrightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{4,0 \times 10^{-3}}{4,0}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow T = 6,3 \times 10^{-1}\text{ s}$$

2.2.2. $A = 5,0\text{ cm} = 5,0 \times 10^{-2}\text{ m}$

Sendo $y = A \sin\left(\frac{2\pi}{T} t + \phi_0\right)$ e, como para

$t = 0, y = -A$, conclui-se que $\phi_0 = \frac{3\pi}{2}$.

Então, uma vez que $A = 5,0 \times 10^{-2}\text{ m}$,

$$y = 5,0 \times 10^{-2} \sin\left(\frac{2\pi}{T} t + \frac{3\pi}{2}\right)$$

Assim, para o instante considerado:

$$y = 5,0 \times 10^{-2} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \times \frac{1}{4} T + \frac{3\pi}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = 5,0 \times 10^{-2} \sin(2\pi) \Leftrightarrow y = 0$$

como seria de esperar, uma vez que o corpo se encontra na posição de equilíbrio.

Assim, como $E_p = \frac{1}{2} k y^2$, conclui-se que $E_p = 0$, pelo que, nesse instante, a E_c será máxima, isto é, $E_{c_{\text{max}}} = \frac{1}{2} k A^2$.

$$E_{c_{\text{max}}} = \frac{1}{2} \times 4,0 \times (5,0 \times 10^{-2})^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E_{c_{\text{max}}} = 5,0 \times 10^{-3}\text{ J}$$

1.2.

1.2.1. $A = 5,0 \times 10^{-2}\text{ m}$

Como $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ e $m = 4,0 \times 10^{-1}\text{ kg}$ virá:

$$\omega = \sqrt{\frac{10}{4,0 \times 10^{-1}}} \Leftrightarrow \omega = 5,0\text{ rad s}^{-1}$$

No instante inicial, $y_0 = -5,0 \times 10^{-2}\text{ m}$, pelo

que: $-5,0 \times 10^{-2} = 5,0 \times 10^{-2} \sin \phi_0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -1,0 = \sin \phi_0 \Rightarrow \phi_0 = \frac{3\pi}{2}$$

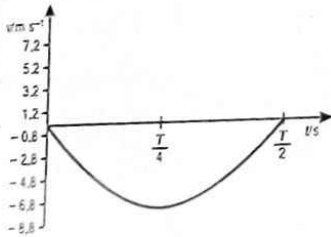
1.2.2. $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \Leftrightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{4,0 \times 10^{-1}}{10}} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow T = \frac{2\pi}{5}$$

3. 3.1. Mola elástica.

3.2. $x_m = 18 \text{ cm} = 18 \times 10^{-2} \text{ m}$
 Pela análise do gráfico, conclui-se que $F(x) = -kx$.
 Substituindo por um par de valores retirados do gráfico, determina-se k :
 $0,72 = -k \times (-18 \times 10^{-2}) \Leftrightarrow k = 4,0 \text{ N m}^{-1}$
 Como $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, virá: $\omega = \sqrt{\frac{4,0}{2,5 \times 10^{-3}}} \Leftrightarrow \omega = 40 \text{ rad s}^{-1}$
 No instante $t = 0$, $x = 18 \text{ cm} = 18 \times 10^{-2} \text{ m}$, pelo que: $r(0) = x_m \sin \varphi \Rightarrow 18 \times 10^{-2} = 18 \times 10^{-2} \sin \varphi \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$

3.2.2. $v(t) = \frac{d}{dt} r(t)$
 Como $r(t) = 18 \times 10^{-2} \sin(40t + \frac{\pi}{2})$, virá:
 $v(t) = 7,2 \cos(40t + \frac{\pi}{2}) \text{ (SI)}$
 Facilmente se concluirá que: $v(0) = v(\frac{T}{2}) = 0$.



3.2.3. $W_{F(x)} = -\Delta E_p = -\frac{1}{2} k \Delta x^2$

Substituindo:

$W_{F(x)} = -\frac{1}{2} \times 4,0 \times [(18 \times 10^{-2})^2 - 0] \Leftrightarrow W_{F(x)} = -6,5 \times 10^{-2} \text{ J}$

Entre estas posições, equilíbrio e extrema, a velocidade varia do valor máximo a zero.

$v_{máx} = \omega A$
 $v_{máx} = 40 \times 18 \times 10^{-2} \Leftrightarrow v_{máx} = 7,2 \text{ m s}^{-1}$

$\Delta E_c = \frac{1}{2} m (0 - v_{máx}^2)$

$\Delta E_c = \frac{1}{2} \times 2,5 \times 10^{-3} \times (0 - 7,2^2) \Leftrightarrow \Delta E_c = -6,5 \times 10^{-2} \text{ J}$

Verifica-se, assim, que: $W_{F(x)} = \Delta E_c$

4.

4.1. A partir da análise do gráfico podemos concluir que: $s_m = 20 \text{ cm}$ e $T = 2,0 \text{ s}$

Como $\omega = \frac{2\pi}{T}$, virá: $\omega = \pi \text{ rad s}^{-1}$

A evolução temporal da coordenada $s(t)$ será: $s(t) = 0,20 \cos(\pi t) \text{ (SI)}$

4.2. $\vec{F}_n = \vec{F}_1 + \vec{F}_n$

$$\begin{cases} F_1 = m a_1 \Leftrightarrow F_1 = m \frac{d^2 s}{dt^2} \\ F_n = m a_n \Leftrightarrow F_n = m \frac{v^2}{L} \end{cases}$$

Cálculo de a_1 :

$v = \frac{ds}{dt}$ e $a_1 = \frac{dv}{dt} \Rightarrow v = -s_m \omega \sin(\omega t)$
 $a_1 = -s_m \omega^2 \cos(\omega t) \Rightarrow a_1 = -0,20\pi^2 \cos(\pi t)$

Cálculo de a_n : $a_n = \frac{v^2}{L}$

$a_n = \frac{0,20^2 \times \pi^2 \sin^2(\pi t)}{1,0} \Leftrightarrow a_n = 4\pi^2 \times 10^{-2} \sin^2(\pi t)$

Finalmente, substituindo tudo, teremos:

$$\begin{cases} F_1 = m a_1 \Leftrightarrow \\ F_n = m a_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F_1 = 4,0 \times 10^{-3} \times (0,20\pi^2 \cos(\pi t)) \\ F_n = 4,0 \times 10^{-3} \times (4\pi^2 \times 10^{-2} \sin^2(\pi t)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F_1 = 8,0\pi^2 \times 10^{-3} \cos(\pi t) \\ F_n = 1,6\pi^2 \times 10^{-4} \sin^2(\pi t) \end{cases} \text{ (SI)}$$

5.

5.1. A equação da elongação é do tipo $x = A \sin(\omega t)$.

Assim: $A = 2,0 \times 10^{-3} \text{ m}$ e $\omega = \pi \text{ rad s}^{-1}$

Como $\omega = \frac{2\pi}{T}$, virá $T = 2 \text{ s}$, e, atendendo

a que $f = \frac{1}{T}$, $f = 0,5 \text{ Hz}$

5.2. $v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow v = 2,0\pi \times 10^{-3} \cos(\pi t) \text{ (SI)}$

$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow a = -2,0\pi^2 \times 10^{-3} \sin(\pi t) \text{ (SI)}$

5.3.

5.3.1. O instante pedido poderá ser determinado substituindo x , na equação da elongação, por $-2,0 \times 10^{-3} \text{ m}$.

$-2,0 \times 10^{-3} = 2,0 \times 10^{-3} \sin(\pi t) \Leftrightarrow \sin(\pi t) = -1,0 \Leftrightarrow \sin(\pi t) = \sin(\frac{3\pi}{2}) \Rightarrow t = 1,5 \text{ s}$

5.3.2. $v_{1,5} = 2,0\pi \times 10^{-3} \cos(\pi \times 1,5) \Leftrightarrow v_{1,5} = 0 \text{ m s}^{-1}$

$a_{1,5} = -2,0\pi^2 \times 10^{-3} \sin(\pi \times 1,5) \Leftrightarrow a_{1,5} = 2,0 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-2}$

5.3.3. Sejam t_1 e t_2 os instantes em que a partícula atinge pela 1.ª e 2.ª vez, respectivamente, a elongação máxima positiva.

Será, então: $2,0 \times 10^{-3} = 2,0 \times 10^{-3} \sin(\pi t_1) \Leftrightarrow \sin(\pi t_1) = 1,0 \Leftrightarrow \sin(\pi t_1) = \sin(\frac{\pi}{2}) \Rightarrow t_1 = 0,5 \text{ s}$

$t_2 = t_1 + T \Rightarrow t_2 = 0,5 + 2 \Leftrightarrow t_2 = 2,5 \text{ s}$

5.3.4. $v_{2,5} = 2,0\pi \times 10^{-3} \cos(\pi \times 2,5) \Leftrightarrow v_{2,5} = 0 \text{ m s}^{-1}$

$a_{2,5} = -2,0\pi^2 \times 10^{-3} \sin(\pi \times 2,5) \Leftrightarrow a_{2,5} = -2,0 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-2}$

5.4. Conforme calculado na alínea 5.3.3, no instante $t = 0,5 \text{ s}$, a partícula encontra-se na elongação máxima positiva. Assim:

$x_{0,5} = 2,0 \times 10^{-3} \text{ m}; v_{0,5} = 0$

$a_{0,5} = -2,0 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-2}$

Como $t_2 - t_1 = T$, então:

$x_{2,5} = 2,0 \times 10^{-3} \text{ m}; v_{2,5} = 0$

$a_{2,5} = -2,0 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-2}$

6.

6.1. A equação do movimento é do tipo:

$x = A \sin(\omega t + \varphi_0)$

A expressão da velocidade máxima é:

$v_{máx} = \omega A$, pelo que $\omega = \frac{v_{máx}}{A}$

Assim: $\omega = \frac{2\pi}{4,0 \times 10^{-2}} \Leftrightarrow \omega = 50\pi \text{ rad s}^{-1}$

Como a partícula se encontra numa posição extrema, no instante inicial, será:

$\varphi_0 = \pm \frac{\pi}{2} \text{ rad}$

Finalmente: $x = 4,0 \times 10^{-2} \sin(50\pi t \pm \frac{\pi}{2}) \text{ (SI)}$

6.2. $x_{0,02} = 4,0 \times 10^{-2} \sin(50\pi \times 0,02 \pm \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow x_{0,02} = \pm 4,0 \times 10^{-2} \text{ m}$

6.3. Numa das posições extremas, o módulo da aceleração é máximo:

$a_{máx} = A \omega^2$

Assim:

$a = 4,0 \times 10^{-2} \times (50\pi)^2 \Leftrightarrow a = 9,9 \times 10^2 \text{ m s}^{-2}$

7. $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$

$T = 2\pi \sqrt{\frac{40 \times 10^{-3}}{1,0 \times 10^2}} \Leftrightarrow T = 1,3 \times 10^{-1} \text{ s}$

$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$

$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1,0 \times 10^2}{40 \times 10^{-3}}} \Leftrightarrow f = 8,0 \text{ Hz}$

8. $T = 2 \times 1,00 = 2,00 \text{ s}$

$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \Leftrightarrow \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = \frac{\ell}{g} \Leftrightarrow \ell = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \times g$

Substituindo: $\ell = \left(\frac{2,00}{2\pi}\right)^2 \times 9,80 \Leftrightarrow \ell = 0,993 \text{ m}$

Substituindo:

$\ell = \left(\frac{2,00}{2\pi}\right)^2 \times 9,80 \Leftrightarrow \ell = 0,993 \text{ m}$

9.

9.1. Atendendo a que o corpo descreve um MHS, será:

$a = -\omega^2 x \Leftrightarrow a = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 x$

$a = -\left(\frac{2\pi}{0,25}\right)^2 \times 4,0 \times 10^{-2} \Leftrightarrow a = -25 \text{ m s}^{-2}$

O módulo da aceleração será, pois: $a = 25 \text{ m s}^{-2}$

9.2. $F = m a$

$F = 0,100 \times 25 \Leftrightarrow F = 2,5 \text{ N}$

10.

10.1. Cálculo da elongação no instante $t = 0,20$ s:

$$y_{0,20} = 2,0 \times 10^{-2} \sin\left(4\pi \times 0,20 + \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y_{0,20} = -1,6 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$E_p = \frac{1}{2} m \omega^2 y^2$$

$$E_p = \frac{1}{2} \times 40 \times 10^{-3} \times (4\pi)^2 \times (-1,6 \times 10^{-2})^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E_p = 8,1 \times 10^{-4} \text{ J}$$

10.2. $v = \frac{dy}{dt} \Rightarrow v = 8,0\pi \times 10^{-2} \cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$

$$v_{0,40} = 8,0\pi \times 10^{-2} \cos\left(4\pi \times 0,40 + \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v_{0,40} = 2,4 \times 10^{-1} \text{ m s}^{-1}$$

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

$$E_c = \frac{1}{2} \times 40 \times 10^{-3} \times (2,4 \times 10^{-1})^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E_c = 1,2 \times 10^{-3} \text{ J}$$

10.3. $E_m = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2$

$$E_m = \frac{1}{2} \times 40 \times 10^{-3} \times (4\pi)^2 \times (2,0 \times 10^{-2})^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E_m = 1,3 \times 10^{-3} \text{ J}$$

11.

11.1. $T = 2 \times 2,0 \Leftrightarrow T = 4,0$ s

$$A = 10 \text{ mm} = 10 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$f = \frac{1}{T} \Rightarrow f = 0,25 \text{ Hz}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{2} \text{ rad s}^{-1}$$

11.2. $x_0 = A \sin \varphi_0$

$$5,0 = 10 \sin \varphi_0 \Leftrightarrow \sin \varphi_0 = 0,50 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

11.3.

11.3.1. $x = 10 \times 10^{-3} \sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{6}\right)$ (SI)

11.3.2. $v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow v = 5\pi \times 10^{-3} \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{6}\right)$ (SI)

11.3.3. $a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow$

$$a = -2,5\pi^2 \times 10^{-3} \sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{6}\right)$$
 (SI)

11.4. $0 = 10 \times 10^{-3} \sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{6}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{6}\right) = \sin \pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{6}\right) = \pi \Leftrightarrow t = \frac{5}{3} \Leftrightarrow t = 1,7 \text{ s}$$

11.5. Há conservação da energia mecânica, pelo que E_m tem o mesmo valor em qualquer instante.

$$E_m = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2$$

$$E_m = \frac{1}{2} \times 50 \times 10^{-3} \times \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \times (10 \times 10^{-3})^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E_m = 6,2 \times 10^{-6} \text{ J}$$

12.

12.1. O módulo da aceleração do oscilador nos extremos da trajetória é dado por:

$$a = A\omega^2 \Leftrightarrow a = 4\pi^2 A f^2$$

$$\text{Assim, } f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{a}{A}}$$

Substituindo:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3,2 \times 10^2}{2,0 \times 10^{-2}}} \Leftrightarrow f = 20 \text{ Hz}$$

12.2. A energia do oscilador é dada por:

$$E_m = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \Leftrightarrow E_m = 2\pi^2 m f^2 A^2$$

Substituindo:

$$E_m = 2\pi^2 \times 4,0 \times 10^{-3} \times 20^2 \times (2,0 \times 10^{-2})^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E_m = 1,3 \times 10^{-2} \text{ J}$$

12.3. Cálculo da expressão de v , em função da posição x :

$$E_c = E_m - E_p$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = 2\pi^2 m f^2 A^2 - 2\pi^2 m f^2 x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = 2\pi f \sqrt{A^2 - x^2}$$

Na posição de equilíbrio, $x = 0$, a velocidade é máxima e dada por: $v_{\text{máx.}} = 2\pi f A$

Assim, na posição de equilíbrio:

$$v_{\text{máx.}} = 2\pi \times 20 \times 2,0 \times 10^{-2} \Leftrightarrow v_{\text{máx.}} = 2,5 \text{ m s}^{-1}$$

Por outro lado, na posição $x = 1,2$ cm, teremos:

$$v = 2\pi \times 20 \times \sqrt{(2,0 \times 10^{-2})^2 - (1,2 \times 10^{-2})^2}$$

$$\Leftrightarrow v = 2,0 \text{ m s}^{-1}$$

12.4.

12.4.1. $F = m a$

$$F = -4\pi^2 m f^2 A \sin(2\pi f t + \varphi_0)$$

Substituindo:

$$F = -4\pi^2 \times 4,0 \times 10^{-3} \times 20^2 \times 2,0 \times 10^{-2} \sin(2\pi \times 20 t + \varphi_0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F = -1,3 \sin(40\pi t + \varphi_0)$$
 (SI)

12.4.2. $F = -4\pi^2 m f^2 x$

Substituindo:

$$F = -4\pi^2 \times 4,0 \times 10^{-3} \times 20^2 x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F = -63 x$$
 (SI)

13.

13.1. O tempo correspondente a um ciclo completo equivale a um período.

Assim, como a velocidade máxima é

$$v_{\text{máx.}} = \frac{2\pi}{T} A, \text{ virá:}$$

$$2,0 = \frac{2\pi}{T} \times 1,0 \times 10^{-3} \Leftrightarrow T = 3,1 \times 10^{-3} \text{ s}$$

13.2. O número de ciclos que executa num segundo equivale à frequência. Assim, como a velocidade máxima é $v_{\text{máx.}} = 2\pi f A$,

$$2,0 = 2\pi f \times 1,0 \times 10^{-3} \Leftrightarrow f = 3,2 \times 10^2 \text{ Hz}$$

13.3. A equação da elongação é do tipo:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$x = 1,0 \times 10^{-3} \sin(2\pi \times 3,2 \times 10^2 t + \varphi_0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 1,0 \times 10^{-3} \sin(2,0 \times 10^3 t + \varphi_0)$$
 (SI)

14.

14.1. A afirmação é falsa. As oscilações não são amortecidas, uma vez que a amplitude é constante e as oscilações são harmónicas.

14.2. Como o intervalo de tempo entre posições extremas é de 0,50 s, é:

$$T = 2 \times 0,50 \Leftrightarrow T = 1,0 \text{ s} \Rightarrow f = 1,0 \text{ Hz}$$

$$A = 40 \times 10^{-3} \text{ m}$$

A equação da elongação é do tipo

$$x = A \sin(2\pi f t). \text{ Assim:}$$

$$x\left(\frac{5}{4}\right) = 40 \times 10^{-3} \sin\left(2\pi \times \frac{5}{4}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\left(\frac{5}{4}\right) = 40 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$x\left(\frac{3}{2}\right) = 40 \times 10^{-3} \sin\left(2\pi \times \frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow x\left(\frac{3}{2}\right) = 0$$

$$x\left(\frac{7}{4}\right) = 40 \times 10^{-3} \sin\left(2\pi \times \frac{7}{4}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\left(\frac{7}{4}\right) = -40 \times 10^{-3} \text{ m}$$

14.3. A energia mecânica do oscilador é dada por:

$$E_m = 2\pi^2 m f^2 A^2$$

Substituindo:

$$E_m = 2\pi^2 \times 100 \times 10^{-3} \times 1,0^2 \times (40 \times 10^{-3})^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E_m = 3,2 \times 10^{-2} \text{ J}$$

15.

15.1. O máximo afastamento da posição de equilíbrio equivale à amplitude. Como a equação do movimento é do tipo: $y = A \sin(2\pi f t)$, concluímos que $A = 4,0 \times 10^{-2}$ m.

15.2. O número de oscilações descritas num segundo equivale à frequência.

$$\text{Como, neste caso, } 2\pi f = \frac{\pi}{3}, \text{ então, } f = \frac{1}{6} \text{ Hz}$$

O número de oscilações descritas num minuto, n , será, então:

$$n = \frac{1}{6} \times 60 \Leftrightarrow n = 10$$

15.3. A distância percorrida pelo oscilador durante um período, s , será: $s = 4 A$

$$s = 4 \times 4,0 \times 10^{-2} \Leftrightarrow s = 1,6 \times 10^{-1} \text{ m}$$

16.

16.1. (D).

(A) Falsa. No instante inicial, a força elástica tem o sentido negativo do referencial.

(B) Falsa. $\frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{8} \Leftrightarrow T = 16$ s.

(C) Falsa. No instante $t = 0$ s, a aceleração é máxima.

(D) Verdadeira. No instante inicial, a elongação, x , é máxima. Consequentemente, a energia potencial, $\frac{1}{2} k x^2$, é máxima.

16.2. O módulo da velocidade do corpo é máximo, quando: $\left| \cos\left(\frac{\pi}{8}t + \frac{\pi}{2}\right) \right| = 1$

O módulo da velocidade máxima do corpo é: $|v_{\max}| = \omega A \Leftrightarrow |v_{\max}| = \frac{\pi}{8} A$

17. 17.1. Como a expressão da aceleração é do tipo $a = -kx$, sendo neste caso k constante e igual a $4\pi^2$, então a partícula descreve um MHS.

17.2. A equação da elongação é do tipo: $x = A \sin(\omega t + \varphi_0)$

Neste caso, $\varphi_0 = 0$, pelo que a equação será $x = A \sin(\omega t)$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow a = -\omega^2 x$$

Comparando este resultado com o dado, $a = -4\pi^2 x$, conclui-se que: $\omega = 2\pi \text{ rad s}^{-1}$

Assim, a equação do movimento é:

$$x = 8 \sin(2\pi t) \quad (\text{SI})$$

18.

$$18.1. \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Atendendo a que:

$$k = 2,0 \text{ N cm}^{-1} = 2,0 \times 10^2 \text{ N m}^{-1}, \text{ obtém-se:}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2,0 \times 10^2}{5,0}} \Leftrightarrow \omega = 6,3 \text{ rad s}^{-1}$$

$$18.2. T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Substituindo:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{5,0}{2,0 \times 10^2}} \Leftrightarrow T = 9,9 \times 10^{-1} \text{ s}$$

$$18.3. |\vec{F}_s| = kx$$

$$|\vec{F}_s| = 2,0 \times 10^2 \times 10 \times 10^{-2} \Leftrightarrow |\vec{F}_s| = 20 \text{ N}$$

19.

19.1. A frequência das oscilações horizontais é dada pela expressão:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Como, ao colocar-se o pêndulo a oscilar verticalmente, a massa m e a constante elástica k são as mesmas, a frequência não é alterada.

$$\text{Assim: } f_{\text{vertical}} = f_{\text{horizontal}} = 4,0 \text{ Hz}$$

9.2. Como $\vec{F}_s + \vec{F}_g = \vec{0}$, virá: $F_s - F_g = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow k|y| - mg = 0 \Leftrightarrow k = \frac{mg}{|y|}$$

Substituindo k na expressão da frequência, virá:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{mg}{|y|}} \Leftrightarrow f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{|y|}}$$

Assim:

$$4,0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{10}{|y|}} \Leftrightarrow |y| = 1,6 \times 10^{-2} \text{ m}$$

20.

20.1. O período das oscilações do berlinde é

dado por: $T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}}$, onde R é o raio de curvatura.

Resolvendo em ordem a R :

$$R = \frac{gT^2}{4\pi^2}$$

$$\text{Assim: } R = \frac{10 \times 2,0^2}{4\pi^2} \Leftrightarrow R = 1,0 \text{ m}$$

20.2. No ponto mais baixo da trajectória:

$$a = a_n (a_t = 0)$$

Como $a_n = \frac{v^2}{R}$, teremos de calcular o valor da velocidade, v , no ponto mais baixo.

Como há conservação da energia mecânica,

$$\text{vem: } mgh = \frac{1}{2}mv^2 \Leftrightarrow v^2 = 2gh$$

$$\text{Assim: } a_n = \frac{2gh}{R} \Rightarrow$$

$$a_n = \frac{2 \times 10 \times 5,0 \times 10^{-2}}{1,0} \Leftrightarrow a_n = 1,0 \text{ m s}^{-2}$$

20.3. No ponto mais alto da trajectória:

$$a = a_t (a_n = 0)$$

Nesse ponto, $a_t = g \sin \theta_{\max}$, onde θ_{\max} é a amplitude angular máxima.

Partindo da relação $h = R - R \cos \theta_{\max}$, obtém-se: $5,0 \times 10^{-2} = 1,0 - 1,0 \cos \theta_{\max} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \cos \theta_{\max} = 0,95$

Da relação fundamental da trigonometria, resulta:

$$\sin \theta_{\max} = \sqrt{1 - 0,95^2} \Leftrightarrow \sin \theta_{\max} = 0,31$$

$$\text{Assim: } a_t = g \sin \theta_{\max} \Rightarrow a_t = 10 \times 0,31 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_t = 3,1 \text{ m s}^{-2}$$

21.

$$21.1. |\vec{F}| = kx \Leftrightarrow k = \frac{|\vec{F}|}{x}$$

$$\text{Substituindo: } k = \frac{7,2 \times 10^{-1}}{4,5 \times 10^{-2}} \Leftrightarrow k = 16 \text{ N m}^{-1}$$

21.2. No momento em que a mola é solta $x = A$.

Como $|\vec{F}| = kx$, virá, para o instante referido:

$$|\vec{F}| = kA$$

$$|\vec{F}| = 16 \times 20 \times 10^{-2} \Leftrightarrow |\vec{F}| = 3,2 \text{ N}$$

21.3. A equação pedida é do tipo: $x = A \sin(\omega t + \varphi_0)$

$$A = 0,20 \text{ m}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{16}{1,0}} \Leftrightarrow \omega = 4,0 \text{ rad s}^{-1}$$

$$x = 0,20 \sin(4,0t + \varphi_0)$$

$$x_0 = 0,20 \text{ m} \Rightarrow 0,20 \sin \varphi_0 \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Finalmente, teremos:

$$x = 0,20 \sin\left(4,0t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{SI})$$

$$21.4. T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\text{Substituindo: } T = 2\pi \sqrt{\frac{1,0}{16}} \Leftrightarrow T = 1,6 \text{ s}$$

21.5. O máximo afastamento da posição de equilíbrio é 20 cm.

$$21.6. v_{\max} = \omega A$$

$$v_{\max} = 4,0 \times 0,20 \Leftrightarrow v_{\max} = 0,80 \text{ m s}^{-1}$$

$$a_{\max} = \omega^2 A$$

$$a_{\max} = 4,0^2 \times 0,20 \Leftrightarrow a_{\max} = 3,2 \text{ m s}^{-2}$$

21.7.

21.7.1. Meio caminho entre a posição inicial e a posição de equilíbrio equivale a $x = 0,10 \text{ m}$.

Como: $v = \omega \sqrt{A^2 - x^2}$, virá:

$$v = 4,0 \times \sqrt{0,20^2 - 0,10^2} \Leftrightarrow v = 0,69 \text{ m s}^{-1}$$

$$21.7.2. a = \omega^2 x$$

$$\text{Substituindo: } a = 4,0^2 \times 0,10 \Leftrightarrow a = 1,6 \text{ m s}^{-2}$$

$$21.7.3. E_c = \frac{1}{2}mv^2 \Leftrightarrow E_c = \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - x^2)$$

Substituindo:

$$E_c = \frac{1}{2} \times 1,0 \times 4,0^2 \times (0,20^2 - 0,10^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E_c = 0,24 \text{ J}$$

$$21.7.4. E_p = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

$$\text{Substituindo: } E_p = \frac{1}{2} \times 1,0 \times 4,0^2 \times 0,10^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E_p = 8,0 \times 10^{-2} \text{ J}$$

$$21.8. E_m = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$$

Substituindo:

$$E_m = \frac{1}{2} \times 1,0 \times 4,0^2 \times 0,20^2 \Leftrightarrow E_m = 0,32 \text{ J}$$

Nota: Poder-se-ia ter obtido o mesmo resultado somando as respostas obtidas nas duas alíneas anteriores.

22.

$$22.1. a_{\max} = \omega^2 A \Leftrightarrow a_{\max} = 4\pi^2 f^2 A$$

$$a_{\max} = 4\pi^2 \times 2,0^2 \times 0,10 \Leftrightarrow a_{\max} = 16 \text{ m s}^{-2}$$

$$v_{\max} = \omega A \Leftrightarrow v_{\max} = 2\pi f A$$

$$v_{\max} = 2\pi \times 2,0 \times 0,10 \Leftrightarrow v_{\max} = 1,3 \text{ m s}^{-1}$$

22.2. Como $v = 2\pi f \sqrt{A^2 - x^2}$, virá:

$$v = 2\pi \times 2,0 \times \sqrt{0,10^2 - 0,050^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v = 1,1 \text{ m s}^{-1}$$

Por outro lado, como $a = 4\pi^2 f^2 x$, virá:

$$a = 4\pi^2 \times 2,0^2 \times 0,050 \Leftrightarrow a = 7,9 \text{ m s}^{-2}$$

$$22.3. x = 0,10 \sin(4\pi t) \quad (\text{SI})$$

$$x = 5,0 \text{ cm} = 0,050 \text{ m}$$

$$0,050 = 0,10 \sin(4\pi t)$$

$$\sin(4\pi t) = 0,50 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\pi t = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow t = 4,2 \times 10^{-2} \text{ s}$$

▶ FORMULÁRIO

- **Frequência e período de uma onda**

$$f = \frac{1}{T} \text{ e } T = \frac{1}{f}$$

- **Velocidade de propagação da onda** $v = \frac{\lambda}{T}$

- **Velocidade de propagação das ondas electromagnéticas no vazio**

$$c = \frac{\lambda}{T} \text{ ou } c = \lambda f; c = 3,00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$$

- **Equação fundamental da calorimetria**

$$Q = m c \Delta T$$

- **Calor específico ou capacidade térmica mássica**

$$c = \frac{Q}{m \Delta T}$$

- **Capacidade térmica** $C = m c = \frac{Q}{\Delta T}$

- **Lei de Stefan-Boltzmann**

$$I = \sigma T^4; \sigma = 5,670 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$$

- **Intensidade da radiação, I (energia emitida por unidade de tempo e por unidade de área)**

$$\frac{E}{A \Delta t} = \sigma T^4 \Leftrightarrow E = \sigma \Delta t A T^4$$

- **Potência emitida**

$$\frac{P}{A} = e \sigma T^4 \Leftrightarrow P = e \sigma A T^4$$

- **Potência total emitida ($T_0 < T$)** $P = e \sigma A (T^4 - T_0^4)$

- **Lei de Wien ou Lei do Deslocamento de Wien**

$$\lambda_{\text{máx.}} T = 2,898 \times 10^{-3}$$

- **Energia de um fóton**

$$E = h f; h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J s}$$

- **Frequência-limite ou limiar** $f_0 = \frac{\phi}{h}$

- **Equação de Einstein para o efeito fotoelétrico**

$$E = \phi + E_{c_{\text{máx.}}} \Leftrightarrow E_{c_{\text{máx.}}} = E - \phi \Leftrightarrow \frac{1}{2} m_0 v_{\text{máx.}}^2 = h f - \phi$$

- **Potencial mínimo necessário para conseguir parar todos os fotoelectrões**

$$E_{c_{\text{máx.}}} = e U_0$$

- **Potencial de paragem**

$$h f = \phi + e U_0 \Leftrightarrow U_0 = \frac{h}{e} f - \frac{\phi}{e}$$

- **Energia potencial eléctrica**

$$e U = \frac{1}{2} m v^2 = h f_{\text{máx.}} = \frac{h c}{\lambda_{\text{min.}}}$$

- **Relação de De Brogli** $\lambda = \frac{h}{p}$

- **Energia dos níveis no átomo de hidrogénio**

$$E_n = -\frac{13,6}{n^2} \text{ eV} \text{ ou } E_n = -\frac{2,176 \times 10^{-18}}{n^2} \text{ J}$$

- **Relação de Planck-Einstein**

$$\Delta E = h f \Leftrightarrow E_j - E_i = h f \Leftrightarrow f = \frac{E_j - E_i}{h}$$

- **Lei do Decaimento Radioactivo** $N = N_0 e^{-\lambda t}$

- **Taxa de decaimento**

$$R = \lambda N_0 e^{-\lambda t} \Leftrightarrow R = \lambda N \text{ ou}$$

$$R = R_0 e^{-\lambda t} \text{ com } R_0 = \lambda N_0$$

- **Vida média de um núcleo** $\tau = \frac{1}{\lambda}$

- **Período de decaimento ou tempo de semivida ou período de semidesintegração**

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} \Leftrightarrow T_{1/2} = \frac{0,693}{\lambda}$$

- **Massa volúmica ou densidade** $\rho = \frac{m}{V}$

- **Densidade relativa** $d = \frac{\rho_{\text{material}}}{\rho_{\text{padrão}}}$

- **Pressão** $p = \frac{F}{A}$

- **Lei Fundamental da Hidrostática** $p_B = p_A + \rho g h$

- **Lei de Pascal** $\Delta p_1 = \Delta p_2 \Rightarrow \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$

- **Lei de Arquimedes** $l = \rho g V \text{ ou } l = m g$

- **Equação de continuidade** $A v = \text{constante}$

- **Caudal em volume ou caudal volumétrico**

$$\phi = \frac{\Delta V}{\Delta t} \text{ e } \phi = A v$$

- **Equação de Bernoulli ou equação fundamental da Hidrodinâmica**

$$p + \rho g y + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{constante}$$

- **Lei de Boyle-Mariotte**

$$p V = k \text{ (T e n constantes)}$$

- **Lei de Charles ou de Gay-Lussac**

$$V = a T \text{ (p e n constantes)}$$

- **Princípio de Avogadro**

$$V \propto n \text{ (T e p constantes)}$$

• **Equação de estado do gás ideal**

$$pV = nRT; R = 8,3144 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$$

• **Trabalho termodinâmico** $W_{F_{\text{sis.}}}^- = p \Delta V$

• **Primeira lei da Termodinâmica** $\Delta U = W + Q$

• **Varição de entropia num processo isotérmico**

$$\Delta S = \frac{Q}{T}$$

• **Lei de Hooke** $F = -kx$

• **Equação do movimento harmónico simples**

$$x = A \sin(\omega t + \varphi)$$

• **Segunda Lei de Newton para o movimento harmónico simples**

$$-kx = m \frac{d^2 x}{dt^2}, \text{ sendo } a = \frac{d^2 x}{dt^2} \text{ e } a = -\frac{k}{m} x$$

• **Frequência angular** $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

• **Velocidade e aceleração de um oscilador harmónico simples**

$$v = A\omega \cos(\omega t + \varphi)$$

$$a = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) \text{ e } a = -\omega^2 x$$

$$\text{sendo } v_{\text{máx.}} = A\omega \text{ e } a_{\text{máx.}} = A\omega^2$$

• **Período e frequência no movimento harmónico simples**

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \text{ e } f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

• **Trabalho realizado por uma força conservativa**

$$W_{F^-} = -\Delta E_{\text{pgravit.}} \text{ e } W_{F_{\text{elást.}}^-} = -\Delta E_{\text{pelást.}}$$

• **Trabalho da força elástica durante a distensão ou compressão da mola**

$$W_{F_{\text{elást.}}^-} = +\frac{1}{2} k (x_i^2 - x_f^2)$$

• **Energia potencial elástica**

$$E_{\text{pelást.}} = \frac{1}{2} kx^2 \text{ e } E_{\text{pelást.}} = \frac{1}{2} kA^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \text{ e}$$

$$E_{\text{pelást.}} = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

$$E_{\text{pelást. máx.}} = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \text{ (nas posições extremas)}$$

• **Energia cinética**

$$E_c = \frac{1}{2} mA^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi) \text{ e } E_c = \frac{1}{2} kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

$$E_{c\text{máx.}} = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \text{ (na posição de equilíbrio)}$$

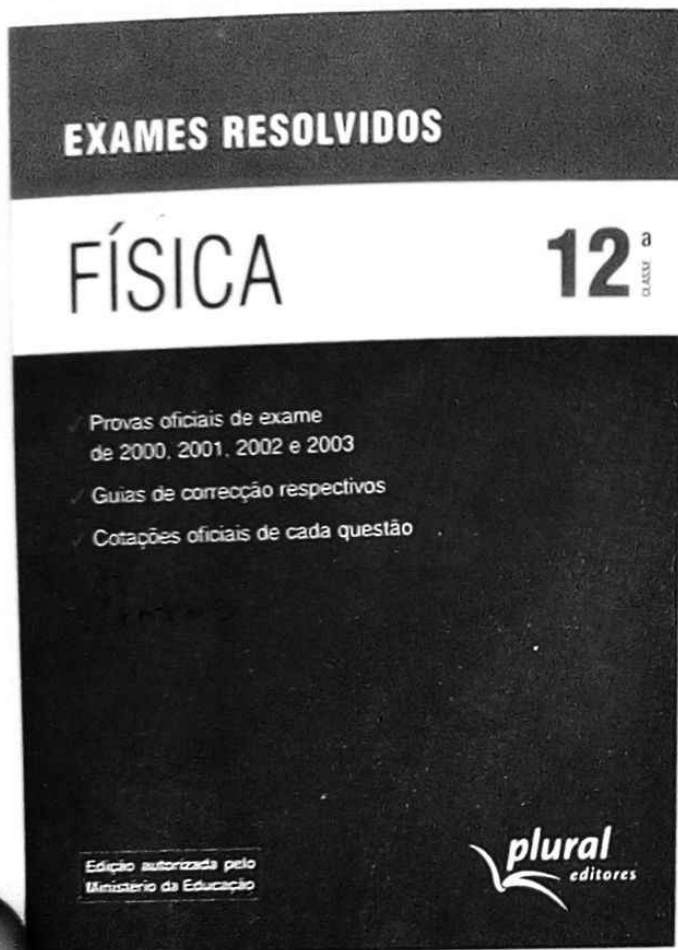
• **Energia mecânica** $E_m = \frac{1}{2} kA^2 \text{ e } E_m = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2$

• **Período de oscilação de um pêndulo** $T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$

► BIBLIOGRAFIA

- ABREU, M. C.; MATIAS, L.; PERALTA, L. F. (1994). *Física Experimental – Uma introdução*. Lisboa: Editorial Presença.
- AGUILAR, J.; SENENT, F. (1980). *Cuestiones de Física*. Madrid: Editorial Reverté, S. A.
- ALBUQUERQUE, W.; YOE, H.; TOBELEM, R.; PINTO, E. (1980). *Manual de Laboratório de Física*. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil.
- ALONSO M.; FINN, E. J. (1999). *Física*. Madrid: Addison-Wesley Iberoamericana España, S. A.
- BENSON, H. (1995). *University Physics – Revised Edition*. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- BERNARD, C.; EPP, C. (1995). *Laboratory experiments in College Physics*. John Wiley & Sons, Inc.
- BLOOMFIELD, L. A. (2001). *How Things Work – The Physics of Everyday Life* (2nd Ed.). New York: John Wiley & Sons, Inc.
- COX, A.; JUNKIN, W. (2002). *Enhanced student learning in the introductory physics laboratory*. Physics Education.
- DE JONG, E.; ARMITAGE, F.; BROWN, M.; BUTLER, P.; HAYES, J. (1992). *Physics in Context – Physics One*. Sidney: Heinemann Educational Australia.
- DE JONG, E.; ARMITAGE, F.; BROWN, M.; BUTLER, P.; HAYES, J. (1992). *Physics in Context – Physics Two*. Sidney: Heinemann Educational Australia.
- DIAS DE DEUS, J.; PIMENTA, M.; NORONHA, A.; PEÑA, T.; BROGUEIRA, P. (2000). *Introdução à Física*. Lisboa: McGraw-Hill.
- FISHBANE, P. M.; GASIOROWICZ, S.; THORNTON, S. T. (1996). *Physics for Scientists and Engineers*. Upper Saddle River: Prentice-Hall, Inc.
- HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. (2001). *Fundamentals of Physics* (6th Ed.). New York: John Wiley & Sons, Inc.
- HECHT, E. (1998). *Physics* (2nd Ed). California: Brooks/Cole Publishing Company.
- HEWITT, P. G. (2002). *Física Conceitual* (9.ª Ed.). São Paulo: Artmed Editora.
- LAMBERT, A. (1990). *Questions on Everyday Physics*. London: Blackie and Son, Ltd.
- SERWAY, R.; BEICHNER, R. (2003). *Physics for Scientists and Engineers* (6th Ed.). Fort Worth: Saunders College Publishing.
- TIPLER, P. (2000). *Física para cientistas e engenheiros*, vols. 1, 2 e 3. (4.ª Ed.). Rio de Janeiro: Livros

Outros títulos de apoio



Exames Resolvidos – Física 12.ª classe

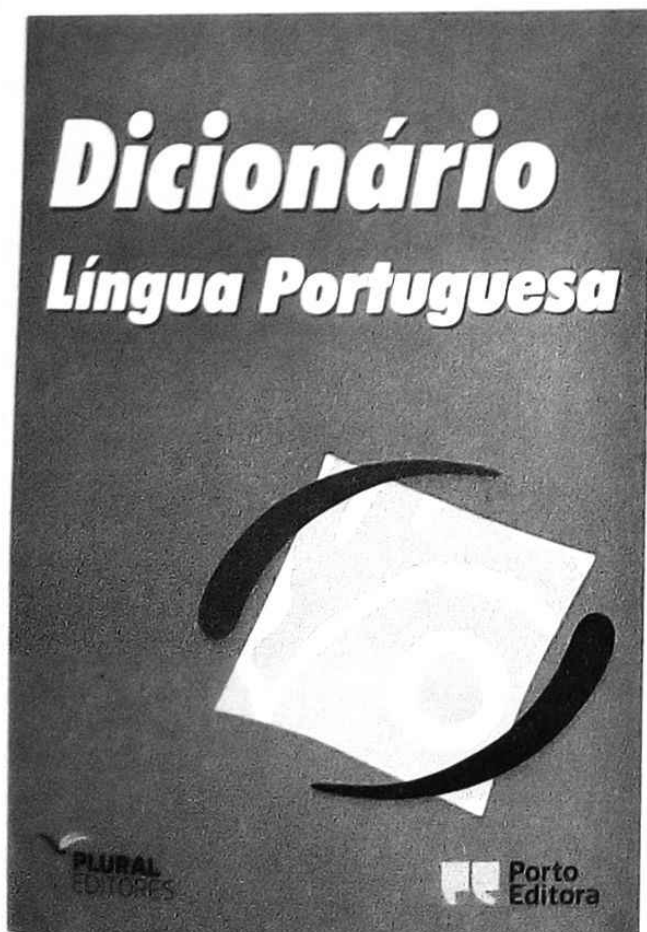
Com a publicação dos "Exames Resolvidos" pretendemos disponibilizar um instrumento que ajudará o aluno a preparar não só o exame de admissão à Universidade e os exames da 12.ª classe, como as avaliações que vai realizando ao longo do ano. A resolução de exames é fundamental porque se familiariza com a sua estrutura, bem como com o tipo de questões que os constituem. Permite avaliar o que o aluno sabe e ajuda-o a sistematizar os conhecimentos.



Dicionário da Língua Portuguesa

O **Dicionário da Língua Portuguesa** é o dicionário recomendado para os estudantes do ensino secundário moçambicano. Com mais de 55 000 definições de vocabulário actual e cerca de 3000 exemplos e frases idiomáticas, é uma ferramenta de trabalho e um auxiliar de estudo indispensável. É, sem dúvida, uma obra fundamental, editada pela Plural Editores/Porto Editora, especialista em Dicionários.

S



12^a classe

Física

Carlos Azevedo

laboratório de física

Outros títulos disponíveis para 12^a classe

• Matemática

• Biologia

• Química

• História

• Geografia

• TIC

• Inglês

• Francês

• Língua Portuguesa

• Artes

www.pluraeditores.com.z

ISBN 978-975-611-746-6

10



9 789896 112466

ISBN 978-975-611-746-6

