APROVADO PELO
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

João Carlos Sapatinha
Dinis Guibundana

10

MATEMÁTICA - 10.ª CLASSE

Saber MATEMÁTICA

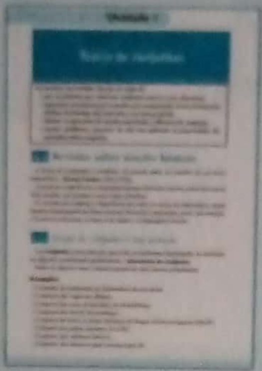
APRENDENDO SEMPRE

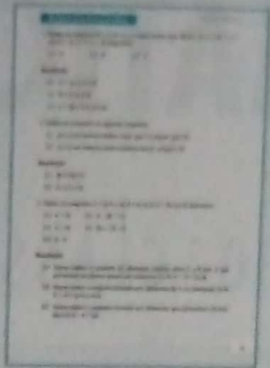
PEARSON

Estrutura do Livro

Apresentamos agora as principais características deste manual, para que seja mais fácil utilizá-lo no trabalho diário, quer na escola, quer no estudo feito em casa.

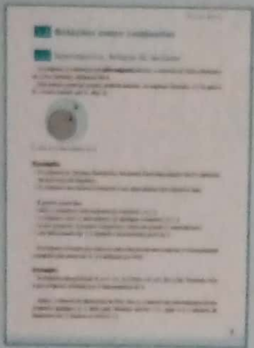
Indicação da unidade e do tema.
Indicação dos objectivos da unidade, para ajudar a medir o sucesso do trabalho realizado em cada unidade.

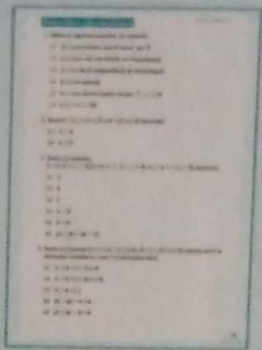




No final de cada unidade existe um conjunto de exercícios resolvidos, que ajudam a compreender melhor como se deve realizá-los.

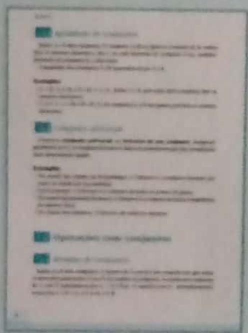
O texto explicativo é acompanhado por imagens, desenhos e/ou tabelas, que ajudam à compreensão da matéria.

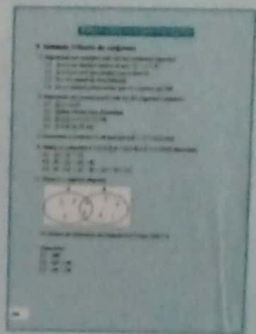




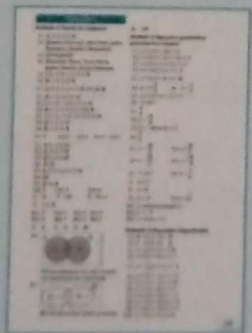
Depois, há um conjunto de exercícios para resolver, que permitem colocar em prática os conhecimentos aprendidos.

Grande quantidade de exemplos, que permitem ver como aplicar os conteúdos estudados.





No final, os exercícios complementares, organizados por unidades, permitem reforçar, através da aplicação prática, os conhecimentos adquiridos.



No fim do livro apresentam-se as soluções dos exercícios não resolvidos e dos exercícios complementares, para se poder verificar a correcção das respostas dadas.

Este livro é acompanhado de um prático separador, com conteúdos muito úteis.

Esperamos que este livro possa contribuir para o sucesso da aprendizagem ao longo do ano lectivo e desejamos um bom trabalho.

Os Autores

Índice

Unidade I

Teoria de conjuntos

Ao terminar esta unidade, deverás ser capaz de:

- usar os símbolos para relacionar conjuntos entre si e seus elementos;
- representar um conjunto por extensão e por compreensão, através de diagramas de Venn, de chavetas e/ou intervalos e na recta graduada;
- efectuar as operações de reunião, intersecção e diferença de conjuntos;
- resolver problemas concretos da vida real, aplicando as propriedades das operações sobre conjuntos.

1.1 Revisão sobre noções básicas

A Teoria de Conjuntos é resultado, em grande parte, do trabalho de um único matemático - **Georg Cantor** (1845-1918).

A noção de conjunto não é susceptível de uma definição precisa a partir das noções mais simples, isto porque é uma noção primitiva.

O conceito de conjunto é importante em todos os ramos da Matemática, sendo também fundamental em várias áreas da Ciência da Computação, como, por exemplo, a Teoria dos Números, os bancos de dados e as linguagens formais.

1.1.1 Noção de conjunto e sua notação

Um **conjunto** é uma colecção, que pode ser facilmente identificada, de entidades ou objectos considerados globalmente – **elementos do conjunto**.

Todos os objectos num conjunto gozam de uma mesma propriedade.

Exemplos

- Conjunto de professores de Matemática da tua escola.
- Conjunto das vogais do alfabeto.
- Conjunto das cores da bandeira de Moçambique.
- Conjunto dos rios de Moçambique.
- Conjunto de todos os países africanos de língua oficial portuguesa (PALOP).
- Conjunto dos países membros da SADC.
- Conjunto dos números inteiros.
- Conjunto dos números pares menores que 20.

1.1.2 Designação de um conjunto

Os conjuntos são, geralmente, designados por letras maiúsculas: A, B, X, Y, etc. Alguns conjuntos especiais, como o conjunto de números naturais ou o conjunto de números reais, têm designações especiais.

Exemplos

- $\mathbb{N}$= {números naturais};
- $\mathbb{R}$ = {números reais};
- S = {símbolos da República de Moçambique};
- V = {vogais} = {a, e, i, o, u};
- D = {distritos da província de Tete}.

1.1.3 Elementos de um conjunto

Os objectos que constituem um conjunto denominam-se **elementos do conjunto**.

Exemplos

- **1** é um elemento do conjunto dos números naturais;
- **2** é um elemento do conjunto de soluções da equação $x^2 - 4 = 0$;
- **a** é um elemento do conjunto das vogais;
- **Matemática** é um elemento do conjunto das disciplinas da escola secundária;
- **Inhambane** é um elemento do conjunto das províncias de Moçambique;
- **Rovuma** é um elemento do conjunto dos rios de Moçambique;
- **Eduardo Mondlane** é um elemento do conjunto dos líderes africanos.

Os conjuntos podem ser representados de duas formas:

a) Em chavetas.

Exemplo

A = {malária, tuberculose, cólera}.

b) Em diagrama de Venn.

Exemplo

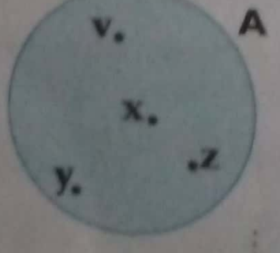


Fig. 1 O conjunto A tem 4 elementos.

1.1.4 Definição de um conjunto

Existem duas formas de definir um conjunto:

a) Em extensão, quando os elementos são apresentados de maneira explícita.

Exemplos

- A = {água, terra, fogo, ar};
- B = {Montepuez, Namuno, Mueda, Macomia};
- C = {disenteria, tétano, bronquite, febre tifóide, pneumonia, cólera, meningite, sífilis};
- Q = {quadrado, rectângulo, losango, trapézio}.

b) Em compreensão, quando se indica uma característica comum dos elementos ou um padrão.

Exemplos

- V = {vogais};
- D = {distritos da província de Cabo Delgado};
- C = {doenças causadas por bactérias};
- A = {números inteiros maiores que 3 e menores que 7}.

1.1.5 Relação de pertença

Qualquer objecto que seja elemento de um conjunto diz-se pertencer a esse conjunto.

Exemplo

Nampula pertence ao conjunto das províncias de Moçambique, mas a Ilha de Moçambique não pertence a esse conjunto.

Assim, se o elemento x pertence ao conjunto denominado por I, então representa-se, simbolicamente, $x \in I$. Lê-se «x pertence ao conjunto I» ou «x é elemento do conjunto I».

Se o elemento x não pertencer ao conjunto denominado por I, então representa-se, simbolicamente, $x \notin I$. Lê-se «x não pertence ao conjunto I» ou «x não é elemento do conjunto I».

Tomando o exemplo anterior – o conjunto das províncias de Moçambique (M) – podemos dizer que:

- Nampula $\in$ M;
- Nacala $\notin$ M;
- Montepuez $\notin$ M;
- Tete $\in$ M;
- Gaza $\in$ M;
- Maxixe $\notin$ M.

1.1.6 Cardinal de um conjunto

Considera-se que o cardinal de um conjunto é o número de elementos ou membros desse conjunto.

Exemplo

V = {a, e, i, o, u}

O cardinal do conjunto V é 5 porque o conjunto V contém 5 elementos.

A = {2, 4, 6, 8, 10, 12}

O cardinal do conjunto A é 6 porque o conjunto A contém 6 elementos.

O cardinal de um conjunto denota-se da seguinte forma:

- #A
- $n(A)$

Assim, nos exemplos anteriores temos:

- $n(V) = 5$ ou $\#V = 5$
- $n(A) = 6$ ou $\#A = 6$

1.1.7 Conjunto vazio e conjunto singular

Conjunto vazio

Um conjunto que não contenha nenhum elemento é chamado de **conjunto vazio** e representa-se pelo símbolo ∅ ou { }.

Exemplos

- A é o conjunto dos seres humanos acéfalos; n(A) = 0
- $B = \{x \in \mathbb{N}: x^2 < 1\{$. n(B) = 0

Conjunto singular

Um conjunto que contenha apenas um elemento é chamado de **conjunto singular**.

Exemplos

- A é o conjunto dos países da SADC que começam pela letra B; n(A) = 1
- $B = \{x \in \mathbb{N}: x$ é um número primo e par$\}$. n(B) = 1

1.2 Relações entre conjuntos

1.2.1 Subconjuntos. Relação de inclusão

O conjunto A é chamado de **subconjunto** de B se, e somente se, todo o elemento de A for, também, elemento de B.

Esta relação pode ser escrita, simbolicamente, da seguinte maneira: $A \subset B$, que se lê «A está contido em B» (Fig. 3).

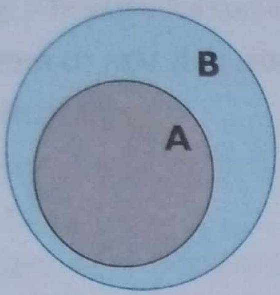


Fig. 2 A é subconjunto de B.

Exemplos

- O conjunto B = {Boane, Namaacha, Moamba} é um subconjunto de D = {distritos da província de Maputo};
- O conjunto dos números naturais é um subconjunto dos números reais.

É preciso notar que:

- todo o conjunto é subconjunto de si próprio: $A \subset A$;
- o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto: $\varnothing \subset A$;
- se um conjunto A possui n elementos, então ele possui 2^n subconjuntos;
- um subconjunto de A é, também, denominado parte de A.

O conjunto formado por todos os subconjuntos de um conjunto A é denominado «conjunto das partes de A» e é indicado por P(A).

Exemplo

O conjunto das partes de A, se $A = \{1, 3\}$, é $P(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{3\}, \{1,3\}\}$. Portanto, P(A) é um conjunto formado por 4 subconjuntos de A.

Assim, o número de elementos de P(A), isto é, o número de subconjuntos de um conjunto qualquer A, é dado pela fórmula $n(P(A)) = 2^n$, onde n é o número de elementos de A. Escreve-se $n(P(A)) = 4$.

1.2.2 Igualdade de conjuntos

Sejam A e B dois conjuntos. O conjunto A diz-se igual ao conjunto B, se ambos têm os mesmos elementos, isto é, se cada elemento do conjunto A for, também, elemento do conjunto B, e vice-versa.

A igualdade dos conjuntos A e B representa-se por $A = B$.

Exemplos

- $A = \{2, 4, 6, 8\}$ e $B = \{8, 4, 2, 6\}$. Assim $A = B$, pois estes dois conjuntos têm os mesmos elementos;
- $C = \{x: x^2 - x = 0\}$ e $D = \{0, 1\}$. Os conjuntos C e D são iguais, pois têm os mesmos elementos.

1.2.3 Conjunto universal

Chama-se **conjunto universal** ou **Universo de um conjunto**, designado geralmente por U, ao conjunto de todos os objectos ou elementos que são considerados num determinado estudo.

Exemplos

- No estudo das cidades de Moçambique, o Universo é o conjunto formado por todas as cidades de Moçambique;
- Em Geometria, o Universo é o conjunto de todos os pontos do plano;
- No estudo da população humana, o Universo é o conjunto de todos os habitantes do planeta Terra;
- No estudo dos números, o Universo são todos os números.

1.3 Operações com conjuntos

1.3.1 Reunião de conjuntos

Sejam A e B dois conjuntos. A reunião de A com B é um conjunto em que todos os elementos pertencem a A ou a B, ou a ambos os conjuntos. A reunião dos conjuntos de A com B representa-se por $A \cup B$ e lê-se «A reunião com B». Simbolicamente, escreve-se $A \cup B = \{x: x \in A \text{ ou } x \in B\}$.

A reunião de dois conjuntos pode ser ilustrada no diagrama de Venn (Fig. 4). A parte cinzenta corresponde $A \cup B$.

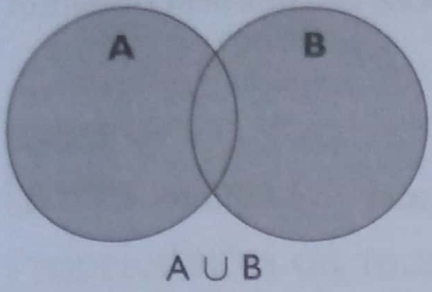


Fig. 3 Reunião dos conjuntos A e B (parte cinzenta).

Exemplos

- Sejam $A = \{a, m, o, r\}$ e $B = \{a, m, a, d, o, s\}$ dois conjuntos. Assim, $A \cup B = \{a, m, o, r, d, s\}$;
- Sejam M = {Moçambique, Malawi, Maurícias, Madagáscar} e N = {Botsuana, Suazilândia, Namíbia}. Então, M ∪ N = {Moçambique, Malawi, Maurícias, Madagáscar, Botsuana, Suazilândia, Namíbia};
- Sejam $A = \{a, e, i\}$ e $B = \{o, u\}$. Então, $A \cup B = \{a, e, i, o, u\}$.

1.3.2 Intersecção de conjuntos

A **intersecção dos conjuntos** A e B é o conjunto dos elementos que são comuns a A e a B, isto é, elementos que pertencem, simultaneamente, a A e também a B. Simbolicamente, escreve-se: $A \cap B = \{x: x \in A \text{ e } x \in B\}$; lê-se «A intersecção com B».

No diagrama de Venn, a parte azul escura corresponde à intersecção dos conjuntos A e B (Fig. 5).

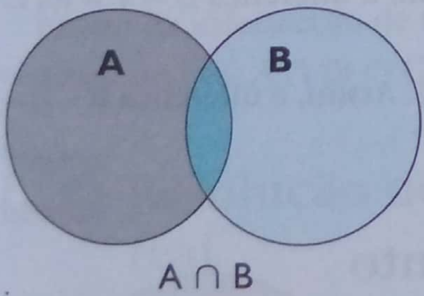


Fig. 4 Intersecção dos conjuntos A e B (parte azul escura).

Exemplo

Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e B = {múltiplos de 2 menores que 10}. Assim, $A \cap B = \{2, 4, 6, 8\}$.

Conjuntos disjuntos

Sejam A e B dois conjuntos distintos. Se os conjuntos A e B não possuem elementos comuns, os conjuntos A e B, dizem-se disjuntos.

Exemplo

Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{5, 6, 7\}$ então $A \cap B = \varnothing$. Assim, os conjuntos A e B são disjuntos.

1.3.3 Diferença de conjuntos

Sejam A e B dois conjuntos. A **diferença dos conjuntos A e B** é o conjunto que contém os elementos que pertencem a A, mas que não pertencem a B. A diferença dos conjuntos A e B é representada por $A - B$ ou $A \backslash B$ e lê-se «A menos B».

No diagrama de Venn, a parte cinzenta corresponde à diferença $A - B$ ou $A \backslash B$ (Fig. 6).

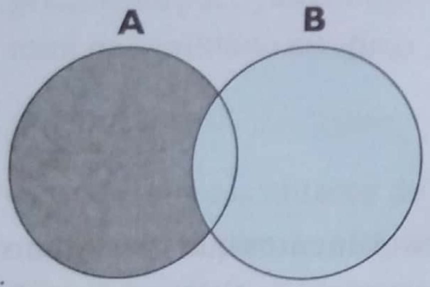


Fig. 5 Diferença $A - B$ ou $A \backslash B$ (parte cinzenta).

Exemplos

- Sejam $U = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ e $V = \{a, e, i, o, u\}$. Assim, a diferença $U - V = \{b, c, d, f, g\}$;
- Sejam $\mathbb{R}$ = {números reais} e $\mathbb{Q}$ = {números racionais}. Assim, a diferença $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ = {números irracionais}.

1.3.4 Complementar de um conjunto

Seja B um conjunto qualquer. O complementar de um conjunto A, em relação ao conjunto B, é o conjunto de elementos de B que não pertencem a A, isto é, é a diferença $B - A$. Designa-se o complementar de A por $\overline{A}$.

No diagrama de Venn, a parte cinzenta corresponde ao complementar de A (Fig. 7).

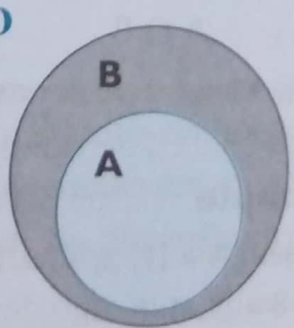


Fig. 6 Complementar de A em relação a B (parte cinzenta).

Exemplos

- Sejam A = {alfabeto} e V = {vogais}. Assim, $\overline{V}$ = {alfabeto sem as vogais};
- Sejam $\mathbb{Z}$ = {números inteiros} e $\mathbb{N}$ = {números naturais}. Então, $\overline{\mathbb{N}}$ = {números inteiros não positivos}.

1.3.5 Propriedades das operações de conjuntos

Propriedades da reunião de conjuntos

Sejam A, B e C três conjuntos quaisquer. Então, são verdadeiras as seguintes propriedades da reunião:

- **Idempotência**: $A \cup A = A$. A união de um conjunto qualquer A com ele mesmo é igual a A.
- **Comutativa**: $A \cup B = B \cup A$.
- **Elemento neutro**: $\varnothing \cup A = A \cup \varnothing = A$. O conjunto $\varnothing$ é o elemento neutro da reunião de conjuntos.
- **Associativa**: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

Propriedades da intersecção de conjuntos

Sejam A, B e C três conjuntos quaisquer. Então, são verdadeiras as seguintes propriedades da intersecção:

- **Idempotência**: $A \cap A = A$. A intersecção de um conjunto qualquer A com ele mesmo é igual a A.
- **Comutativa**: $A \cap B = B \cap A$.
- **Elemento Neutro**: $A \cap U = U \cap A = A$. O conjunto universo U é o elemento neutro da intersecção de conjuntos.
- **Associativa**: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

1.3.6 Resolução de problemas concretos da vida real

A Teoria de Conjuntos tem aplicação na resolução de problemas no dia-a-dia do ser humano. Por exemplo, pode-se aplicar esta teoria para prever as taxas de mortalidade, ou para elaborar tábuas de vida para aferição da pobreza, concentrando-se na qualidade de vida das populações, através de modelos matemáticos próprios. Uma outra aplicação da Teoria de Conjuntos é em Probabilidades e Estatística.

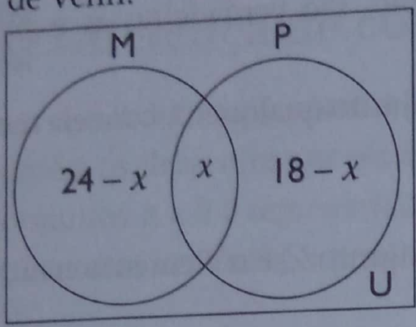
Seguem-se alguns exemplos da aplicação da Teoria de Conjuntos na resolução de problemas, onde o uso das propriedades aprendidas é fundamental.

Exemplos

1. Numa turma de 36 alunos, 24 gostam de Matemática e 18 de Português. Quantos alunos gostam de Matemática e Português?

Resolução

Para resolver este tipo de problemas é útil representar a situação num diagrama de Venn:



Dados:

$(U) = 36$

$(M) = 24$

$(P) = 18$

$(M \cap P) = x$

Então, temos a equação: $(24 - x) + x + (18 - x) = 36$

$$24 - x + x + 18 - x = 36$$

$$42 - x = 36$$

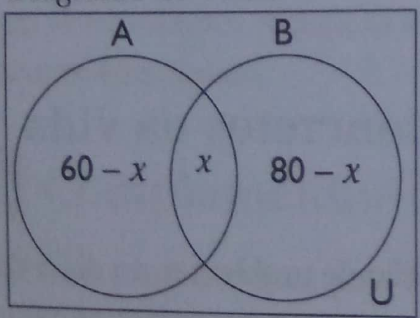
$$-x = 36 - 42 \Leftrightarrow x = 6$$

O número de alunos que gostam de Matemática e Português é 6.

2. Numa escola, 60% dos alunos lêem o jornal *Notícias* e 80% lêem o jornal desportivo *Desafio*. Sabendo-se que todo o aluno é leitor de pelo menos um dos jornais, qual é a percentagem de alunos que lêem ambos os jornais?

Resolução

Diagrama de Venn:



Dados:

$(U) = 100\%$

$(A) = 60\%$

$(B) = 80\%$

$(A \cap B) = x$

Então, temos a equação: $(60 - x) + x + (80 - x) = 100$

$$60 - x + x + 80 - x = 100$$

$$140 - x = 100$$

$$-x = 100 - 140 \Leftrightarrow x = 40$$

40% dos alunos lêem ambos os jornais.

Exercícios resolvidos

1. Dados os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N}: x$ é ímpar, menor que $10\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z}: 0 < x \leq 4\}$ e $C = \{x \in \mathbb{N}: x \leq 6\}$, determina:

   1.1 A 1.2 B 1.3 C

Resolução

1.1 $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

1.2 $B = \{1, 2, 3, 4\}$

1.3 $C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

2. Define em extensão os seguintes conjuntos:

   2.1 $\{x: x$ é um número inteiro maior que 7 e menor que $12\}$

   2.2 $\{x: x$ é um número inteiro positivo menor ou igual a $5\}$

Resolução

2.1 $\{8, 9, 10, 11\}$

2.2 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

3. Dados os conjuntos: $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{c, d, e\}$, $C = \{b, d, e, f\}$, determina:

   3.1 $A \cap B$ 3.4 $A - (B \cap C)$

   3.2 $A \cup B$ 3.5 $(A \cup C) - B$

   3.3 $B - A$

Resolução

3.1 Vamos indicar o conjunto de elementos comuns entre A e B, isto é, que pertencem, ao mesmo tempo, aos conjuntos A e B. $A \cap B = \{c, d\}$.

3.2 Vamos indicar o conjunto formado por elementos de A ou elementos de B. $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$.

3.3 Vamos indicar o conjunto formado por elementos que pertencem a B, mas não a A. $B - A = \{e\}$.

3.4 Primeiro vamos encontrar os elementos comuns entre B e C e, depois, ver quais desses não pertencem a A. $A - (B \cap C) = \{a,b,c,d\} - \{d,e\} = \{a, b, c\}$

3.5 Primeiro vamos encontrar os elementos que pertencem a A ou a C e depois ver a diferença entre eles. $(A \cup C) - B = \{a, b, c, d, e, f\} - \{c, d, e\} = \{a, b, f\}$

4. Dado o conjunto $A = \{2, 4, 6\}$, quantos subconjuntos distintos se podem formar com este conjunto?

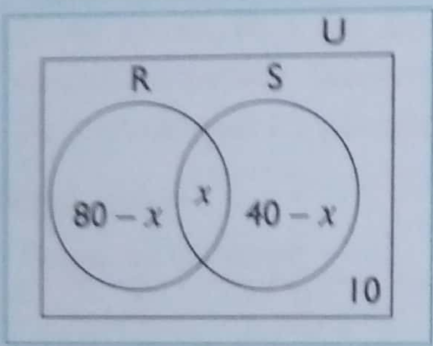
Resolução

Seja P(A) o conjunto dos subconjuntos de A e *n* o número de elementos de A. Para determinarmos o número dos subconjuntos de A, vamos usar a fórmula $n(P(A)) = 2^n$. Assim, $n(P(A)) = 2^n = 2^3 = 8$. Isto é, podem formar-se 8 subconjuntos distintos.

5. Numa aldeia, 80% da população pratica agricultura de subsistência, 40% pratica agricultura de rendimento e 10% não pratica nenhuma destas modalidades agrícolas. Qual é a percentagem da população que pratica ambas as modalidades de agricultura?

Resolução

O Diagrama de Venn que representa a situação descrita:



Dados: $(U) = 100\%$
$(R) = 80\%$
$(S) = 40\%$
$(R \cap S) = x$

Então, temos a equação: $(80 - x) + x + (40 - x) + 10 = 100$

$$80 - x + x + 40 - x + 10 = 100$$
$$130 - x = 100$$
$$-x = 100 - 130 \Leftrightarrow x = 30$$

30% da população pratica agricultura de rendimento e de subsistência.

Exercícios não resolvidos

1. Define os seguintes conjuntos em extensão:

   1.1 $\{x: x$ é um número natural menor que $7\}$

   1.2 $\{x: x$ é um mês com feriado em Moçambique$\}$

   1.3 $\{x: x$ é o dia da independência de Moçambique$\}$

   1.4 $\{x: x$ é um planeta$\}$

   1.5 $\{x: x$ é um número inteiro tal que $-3 < x \leq 5\}$

   1.6 $\{x \in \mathbb{N}: x^2 \leq 25\}$

2. Sendo $A = \{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e $B = \{2, 4, 6, 8\}$, determina:

   2.1 $A \cup B$

   2.2 $A \cap B$

3. Dados os conjuntos,
   $A = \{x \in \mathbb{N}: x < 7\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z}: -4 < x \leq 4\}$ e $C = \{x \in \mathbb{N}: x \leq 9\}$, determina:

   3.1 A

   3.2 B

   3.3 C

   3.4 $A \cup B$

   3.5 $A \cap B$

   3.6 $(A \cap B) \cup (B \cap C)$

4. Dados os conjuntos $A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{-1, 0, 2, 4, 5, 7\}$, assinala com V as afirmações verdadeiras e com F as afirmações falsas:

   4.1 $A \cup B = \{-1, 0, 2, 4\}$

   4.2 $A \cap B = \{-1, 0, 2, 4, 5\}$

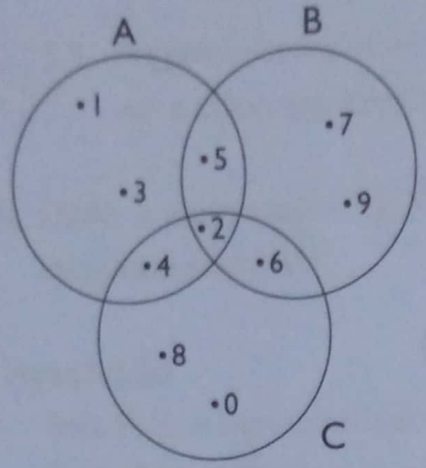
   4.3 $A \cap B = \{ \}$

   4.4 $(A \cup B) \cap A = A$

   4.5 $(A \cap B) \cup B = B$

Exercícios não resolvidos

5. Observa o seguinte diagrama.



Determina:

5.1 A

5.2 B

5.3 C

5.4 $A \cap B$

5.5 $A \cup B$

5.6 $A \cap B \cap C$

5.7 $(A \cap B) \cup (B \cap C)$

5.8 $n(A)$

5.9 $n(A \cap B)$

5.10 $n(A \cup B)$

6. Dado o conjunto $V = \{a, e, i, o, u\}$, determina o número máximo de subconjuntos que se podem formar.

7. Dado o conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, qual é o número máximo de subconjuntos distintos que se podem formar?

8. Se um conjunto A tem 1024 subconjuntos, determina o número de elementos do conjunto A. E se tivesse 64 subconjuntos, quantos elementos teria o conjunto A?

9. Dado o conjunto $\{x \in \mathbb{R}: x \text{ é raiz da equação } x^2 - 4 = 0\}$, indica, em extensão, os elementos desse conjunto.

Exercícios não resolvidos

10. Dados os conjuntos $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{x: x \text{ é par}\}$ e $C = \{1, 3, 5, 7\}$, classifica como verdadeiras ou falsas as afirmações seguintes:

10.1 $2 \in A$

10.2 $7 \subset C$

10.3 $A \subset B$

10.4 $B \subset A$

10.5 $\{1, 7\} \notin C$

10.6 $\{2, 4\} \notin B$

10.7 $A \not\subset C$

10.8 $\{2, 4, 6\} \subset (B \cap C)$.

11. A intersecção dos conjuntos $\{x: x \text{ é par e menor que } 9\}$ e $\{1, 3, 5, 7\}$ é (escolhe a opção correcta.):

a) $\{2\}$

b) $\{\ \}$

c) $\{2, 3\}$

d) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

12. Sendo A e B dois conjuntos não vazios e $A \subset B$, qual das seguintes afirmações é verdadeira?

a) $A \cap B = B$

b) $A \cup B = B$

c) $A \cap B = \{\ \}$

d) $A \cup B = \{\ \}$

13. Um grupo de 35 turistas visitou algumas praias de Moçambique. 16 turistas visitaram a praia do Wimbe e 11 a praia de Tofo. Quantos turistas visitaram ambas as praias?

14. Numa vila da província de Maputo, 25% dos habitantes sabem conduzir automóvel, 40% sabem conduzir motorizada e 12% sabem conduzir os dois tipos de veículos.

14.1 Qual é a percentagem de habitantes que não sabe conduzir nem automóvel nem motorizada? Representa a situação num diagrama de Venn.

15. Numa escola secundária da cidade de Pemba, 60% dos alunos lêem o *Jornal Notícias*, 70% lêem o jornal *Diário de Moçambique*, e todos os alunos lêem pelo menos um dos jornais.

15.1 Qual é a percentagem dos alunos que lêem os dois jornais?

16. Perguntaram a 165 alunos de uma Escola Secundária sobre as suas preferências musicais e o resultado foi o seguinte:

- 65 alunos disseram que gostavam de Marrabenta;
- 74 disseram que gostavam de música Afrojazz;
- 63 disseram não gostar destes dois géneros musicais.

Quantos alunos gostam de Marrabenta ou Afrojazz?

Unidade 2

Equações quadráticas paramétricas simples

Ao terminar esta unidade, deverás ser capaz de:

- diferenciar uma equação paramétrica de uma não paramétrica;
- resolver equações quadráticas paramétricas simples.

2.1 Introdução ao conceito de equação paramétrica

Nesta unidade vamos introduzir um conceito, que é muito útil na representação de duas ou mais variáveis num gráfico: o **conceito de parametrização**.

Para se obter um conjunto de pontos com variáveis cartesianas, de forma a não estipular uma relação obrigatória entre as variáveis, utiliza-se uma variável à parte. Esta variável define os valores das coordenadas, mas não é usada directamente no gráfico. A esta variável chama-se **parâmetro**.

Uma **equação paramétrica** consiste numa equação de uma curva expressa em função dos parâmetros que situam os pontos na curva.

A equação paramétrica de uma linha recta é: $x = a + bt$.

Na Geometria Euclidiana, uma circunferência é uma figura geométrica em que todos os pontos de um plano estão a uma certa distância, chamada raio, de um certo ponto, chamado centro. A equação da circunferência que tenha o centro sobre a origem do plano cartesiano é: $x^2 + y^2 = r^2$.

Recordemos que uma **equação quadrática completa** é toda a equação do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, onde a variável x é a variável principal e a, b e c são coeficientes reais.

Nas equações quadráticas paramétricas, completas ou não, para além da variável principal x, intervém outra variável, a que se dá o nome de parâmetro.

A toda a equação que, para além da incógnita considerada, contém outra variável, dá-se o nome de **equação paramétrica**.

Exemplos

- $x^2 - x + p = 0$, equação de parâmetro p;
- $x^2 + 4x - m = 0$, equação de parâmetro m;
- $2x^2 + (t-2)x - t + 1 = 0$, equação de parâmetro t;
- $x^2 - 3x - k = 0$, equação de parâmetro k.

É importante, para resolver estas equações, reconhecer os coeficientes a, b e c para cada equação dada.

Nas equações do exemplo anterior, temos:

- $x^2 - x + p = 0$: $a = 1$, $b = -1$ e $c = p$;
- $x^2 + 4x - m = 0$: $a = 1$, $b = 4$ e $c = -m$;
- $2x^2 + (t-2)x - t + 1 = 0$: $a = 2$, $b = (t-2)$ e $c = -t + 1$;
- $x^2 - 3x - k = 0$: $a = 1$, $b = -3$ e $c = -k$.

2.2 Resolução de equações quadráticas paramétricas simples

A resolução de uma equação paramétrica consiste na determinação do valor ou valores do parâmetro, para os quais determinadas condições são válidas.

Para isso, é preciso recordar a fórmula resolvente e as condições de existência ou não de raízes reais, a partir do binómio discriminante: $\Delta = b^2 - 4ac$.

A condição necessária e suficiente para que uma equação tenha raiz dupla é que o binómio discriminante seja nulo, isto é, $\Delta = 0$.

A condição imposta para que a equação tenha duas raízes reais e diferentes é que o discriminante seja positivo, $\Delta > 0$.

Para que a equação não tenha raízes reais, impõe-se que o discriminante seja negativo, isto é, $\Delta < 0$.

Exemplo

Na equação $x^2 - x + p = 0$, vamos determinar o valor do parâmetro p de modo que:

a) a equação admita uma raiz dupla, isto é, duas raízes iguais;

b) a equação admita duas raízes reais e diferentes;

c) a equação não tenha raízes reais.

Resolução

$a = 1$, $b = -1$ e $c = p$

a) $\Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot p \Leftrightarrow 1 - 4p = 0$

$-4p = -1$, logo, $p = \frac{1}{4}$

Solução: $p = \{\frac{1}{4}\}$.

b) $\Delta > 0 \Rightarrow b^2 - 4ac > 0$

$1 - 4p > 0$

$-4p > -1$

Multiplicando por (–1) ambos os membros da inequação, temos:

$4p < 1 \Leftrightarrow p < \frac{1}{4}$

Solução: $p \in]-\infty, \frac{1}{4}[$.

c) $\Delta < 0 \Rightarrow b^2 - 4ac < 0$

$1 - 4p < 0$

$-4p < -1$

Multiplicando por (–1) ambos os membros da inequação, temos:

$4p > 1 \Leftrightarrow p > \frac{1}{4}$

Solução: $p \in]\frac{1}{4}, +\infty[$.

Exercícios resolvidos

1. Considera a equação $x^2 - 12x + k = 0$, de parâmetro k.

   1.1 Resolve-a para $k = 0$.

   1.2 Determina o valor do parâmetro k, de modo que a equação tenha duas raízes reais.

Resolução

1.1 Para determinarmos as raízes da equação, vamos substituir k pelo seu valor, isto é, por $k = 0$.

Assim, temos: $x^2 - 12x + 0 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 12x = 0$

$x^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow x(x - 12) = 0$

Pela lei do anulamento do produto, teremos: $x(x - 12) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x - 12 = 0$

$x = 0$ ou $x = 12$

$S = \{0, 12\}$.

1.2 Para que uma equação tenha raízes reais a condição é que $\Delta \geq 0$, ou seja: $b^2 - 4ac \geq 0$, em que $\Delta = b^2 - 4ac$.

Então, $\Delta = 12^2 - 4 \cdot 1 \cdot k \geq 0 \Leftrightarrow 144 - 4k \geq 0 \Leftrightarrow -4k \geq -144 \Leftrightarrow k \leq \frac{1}{36}$.

$S = \{k \in \mathbb{R}: k \leq \frac{1}{36}\}$ ou $k \in]-\infty; \frac{1}{36}]$.

2. Considera a equação $2x^2 - 6x + m + 3 = 0$, de parâmetro m.

   2.1 Indica os coeficientes a, b e c.

   2.2 Determina o valor do parâmetro m de modo a que a equação não tenha raízes reais.

Resolução

2.1 Os coeficientes são:

$a = 2, b = -6$ e $c = m + 3$.

2.2 Para que uma equação não tenha raízes reais a condição que se impõe é que $\Delta < 0$, ou seja:

$b^2 - 4ac < 0$, pois $\Delta = b^2 - 4ac$.

Então, $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (m + 3) < 0 \Leftrightarrow 36 - 8m - 24 < 0 \Leftrightarrow -8m < -12$
$\Leftrightarrow m > \frac{3}{2}$.

$S = \{m \in \mathbb{R}: m > \frac{3}{2}\}$ ou $m \in]\frac{3}{2}; +\infty]$.

Exercícios não resolvidos

1. Indica os coeficientes das seguintes equações:

   1.1 $x^2 - 12x + k = 0$

   1.2 $2x^2 - 6x + 3m + 2 = 0$

   1.3 $2x^2 + (m + 3)x - 1 = 0$

   1.4 $-x^2 + mx - 7 = 0$

2. Considera a equação paramétrica $2x^2 - 6x + 3k = 0$.

   2.1 Indica os valores dos coeficientes a, b e c.

   2.2 Determina o valor de k na equação anterior, de modo a que:

   a) tenha duas raízes reais e iguais;

   b) não tenha raízes reais.

3. Considera a equação $x^2 + (k + 1)x + 4 = 0$.

   3.1 Indica os valores dos coeficientes a, b e c.

   3.2 Determina o valor de k de modo que a equação tenha raízes reais e iguais.

4. Determina o valor de p nas equações, de modo que:

   4.1 $x^2 - 5x + p + 4 = 0$, tenha duas raízes reais e iguais;

   4.2 $2x^2 + x + p - 5 = 0$, não tenha raízes reais;

   4.3 $x^2 + px + 4 = 0$, tenha raízes reais;

   4.4 $(3p - 2)x^2 + 2x + 3 = 0$, tenha raiz dupla.

5. Determina na equação $2ax^2 - 20x + 12 = 0$ o valor de a, de modo a que:

   5.1 não tenha soluções reais;

   5.2 tenha solução única;

   5.3 tenha duas soluções reais e diferentes;

   5.4 tenha soluções reais.

Exercícios não resolvidos

6. Considera a equação $2x^2 - 2x + 3m = 0$.

6.1 Resolve-a para $m = 0$.

6.2 Determina o valor de m, de modo que a equação tenha duas raízes reais e diferentes.

7. Calcula o valor de m na equação $mx^2 - 8x - 5 = 0$, para que a soma das suas raízes seja igual a 2.

8. Calcula o valor de p na equação $x^2 - 5x + p - 3 = 0$, para que o produto das suas raízes seja igual a 5.

9. Na equação $2x^2 + (k - 2)x + k + 2 = 0$, determina o valor de k, de modo a que:

9.1 o produto das raízes seja igual a $-\frac{3}{2}$;

9.2 a soma das raízes seja igual a -5.

10. Considera a equação quadrática paramétrica $x^2 + 4x - b = 0$.

10.1 Qual é a variável principal?

10.2 Determina o valor do parâmetro b, de modo a que a equação não tenha raízes reais.

10.3 Para $b = 0$, quais são as raízes da equação?

Unidade 3

Equações biquadradas

Ao terminar esta unidade, deverás ser capaz de:

- identificar equações biquadradas;
- resolver uma equação quadrática simples;
- resolver problemas práticos conducentes a uma equação biquadrada.

3.1 Introdução

A resolução de equações, sistemas de equações e inequações pertence a um ramo da Matemática chamada Álgebra. Estas equações surgem no nosso quotidiano, nas actividades científicas, sociais e económicas e na resolução de problemas.

Os procedimentos de resolução de equações foram descobertos por matemáticos que se ocuparam deste tema, durante muitos anos e em diferentes épocas da história da Matemática.

Nesta unidade vamos estudar as equações cuja resolução se reduz a equações do 2.° grau, também chamadas **biquadradas** ou **biquadráticas**.

3.2 Conceito de equação biquadrada

Algumas equações aparentam ser de 4.° grau, mas podem ser resolvidas usando as mesmas técnicas que utilizamos para resolver as equações de 2.° grau. Estas equações são denominadas **equações biquadradas** ou **biquadráticas**.

Define-se equação biquadrada como sendo a equação incompleta do quarto grau que, após todas as reduções possíveis, contém termos cuja incógnita é par e um termo independente. Neste tipo de equações, a incógnita (x) aparece elevada à segunda e à quarta potência.

Uma equação biquadrada tem a forma: $ax^4 + bx^2 + c = 0$, sendo os coeficientes a, b, c reais e $a \neq 0$.

Exemplos

As equações seguintes são biquadradas:

- $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$;
- $x^4 - 32x^2 + 256 = 0$;
- $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$;
- $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$.

Para que uma equação seja biquadrada, é necessário que a variável possua expoentes pares e que o maior deles seja igual a 4.

Exemplos

As seguintes equações não são biquadradas:

- $x^4 - 4x^3 + x^2 - 1 = 0$;
- $2x^4 + 2x^3 - 9x = 0$;
- $x^4 - 3x = 0$;
- $x^6 + x^4 + x^2 = 0$.

3.3 Resolução de equações biquadradas

Apesar dos expoentes, este tipo de equação resolve-se de modo relativamente simples. Assim, deve ter-se em conta que:

- como é uma equação de 4.° grau, possui até 4 raízes;
- não possui expoentes ímpares.

Na resolução da equação $ax^4 + bx^2 + c = 0$, deve substituir-se a variável por uma outra variável da seguinte forma: $y = x^2$.

Fazendo a substituição na equação biquadrada, obtém-se a nova equação: $ay^2 + by + c = 0$.

Esta equação é do 2.° grau e já é conhecida a sua resolução.

Após resolvê-la (seja por soma e produto, Bháskara, factorização, etc.) em ordem a y (y_1 e y_2), encontra-se o valor de x (x_1, x_2, x_3 e x_4).

As raízes da equação biquadrática serão **mais** ou **menos** a raiz quadrada de y_1 e y_2, encontrando-se quatro raízes que, somadas, resultam sempre em zero:

- $x_1 = -\sqrt{y_1}$
- $x_2 = +\sqrt{y_1}$
- $x_3 = -\sqrt{y_2}$
- $x_4 = +\sqrt{y_2}$

Exemplo

Considera a equação biquadrada $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

Resolução

Seja $y = x^2$, temos: $y^2 - 5y + 4 = 0$.

Resolvendo a equação de 2.º grau pela fórmula resolvente temos:

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$y_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2}$$

$$y = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2}$$

$$y_1 = \frac{5 + 3}{2} = 4$$

$$y_2 = \frac{5 - 3}{2} = 1.$$

A equação ainda não está resolvida. Lembra-te que o problema era encontrar os valores de x e não de y. Por isso, é necessário continuar a resolução.

Se $y = x^2$, então $x = \pm \sqrt{y}$.

Para $y_1 = 9 \Rightarrow x_1 = -3$ e $x_2 = 3$.
Para $y_2 = 4 \Rightarrow x_3 = -2$ e $x_4 = 2$.

Logo, as raízes são: $\{-3, -2, 2, 3\}$.

Exercícios resolvidos

1. Resolve a equação seguinte: $x^4 - 14x^2 + 40 = 0$.

Resolução

Seja $y = x^2$, agora vamos substituí-la na equação biquadrada, que fica assim:
$y^2 - 14y + 40 = 0$.
Ou seja, temos deste modo uma equação de 2.° grau.
Resolvendo, então, a equação de 2.° grau:

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$y_{1,2} = \frac{-(-14) \pm \sqrt{(-14)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 40}}{2 \cdot 1} = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 160}}{2} = \frac{14 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{14 \pm 6}{2}$$

$y_1 = 10$
$y_2 = 8$.

Vamos, agora, encontrar x:
$y = x^2$ ou $x = \pm\sqrt{y}$.

Então, temos:
Para $y = 10 \Rightarrow x = \pm\sqrt{10}$.
Para $y = 8 \Rightarrow x = \pm\sqrt{8}$ ou $x \pm 2\sqrt{2}$.

$S = \{-\sqrt{10}, -2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, \sqrt{10},\}$.

2. Resolve a equação: $x^4 - 5x + 4 = 0$.
Seja $y = x^2$, então temos $y^2 - 5y + 4 = 0$.

$$y_{1,2} = \frac{+5 \pm \sqrt{(-5)^2 = 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

$y_1 = \frac{8}{2} = 4$, então $x^2 = 4$ ou $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$.

$y_2 = \frac{2}{2} = 1$, então $x^2 = 1$ ou $x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$.

As soluções são $\{-2, -1, 1, 2\}$

Exercícios não resolvidos

1. Assinala com **S** as equações biquadradas e com **N** as equações não biquadradas:

   1.1 $x^4 - 2x^3 + 3x^2 + x - 1 = 0$

   1.2 $x^4 - 17x^2 + 2 = 0$

   1.3 $\frac{1}{x^4} + x^2 - 1 = 0$

   1.4 $\frac{1}{4}x^4 + x^2 - 1 = 0$

   1.5 $x^4 - \frac{1}{4}x = 0$

   1.6 $4x^4 - 16x^2 + x - 6 = 0$

2. Indica os coeficientes reais a, b e c nas seguintes equações:

   2.1 $x^4 + 7x^2 + 16 = 0$

   2.2 $9x^4 + 10x^2 + 1 = 0$

   2.3 $-\frac{1}{3}x^4 + 3x^2 - 5 = 0$

   2.4 $2x^4 - 3x^2 - 7 = 0$

   2.5 $x^4 - 3x^2 + 36 = 0$

   2.6 $x^4 - 8x^2 + 9 = 0$

   2.7 $-2x^4 + 5x^2 - 3 = 0$

   2.8 $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$

   2.9 $9x^4 - 13x^2 + 4 = 0$

   2.10 $x^4 - 5x^2 = 0$

3. Dadas as equações biquadradas seguintes:

   a) $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$

   b) $x^4 - 32x^2 + 256 = 0$

   c) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

   d) $x^4 - 18x^2 + 81 = 0$

   e) $36x^4 - 13x^2 + 1 = 0$

   f) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

   g) $3x^4 - 8x^2 + 5 = 0$

   3.1 Indica os coeficientes numéricos de cada uma das equações.

   3.2 Resolve-as no conjunto dos números reais.

Exercícios não resolvidos

4. Na equação $x^4 + mx^2 - 12 = 0$, uma das raízes é 1. Qual é o valor do coeficiente m?

5. Escreve as equações cujas raízes são:

5.1 $-3, -1, 1$ e 3;

5.2 -3 e 3;

5.3 $-\sqrt{6}$ e $\sqrt{6}$;

5.4 $-\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{3}$;

5.5 0 e 7.

6. Na equação $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$, determina:

6.1 a soma das duas menores raízes;

6.2 a diferença entre a maior e a menor raiz da equação;

6.3 a diferença das duas menores raízes;

6.4 a soma das duas maiores raízes;

6.5 o produto das raízes negativas da equação;

6.6 a soma dos quadrados das raízes reais da equação.

7. Determina o conjunto de soluções reais nas equações biquadradas seguintes:

7.1 $x^4 - x^2 - 6 = 0$

7.2 $5x^4 + 2x^2 - 3 = 0$

7.3 $x^4 = 18x^2 - 81$

7.4 $3x^4 - 27x^2 = 0$

7.5 $x^4 - x^2 = 12$

7.6 $x^2 - 2 = \frac{6}{x^2 - 1}$

Unidade 4

Função quadrática

Ao terminar esta unidade, deverás ser capaz de:

- identificar a função quadrática;
- identificar a expressão analítica de uma função quadrática;
- representar graficamente funções quadráticas;
- determinar o domínio, o contradomínio, os zeros da função, os vértices da parábola, a variação do sinal da função, a variação da função (monotonia) e a equação do eixo de simetria;
- indicar o sentido da concavidade do gráfico da função quadrática;
- determinar os pontos de intersecção do gráfico de uma função quadrática com os eixos de coordenada;
- determinar as coordenadas do vértice e a equação do eixo de simetria de uma parábola;
- determinar a expressão analítica de função quadrática a partir do gráfico;
- resolver problemas práticos que envolvem funções quadráticas.

4.1 Revisão do conceito de função quadrática

Em Matemática uma função quadrática, ou função polinomial do 2.° grau, é qualquer função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ do tipo $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$, onde a, b e c são coeficientes reais e $a \neq 0$.

Exemplos

- $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$, onde $a = 2$, $b = -5$ e $c = 1$;
- $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - 1$, onde $a = -\frac{1}{4}$, $b = 0$ e $c = -1$;
- $f(x) = x^2 + 3x - 5$, onde $a = 1$, $b = 3$ e $c = -5$;
- $f(x) = -x^2 + \sqrt{2}\,x$, onde $a = -1$, $b = \sqrt{2}$ e $c = 0$;
- $f(x) = -4x^2$, onde $a = -4$, $b = 0$ e $c = 0$.

A expressão $ax^2 + bx + c$, na definição de uma função quadrática, é um **polinómio de grau 2** ou um **polinómio de 2.° grau**, porque o maior expoente da variável x é 2.

Ao igualarmos a função quadrática a zero, a expressão que daí resulta é uma equação quadrática. Assim, $ax^2 + bx + c = 0$ é uma equação do 2° grau.

Zeros da função

As soluções para a equação são chamadas **raízes da equação** ou os **zeros da função**.

Chamam-se zeros ou raízes da função do 2.° grau $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e c reais e $a \neq 0$, aos números reais x, tais que $f(x) = 0$.

Então, as raízes da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ são as soluções da equação do 2.° grau $ax^2 + bx + c = 0$, as quais são obtidas através da chamada fórmula resolvente ou fórmula de Bháskara:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Gráfico de uma função quadrática

O gráfico de uma função do 2.° grau, $y = ax^2 + bx + c$, com a, b e c reais e $a \neq 0$, é sempre uma curva aberta chamada **parábola**. Recorda que ao construírmos o gráfico de uma função quadrática $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, teremos sempre uma das seguintes situações:

- Se $a > 0$, a parábola tem a **concavidade voltada para cima**.

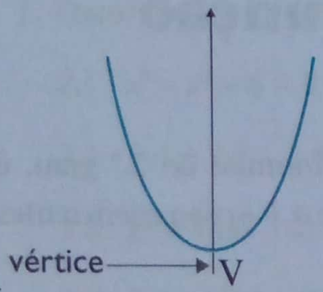


Fig. 1 Parábola com a concavidade voltada para cima.

- Se $a < 0$, a parábola tem a **concavidade voltada para baixo**.

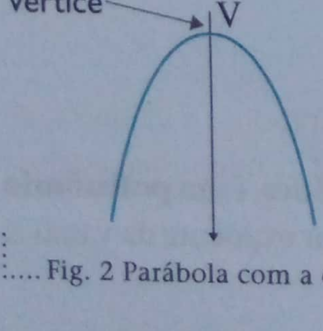


Fig. 2 Parábola com a concavidade voltada para baixo.

Deves, provavelmente, recordar-te que o gráfico de uma função qualquer intersecta o eixo dos *xx* exactamente nas raízes da função. Desse modo, dependendo do valor do binómio discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$, há três situações possíveis:

- $\Delta > 0$ – a parábola corta o eixo dos *xx* em dois pontos;
- $\Delta = 0$ – a parábola toca o eixo dos *xx* num ponto;
- $\Delta < 0$ – a parábola não corta o eixo *xx*.

Máximo e Mínimo

Toda função de 2.° grau assume ou um valor **máximo**, ou um valor **mínimo**, dependendo do sinal do coeficiente *a*.

Graficamente, o ponto que representa o máximo ou o mínimo da função de 2.° grau é o vértice da parábola.

O valor máximo ou mínimo de uma função é sempre o *y* do vértice: $y_v = -\dfrac{\Delta}{4a}$.

- Se $a > 0$, então o valor corresponde ao mínimo.
- Se $a < 0$, então o valor corresponde ao máximo.

Vamos analisar os gráficos seguintes:

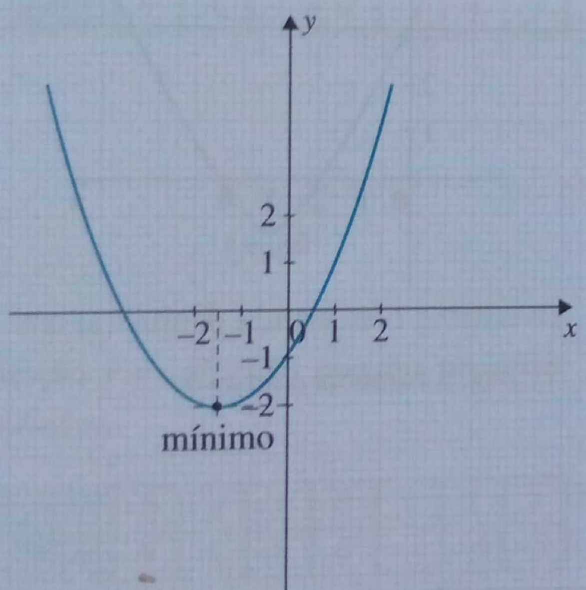


Fig. 3 Neste gráfico, o mínimo é $y = -2$.

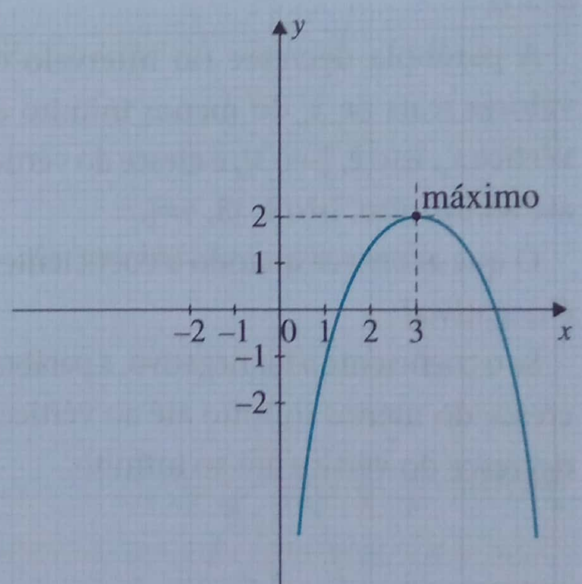


Fig. 4 Neste gráfico, o máximo é $y = 2$.

Domínio e contradomínio de uma função quadrática

A função quadrática $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ é definida para todos os valores reais de *x*. Portanto, tem como domínio o conjunto $\mathbb{R}$, pois não existe nenhuma restrição para os valores que a variável *x* pode tomar.

O domínio de uma função também é chamado de **campo de existência** da função, e é representado por «D_f».

O conjunto das imagens dependerá dos valores que a variável x assumir. Ao conjunto de chegada dá-se o nome de **contradomínio** da função, sendo representado por «D'_f».

Variação da função $f(x) = ax^2 + bx + c$

A variação da função corresponde ao crescimento ou decréscimo da função.

Uma função f é crescente num determinado intervalo I quando, para quaisquer que sejam x_1 e x_2, com $x_1 < x_2$, temos $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Uma função f é decrescente num dado intervalo I quando, para quaisquer que sejam x_1 e x_2, com $x_1 < x_2$, temos $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Observa o gráfico ao lado (Fig. 5).

O gráfico representa uma função do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e c reais e $a > 0$.

A parábola decresce no intervalo de valores reais de x, do menos infinito ao vértice x_v, isto é, $]-\infty, 3[$, e cresce do vértice até ao infinito, isto é, $]3, +\infty[$.

O que acontece quando o coeficiente ***a*** é negativo?

Se o coeficiente a for negativo, a parábola cresce do menos infinito até ao vértice e decresce do vértice até ao infinito.

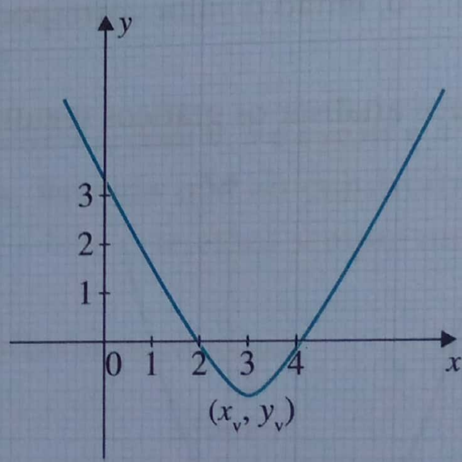


Fig. 5 Parábola com $a>0$.

Variação do sinal da função $f(x) = ax^2 + bx + c$

Uma função do 2.° grau com $a > 0$ é negativa para valores de x entre as suas raízes. Se $a < 0$ então a função é positiva entre as raízes.

Se observares o gráfico da Fig. 5 verificas que a função é positiva no intervalo de valores de $x \in]-\infty, 2[$ ou $x \in]4, +\infty[$ e é negativa no intervalo de valores de $x \in]2, 4[$.

4.2 Função do tipo $y = f(x) = ax^2$

A função $y = f(x) = ax^2$ é uma função polinomial do 2.º grau, onde os coeficientes reais b e c são nulos.

Exemplos

- $f(x) = -4x^2$, onde $a = -4$, $b = 0$ e $c = 0$;
- $f(x) = x^2$, onde $a = 1$, $b = 0$ e $c = 0$.

4.3 Representação gráfica da função $y = ax^2$

Vamos construir o gráfico da função $y = x^2$.

Primeiro, completa-se a tabela.

Depois, constrói-se o gráfico.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$y = x^2$	9	4	1	0	1	4	9

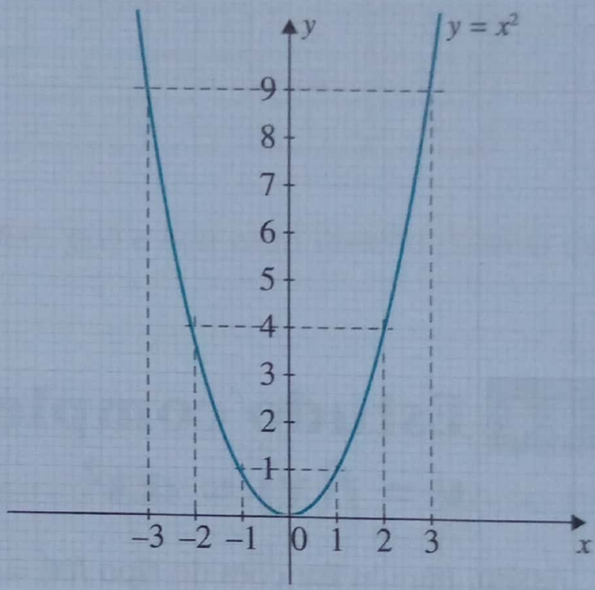


Fig. 6 Gráfico da função $y = x^2$.

Agora, vamos construir o gráfico da função $y = -x^2$, pelo mesmo processo anterior.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$y_2 = -x^2$	−9	−4	−1	0	−1	−4	−9

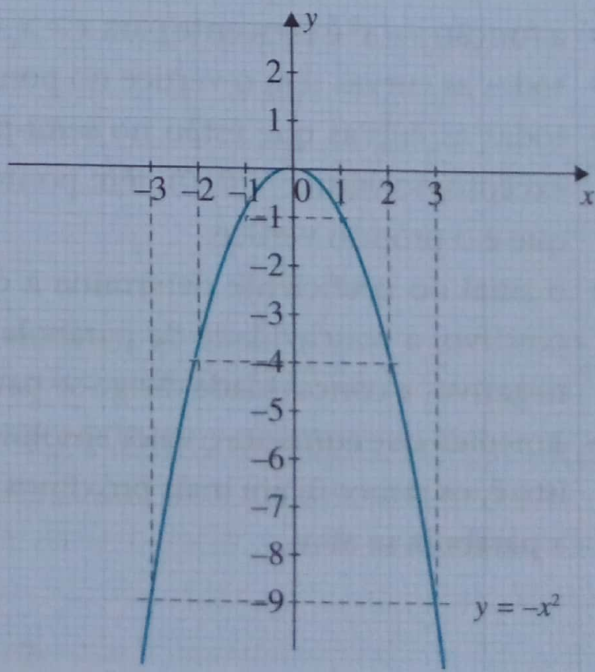


Fig. 7 Gráfico da função $y = -x^2$.

Por fim, vamos construir os gráficos das funções $y_1 = x^2$, $y_2 = 2x^2$ e $y_3 = 3x^2$ num mesmo sistema coordenado de ordenadas.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$y_1 = x^2$	9	4	1	0	1	4	9
$y_2 = 2x^2$	18	8	2	0	2	8	18
$y_3 = 3x^2$	27	12	3	0	3	12	27

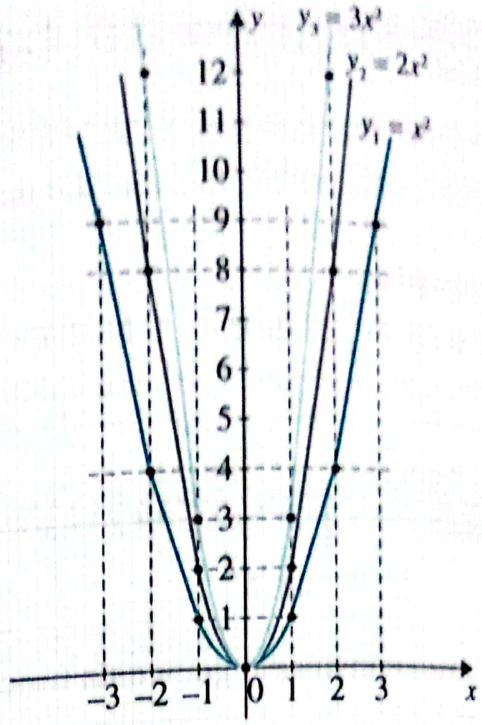


Fig. 8 Gráficos das funções $y_1 = x_2$, $y_2 = 2x^2$ e $y_3 = 3x^2$.

4.4 Estudo completo da função $y = f(x) = ax^2$

Assim, para as funções do tipo $f(x) = ax^2$ temos:

- o eixo de simetria de todos os gráficos é o eixo yy;
- como $x^2 = (-x)^2$, a curva é simétrica em relação ao eixo das ordenadas;
- a função $y = x^2$ é crescente para $x > x_V$ e decrescente para $x < x_V$, onde V é o vértice;
- todas as curvas têm o vértice no ponto V(0,0);
- todas as curvas que estão no semi-plano de ordenadas positivas ou negativas, excepto no vértice V(0, 0), têm ponto de mínimo ou máximo, respectivamente, que é o próprio vértice;
- o sinal do coeficiente determina a orientação da parábola: se o valor de a for positivo, a concavidade da parábola dirige-se para cima. Ao contrário, se a for negativo, a concavidade dirige-se para baixo;
- à medida que aumenta o valor absoluto do coeficiente a, a parábola é mais fechada, isto é, os ramos ficam mais próximos do eixo de simetria; quanto menor $|a|$, mais a parábola se abre.

4.5 Função do tipo $y = ax^2 + bx + c$

4.5.1 Caso $y = a(x - p)^2$

Representação gráfica e estudo completo da função $y = a(x - p)^2$ a partir de $y = ax^2$

Considera as funções $f(x) = x^2$, $g(x) = (x + 2)^2$ e $h(x) = (x - 1)^2$.

Vamos construir uma tabela de valores (x, y) para cada uma dessas funções.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = x^2$	9	4	1	0	1	4	9
$g(x) = (x + 2)^2$	1	0	1	4	9	16	25
$h(x) = (x - 1)^2$	16	9	4	1	0	1	4

Representemos graficamente as funções $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ num mesmo sistema de coordenadas cartesianas.

Observando os gráficos, podemos afirmar que:

- a parábola da função $g(x)$ é congruente à da função $f(x)$, mas com o vértice em V(–2, 0);
- a parábola da função $h(x)$ é congruente à da função $f(x)$, mas com o vértice em V(1, 0).

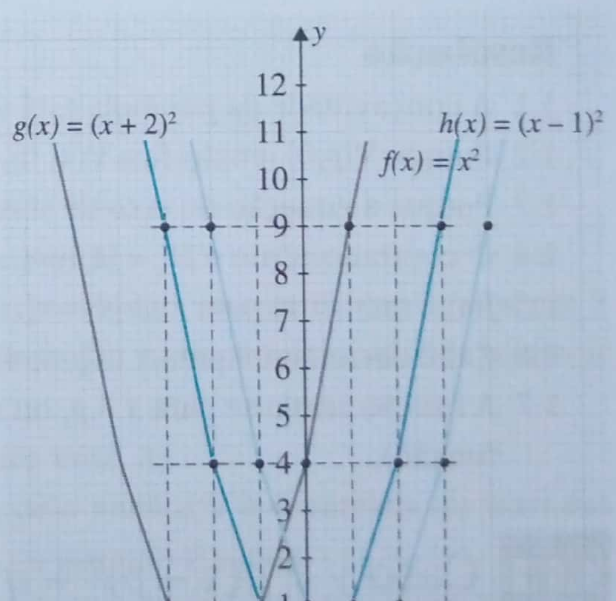


Fig. 9 Gráficos das funções $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$.

Quer dizer:

- os gráficos das funções $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ são congruentes;
- obtém-se o gráfico de $g(x)$ a partir de $f(x)$, através da translação horizontal em 2 unidades para a esquerda;
- obtém-se o gráfico de $h(x)$ a partir de $f(x)$, através da translação horizontal em 1 unidade para a direita;
- o eixo de simetria de $f(x) = x^2$ é $x = 0$;
- o eixo de simetria de $g(x) = (x + 2)^2$ é $x = -2$;
- o eixo de simetria de $h(x) = (x - 1)^2$ é $x = 1$.

Em geral:

- os gráficos das funções $f(x) = ax^2$ e $g(x) = a(x - p)^2$ são congruentes e obtém-se o gráfico de $g(x)$ a partir do gráfico de $f(x)$, através de uma translação horizontal em p unidades para a: **direita**, se $p > 0$ e para a **esquerda**, se $p < 0$;
- o eixo de simetria $x = p$ é paralelo ao eixo das ordenadas e passa pelo vértice $V(p, 0)$;
- $x = p$ é, também, zero da função.

Exemplo

1. Dada a função $f(x) = 2(x - 4)^2$, sem construir o gráfico, vamos determinar:
   1.1 a concavidade da parábola;
   1.2 as coordenadas do vértice;
   1.3 a equação do eixo de simetria;
   1.4 o contradomínio;
   1.5 para que valores de x, $f(x)$ é crescente;
   1.6 para que valores de x, $f(x)$ é decrescente;
   1.7 valores de x para os quais a função se anula.

Resolução

1.1 A concavidade da parábola está voltada para cima pois, $a > 0$.
1.2 Porque $V(p,0)$, então fica $V(4, 0)$.
1.3 Porque a equação do eixo de simetria é $x = p$, então $x = 4$.
1.4 O contradomínio é $D'_f = [4, +\infty[$.
1.5 $f(x)$ é crescente para $x \in]4, +\infty[$.
1.6 $f(x)$ é decrescente para $x \in]-\infty, 4[$.
1.7 A função anula-se para $x = p$, ou seja, para $x = 4$ (portanto $x = 4$ é o zero da função).

4.5.2 Caso $y = a(x - p)^2 + q$

Representação gráfica e estudo completo da função $y = a(x - p)^2 + q$

Considera as funções $f(x) = x^2$, $g(x) = (x + 2)^2$ e $h(x) = (x + 2)^2 + 3$.

Vamos construir uma tabela de valores (x,y) para cada uma dessas funções.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = x^2$	9	4	1	0	1	4	9
$g(x) = (x + 2)^2$	1	0	1	4	9	16	25
$h(x) = (x + 2)^2 + 3$	4	3	4	7	12	19	28

Representemos graficamente as funções $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ num mesmo sistema de coordenadas cartesiano.

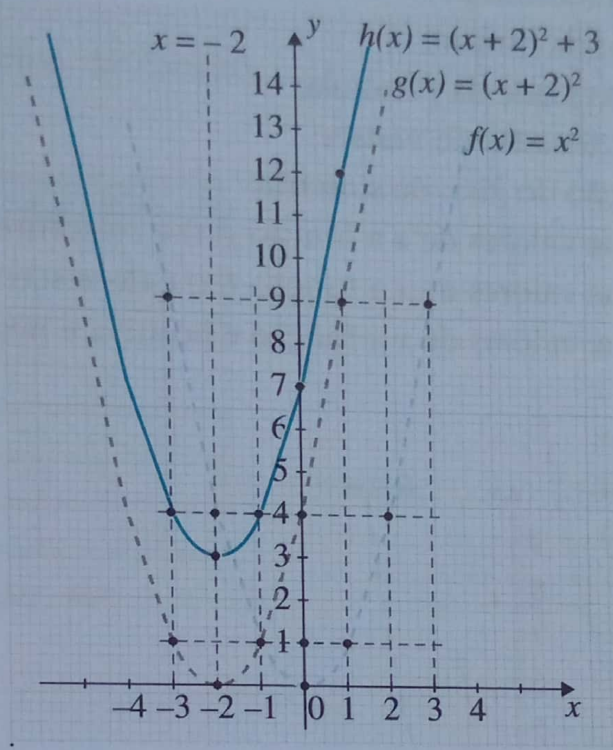


Fig. 10 Gráficos $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$.

Observando os gráficos, podemos afirmar que:

- o gráfico da função $h(x)$ é obtido de $f(x)$ através da translação horizontal em 2 unidades negativas nas abcissas e da translação vertical de 3 unidades positivas nas ordenadas;
- o vértice da parábola localiza-se no ponto $V(-2, 3)$;
- o eixo de simetria é a recta que passa pelo vértice V e é paralela ao eixo das ordenadas, portanto a equação do eixo de simetria é $x = -2$.

Em geral:

- o gráfico de $f(x) = a(x - p)^2 + q$ é congruente ao gráfico $f(x) = ax^2$;
- o gráfico da função $f(x) = a(x - p)^2 + q$ obtém-se a partir do gráfico de $f(x) = ax^2$ através da translação horizontal de p unidades (para a esquerda se $p > 0$ e para a direita se $p < 0$) e da translação vertical de q unidades (para cima se $q > 0$ e para baixo se $q < 0$);
- o vértice é $V(p, q)$;
- $x = p$ é a equação do eixo de simetria da parábola.

Exemplo

1. Consideremos as funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = (x + 2)^2 - 4$.
   1.1 Vamos construir no mesmo sistema de coordenadas cartesianas, os gráficos das funções $f(x)$ e $g(x)$.
   1.2 Vamos determinar para a função $g(x)$:
      1.2.1 o domínio;
      1.2.2 o contradomínio;
      1.2.3 os zeros da função;
      1.2.4 a concavidade da parábola;
      1.2.5 as coordenadas do vértice;
      1.2.6 a equação do eixo de simetria;
      1.2.7 para que valores de x a função $g(x)$ é crescente;
      1.2.8 para que valores de x a função $f(x)$ é decrescente;
      1.2.9 para que valores de x a função é positiva e negativa.

Resolução

1.1

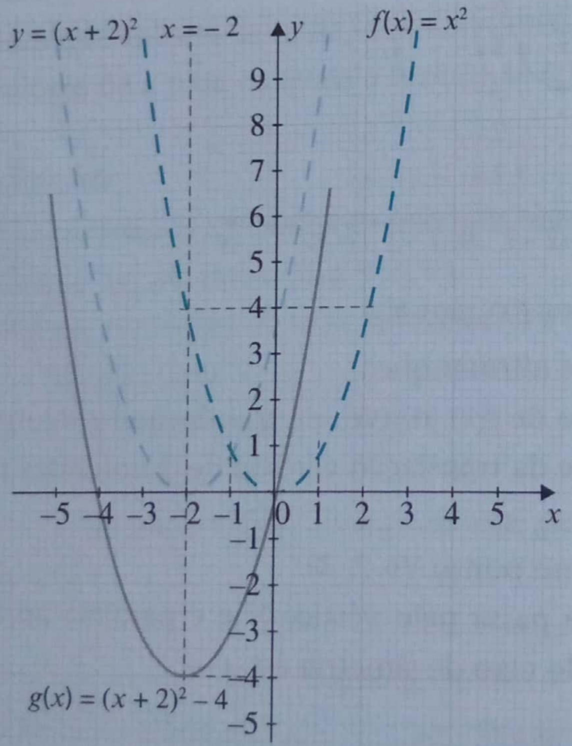


Fig. 11 Gráficos das funções $f(x)$ e $g(x)$.

1.2.1 $D_f = \mathbb{R}$.
1.2.2 $D'_f = [-4, +\infty[$ ou $y \in \mathbb{R}$: $y \geq -4$.
1.2.3 -4 e 0.
1.2.4 Concavidade voltada para cima, pois $a > 0$.
1.2.5 $V(-2, -4)$.
1.2.6 $x = -2$.
1.2.7 $g(x)$ é crescente para $x > -2$ ou $]-2, +\infty[$.
1.2.8 $f(x)$ é decrescente para $x < -2$ ou $]-\infty, -2[$.
1.2.9 $g(x) > 0$ para $x < -4$ ou $x > 0$.
$g(x) < 0$ para $-4 < x < 0$.

4.5.3 Caso $y = ax^2 + bx + c$

Representação gráfica da função $y = ax^2 + bx + c$, a partir da determinação dos zeros e do vértice

A função quadrática, na sua forma completa, corresponde à expressão:

$y = ax^2 + bx + c$

Vamos traçar o gráfico da função $y = x^2 - 2x - 3$.

x	$y = x^2 - 2x - 3$	(x, y)
-3	12	$(-3, 12)$
-2	5	$(-2, 5)$
-1	0	$(-1, 0)$
0	-3	$(0, -3)$
1	-4	$(1, -4)$
2	-3	$(2, -3)$
3	0	$(3, 0)$

Os zeros da função são $x = -1$ e $x = 3$.

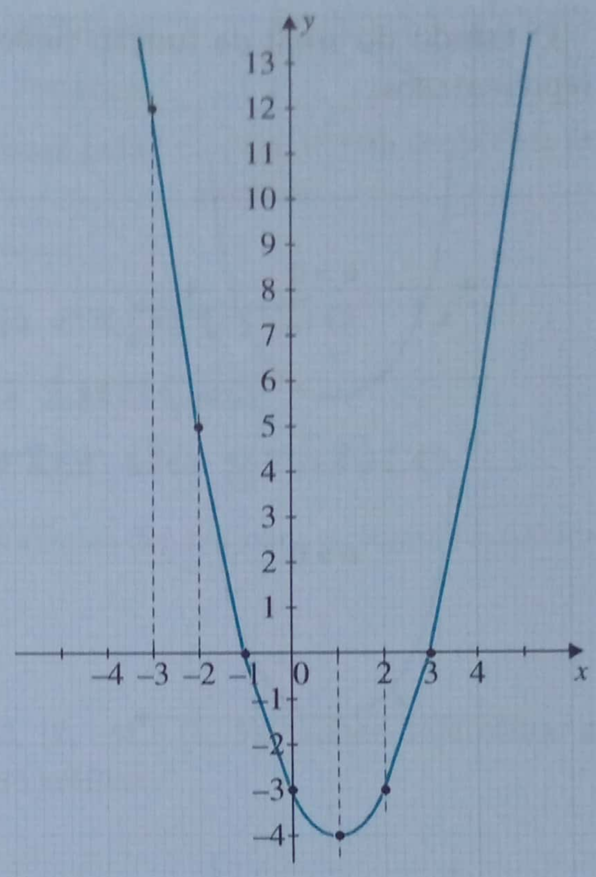


Fig. 12 Gráfico da função $y = x^2 - 2x - 3$.

4.5.4 Estudo do sinal da função $f(x) = ax^2 + bx + c$

Estudar o sinal de uma função significa determinar os intervalos para os quais a função y é negativa e os intervalos para os quais a função y é positiva.

Para determinar o sinal da função quadrática, vamos primeiramente encontrar as raízes da função.

Por exemplo, na função $y = x^2 + 6x - 7$ as raízes são $x = -7$ e $x = 1$.

O esboço gráfico correspondente está representado ao lado (Fig. 13).

Assim:

- a função y é positiva para $x \in \mathbb{R}$: $x < -7$ ou $x > 1$;
- a função y é negativa para $x \in \mathbb{R}$: $-7 < x < 1$.

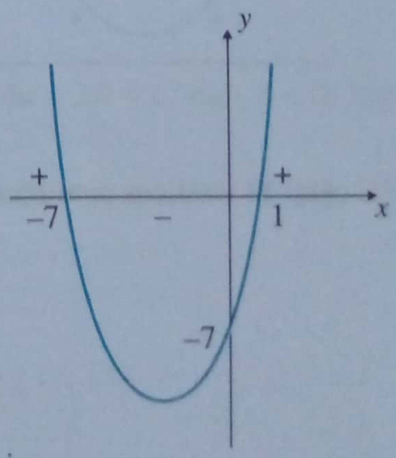


Fig. 13 Gráfico da função $y = x^2 + 6x - 7$.

O gráfico da função representada é uma parábola de concavidade virada para cima pois, $a > 0$.

Assim, a função é positiva para valores reais de x menor que -7 ou maiores que 1 e é negativa para valores reais de x entre -7 e 1.

O estudo do sinal da função pode ser sistematizado pelos gráficos abaixo representados:.

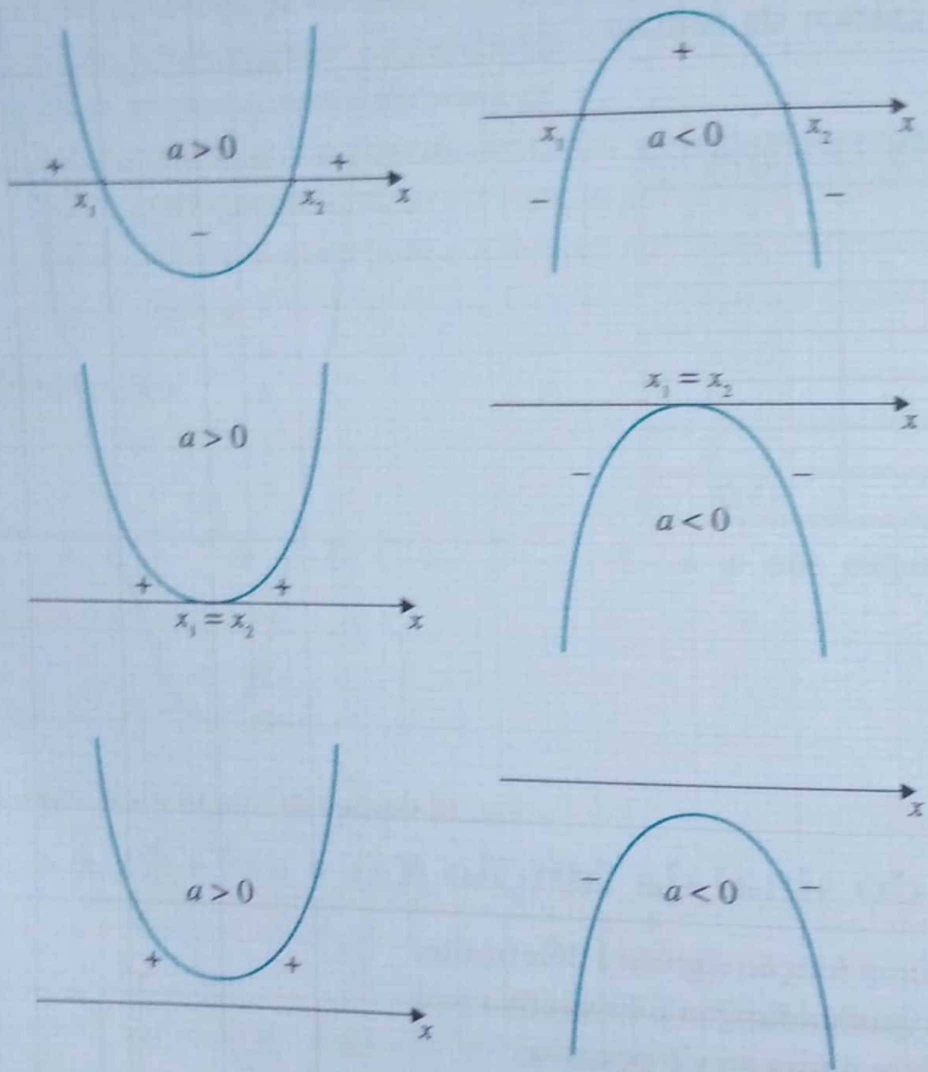


Fig. 14 Gráficos com o estudo do sinal da função.

Eixo de simetria da parábola

O eixo de simetria da parábola é uma recta vertical cuja equação é $x = -\frac{b}{2a}$ (ver Fig. 15).

Na função $y = -x^2 + x + 6$, a concavidade da parábola está voltada para baixo, pois $a < 0$. A equação do eixo de simetria é $x = -\frac{b}{2a} \Leftrightarrow -\frac{1}{2\cdot(-1)} = \frac{1}{2}$. Portanto, o eixo de simetria é a recta vertical que passa pela abcissa $x = \frac{1}{2}$.

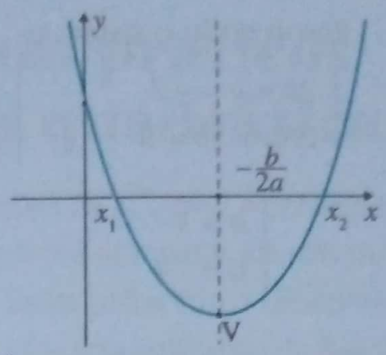


Fig. 15 Eixo de simetria da parábola.

4.6 Determinação da expressão analítica de uma função quadrática a partir do gráfico

Conhecendo alguns pontos da parábola, podemos determinar a expressão analítica dessa parábola.

Exemplos

1. Uma parábola passa pelos pontos (0, 0), (2, –4) e (5, 5). Vamos determinar a expressão analítica correspondente a esse gráfico.

Resolução

Sendo o gráfico uma parábola, a expressão procurada é do tipo $y = ax^2 + bx + c$.

Vamos substituir os pontos conhecidos em $y = ax^2 + bx + c$.

Então, temos:

- para o ponto (0, 0): $0 = a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + c \Leftrightarrow 0 = c$;
- para o ponto (2, –4): $-4 = a\cdot 2^2 + b\cdot 2 + c \Leftrightarrow -4 = 4a + 2b = c$, mas $c = 0$, logo $2a + b = -2$;
- para o ponto (5, 5): $5 = a\cdot 5^2 + b\cdot 5 + c \Leftrightarrow 5 = 25a + 5b = c$, mas $c = 0$, logo $25a + 5b = 5$.

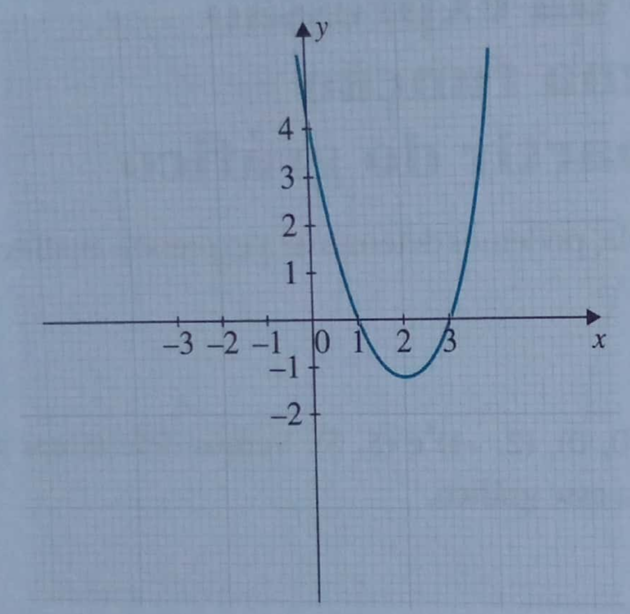
Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} 2a + b = -2 \\ 25a + 5b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10a - 5b = 10 \\ 25a + 5b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 25 \cdot 1 + 5b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -\frac{20}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \end{cases}$$

Como $a = 1$, $b = -4$ e $c = 0$, então a expressão que corresponde ao gráfico é $y = x^2 - 4x$.

2. Na figura abaixo, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ e a parábola passa pelo ponto (0, 4). Determina a expressão analítica correspondente a esse gráfico.



Resolução

Sendo conhecidos os valores de x_1 e x_2, podemos usar a expressão:
$y = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Então: $y = a(x - 1)(x - 3)$

Mas, a parábola também passa pelo ponto (0, 4).

Então: $4 = a(0 - 1)(0 - 3) \Leftrightarrow 4 = 3a \Leftrightarrow a = \frac{4}{3}$

Logo: $y = \frac{4}{3}(x - 1)(x - 3) \Leftrightarrow y = \frac{4}{3}x^2 - \frac{16}{3}x + 4$

Logo, $y = \frac{4}{3}x^2 - \frac{16}{3}x + 4$ é a expressão analítica da função representada no gráfico anterior.

4.7 Resolução de problemas práticos que envolvem funções quadráticas

No dia-a-dia, há muitas situações definidas pelas funções de 2.° grau. A trajectória de uma bola lançada é uma parábola. Se fizermos vários furos em várias alturas num balde cheio de água, os pequenos jorros de água que saem pelos furos descrevem parábolas. A antena parabólica e os faróis de automóveis são uma aplicação da função quadrática. Outra aplicação da função quadrática é o lançamento de projécteis.

Seguem-se alguns exemplos de problemas concretos que envolvem a aplicação da função quadrática.

Exemplos

1. Uma bola foi lançada e descreveu uma trajectória parabólica. Supondo que a bola foi lançada a partir do solo, esta fez uma parábola descrita pela função $f(x) = -x^2 + 10x$. Sendo x em metros, vamos determinar:
   1.1 a altura máxima atingida pela bola;
   1.2 a distância do ponto de lançamento até ao ponto em que a bola caiu no solo.

Resolução

Repara que a função tem a concavidade virada para baixo, pois o coeficiente $a < 0$.

1.1 A altura máxima é obtida calculando o y_v da parábola: $y_v = -\dfrac{\Delta}{4a}$.

Sendo $\Delta = b^2 - 4ac$, então $\Delta = (10)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 0 = 100$

Logo, $y_v = -\dfrac{100}{4(-1)} = 25$ m. Ou seja, a altura máxima atingida é a de 25 m.

1.2 Sendo $x = 0$ e $x = 10$ as raízes da equação, correspondentes às abcissas do ponto de lançamento e do ponto em que a bola caiu no solo, a distância pretendida é de 10 m.

2. Um agricultor observou que a expressão $P(x) = -x^2 - 8x + 20$ descreve a produção P, em toneladas, de copra que colheu durante um ano nas suas terras, em função de x toneladas de fertilizante aplicado. Qual foi a produção máxima de copra?

Resolução

A produção máxima é obtida calculando o y_v da parábola.

$y_v = -[64 - 4 \cdot (-1) + 20] : 4 \cdot (-1) = -(64 + 80) : -4 = 144 : -4 = 36.$

A produção máxima de copra foi de 36 toneladas.

Exercícios resolvidos

1. Assinala com V as funções do 2.° grau e com F as funções que não são do 2.° grau:

1.1 $f(x) = x^2 + 3x - 1$ 1.2 $f(x) = x + 3x$

1.3 $f(x) = x^2 + \sqrt{3}$ 1.4 $f(x) = \frac{1}{x^2}$

Resolução

1.1 V 1.2 F 1.3 V 1.4 F

2. Indica em cada uma das funções do 2.° grau seguintes, os coeficientes a, b e c:

2.1 $f(x) = 2x^2 + 3x$ 2.2 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x - 1$

2.3 $f(x) = x^2$ 2.4 $f(x) = 3x^2 + \sqrt{3}$

Resolução

2.1 $a = 2; b = 3; c = 0$

2.2 $a = -\frac{1}{2}; b = 1; c = -1$

2.3 $a = 1; b = 0; c = 0$

2.4 $a = 3; b = 0; c = \sqrt{3}$

3. Determina o valor de m para que a expressão $f(x) = (2 + m)x^2 + 3x$ defina uma função do 2.° grau.

Resolução

Recorda-te que, para que uma função seja quadrática, a condição básica é $a \neq 0$.
Assim, sendo $a = 2 + m$, então $2 + m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0 - 2 \Leftrightarrow m \neq -2$.
São todos os valores do conjunto $\mathbb{R}$ excepto -2, isto é, $m \in \mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

4. Determina o valor de m para que o gráfico cartesiano de $f(x) = mx^2 + 2x - 3$ passe pelo ponto $(1, -3)$.

Resolução

Substituindo o ponto $(1, -3)$ na expressão da função teremos:
$-3 = m \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 3 \Leftrightarrow -3 = m - 3 + 2$, logo $m = -2$.

Exercícios resolvidos

5. Indica o valor dos coeficientes a, p e q nas seguintes funções:

5.1 $y = -3\,(x-2)^2$

5.2 $y = \frac{1}{3}\,(x+5)^2$

5.3 $y = -(x+2)^2$

5.4 $y = -\frac{1}{3}\,(x-2)^2 + 5$

Resolução

5.1 $a = -3, p = 2, q = 0$

5.2 $a = \frac{1}{3}, p = -5, q = 0$

5.3 $a = -1, p = -2, q = 0$

5.4 $a = -\frac{1}{3}, p = 2$ e $q = 5$

6. Determina, justificando, se o gráfico das seguintes funções tem concavidade voltada para cima ou para baixo:

6.1 $y = 2x^2 - 5x + 6$

6.2 $y = -x^2 + 1$

Resolução

6.1 Sendo $a > 0$, a concavidade da parábola está voltada para cima.

6.2 Sendo $a < 0$, a concavidade da parábola está voltada para baixo.

7. Dada a função $f(x) = -2x^2 - 3$, determina:

7.1 $f(-1)$

7.2 $f(0)$

7.3 $f\left(\frac{3}{2}\right)$

7.4 $f(2)$

Resolução

7.1 $f(-1) = -2 \cdot (-1)^2 - 3 = -2 \cdot 1 - 3 = -5$

7.2 $f(0) = -2 \cdot 0 - 3 = 0 - 3 = -3$

7.3 $f\left(\frac{3}{2}\right) = -2\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 = -2 \cdot \frac{9}{4} - 3 = -\frac{18}{4} - 3 = -\frac{18-12}{4} = -\frac{30}{4} = -\frac{15}{2}$

7.4 $f(2) = -2 \cdot 2^2 - 3 = -2 \cdot 4 - 3 = -8 - 3 = -11$

8. Na função $f(x) = x^2 - 4$, indica:

8.1 o domínio;

8.2 o contradomínio;

8.3 a equação do eixo de simetria;

8.4 as coordenadas do vértice;

8.5 os zeros;

8.6 a concavidade da parábola;

8.7 o sinal da função;

8.8 para que valores de x a função é crescente;

8.9 para que valores de x a função é decrescente.

Resolução

8.1 Domínio da função: $D_f = \mathbb{R}$

8.2 Contradomínio da função: $D'_f = [-4, +\infty[$

8.3 $x = 0$

8.4 $V(0, -4)$

8.5 $x = -2$ e $x = 2$

8.6 A concavidade da parábola está voltada para cima, pois $a > 0$.

8.7 $f(x) > 0 : x \in]-\infty, -2[$ ou $x \in]2, +\infty[$

$f(x) < 0 : x \in]-2, 2[$

$f(x) = 0 : x = -2$ ou $x = 2$

8.8 A função é crescente para $x \in]0, +\infty[$

8.9 A função é decrescente para $x \in]-\infty, 0[$

Exercícios resolvidos

9. Dadas as funções $f(x) = x^2 + 2x$ e $g(x) = x + 2$, determina os pontos comuns aos gráficos das funções $f(x)$ e $g(x)$. Representa graficamente $f(x)$ e $g(x)$.

Resolução

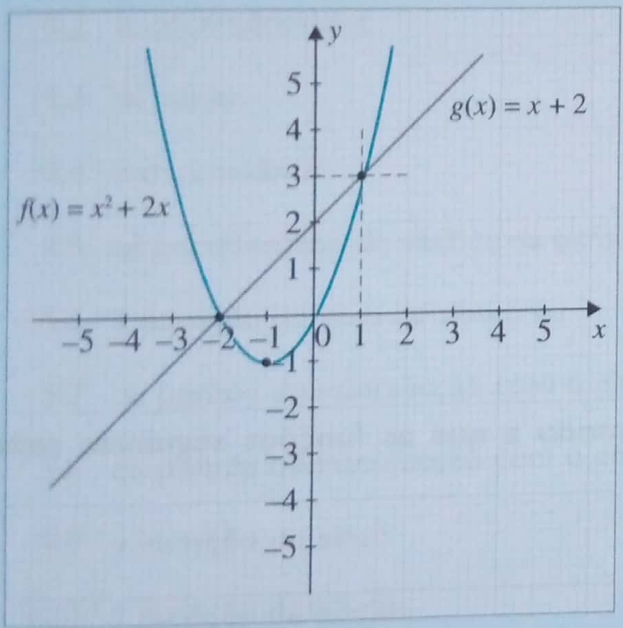
Para obtermos as coordenadas dos pontos comuns aos gráficos de $f(x) = x^2 + 2x$ e $g(x) = x + 2$, vamos igualar estas duas funções, isto é, $f(x) = g(x)$.

$x^2 + 2x = x + 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$

Resolvendo esta equação quadrática pelos métodos já conhecidos, encontramos como raízes -2 e 1.

Se substituirmos esses valores em cada uma das funções dadas, obteremos $(-2, 0)$ e $(1, 3)$.

Graficamente, podemos representar as funções do seguinte modo:



10. Qual é a área máxima de um rectângulo que tem 16 metros de perímetro?

Resolução

Seja x o comprimento e y a largura do rectângulo.

O perímetro do rectângulo é dado por $P = 2x + 2y = 16$, ou seja, $x + y = 8$ ou $y = 8 - x$.

A área do rectângulo é dada pelo produto do comprimento pela largura: $A = x \cdot y$

$A(x) = x \cdot (8 - x) = 8x - x^2$

A área máxima do rectângulo é o valor de $A(x)$ para x_V.

$x_V = -8 \div (-2) = 4$ e $A_{máx} = 8 \cdot 4 - 4^2$

$A_{máx} = 32 - 16 = 16\ m^2$.

Exercícios não resolvidos

1. Assinala com **S** as equações quadráticas e com **N** as funções que não são quadráticas:

1.1 $f(x) = -x^2 - 8x - 20$

1.2 $f(x) = -\frac{1}{2} + x^2$

1.3 $f(x) = -8x - 5$

1.4 $f(x) = \frac{1}{x^2} + x - 1$

1.5 $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - x - 2$

1.6 $f(x) = 3x - 2$

2. Indica o valor de a, b e c em cada uma das seguintes alíneas:

2.1 $y = -x^2 - 8x - 20$

2.2 $y = -x^2 + 1$

2.3 $y = 5x^2 - 3x - 1$

2.4 $y = \frac{1}{3}x^2 - x - 2$

2.5 $y = x^2 - 8x$

3. Determina os valores de m de modo a que as funções seguintes sejam quadráticas:

3.1 $y = (m-1)x^2 + 2x + 1$

3.2 $y = (2m-1)x^2 - 2x + 3$

3.3 $y = (m - \frac{1}{3})x^2 - 6$

4. Sendo $f(x) = \frac{x^2}{3} + x - 1$, calcula:

4.1 $f(1)$ 4.2 $f\left(\frac{1}{2}\right)$ 4.3 $f\left(-\frac{1}{3}\right)$

4.4 $f(-1)$ 4.5 $f(-2)$ 4.6 $f(0)$

5. Esboça os gráficos das seguintes funções:

5.1 $y = x^2 - 1$ 5.2 $y = -x^2 - 5x + 6$

5.3 $y = \frac{1}{3}x^2$ 5.4 $y = -x^2 - 5x$

Exercícios não resolvidos

6. Determina os pontos de intersecção das parábolas seguintes com o eixo dos *xx*:

   6.1 $y = x^2 - x - 6$ 6.2 $y = x^2 - 6x + 9$ 6.3 $y = -x^2 + 8x - 6$

7. Determina o ponto de intersecção das parábolas seguintes com o eixo dos *yy*:

   7.1 $f(x) = x^2 - x + 8$ 7.2 $f(x) = -x^2 + 7x - 10$ 7.3 $f(x) = x^2 - 6x - 7$

8. Traça os gráficos das seguintes funções:

   8.1 $f(x) = -x^2 + 12x - 32$ 8.2 $h(x) = 2x^2 - 12x + 1$

9. Para as funções anteriores, determina:

   9.1 o domínio;

   9.2 o contradomínio;

   9.3 os zeros;

   9.4 a concavidade;

   9.5 as coordenadas do vértice da parábola;

   9.6 a equação do eixo de simetria;

   9.7 os pontos de intersecção com o eixo dos *xx*;

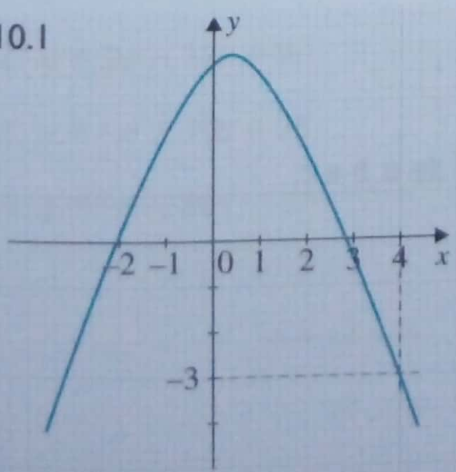
   9.8 os pontos de intersecção com o eixo dos *yy*;

   9.9 a variação do sinal;

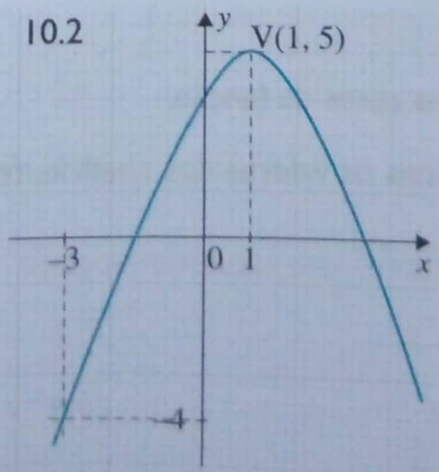
   9.10 a variação da função.

10. Determina as expressões analíticas das funções representadas pelos gráficos abaixo.

10.1

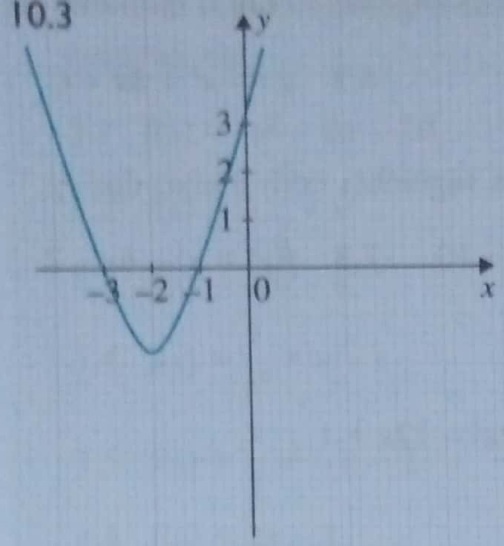


10.2

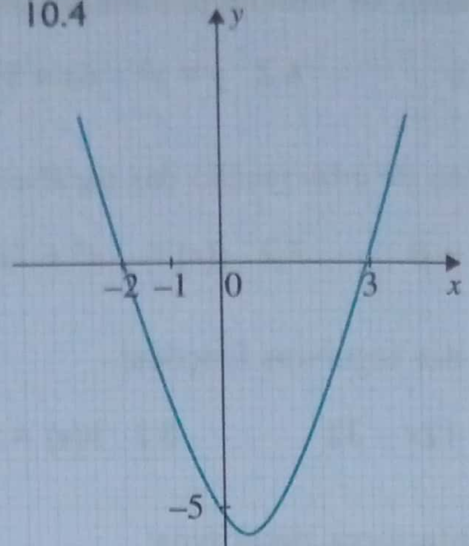


Exercícios não resolvidos

10.3



10.4

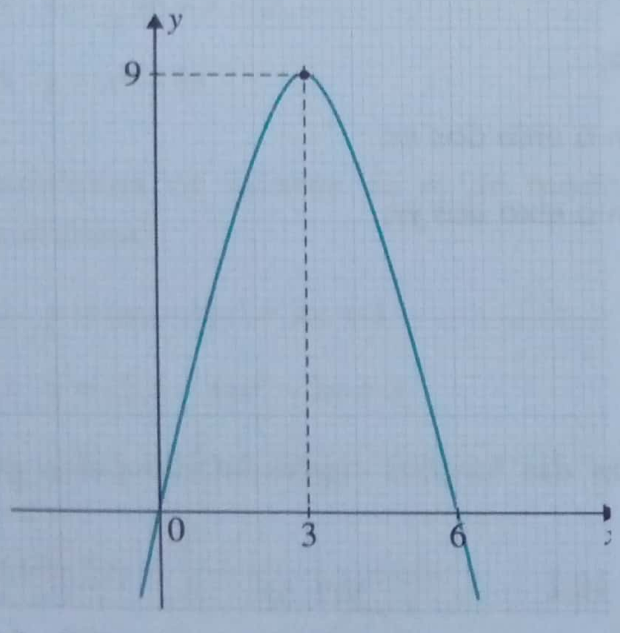


11. Determina a expressão analítica da função cuja parábola:

11.1 passa pelo ponto $P(0, 6)$ e pelo vértice $V(1, 8)$;

11.2 passa pelos pontos $P(0, -2)$ e $Q(1, -3)$.

12. O gráfico abaixo representa a função $y = ax^2 + bx + c$.



12.1 Indica os zeros da função.

12.2 Determina os valores dos coeficientes de a, b e c.

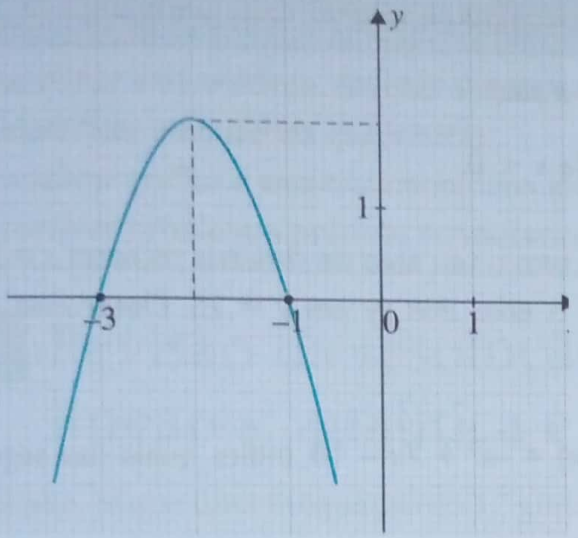
Exercícios não resolvidos

13. Considera a função $f(x) = x^2 - 4x + 3$ e assinala os zeros da função:

13.1 -1 e -3 13.2 1 e -3 13.3 -1 e 3 13.4 1 e 3

(Escolhe a opção correcta.)

14. Indica os zeros da função abaixo:



15. Os zeros da função $f(x) = 2x^2 - x - 3$ são:

15.1 -1 e $\frac{3}{2}$

15.2 -1 e $\frac{-3}{2}$

15.3 $\frac{-3}{2}$ e 1

15.4 Não tem zeros.

(Escolhe a opção correcta.)

16. Determina os valores de x para que as funções abaixo sejam crescentes:

16.1 $y = 2x^2 - 3x + 1$

16.2 $y = 3x^2 - 12x + 8$

16.3 $y = -x^2 + 10x - 25$

16.4 $y = -x^2 - 3x$

Exercícios não resolvidos

17. Considera a função $y = x^2 - x + 8$. Das seguintes afirmações, indica as que são verdadeiras:

    17.1 A função é positiva para todo x real.

    17.2 A função tem dois zeros reais diferentes.

    17.3 A função muda de sinal quando x assume valores reais positivos.

    17.4 A função é negativa para todo x real.

    17.5 A função é nula para valores de $x < 0$.

18. O gráfico de uma função quadrática tem o seu eixo de simetria na recta $x = 3$, uma das raízes é igual a 1 e intersecta o eixo dos *yy* em $y = 25$. Determina o seu contradomínio.

19. Em relação ao gráfico da função $f(x) = -x^2 + 7x - 10$, indica quais das seguintes afirmações são verdadeiras:

    19.1 Intersecta o eixo das abcissas em $(5, 0)$ e $(-5, 0)$.

    19.2 O seu vértice é o ponto $(-2, 9)$.

    19.3 É uma parábola de concavidade voltada para baixo.

    19.4 O seu eixo de simetria é o eixo das ordenadas.

    19.5 Intercepta o eixo das ordenadas em $(0, -10)$.

20. Determina o valor máximo ou mínimo das seguintes funções:

    20.1 $f(x) = -x^2 + 3x$

    20.2 $f(x) = x^2 - 3x - 1$

21. Dada a função quadrática $y = x^2 - ax + b$, cujas raízes são $x = 1$ e $x = 2$, determina o valor dos coeficientes a e b na função.

22. Considera a função dada por $y = t^2 - 12t + 20$, na qual y representa a altura, em metros, de um móvel no instante t, em segundos. Determina o valor mínimo dessa função.

Unidade 5

Inequações quadráticas

Ao terminar esta unidade, deverás ser capaz de:
- identificar inequações quadráticas;
- resolver gráfica e analiticamente uma inequação quadrática;
- resolver problemas práticos conducentes a uma inequação quadrática.

5.1 Revisão da resolução de inequações lineares: analítica e geométrica

Recordas-te que uma inequação do 1.° grau de uma variável x é qualquer expressão que pode ser escrita numa das seguintes formas:

- $ax + b > 0$
- $ax + b \geq 0$
- $ax + b < 0$
- $ax + b \leq 0$

Onde a, b são coeficientes reais e $a \neq 0$.

Exemplos

- $3x + 7 > 0$
- $x - \frac{2}{5} \leq 0$
- $x + 5 < 0$
- $7 - x < 0$

5.1.1 Resolução de uma inequação de 1.° grau

Uma forma simples de resolver uma inequação do 1.° grau é isolar a incógnita x num dos membros da desigualdade.

Exemplo

Vamos resolver a inequação $-2x + 6 > 0$.

Resolução

$-2x + 6 > 0 \Leftrightarrow -2x > -6$

Multiplicando por (–1): $-2x > -6 \Leftrightarrow 2x < 6$.

Dividindo ambos os membros por 2: $\frac{2}{2}x < \frac{6}{2} \Leftrightarrow x < 3$.

Portanto, a solução da inequação é $x < 3$.

Esta solução pode ser mostrada geometricamente, como mostra a figura ao lado.

Isto significa que a desigualdade $-2x + 6 > 0$ tem sentido para todos os valores reais x menores que 3. Por isso, podemos escrever: $S = x \in]-\infty, 3[$, que se lê «intervalo aberto de menos infinito até três».

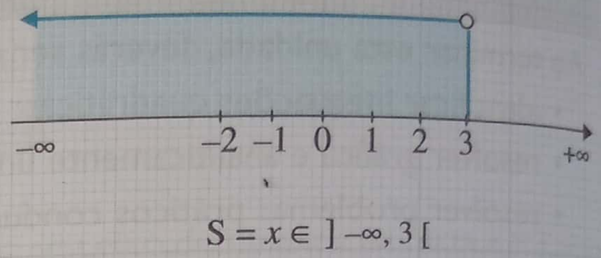


Fig. 1 Representação geométrica da função $x < 3$.

Recordas-te, também, que podemos resolver uma inequação do 1.° grau estudando o sinal da função do 1. ° grau correspondente:

- igualamos a expressão $ax + b$ a zero;
- localizamos a raiz no eixo xx;
- estudamos o sinal de acordo com a situação.

Exemplo

1. Vamos resolver a inequação $2x - 1 > 7 + x$.

Resolução

Vamos reduzir esta desigualdade à forma $ax + b > 0$.

$2x - 1 > 7 + x \Leftrightarrow 2x - x - 1 - 7 > 0$
$\Leftrightarrow x - 8 > 0$.

Agora, vamos estudar o sinal da função $y = x - 8$.

$x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 8$.

Geometricamente, obtém-se o gráfico da figura ao lado.

Assim, a inequação acima apresentada é válida para valores reais de x, tais que $x > 8$.

$S = x \in]8;+\infty[$ ou $x > 8$.

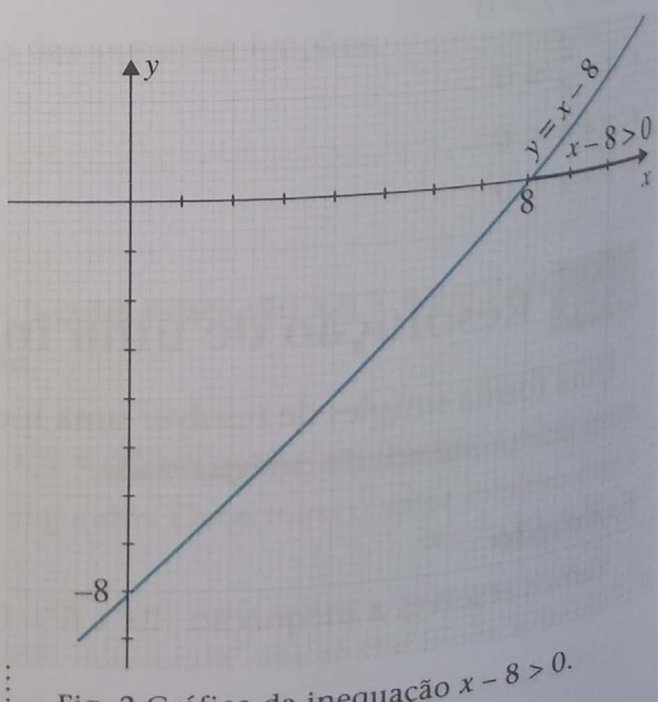


Fig. 2 Gráfico da inequação $x - 8 > 0$.

5.2 Inequações quadráticas

5.2.1 Conceito de inequação quadrática

Uma inequação quadrática ou do 2.° grau é uma expressão que pode ser reduzida a uma das seguintes formas:

- $ax^2 + bx + c > 0$
- $ax^2 + bx + c < 0$
- $ax^2 + bx + c \geq 0$
- $ax^2 + bx + c \leq 0$

sendo os coeficientes a, b e c reais e $a \neq 0$.

Exemplos

- $3x^2 - 2x + 1 > 0$
- $-x^2 - 3x + 1 < 0$
- $-\frac{1}{5}x^2 + 6x \geq 0$
- $10x^2 - x - 1 \leq 0$

5.2.2 Resolução de inequações quadráticas

Recordas-te que resolver uma inequação significa encontrar um conjunto de valores que a tornam numa proposição verdadeira.

Podemos resolver uma inequação de duas formas: graficamente ou analiticamente.

A: Resolução gráfica de uma inequação

O conjunto solução das inequações deve ser determinado de acordo com o sinal de cada função correspondente.

Assim, para resolvermos uma inequação do 2. ° grau devemos estudar o sinal da função correspondente à inequação.

Exemplos

1. Vamos resolver a inequação $x^2 - 9 > 0$.

Resolução

Vamos estudar o sinal da função $f(x) = x^2 - 9$, usando um gráfico.

Assim, $x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x + 3) = 0$, factorizando o binómio já conhecido.

Pela lei do anulamento do produto, temos para a equação $x^2 - 9 = 0$, as seguintes soluções: $x = 3$ ou $x = -3$.

Do esboço gráfico (Fig. 3) podemos concluir que:

- $f(x) > 0$ para valores reais de x tais que $x < -3$ ou $x > 3$;
- $f(x) = 0$ para valores reais de x tais que $x = -3$ ou $x = 3$;
- $f(x) < 0$ para valores reais de x tais que $-3 < x < 3$.

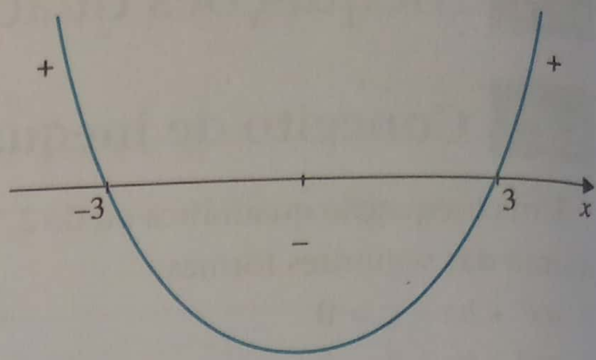


Fig. 3 Gráfico da função $f(x) = x^2 - 9$.

Como queremos que a expressão $x^2 - 9 > 0$, seja positiva, então tomamos o intervalo marcado com sinal (+) positivo. Logo, a solução é $S = \{x \in \mathbb{R}: x < -3 \text{ ou } x > 3\}$.

2. Vamos resolver graficamente a inequação: $x^2 - 3x + 2 > 0$.

Resolução

Determinemos primeiro os zeros da função:

$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow$

$x = 1$ ou $x = 2$.

Como desejamos os valores para os quais a função é positiva, devemos fazer um esboço do gráfico e ver para quais valores de x que isso ocorre.

Observando o esboço gráfico, vemos que as regiões que tornam positivas a função são à esquerda de 1 e à direita de 2, por isso $S = \{x \in \mathbb{R}: x < 1 \text{ ou } x > 2\}$.

Deste modo, para resolver uma inequação quadrática, temos de ter em atenção os seguintes aspectos:

- igualar a função do 2. ° grau a zero;
- determinar (se existirem) as raízes da equação;
- marcar as raízes no eixo dos xx;
- estudar o sinal da função correspondente.

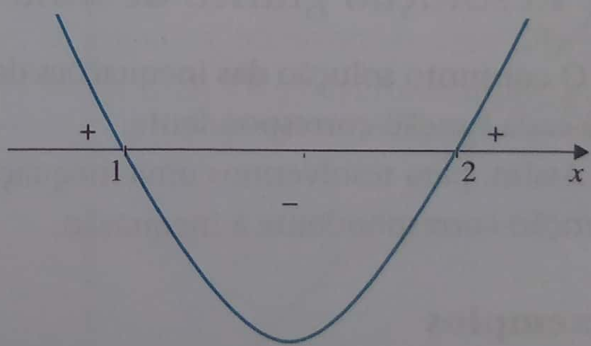


Fig. 4 Gráfico da inequação $x^2 - 3x + 2 > 0$.

3. Vamos resolver a inequação $-x^2 + 4 \leq 0$.

Resolução

Vamos determinar os zeros da função $f(x) = -x^2 + 4$:

$-x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = 2$ e $x_2 = -2$.

Esboçemos então o gráfico. No esboço do gráfico, podes ver que a concavidade da parábola está virada para baixo, pois $a < 0$.

Observando o esboço gráfico, vemos que as regiões que tornam negativas ou iguais a zero a função são: $x \leq -2$ e $x \geq 2$.

Por isso, $S = \{x \in \mathbb{R}: x \leq -2 \text{ ou } x \geq 2\}$.

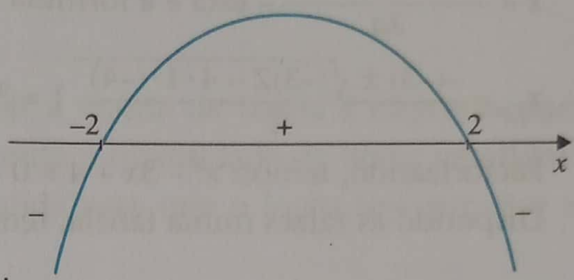


Fig. 5 Gráfico da inequação $-x^2 + 4 \leq 0$.

4. Vamos determinar as soluções da seguinte inequação $x^2 - 2x + 4 > 0$.

Resolução

Primeiro, determina-se os zeros da função $f(x) = x^2 - 2x + 4$:

$x^2 - 2x + 4 = 0$.

Esta equação não tem soluções reais, pois $\Delta < 0$.

Pelo gráfico da função (Fig. 6), vemos que a função é positiva para qualquer que seja o valor de x. Logo, o conjunto solução é $S = \mathbb{R}$.

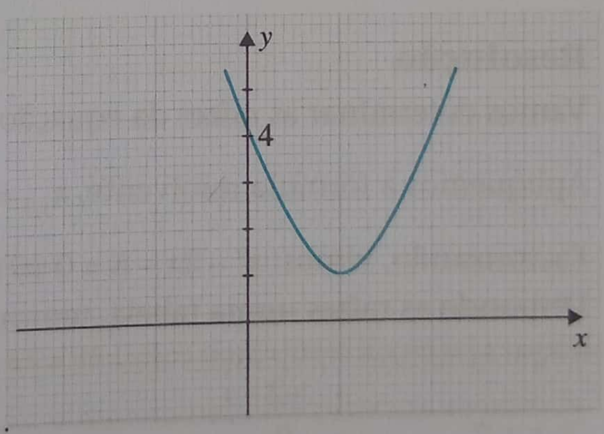


Fig. 6 Gráfico da inequação $x^2 - 2x + 4 > 0$.

B: Resolução analítica de uma inequação quadrática

Exemplos

1. Vamos resolver a inequação $x^2 - 3x + 4 < 0$.

Resolução

Vamos determinar as raízes da equação $x^2 - 3x + 4 = 0$.

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ – esta é a fórmula resolvente que já conheces.

$$x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2} \cdot 1 = 3 \pm \frac{\sqrt{25}}{2} \Leftrightarrow x_1 = 4 \wedge x_2 = -1$$

Factorizando, temos: $x^2 - 3x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 4) = 0$.

Dispondo as raízes numa tabela, temos:

x		-1		4	
$x + 1$		0	$+$	$+$	
$x - 4$		$-$	$-$	0	
$(x + 1)(x - 4)$		$+$	$-$	$+$	

A solução é a parte sombreada.

$S = \{x \in \mathbb{R}: -1 < x < 4\}$.

2. Vamos resolver a inequação $x^2 - 2x - 8 \geq 0$.

Resolução

Vamos determinar as raízes da equação $x^2 - 2x - 8 = 0$.

Apliquemos a fórmula resolvente, $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Factorizando, temos: $x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x - 4) = 0$.

Dispondo as raízes numa tabela, temos:

x		-2		4	
$x + 2$		0	$+$	$+$	
$x - 4$		$-$	$-$	0	
$(x + 2)(x - 4)$		$+$	$-$	$+$	

A solução é a parte sombreada.

$S = \{x \in \mathbb{R}: x \leq -2 \text{ ou } x \geq 4\}$.

5.2.3 Resolução de problemas conducentes a uma inequação quadrática

A Matemática, enquanto ciência, constitui um instrumento útil para a vida do ser humano, podendo ser útil para as necessidades do mercado de trabalho, dando instrumentos que podem ser utilizados nas diversas áreas do seu dia-a-dia. Deste modo, as inequações, como parte dos conteúdos de Matemática, podem ter também um papel fundamental na resolução de problemas concretos da vida.

Exemplos

1. O lucro mensal de uma pastelaria com a venda de bolos é expressa por: $L(x) = -x^2 + 140x - 1875$, onde x representa a quantidade de bolos vendidos. Que quantidade de bolos deve ser vendida para que o lucro seja superior a 2400,00 Mt?

Resolução

$L(x) = -x^2 + 140x - 1875 > 2400$

$L(x) = -x^2 + 140x - 1875 - 2400 > 0$

$L(x) = -x^2 + 140x - 4275 > 0$

Resolvendo a equação $-x^2 + 140x - 4275 = 0$ temos as raízes $x_1 = 45$ e $x_2 = 95$.
A concavidade da parábola está voltada para baixo, pois o coeficiente a é negativo.

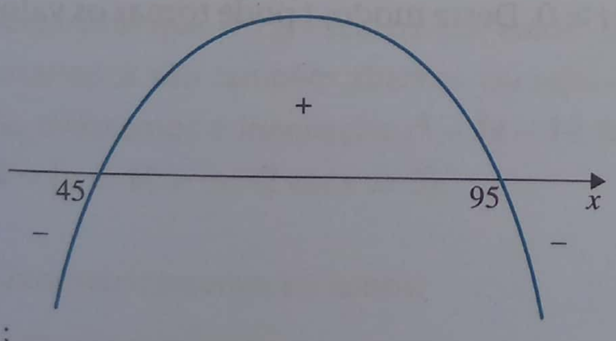


Fig. 7 Esboço do gráfico da inequação $L(x)$.

Assim, a pastelaria deverá vender entre 45 a 95 bolos para que o lucro seja superior a 2400,00 Mt.

2. Sob determinadas condições, a pressão sofrida por um corpo em função do tempo t é dada pela fórmula $p(t) = -t^2 + 3t$, sendo $t \geq 0$. Que valores pode tomar t para que a pressão seja maior que 28?

Resolução

Pretende-se que a pressão seja maior que 28.

Então, $p(t) > 28$, ou seja, $-t^2 + 3t > 28$.

Resolvendo a inequação quadrática $-t^2 + 3t > 28$, temos, para os zeros, $t_1 = 7$ e $t_2 = -4$.

Assim, a função $p(t)$ tem a concavidade voltada para baixo, daí que o esboço gráfico seja o seguinte:

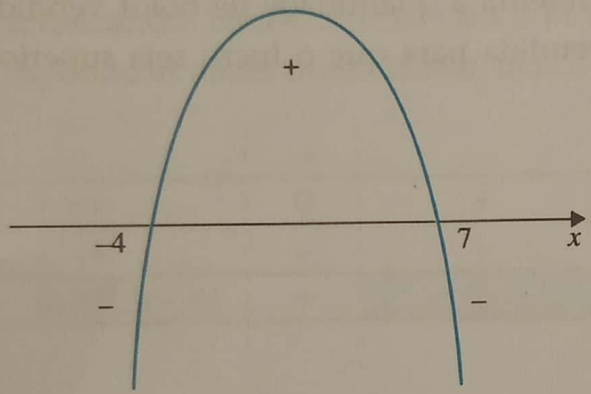


Fig. 8 Esboço do gráfico da inequação $p(t)$.

Uma das condições de existência é que $t \geq 0$. Deste modo, t pode tomar os valores $t \in [0,7[$.

Exercícios resolvidos

1. Resolve a seguinte inequação $x^2 - 3x - 10 > 0$.

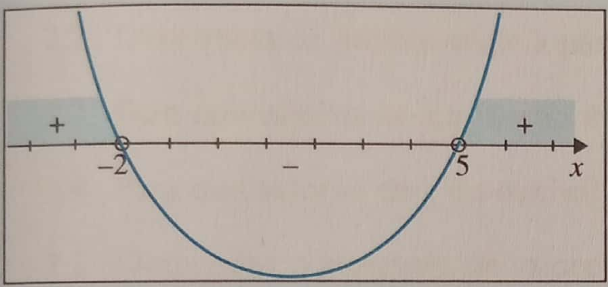
Resolução

Para resolver esta inequação, vamos considerar o estudo do sinal da função quadrática $f(x) = x^2 - 3x - 10$.

Usando a fórmula resolvente, $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$, vamos determinar os zeros da função.

Assim, os zeros são -2 e 5.

O esboço gráfico da função é:



A parte sombreada do gráfico corresponde à solução do problema, ou seja, a função é positiva no intervalo $]-\infty, -2[$ ou $]5, +\infty[$.

Assim, a inequação $x^2 - 3x - 10 > 0$ tem a solução:

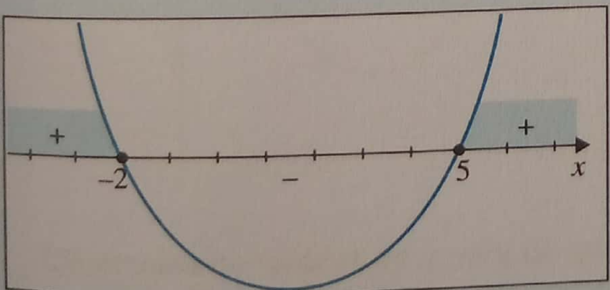
$S = \{x \in \mathbb{R}: x < -2 \text{ ou } x > 5\}$.

Reparaste que, no gráfico, os extremos -2 e 5 têm bolinhas abertas. Isso é porque os intervalos são também abertos, ou seja, -2 e 5 não pertencem à solução.

Se tivéssemos a inequação $x^2 - 3x - 10 \geq 0$, a solução seria:

$S = \{x \in \mathbb{R}: x \leq -2 \text{ ou } x \geq 5\}$.

Geometricamente, teríamos:



Isto significa que -2 e 5 pertencem à solução e, por isso, as bolinhas estão fechadas.

Agora vamos resolver analiticamente a inequação anterior.

Temos -2 e 5 como raiz da função $f(x) \geq 0$.

Agora vamos construir uma tabela de valores reais incluindo os zeros da função:

	-2		5
$x+2$	0	$+$	$+$
$x-5$	$-$	$-$	0
$(x+1)(x-4)$	$+$	$-$	$+$

A parte sombreada corresponde à nossa solução, isto é:

$S = \{x \in \mathbb{R}: x \leq -2 \text{ ou } x \geq 5\}$.

Exercícios não resolvidos

1. Resolve as inequações seguintes:

   1.1 $x^2 - 2x - 3 > 0$

   1.2 $x^2 - 3x - 3 \geq 0$

   1.3 $-x^2 + 3x + 10 < 0$

   1.4 $x^2 - 9 < 0$

   1.5 $-\frac{1}{2}x^2 - 2x \leq 0$

   1.6 $x^2 - 10x \geq 0$

   1.7 $-3x^2 - 8x + 3 \leq 0$

2. Dada a função $f(x) = -x^2 + x + 6$:

   2.1 Determina os pontos onde a parábola corta o eixo dos *y*.

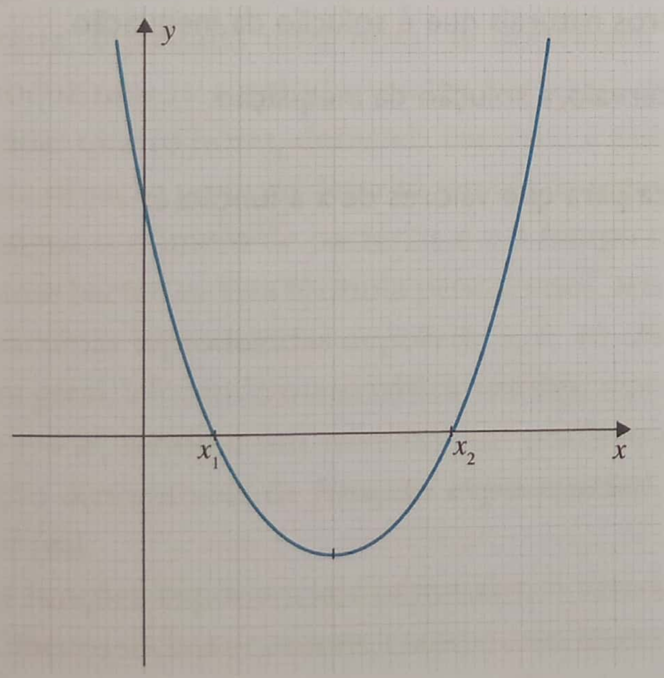
   2.2 Determina os pontos onde a parábola corta o eixo dos *x*.

   2.3 Para que valores de *x* a função é nula?

   2.4 Para que valores de *x* é positiva?

   2.5 Determina o intervalo de valores de *x* onde a função é negativa.

3. Observa a figura.



Determina os valores de *x* para os quais:

3.1 $f(x) > 0$

3.2 $f(x) < 0$

3.3 $f(x) = 0$

Exercícios não resolvidos

4. Determina as raízes e estuda o sinal da função $f(x) = -x^2 + 5x$.

5. Indica o conjunto de valores inteiros de x que satisfaz a inequação $x^2 - x - 12 \leq 0$.

6. O conjunto solução da inequação $-x^2 - 3x > 0$, em $\mathbb{R}$, é:

6.1 $\{x \in \mathbb{R}: -3 < x < 0\}$

6.2 $\{x \in \mathbb{R}: x < 0 \text{ ou } x < -3\}$

6.3 $\{x \in \mathbb{R}: x > 0\}$

6.4 $\{x \in \mathbb{R} : x < -3\}$

(Escolhe a opção correcta.)

7. Considera a inequação: $-3 \leq x \leq 3$.

7.1 Qual é o menor número inteiro positivo que é solução da inequação?

7.2 Qual é o menor número inteiro negativo que é solução da inequação?

7.3 Qual é o menor número natural que é solução da inequação?

7.4 Indica o conjunto de números naturais que é solução da inequação.

7.5 Escreve, sob a forma de intervalo, a solução da inequação.

8. Na função $f(x) = x^2 - x + \frac{1}{4}$, indica para que valores de x a função é:

8.1 nula;

8.2 negativa;

8.3 positiva.

Unidade 6

Função exponencial

Ao terminar esta unidade, deverás ser capaz de:

- identificar uma função exponencial;
- representar graficamente uma função exponencial;
- determinar o domínio, o contradomínio, os zeros da função, a variação do sinal da função, a variação da função e a ordenada na origem;
- identificar a assímptota horizontal.

6.1 Introdução ao conceito de função exponencial

O crescimento de determinados seres vivos acontece de uma forma exponencial.

Por exemplo, numa experiência laboratorial, verificou-se que a partir de uma bactéria, e passada uma hora, se obtiveram duas bactérias. Após duas horas, reproduziram-se surgindo quatro bactérias, passadas três horas, oito bactérias, volvidas quatro horas, dezasseis bactérias e assim sucessivamente.

Esta situação pode ser descrita através da seguinte relação matemática: $y = 2^x$, onde y designa o número de bactérias e x o tempo necessário para a reprodução dessas mesmas bactérias. Esta fórmula permite-nos, assim, determinar facilmente o número de bactérias reproduzidas depois de 5, 6, 10, 20, 100, ou x horas.

Em geral, a fórmula matemática anterior representa uma aplicação de funções do tipo $y = a^x$, sendo a um número real positivo e diferente de 1, que exprime uma função denominada de ***função exponencial***, onde a é a base e x toma qualquer valor real.

As funções exponenciais expressam o crescimento ou a diminuição de alguns fenómenos sociais e naturais, como o crescimento populacional ou o funcionamento dos juros compostos, entre outros. Elas desempenham, deste modo, um papel importante não só na Matemática, mas também noutras ciências, tal como na Física, Química, Engenharia, Astronomia, Economia, Biologia, Psicologia, etc.

Então, podemos caracterizar a função exponencial como sendo: toda a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^+$, definida por uma lei de correspondência do tipo $y = a^x$ com $a > 0$ e $a \neq 1$.

Exemplos

- $f(x) = 2^x$
- $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
- $f(x) = 5^x$
- $f(x) = (\sqrt{5})^x$

6.2 Gráfico da função exponencial

Vamos estudar a função $f(x) = 2^x$.

Com a ajuda da tabela determinemos alguns pontos do gráfico da função e o gráfico correspondente:

x	$f(x) = 2^x$	(x, y)
-3	$f(-3) = 2^{-3} = \left(\frac{1}{8}\right)$	$\left(-3, \frac{1}{8}\right)$
-2	$f(-2) = 2^{-2} = \frac{1}{4}$	$\left(-2, \frac{1}{4}\right)$
-1	$f(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$	$\left(-1, \frac{1}{2}\right)$
0	$f(0) = 2^0 = 1$	$(0, 1)$
1	$f(1) = 2^1 = 2$	$(1, 2)$
2	$f(2) = 2^2 = 4$	$(2, 4)$
3	$f(3) = 2^3 = 8$	$(3, 8)$

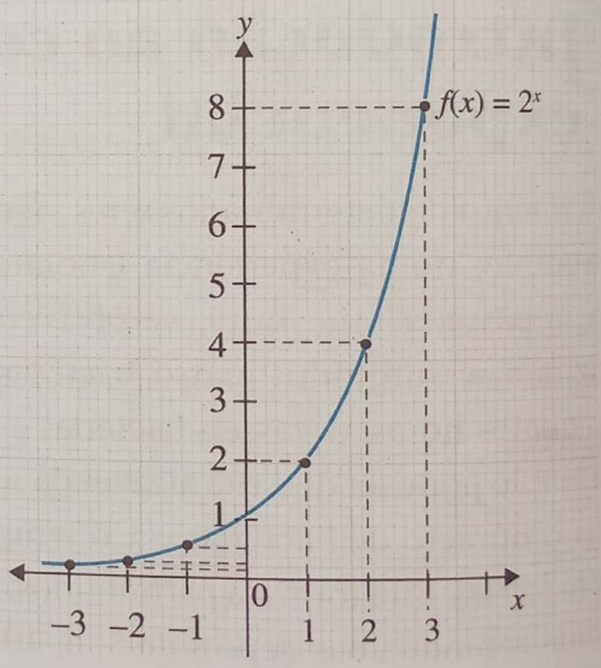


Fig. 1 Gráfico da função $f(x) = 2^x$.

Observando o gráfico anterior vemos que:

- fazendo a projecção do gráfico no eixo dos xx, obtemos $D_f = \mathbb{R}$;
- fazendo a projecção do gráfico no eixo dos yy, obtemos $D'_f = \mathbb{R}^+$;
- para $x_2 > x_1$ temos $f(x_2) > f(x_1)$, por isso a função é crescente;
- o ponto $(0, 1)$ pertence à função.

Agora estudemos a função $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Vamos usar a tabela de valores para a construção do gráfico.

Com a ajuda da tabela determinemos alguns pontos do gráfico da função e o gráfico correspondente:

x	$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	(x, y)
-3	$f(-3) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$	$(-3, 8)$
-2	$f(-2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$	$(-2, 4)$
-1	$f(-1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$	$(-1, 2)$
0	$f(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{0} = 1$	$(0, 1)$
1	$f(1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{1} = \frac{1}{2}$	$\left(1, \frac{1}{2}\right)$
2	$f(2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2} = \frac{1}{4}$	$\left(2, \frac{1}{4}\right)$
3	$f(3) = \left(\frac{1}{2}\right)^{3} = \frac{1}{8}$	$\left(3, \frac{1}{8}\right)$

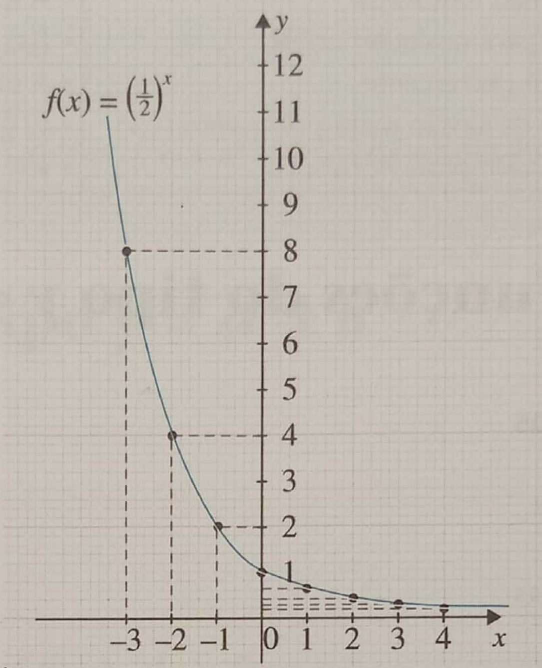


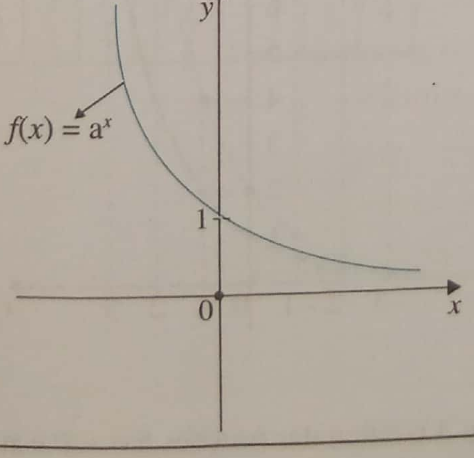
Fig. 2 Gráfico da função $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

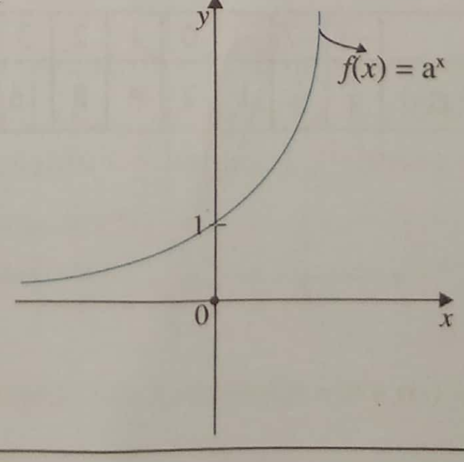
Analisando o gráfico da função $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, podemos concluir que:

- fazendo a projecção do gráfico no eixo dos xx, obtemos $D_f = \mathbb{R}$;
- fazendo a projecção do gráfico no eixo dos yy, obtemos $D'_f = \mathbb{R}^+$.
- para $x_2 > x_1$ temos $f(x_2) < f(x_1)$ por isso a função é decrescente;
- o ponto (0, 1) pertence à função.

Resumindo:

Função exponencial $0 < a < 1$	Função exponencial $a > 1$
$f: \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}^+$ $x \Rightarrow a^x$	$f: \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}^+$ $x \Rightarrow a^x$





Função exponencial $0 < a < 1$	Função exponencial $a > 1$
• Domínio $D_f = \mathbb{R}$ • Contradomínio $D'_f = \mathbb{R}^+$ • A função não tem zeros. • $f(x) > 0$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$ • A função é decrescente • O gráfico da função passa pelo ponto $(0,1)$ • $y = 0$ é a assimptota horizontal	• Domínio $D_f = \mathbb{R}$ • Contradomínio $D'_f = \mathbb{R}^+$ • A função não tem zeros • $f(x) > 0$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$ • A função é crescente • O gráfico da função passa pelo ponto $(0, 1)$ • $y = 0$ é a assimptota horizontal

6.3 Funções do tipo $y = a^{x \pm b}$

Exemplos

- $y = 2^{x+1}$
- $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{x-2}$
- $y = 10^{x+0,5}$

6.3.1 Representação gráfica das funções $y = a^{x \pm b}$

Considera as funções: $f(x) = 2^x$ e $g(x) = 2^{x+1}$.

Vamos construir no mesmo sistema cartesiano os respectivos gráficos. Para tal começamos por ter tabelas para cada função (vê abaixo):

$f(x) = 2^x$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

$g(x) = 2^{x+1}$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = g(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16

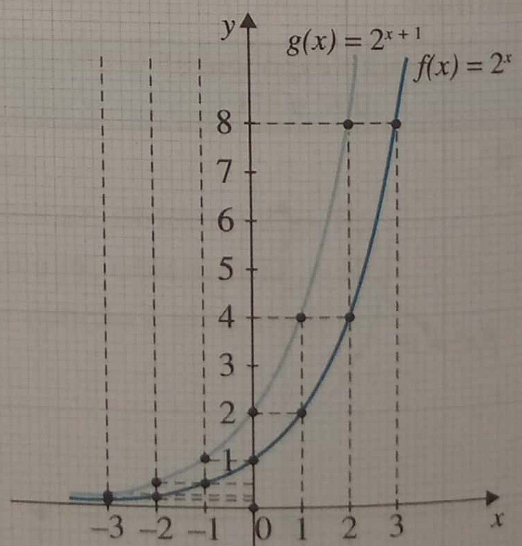


Fig. 3 Gráfico das funções $f(x) = 2^x$ e $g(x) = 2^{x+1}$.

Comparando os gráficos das funções $f(x)$ e $g(x)$, observa-se que:

- o ponto (0, 1) pertence ao gráfico da função $f(x)$;
- o ponto (0, 2) pertence ao gráfico da função $g(x)$;
- o gráfico $g(x)$ resulta do gráfico $f(x)$ através da multiplicação por 2.

Em geral, na função $f(x) = a^{x \pm b}$:

- o ponto $(\pm b, 1)$ pertence à função;
- o gráfico de $f(x) = a^{x \pm b}$ resulta do gráfico $f(x) = a^x$ através da multiplicação por um factor $a^{\pm b}$.

6.4 Funções do tipo $y = a^x \pm b$

Exemplos

- $y = 2^x + 1$
- $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x - 3$
- $y = (\sqrt{3})^x + 2$
- $y = 10^x - 1$

6.4.1 Representação gráfica das funções $y = a^x \pm b$

Considera as funções: $f(x) = 2^x$ e $g(x) = 2^x + 1$.

Para construir o gráfico $g(x) = 2^x + 1$, usamos o gráfico de $f(x) = 2x$, transladando $f(x) = 2^x$ em 1 unidade para cima.

$f(x) = 2^x$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

$g(x) = 2^x + 1$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = g(x)$	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	2	3	5	9

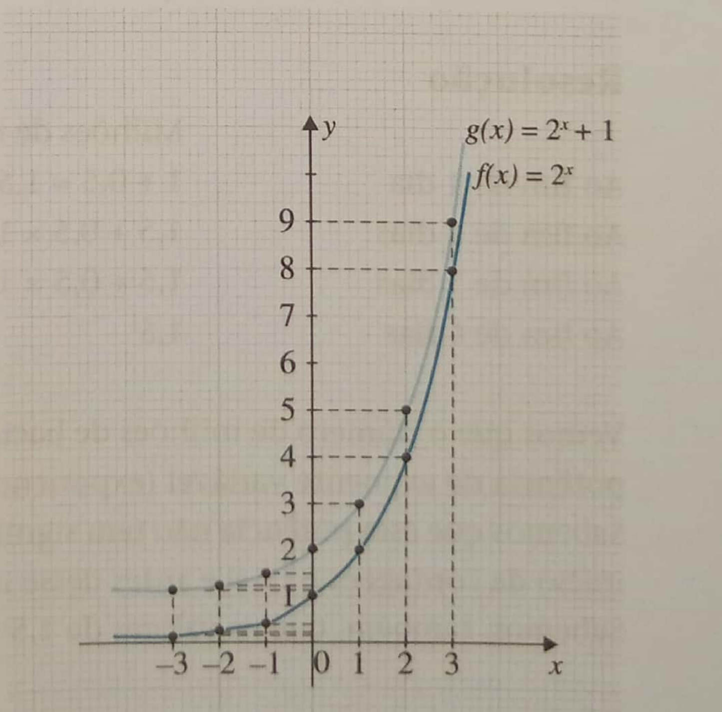


Fig. 4 Gráfico das funções $f(x) = 2^x$ e $g(x) = 2^x + 1$.

Comparando os gráficos das funções $f(x)$ e $g(x)$, observa-se que:

- o ponto (0, 1) pertence ao gráfico da função $f(x)$;
- o ponto (0, 2) pertence ao gráfico da função $g(x)$;
- o gráfico de $g(x)$ sofre uma translação vertical de uma unidade positiva relativamente ao gráfico da função $f(x)$.

Em geral, a função $f(x) = a^x \pm b$:

- o ponto $(0,1 \pm b)$ pertence à função;
- o gráfico de $f(x) = a^x + b$ sofre uma translação vertical de b unidades para cima se $b > 0$ e b unidades para baixo se $b < 0$, relativamente ao gráfico da função $f(x) = a^x$.

6.5 Aplicações da função exponencial

A função exponencial intervém em numerosas aplicações matemáticas, na Ciência e na Indústria, sendo indispensável no estudo de muitos problemas de Economia e Finanças, nomeadamente no cálculo dos «juros compostos».

Exemplos

1. Uma população de bactérias aumenta 50% em cada dia. Se no início da contagem havia 1 milhão de bactérias, quantas haverá ao fim de t dias?

Resolução

	Milhões de bactérias
Ao fim de 1 dia	$1 + 0,5 = 1,5$
Ao fim de 2 dias	$1,5 + 0,5 \times 1,5 = 1,5(1 + 0,5) = 1,5^2$
Ao fim de 3 dias	$1,5 + 0,5 \times 1,5^2 = 1,5^2\,(1 + 0,5) = 1,5^3$
Ao fim de t dias	$1,5^t$

Vemos que o número de milhões de bactérias, ao fim de t dias, é dado por uma potência de expoente variável (exponencial).
Sabemos que esta potência não tem significado para qualquer valor real de t; no início da contagem é $t = 0$ e antes desse instante é $t < 0$.
Sabemos, também, que os valores de $1,5^t$ são sempre positivos.

2. Uma pessoa coloca 3000 Mt a prazo, à taxa de 20% ao ano, e não levanta dinheiro algum durante 10 anos. Quanto tem a receber ao fim desse período? E ao fim de x anos?

Resolução

x (anos)	Milhares de Mt
Ao fim de 1 ano	$3 + 3 \times 0{,}2 = 3\ (1 + 0{,}2) = 3 \times 1{,}2$
Ao fim de 2 anos	$3 \times 1{,}2 + 3 \times 1{,}2 \times 0{,}2 = 3 \times 1{,}2\ (1 + 0{,}2) = 3 \times 1{,}2^2$
Ao fim de 3 anos	$3 \times 1{,}2^2 + 3 \times 1{,}2^2 \times 0{,}2 = 3 \times 1{,}2^3$
Ao fim de 10 anos	$3 \times 1{,}2^{10} \approx 18{,}575$
Ao fim de x anos	$3 \times 1{,}2^x$

É também uma função exponencial de base 1,2.

Com os dois exemplos que acabaste de observar, pode-se afirmar que os modelos exponenciais são importantes para a resolução de problemas relacionados com a evolução populacional, poluição, temperaturas, quantidade disponível de alimentos, acidentes, guerras, epidemias, entre outros.

Exercícios resolvidos

1. Assinala com **S** as funções exponenciais e com **N** as funções não exponenciais:

1.1 $y = x^{5x}$ 1.2 $y = 5^x$ 1.3 $y = x^2$ 1.4 $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$

Resolução

É função exponencial toda a função definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^+$: $y = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$.

1.1 N 1.2 S 1.3 N 1.4 S

2. Classifica as funções seguintes em crescentes ou decrescentes:

2.1 $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 2.2 $y = 3^x$ 2.3 $f(x) = (0{,}5)^x$

Resolução

A função $f(x) = a^x$ é crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$.

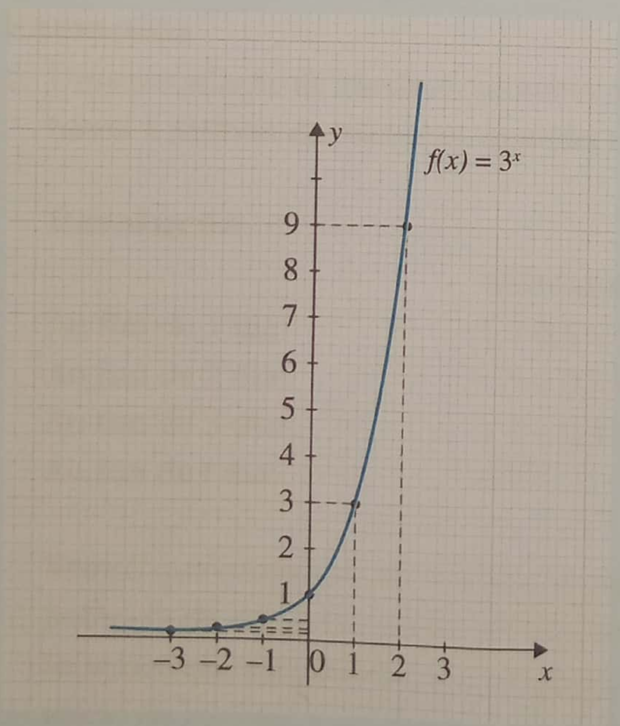
Assim, as funções 2.1 e 2.3 são descrescentes e a função 2.2 é crescente.

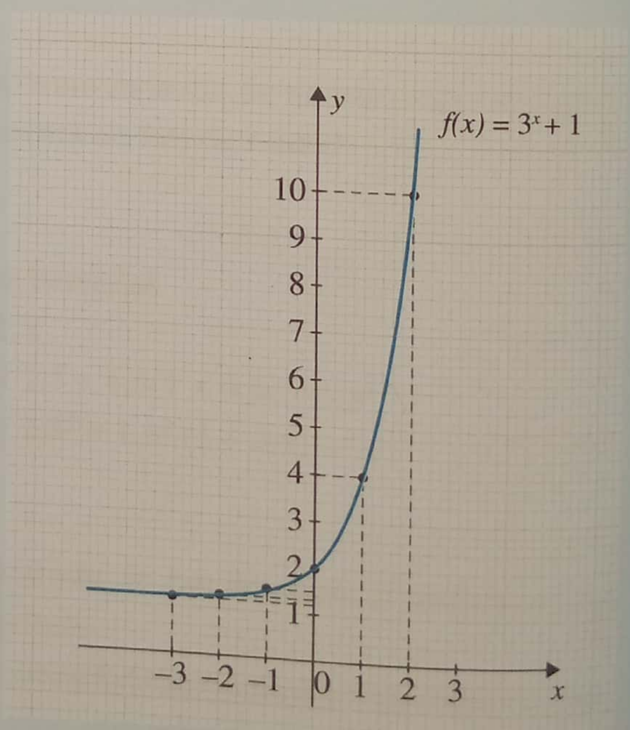
3. Esboça o gráfico das seguintes funções:

3.1 $f(x) = 3^x$

3.2 $f(x) = 3^x + 1$

Resolução





Exercícios resolvidos

4. Sob certas condições, o número de bactérias de uma cultura, em função do tempo em horas $t(h)$, é dado por $N(t) = 2^{0,5t}$. Qual será o número de bactérias produzidas em:

4.1 10h

4.2 2 dias

Resolução

4.1 $N(t) = 2^{0,5t}$. Mas $t = 10$ h. Logo $N(10) = 2^{0,5 \cdot 10} = 32$ bactérias.

4.2 2 dias correspondem a 48 h. Como $t = 48$ h, $N(48) = 2^{0,5 \cdot 48} = 2^{24}$ bactérias.

Exercícios não resolvidos

1. Das funções seguintes, indica as que representam funções exponenciais:

a) $f(x) = 5^x$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{9}\right)^x$

c) $f(x) = (-3)^x$

d) $f(x) = 3^x$

e) $f(x) = (0,5)^x$

f) $f(x) = (\sqrt{3})^2$

2. Assinala com V as afirmações verdadeiras e com F as afirmações falsas.

2.1 A função $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ é crescente.

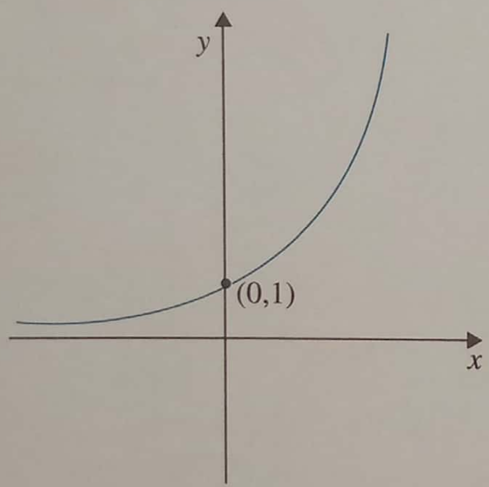
2.2 A função $f(x) = 5^x$ é crescente.

2.3 O gráfico da função exponencial é uma parábola.

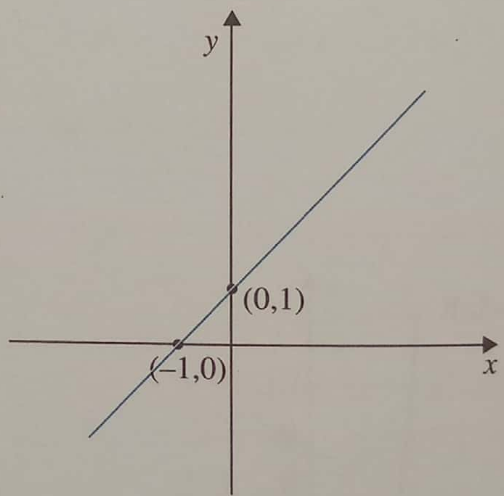
2.4 Toda a função exponencial tem como contradomínio $D'_f = \mathbb{R}^+$.

3. Dos gráficos seguintes, indica os que representam funções exponenciais:

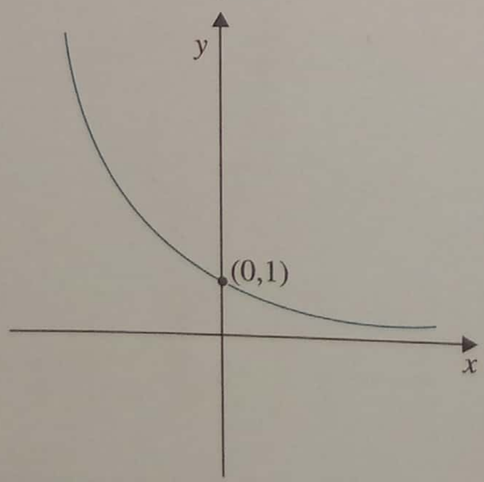
a)



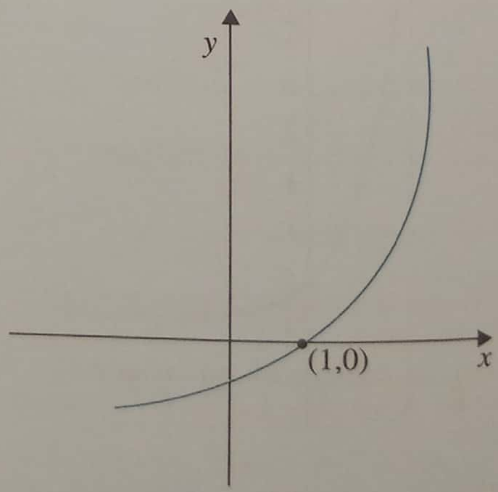
b)



c)



d)



Exercícios não resolvidos

4. Classifica as funções a seguir em crescentes ou decrescentes.

4.1 $f(x) = 5^x$

4.2 $f(x) = \left(\frac{1}{9}\right)^x$

4.3 $f(x) = (0,5)^x$

4.4 $f(x) = 100^x$

5. Esboça, no plano cartesiano, os gráficos das funções seguintes.

5.1 $f(x) = 4^x$

5.2 $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

5.3 $f(x) = 4^x + 1$

6. Dadas as funções $f(x) = 2x$ e $g(x) = 2^x$.

6.1 Representa no mesmo plano cartesiano os gráficos das funções $f(x)$ e $g(x)$.

6.2 Observa os gráficos e diz para que valores de x, $f(x) = g(x)$.

7. Dadas as funções $f(x) = 3^x$, $g(x) = 3^{x+1}$ e $h(x) = 3^{x-1}$:

7.1 Constrói no mesmo sistema cartesiano os gráficos das funções.

7.2 Indica nas funções $g(x) = 3^{x+1}$ e $h(x) = 3^{x-1}$:

a) o domínio;

b) o contradomínio;

c) os zeros da função;

d) a variação da função;

e) a variação do sinal;

f) a assimptota horizontal;

g) a ordenada na origem.

8. Dadas as funções $g(x) = 3^x + 1$ e $h(x) = 3^x - 1$, constrói no mesmo sistema cartesiano os gráficos das funções.

Exercícios não resolvidos

9. A produção de bactérias numa certa cultura é dada pela expressão $N(t) = 1200 \cdot 2^t$, sendo t medido em horas.

   9.1 Que quantidade de bactérias serão produzidas em 5 h?

   9.2 Quanto tempo, após o início da produção, terá 76 800 bactérias?

10. Num depósito a prazo efectuado num banco, o capital acumulado ao fim de certo tempo é dado pela fórmula $C = Dx\ (1 + i)^t$, sendo que C representa o capital acumulado, D o valor do depósito, i a taxa de juros ao mês e t o tempo de meses em que o dinheiro está aplicado. Nesse sistema, ao final de cada mês os juros capitalizados são incorporados no depósito. Para um depósito de 1000,00 Mt, com uma taxa de 2% ao mês, qual o capital acumulado ao fim de:

    10.1 6 meses;

    10.2 1 ano.

Unidade 7

Logaritmo e função logarítmica

Ao terminar esta unidade, deverás ser capaz de:
- definir o conceito de logaritmo de um número;
- calcular logaritmos aplicando suas propriedades;
- identificar uma função logarítmica;
- representar graficamente uma função logarítmica;
- determinar o domínio, o contradomínio, os zeros da função, a variação do sinal da função, a variação da função (monotonia) e a ordenada na origem;
- identificar a assimptota vertical;
- definir a função logarítmica como inversa da função exponencial;
- relacionar os gráficos das funções exponenciais e logarítmicas.

7.1 Introdução

A invenção dos logaritmos deve-se ao matemático escocês John Napier (Fig. 1), barão de Merchiston (1550 – 1617), que se interessou fundamentalmente pelo cálculo numérico e pela trigonometria. Em 1614, e ao fim de 20 anos de trabalho, publicou a obra *Logarithmorum Canonis Descriptio*, onde explica como se utilizam os logaritmos.

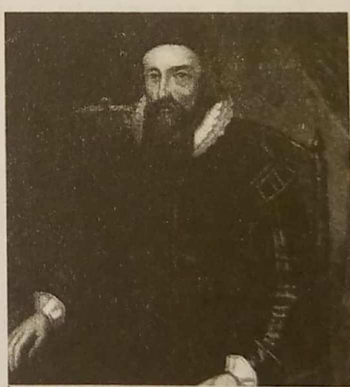


Fig. 1 John Napier.

Um ano depois, em 1615, o matemático inglês Henry Briggs (Fig. 2) (1561 – 1631), visitou Napier e sugeriu-lhe a utilização da base 10. A Napier agradou-lhe a ideia e resolveram elaborar as respectivas tábuas dos logaritmos decimais. Com a morte de Napier, é Briggs que conclui o trabalho e, em 1618, publica *Logarithmorum Chiliaes Prima*, o primeiro tratado sobre os logaritmos de base 10.

Fig. 2 Henry Briggs.

Os logaritmos vêm facilitar a vida na medida que vão permitir simplificar cálculos mais complicados, pois com os logaritmos podemos transformar multiplicações em adições, divisões em subtracções, potenciação em multiplicação e radiciação em divisão.

7.2 Logaritmo de um número

7.2.1 Conceito de logaritmo

Dados os números reais **b** ($b > 0$ e $b \neq 1$) e **N** (positivo), chama-se logaritmo do número N, na base b, ao número x que é necessário elevar a b para se obter N. Isto é, o logaritmo satisfaz a relação $b^x = N$. Dizemos que x é o logaritmo de N na base b.

Simbolicamente, escreve-se da seguinte forma: $\log_b N = x \Leftrightarrow b^x = N$.

- N é denominado de logaritmando;
- b é denominado de base.

Exemplos

- $\log_2 16 = 4$ porque $2^4 = 16$;
- $\log_3 3 = 1$ porque $3^1 = 3$;
- $\log_3 81 = 4$ porque $3^4 = 81$;
- $\log_4 1 = 0$ porque $4^0 = 1$.

7.2.2 Consequências da definição de logaritmo

Tendo em conta a definição do logaritmo, existem algumas condições a que os logaritmos devem sempre obedecer.

1. $\log_b 1 = 0$

Exemplos

- $\log_4 1 = 0$
- $\log_{\frac{1}{2}} 1 = 0$

2. $\log_b b = 1$

Exemplos

- $\log_3 3 = 1$
- $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{2} = 1$

3. $\log_b b^m = m$

Exemplos

- $\log_5 5^3 = 3$
- $\log_3 27 = \log_3 3^3 = 3$

4. $b^{\log_b a} = a$

Exemplos

- $3^{\log_3 81} = 81$
- $5^{\log_5 125} = 125$

5. $\log_b a = \log_b c \Leftrightarrow a = c$

Exemplos

- $\log_2 x = \log_2 16 \Leftrightarrow x = 16$
- $\log_{\frac{1}{3}} 9 = \log_{\frac{1}{3}} x \Leftrightarrow x = 9$

7.2.3 Restrições ao uso de logaritmos

O uso de logaritmos tem as seguintes restrições:

- Para que o logaritmo exista, é necessário que o logaritmando seja positivo, isto é, $N > 0$.

Exemplo

$\log_3 (-5) = x \Leftrightarrow (-5) = 3^x$.

É impossível calcular o valor de x nesta equação, pois qualquer potência de 3 é sempre positiva.

- Para que o logaritmo exista, é necessário que a base seja diferente de 1, ou seja $b \neq 1$.

Exemplo

$\log_1 5 = x \Leftrightarrow 5 = 1^x$.

É impossível calcular o valor de x nesta equação, pois qualquer potência de 1 é sempre igual a 1.

- Para que o logaritmo exista, é necessário que a base não seja nula nem negativa, ou seja $b > 0$.

Exemplo

$\log_{(-5)} 25 = x \Leftrightarrow 25 = (-5)^x$.

É impossível calcular o valor de x nesta equação, pois nenhuma potência de base –5 é igual a 25.

7.2.4 Propriedades operatórias dos logaritmos

Logaritmo do produto

Observa e compara os exemplos seguintes:

- $\log_2 4 + \log_2 16 = 2 + 4 = 6$
- $\log_2 (4 \cdot 16) = \log_2 64 = 6$

Reparaste que:

$\log_2 4 + \log_2 16 = \log_2 (4 \cdot 16) = \log_2 64 = 6$.

A soma dos logaritmos de dois números, numa mesma base, é igual ao logaritmo do produto desses números na mesma base:

$\log_b m + \log_b n = \log_b (m \cdot n)$

Exemplos

- $\log_2 (4 \cdot 8) = \log_2 4 + \log_2 8 = 2 + 3 = 5$
- $\log_3 (9 \cdot 81) = \log_3 9 + \log_3 81 = 2 + 4 = 6$
- $\log_{\frac{1}{5}} (5 \cdot 125) = \log_{\frac{1}{5}} 5 + \log_{\frac{1}{5}} 125 = -1 + (-3) = -4$

Logaritmo do quociente

Observa e compara os exemplos seguintes:

- $\log_2 16 - \log_2 4 = 4 - 2 = 2$
- $\log_2 (16 : 4) = \log_2 4 = 2$

Reparaste que:
$\log_2 16 - \log_2 4 = \log_2 (16 : 4) = \log_2 4 = 2$.

A diferença dos logaritmos de dois números, numa mesma base, é igual ao logaritmo do quociente desses números na mesma base:

$$\log_b m - \log_b n = \log_b \left(\frac{m}{n}\right)$$

Exemplos

- $\log_5 (125 : 5) = \log_5 125 - \log_5 5 = 3 - 1 = 2$
- $\log_3 (3 : 27) = \log_3 3 - \log_3 27 = 1 - 2 = -2$
- $\log_2 (32 : 4) = \log_2 32 - \log_2 4 = 5 - 2 = 3$

Logaritmo da potência

Observa e compara os exemplos seguintes:

- $\log_2 4^3 = \log_2 64 = 6$
- $3\log_2 4 = 3 \cdot 2 = 6$

Repara que:
$\log_2 4^3 = 3\log_2 4 = 6$.

O logaritmo da potência é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base da potência: $\log_b x^m = m \cdot \log_b x$

Exemplos

- $\log_2 8^4 = 4 \log_2 8 = 12$
- $\log_7 49 = 2 \log_7 7 = 2$
- $\log_5 \sqrt{5} = \log_5 5^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_5 5 = \frac{1}{2}$

Mudança de base

Algumas vezes é necessário fazer uma conversão dos logaritmos de bases diferentes para uma mesma base, encolhendo-se um deles e transformando-o no outro.

Assim, temos:

$$\log_b x = \log_m x \div \log_m b$$

Exemplos

- $\log_9 81 = \log_3 81 \div \log_3 9 = \frac{4}{2}$
- $\log_8 64 = \log_2 64 \div \log_2 8 = 6 : 3 = 2$
- $\log_{25} 125 = \log_5 125 \div \log_5 25 = \frac{3}{2}$

7.2.5 Logaritmos decimais

Todo o logaritmo de base 10 denomina-se **logaritmo decimal**.

Exemplos

- $\log_{10} 2$
- $\log_{10} 32$
- $\log_{10} 100$

Por convenção, na notação do logaritmo decimal, omite-se a base.

Assim, $\log_{10} 2$ ou lg 2 lê-se **logaritmo de base 10** de 2.

7.3 Função logarítmica

7.3.1 Conceito de função logarítmica $y = \log_b x$

A função f: $\mathbb{R}^+ \Rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log_b x$, com $b > 0$ e $b \neq 1$, é denominada **função logarítmica** de base b.

7.3.2 Representação gráfica da função $y = \log_b x$

Exemplos

- $f(x) = \log_2 x$
- $f(x) = \log_3 x$
- $f(x) = \log_2 (2x + 3)$

Vamos estudar o gráfico da função logarítmica $f(x) = \log_2 x$.

Primeiro, temos de construir uma tabela de valores:

x	$f(x) = \log_2 x$	(x, y)
$\frac{1}{8}$	$f\left(\frac{1}{8}\right) = \log_2 \frac{1}{8} = -3$	$\left(\frac{1}{8}, -3\right)$
$\frac{1}{4}$	$f\left(\frac{1}{4}\right) = \log_2 \frac{1}{4} = -2$	$\left(\frac{1}{4}, -2\right)$
$\frac{1}{2}$	$f\left(\frac{1}{2}\right) = \log_2 \frac{1}{2} = -1$	$\left(\frac{1}{2}, -1\right)$
1	$f(1) = \log_2 1 = 0$	$(1, 0)$
2	$f(2) = \log_2 2 = 1$	$(2, 1)$
4	$f(4) = \log_2 4 = 2$	$(4, 2)$
8	$f(8) = \log_2 8 = 3$	$(8, 3)$

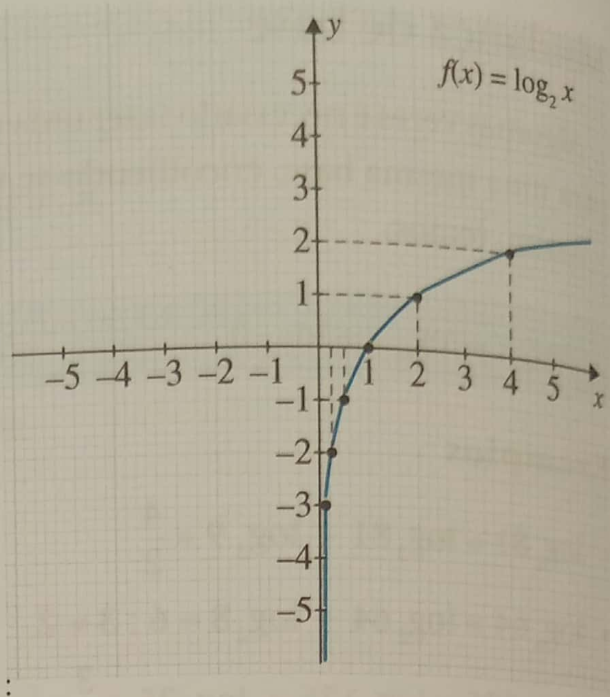


Fig. 3 Gráfico da função $f(x) = \log_2 x$.

Observando o gráfico de $f(x) = \log_2 x$, podemos concluir que:

- domínio $D_f = \mathbb{R}^+$;
- contradomínio $D'_f = \mathbb{R}$;
- $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (zero da função);
- a função é crescente;
- a curva do gráfico da função não intersecta o eixo das ordenadas;
- a função é positiva para $]1, +\infty[$;
- a função é negativa para $]0, 1[$;
- $x = 0$ é assimptota vertical.

A assimptota vertical do gráfico da função $f(x)$ é uma recta onde os pontos do gráfico se aproximam à medida que se percorre $f(x)$.

Agora, vamos construir o gráfico da função $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.
Primeiro, vamos construir uma tabela de valores.

x	$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$	(x, y)
$\frac{1}{8}$	$f\left(\frac{1}{8}\right) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} = 3$	$\left(\frac{1}{8}, 3\right)$
$\frac{1}{4}$	$f\left(\frac{1}{4}\right) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = 2$	$\left(\frac{1}{4}, 2\right)$
$\frac{1}{2}$	$f\left(\frac{1}{2}\right) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = 1$	$\left(\frac{1}{2}, 1\right)$
1	$f(1) = \log_{\frac{1}{2}} 1/2 = 0$	$(1, 0)$

x	$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$	(x, y)
2	$f(2) = \log_{\frac{1}{2}} 2 = -1$	$(2, -1)$
4	$f(4) = \log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$	$(4, -2)$
8	$f(8) = \log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$	$(8, -3)$

A partir do gráfico, podemos concluir que:

- domínio $D_f = \mathbb{R}^+$;
- contradomínio $D'_f = \mathbb{R}$;
- $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (zero da função);
- a função é decrescente;
- a curva do gráfico da função não intersecta o eixo das ordenadas;
- a função é negativa para $]1, +\infty[$;
- a função é positiva para $]0, 1[$;
- $x = 0$ é assimptota vertical.

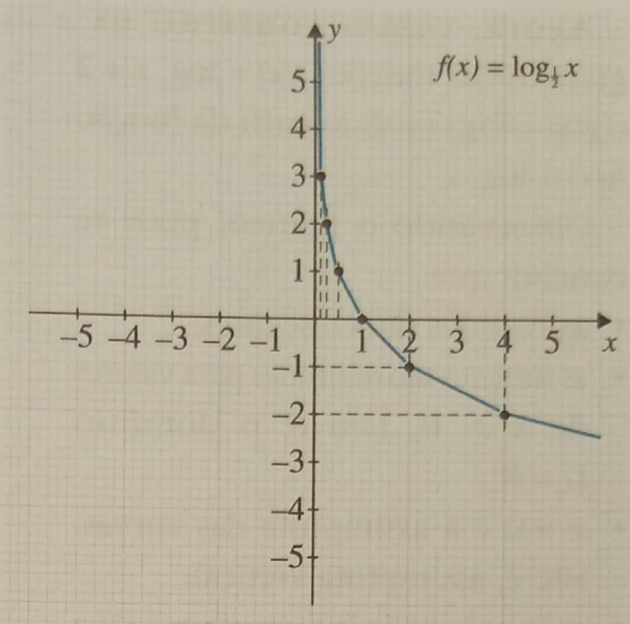


Fig. 4 Gráfico da função $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.

7.3.3 Representação gráfica da função $y = \log_a (x + b)$

Consideremos as funções: $f(x) = \log_2 x$, $g(x) = \log_2 (x + 1)$ e $h(x) = \log_2 (x - 1)$.

Vamos representá-las no mesmo sistema cartesiano ordenado.

Observando os gráficos das funções $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$, podemos concluir que para a função $g(x) = \log_2 (x + 1)$:

- a assimptota vertical é $x = -1$;
- o zero da função e $x = 0$;
- a função é crescente em todo o seu domínio.

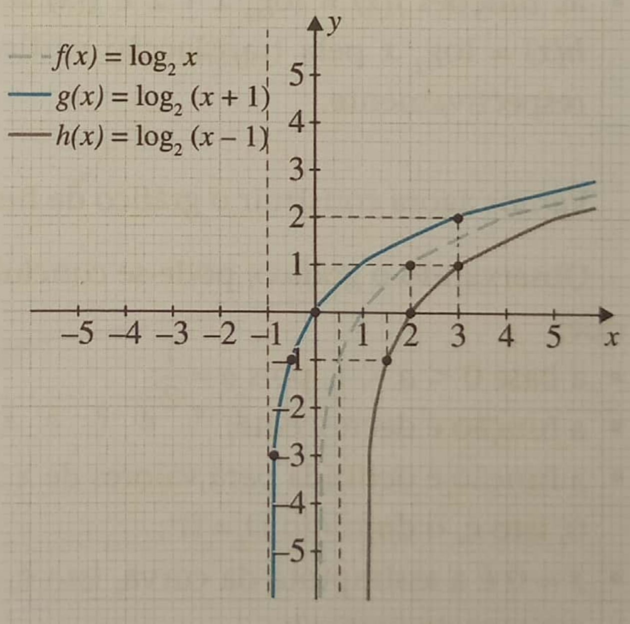


Fig. 5 Gráfico das funções $f(x) = \log_2 x$, $g(x) = \log_2 (x + 1)$ e $h(x) = \log_2 (x - 1)$.

Observando o gráfico, concluímos que para a função $h(x) = \log_2 (x + 1)$:

- a assimptota vertical é $x = 1$;
- o zero da função é $x = 2$;
- a função é crescente em todo o seu domínio.

Agora, vamos construir os gráficos das funções $f(x) = \log_2 x + 2$ e $g(x) = \log_2 x - 2$, a partir da função $h(x) = \log_2 x$.

Observando o gráfico, pode-se concluir que:

- as funções são crescentes;
- as funções são definidas para valores de $x > 0$, isto é, o domínio $D_f = \mathbb{R}^+$;
- $x = 0$ é a assimptota das curvas, isto é, assimptota vertical;
- as funções não interceptam o eixo dos yy, pois não estão definidas para $x = 0$;
- a função intercepta o eixo dos xx quando $y = 0$;
- as funções $f(x) = \log_2 x + 2$ e $g(x) = \log_2 x - 2$ são obtidas através da função $h(x) = \log_2 x$ pela translacção vertical em 2 unidades positivas e negativas, respectivamente.

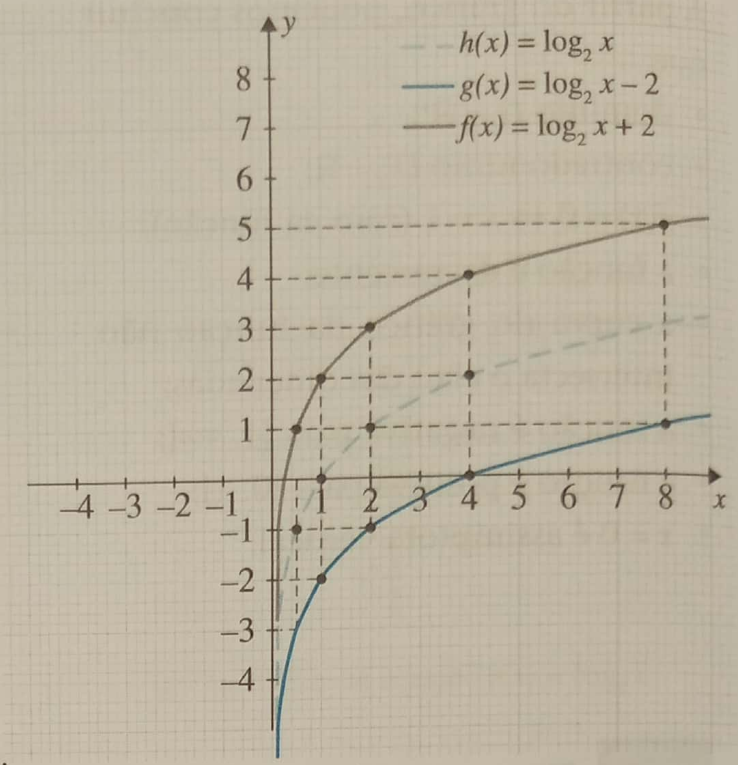


Fig. 6 Gráfico das funções $f(x) = \log_2 x + 2$ e $g(x) = \log_2 x - 2$, a partir da função $h(x) = \log_2 x$.

Vamos agora construir o gráfico da função $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x + 1$.

Observando o gráfico, pode-se concluir que:

- a base $0 < a < 1$, pois $a = \frac{1}{2}$;
- a função é decrescente;
- a função é definida para valores de $x > 0$, isto é, o domínio $D_f = \mathbb{R}^+$;
- $x = 0$ é a assimptota da curva, isto é, a assimptota vertical;
- a função não intersecta o eixo dos yy, pois não está definida para $x = 0$;
- a função intersecta o eixo dos xx quando $y = 0$. Isto é, $y = \log_{\frac{1}{2}} x + 1 = 0 \Leftrightarrow -\log_2 x + 1 = 0 \Leftrightarrow -\log_2 x = -1 \Leftrightarrow \log_2 x = 1 \Leftrightarrow \log_2 x = \log_2 2 \Leftrightarrow x = 2$.

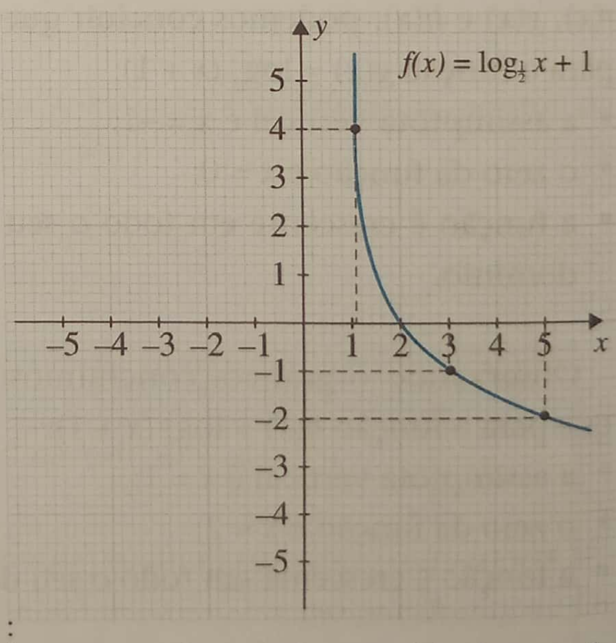


Fig. 7 Gráfico da função $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x + 1$.

Seja dada a função $f(x) = \log_2 (x + 1) + 1$.

Vamos representá-la graficamente. Observando o gráfico, pode-se concluir que:

- a função é crescente;
- $x = -1$ é assimptota vertical;
- $f(0) = 1$, pois $\log_2 (0 + 1) + 1 \Leftrightarrow f(0) = 1$. Isto é a função intersecta o eixo dos yy em $y = 1$.
- $y = 0 \Leftrightarrow \log_2 (x + 1) + 1 \Leftrightarrow \log_2 (x + 1) = -1$. Isto é, a função intersecta o eixo dos xx em $x = -\frac{1}{2}$.

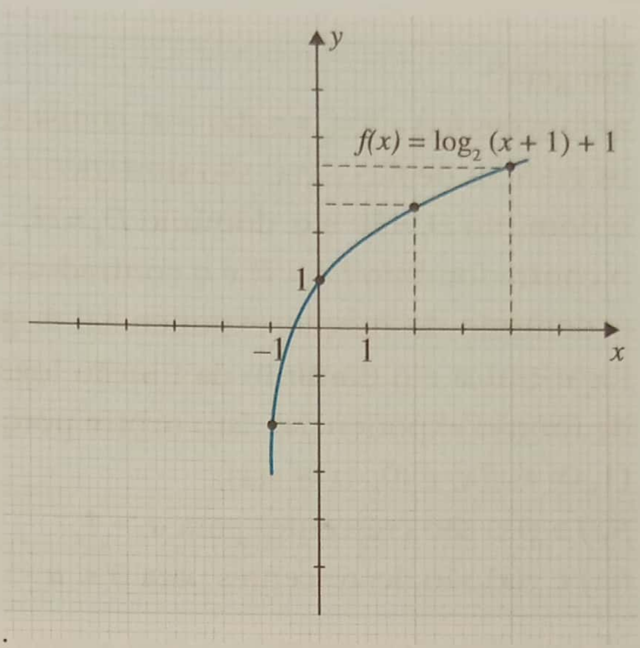


Fig. 8 Gráfico da função $f(x) = \log_2 (x + 1) + 1$.

Construímos os gráficos das funções $f(x) = \log_3 x$ e $g(x) = 3^x$.

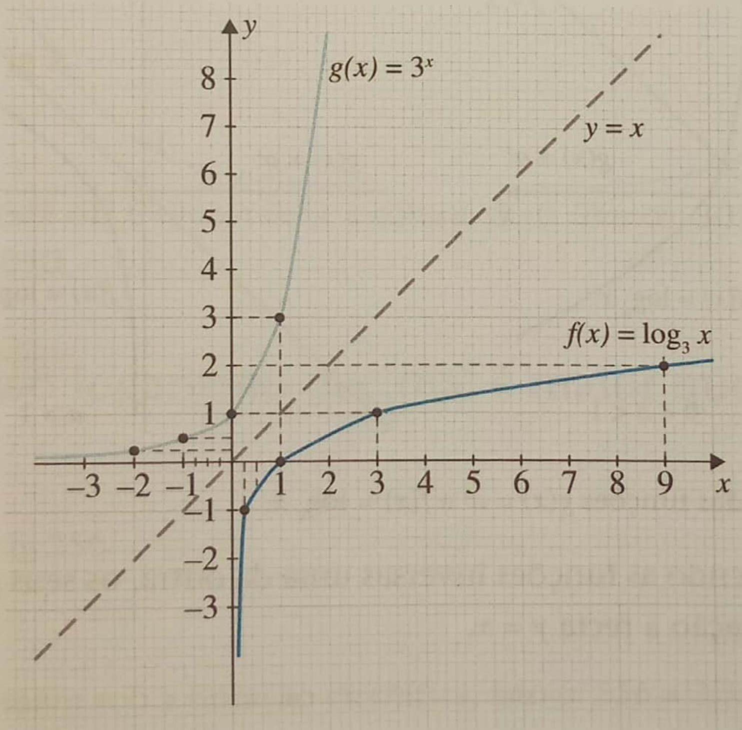


Fig. 9 Gráfico das funções $f(x) = \log_3 x$ e $g(x) = 3^x$.

Observando estes dois gráficos podemos concluir que a função $g(x) = 3^x$ é inversa da função $f(x) = \log_3 x$.

Em geral:

- as funções $f(x) = \log_a x$ e $g(x) = a^x$, com $a \in \mathbb{R}^+$ e $a \neq 1$, são inversas uma da outra;
- os gráficos de $f(x)$ e $g(x)$ são simétricos em relação à recta $y = x$;
- o domínio $D_f = \mathbb{R}^+$ e o domínio $D_g = \mathbb{R}$;
- o contradomínio $D'_f = \mathbb{R}$ e o contradomínio $D'_g = \mathbb{R}^+$;
- o domínio da função exponencial é igual ao conjunto imagem da função logarítmica e o domínio da função logarítmica é igual ao conjunto imagem da função exponencial. Isto ocorre porque as funções são inversas entre si;
- $(1, 0) \in f(x)$ e $(0, 1) \in g(x)$;
- $f(x)$ e $g(x)$ são crescentes para $a > 1$;
- $f(x)$ e $g(x)$ são decrescentes para $0 < a < 1$.

Temos os gráficos das funções exponencial $g(x) = a^x$ e logarítmica $f(x) = \log_a x$, para os casos $a > 1$ e $0 < a < 1$:

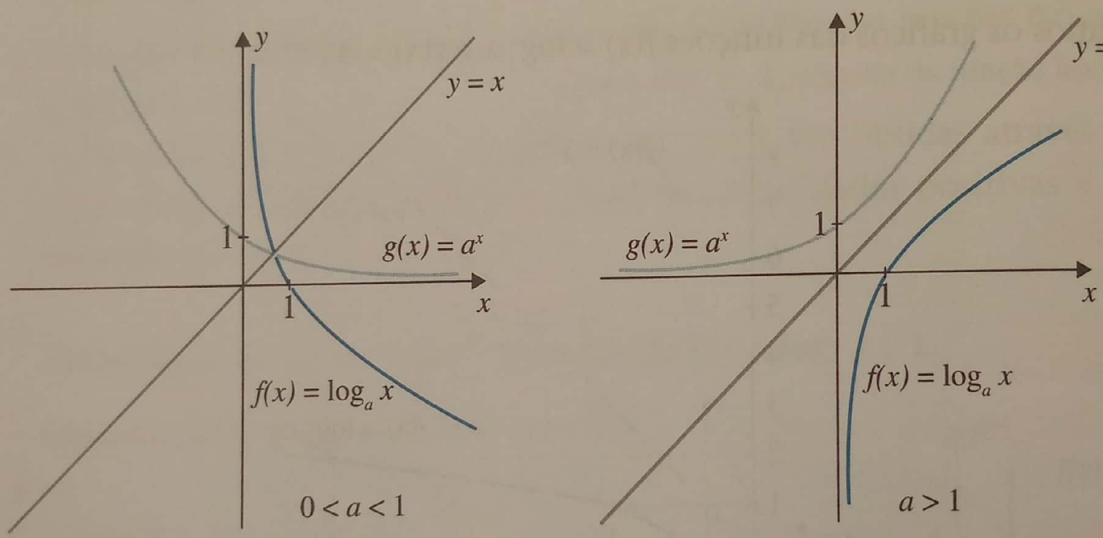


Fig. 10 Gráfico das funções $g(x) = a^x$ e $f(x) = \log_a x$.

Observa que, sendo as funções inversas uma da outra, os seus gráficos são curvas simétricas em relação à recta $y = x$.

Uso da tabela de logaritmos

Exemplos

1. Vamos calcular lg 2,87.

Resolução

Na tabela, procuramos na coluna de x os dois primeiros algarismos: 2,8.
Na linha onde está 28, vamos pela direita da tabela até à coluna do terceiro algarismo 7 e encontramos 4579. Por isso, lg 2,87 = 0,4579.

2. Vamos calcular lg 5,81.

Resolução

Na linha onde está o 5,8, cruzar com a coluna 1, temos 7642.
Assim, lg 5,81 = 0,7642.

3. Vamos calcular lg 3,427.

Resolução

O número 3,427 não aparece na tabela, porque estão indicados apenas números com 3 algarismos. Nestes casos, arredonda-se o número 3,427, para um número com 3 algarismos.

Visto que o 27 está entre 20 e 30, vamos para o número mais próximo de 27, que é o 30. Neste caso, arredonda-se por excesso. $3{,}427 \cong 3{,}430 = 3{,}43$. Agora sim, já podemos consultar na tabela.

lg 3,43, na linha onde está o 3,4 a cruzar com a coluna 3: lg 3,43 = 0, 5353.

4. Vamos calcular lg 2.

Resolução

Na linha onde está o 2,0 cruzar com a coluna do 0. Temos: 3010.
Logo, lg 2 = 0,3010.

Casos em que o logaritmo decimal é maior que 10

Exemplos

1. Vamos calcular lg 256.

Resolução

Escreve-se o número sob a notação científica, isto é: $256 = 2{,}56 \cdot 10^2$

Calcula-se o valor do logaritmo pedido através da tabela: $\lg 2{,}56 \cdot 10^2 = \lg 2{,}56 + \lg 10^2$ (aplicando a propriedade do logaritmo do produto).

Depois, aplicando a propriedade do logaritmo de uma potência para a segunda parcela, teremos: $\lg 2{,}56 \cdot 10^2 = \lg 2{,}56 + \lg 10^2 = 2 + \lg 2{,}56 = 2 + 0{,}4082 = 2{,}4082$.

2. Vamos calcular lg 0,605.

Resolução

$\lg 0{,}605 = \lg(6{,}05 \cdot 10^{-1}) = \lg 6{,}05 + \lg 10^{-1} = 0{,}7818 - 1 = -0{,}2182.$

Cálculo logarítmico

Multiplicação

Exemplo

Vamos calcular, aplicando logaritmos, o valor de $3{,}78 \cdot 7892 \cdot 654$.

Seja $x = 3{,}78 \cdot 7892 \cdot 654$.

Logaritmizando a expressão anterior, fica: $\lg x = \lg(3{,}78 \cdot 7892 \cdot 654)$.

Aplicando a regra do logaritmo de um produto, tem-se:

$\lg x = \lg 3{,}78 + \lg 7892 + \lg 654$.

Escrevendo os números sob notação científica, obtém-se:

$\lg x = \lg 3{,}78 + \lg(7{,}89 \cdot 10^3) + \lg(6{,}54 \cdot 10^2)$.

Consultando a tabela, sabe-se que:

$\lg 3{,}78 = 0{,}5775$

$\lg(7{,}89 \cdot 10^3) = 3{,}8971$

$\lg(6{,}54 \cdot 10^2) = 2{,}8156$.

Vamos juntar: $\lg x = 0{,}5775 + 3{,}8971 + 2{,}8156 = 7{,}2905$.

Assim: $\lg x = 7 + 0{,}2905 \Leftrightarrow \lg x = \lg 10^7 + \lg 1{,}95 \Leftrightarrow$

$x = 1{,}95 \cdot 10^7$.

Logo: $x = 1{,}95 \cdot 10^7 = 19\,500\,000$.

Divisão

Exemplo

Vamos calcular, aplicando logaritmos decimais, o valor de $\frac{49}{6}$.

Resolução

Seja $x = \frac{49}{6}$. Aplicando logaritmos, temos: $\lg x = \lg \frac{49}{6}$.

Assim, $\lg x = \lg \frac{49}{6} \Leftrightarrow \lg x = \lg 49 - \lg 6$, aplicando a propriedade sobre logaritmo de um quociente.

$\lg x = \lg 49 - \lg 6 \Leftrightarrow \lg x = \lg 4{,}9 \cdot 10 - \lg 6$

$\Leftrightarrow \lg x = \lg 4{,}9 + \lg 10 - \lg 6$

$\Leftrightarrow \lg x = 0{,}6901 + 1 - 0{,}7781$, consultando a tabela.

$\Leftrightarrow \lg x = 1{,}6901 - 0{,}7781$

$\Leftrightarrow \lg x = 0{,}9120$

$\Leftrightarrow \lg x = \log 8{,}17$, consultando a tabela.

$\Leftrightarrow x = 8{,}17$.

Logo, $\frac{49}{6} = 8{,}17$.

Potenciação

Exemplos

1. Vamos calcular $0{,}0782^4$.

Resolução

Seja $x = 0{,}0782^4$.

Então, $\lg x = \lg 0{,}0782^4$

$\Leftrightarrow \lg x = 4 \cdot \lg 0{,}0782$

$\Leftrightarrow \lg x = 4 \cdot \lg (7{,}82 \cdot 10^{-2})$

$\Leftrightarrow \lg x = 4 \cdot \lg 7{,}82 + \lg 10^{-2}$

$\Leftrightarrow \lg x = 4 \cdot (0{,}8932 - 2) = 3{,}5728 - 8$

$\Leftrightarrow \lg x = 0{,}5728 - 5$

$\Leftrightarrow \lg x = \lg (3{,}74 + 10^{-5})$

$\Leftrightarrow x = 3{,}74 \cdot 10^{-5} = 0{,}0000374$.

2. Vamos calcular $x = \sqrt[5]{16{,}3}$.

Resolução

$x = \sqrt[5]{16{,}3} \Leftrightarrow \lg x = \lg \sqrt[5]{16{,}3}$, aplicando logaritmos nos dois membros da equação.

$\lg x = \log (16{,}3)^{\frac{1}{5}}$, ou seja, $\lg x = \frac{1}{5} \log 16{,}3$.

$\lg x = \frac{1}{5} \cdot 1{,}2121$, consultando a tabela de logaritmos decimais.

$\lg x = 0{,}2424 \Leftrightarrow$

$x = 1{,}75$, procurando na tabela o número 2424; linha de 1,7 coluna 5.

Assim, $x = \sqrt[5]{16{,}3} = 1{,}75$.

Aplicações práticas dos logaritmos

Os logaritmos possuem várias aplicações na Matemática e em diversas áreas do conhecimento, como na Física, na Química, na Medicina, na Geografia, entre outras.

Através de alguns exemplos, vamos mostrar a utilidade dos logaritmos na busca de soluções para diferentes situações da vida do Homem, e como a Matemática está presente em muitas situações do nosso quotidiano.

Exemplos

- Na Geologia, a escala Richter que é usada para medir a magnitude de um terramoto. Portanto, é uma escala logarítmica.
- Na Matemática Financeira, para casos em que se envolve o cálculo do tempo e juros, o uso de logaritmos é imprescindível.
- Em Geografia, no cálculo da taxa de crescimento populacional de um país ou de uma cidade podem-se usar os logaritmos.
- Na Química, para o cálculo do pH usam-se também funções logarítmicas.
- Na Medicina, as taxas de nascimento e mortalidade de indivíduos de uma população (animais ou plantas), assim como a propagação de doenças em sistemas epidemiológicos são representadas por funções logarítmicas.

Exercícios resolvidos

1. Calcula:

1.1 $\log_3 27$ 1.2 $\log_3 \frac{1}{81}$ 1.3 $\log_{10} 0{,}0001$

Resolução

1.1 Seja $x = \log_3 27$. Por definição de logaritmo de um número, teremos:

$x = \log_3 27 \Leftrightarrow 3^x = 27$ ou $3^x = 3^3$.

Logo, $x = 3$, por isso $\log_3 27 = 3$.

1.2 Como no caso anterior: $x = \log_3 \frac{1}{81} \Leftrightarrow 3^x = \frac{1}{81}$ ou $3^x = 3^{-4} \Leftrightarrow x = -4$. Logo, $\log_3 \frac{1}{81} = -4$.

1.3 Sendo $x = \log_{10} 0{,}0001$, então $10^x = 10^{-4} \Leftrightarrow x = -4$. Logo, $\log_{10} 0{,}0001 = -4$.

2. Calcula o valor de x:

2.1 $\log_3 1 = x$ 2.2 $\log_2 32 = x$

2.3 $2\log_2 64 = x$ 2.4 $\log_5 x = \log_5 10$

Resolução

2.1 $3^x = 1 \Leftrightarrow 3^x = 3^0$. Logo, $x = 0$. 2.2 $2^x = 32 \Leftrightarrow 2^x = 2^5$. Logo $x = 5$.

2.3 $x = 64$, pois $b^{\log_b a} = a$. 2.4 $x = 10$, pois $\log_5 x = \log_a^{\,b} x = b$.

3. Calcula o valor de: $\log_3 18 - \log_3 6 - \log_3 5 + \log_3 15$.

Resolução

Seja $y = \log_3 18 - \log_3 6 - \log_3 5 + \log_3 15$.

Então: $y = \log_3 18 + \log_3 15 - \log_3 6 - \log_3 5$, trocando a ordem das parcelas.

$y = \log_3 18 \cdot 15 - \log_3 6 \cdot 5$, pela propriedade de logaritmo do produto.

$y = \log_3, \frac{18 \cdot 15}{6 \cdot 5}$, pela propriedade de logaritmo de um quociente.

$y = \log_3 9$, simplificando a fracção.

$y = \log_3 9 \Leftrightarrow 3^y = 9$. Logo, $\log y = 2$.

4. Determina:

4.1 lg 4,75 4.2 lg 475 4.3 lg 5624

Resolução

4.1 Procura-se na coluna de x os dois primeiros algarismos – 4,7 – e depois, na mesma linha, pela direita chega-se à coluna do terceiro algarismo, o 5.

Encontra-se 6767.

Assim, lg 4,75 = 0,6767.

4.2 Escreve-se o número 475 sob a notação científica $475 = 4,75 \cdot 10^2$.

Assim, $\lg 475 = \lg (4,75 \cdot 10^2) = \log 4,75 + \lg 10^2$

$= \lg 4,75 + 2 \lg 10$

$= \lg 4,75 + 2$

$= 0,6767 + 2$. Logo $\lg 475 = 2,6767$.

4.3 $\lg 5624 = \lg(5,624 \cdot 10^3)$

$= \lg 5,624 + \lg 10^3$

$= \lg 5,62 + 3 \lg 10$

$= 0,7497 + 3$

$= 3,7497$. Logo $\lg 5624 = 3,7497$.

5. Determina x em:

5.1 $\lg x = 0,8808$

5.2 $\lg x = 2$

5.3 $\lg x = 0,3711$

Resolução

5.1 Procura-se na tabela o número 8808. Este número está na linha 7,6 e na coluna 0. Assim, $0,8808 = \lg 7,60$. Logo $x = 7,6$.

5.2 $10^2 = x \Leftrightarrow x = 100$.

5.3 3711 está na linha 2,3 e na coluna 5.

Assim, $0,3711 = \lg 2,35$, logo $x = 2,35$.

Exercícios não resolvidos

1. Calcula o valor de:

1.1 $\log_9 81$

1.2 $3\log_2 \frac{1}{2}$

1.3 $\log_{\frac{1}{25}} \left(\frac{1}{9}\right)$

1.4 $\log_8 64$

1.5 $\log_3 81$

1.6 $\log_6 \sqrt[5]{6^3}$

1.7 $\log_2 1$

1.8 $\log_{\frac{1}{2}} 32$

1.9 $\log_{\sqrt{5}} 125$

1.10 $\log_{25} 125$

2. Calcula:

2.1 $\lg 10$ 2.2 $\lg 100$ 2.3 $\lg 0{,}0001$ 2.4 $\lg 0{,}1$

3. Determina o valor de x em cada caso:

3.1 $\log_2 x = \log_2 5$

3.2 $\log_{15} x = \log_{15} 8$

3.3 $\log_{\frac{1}{3}} 1000 = \log_{\frac{1}{3}} x^3$

3.4 $\log_{1000} x = \log_{1000} \sqrt{7}$

4. Calcula o valor das seguintes expressões:

4.1 $\log_{\frac{1}{2}} 8 + \log_3 27 - 2\log_6 36$

4.2 $\log_{10} 1000 - \log_{10} 0{,}0001 + \log_{0,1} 0{,}0001 + \log_{0,1} 1000$

5. Calcula o valor de y:

5.1 $\log_2 y = \log_2 27 + \log_2 10 - 2\log_2 3$

5.2 $\log_4 y = \log_4 32 + \log_4 16 - \log_4 2$

6. Sabendo que $\log_b a = 5$ e $\log_b c = -3$, determina o valor de:

6.1 $\log_b (ac)$

6.2 $\log_b \frac{c}{a}$

6.3 $\log_b \sqrt[3]{ac}$

6.4 $\log_b (ac)^4$

7. Assinala com V a propriedade correcta e com F a propriedade incorrecta:

7.1 $\log(a \cdot m) = \log m - a$

7.2 $\log am = m \log a$

7.3 $\log(a - b) = \log a - \log b$

7.4 $\log m \cdot a = \log m + \log a$

7.5 $\log(a + b) = \log a + \log b$

8. Calcula o valor de y:

8.1 $y = \log_2 8 + \log_2 20 - \log_2 30 + \log_2 6 - \log_2 2$

8.2 $y = \log_3 18 - \log_3 6 + \log_3 5 + \log_3 15$

9. Desenvolve, através de logaritmos de base 10, as seguintes expressões:

9.1 $v = \frac{4}{3}\pi r^3$

9.2 $A = \pi r^2$

9.3 $Y = \frac{b \times h}{2}$

9.4 $Z = \sqrt[3]{a \cdot b \cdot c}$

10. Assinala com V as afirmações verdadeiras e com F as afirmações falsas:

10.1 $\log_3 10 - \log_3 5 = \log_3 2$

10.2 $\log_a 5 + \log_a 3 = \log_a 15$

10.3 $\log_2 8 - \log_2 3 = \log_2 5$

10.4 $\log_b 6 . \log_b 8 = \log_b (6 + 8)$

10.5 $\log_5 (3 + 4) = \log_5 (3.4)$

10.6 $3 \log_5 6 = \log_5 6^3$

11. Sabendo que $\log_2 x = 0{,}54$, $\log_2 y = 0{,}76$ e $\log_2 z = 0{,}38$, calcula:

11.1 $\log_2 (x \cdot y)$

11.2 $\log_2 \frac{x^2 \cdot y^3}{z}$

11.3 $\log_2 \sqrt{\frac{x^4}{yz}}$

Exercícios não resolvidos

12. Sendo $x = \sqrt[3]{\frac{ab^3}{c^3}}$, $\log_3 a = 0{,}2$, $\log_3 b = 0{,}1$ e $\log_3 c = 0{,}6$, determina $\log_3 x$.

13. Sendo $\log a = 11$, $\log b = 0{,}5$ e $\log c = 6$, calcula $\log \frac{ab^2}{\sqrt[3]{c}}$.

14. Sendo $\log_b a = 5$ e $\log_b c = 3$, determina o valor de:

14.1 $\log_b (a^2 \cdot c)$

14.2 $\log_b (ac^2)$

14.3 $\log_b \frac{a}{c}$

14.4 $\log_b \sqrt{\frac{a}{c}}$

15. Sendo $\lg 2 = 0{,}3010$ e $\lg 3 = 0{,}4771$, calcula:

15.1 $\lg 54$

15.2 $\lg \sqrt{\frac{3}{2}}$

15.3 $\lg \sqrt[4]{\frac{32}{27}}$

15.4 $\lg \sqrt[5]{18}$

16. Usa a tabela e determina:

16.1 $\lg 53{,}7$

16.2 $\lg_9 913$

16.3 $\lg_2 143$

16.4 $\lg 6{,}33$

16.5 $\lg 1{,}12$

17. Determina x em cada caso:

17.1 $\lg x = 5$

17.2 $\lg x = 4$

17.3 $\lg x = 3{,}3010$

17.4 $\lg x = 0{,}3711$

17.5 $\lg x = 0{,}8808$

17.6 $\lg x = 0{,}82$

Exercícios não resolvidos

18. Escreve os seguintes números sob a forma de notação científica.

a) 58 b) 234 c) 23419 d) 23,5

e) 0,000436 f) 123, 456 g) 1234, 56 h) $765,3 \times 10^4$

i) 0, 456789 j) 0,000 000 000 212 l) 0, 000 000 98

m) 79, 10

19. A população de Moçambique é de cerca de 20 milhões de habitantes. Expressa este número sob a notação científica.

20. A distância da Terra até o Sol é de 150 000 000 km. Representa este número sob a forma de notação científica.

21. Calcula, aplicando logaritmos decimais:

21.1 $924 \cdot 16{,}9$ 21.2 $237 : 9{,}4$ 21.3 $0{,}34^3$

21.4 $\sqrt[3]{0{,}017}$ 21.5 $\sqrt{168} : 0{,}89$ 21.6 $\sqrt[4]{\dfrac{21{,}78}{2{,}24}}$

21.7 $\sqrt{19{,}3}$ 21.8 $\sqrt[3]{695}$

22. Calcula, usando logaritmos, o raio da esfera, sabendo que $V = 5\ dm^3$.

23. Calcula a medida do volume da esfera, sabendo que o raio é de 4,32 cm.

24. A população de uma determinada aldeia de um distrito de Moçambique tem uma taxa anual de crescimento de aproximadamente 3%. Sendo $P_n = P_0\,(1{,}03)^n$ a população após n anos, em quantos anos a população desta cidade irá triplicar se a taxa de crescimento continuar a mesma?

25. Um operário deposita 5000 Mt com um juro de 4% ao ano. Quanto terá ele ao fim de 10 anos, sabendo que o juro é vencível trimestralmente?

26. Sabendo que o volume de um cilindro de revolução é de 2347 cm^3 e que o comprimento da geratriz é o dobro do comprimento do raio, determina a medida do raio. ($V_{cilindro} = \pi r^2 \times h$)

27. Quanto mede o raio de uma esfera com 1038 cm^3 de volume?

Unidade 8

Trigonometria

Ao terminar esta unidade, deverás ser capaz de:

- calcular as razões trigonométricas de um triângulo rectângulo (seno, co-seno, tangente e co-tangente) de um ângulo agudo;
- determinar um ângulo agudo, conhecida uma das razões trigonométricas;
- determinar as razões trigonométricas de ângulos especiais: 0°, 30°, 45°, 60° e 90°;
- relacionar as razões trigonométricas de ângulos complementares;
- determinar as razões trigonométricas aplicando a relação fundamental entre seno e co-seno de um ângulo;
- determinar os elementos (lados e ângulos) de um triângulo rectângulo aplicando as razões trigonométricas;
- resolver problemas práticos associados à vida real;
- representar um ângulo qualquer num círculo trigonométrico;
- converter a medida de graus em radianos e vice-versa.

8.1 Revisões dos conceitos sobre geometria

8.1.1 Teorema de Pitágoras

Consideremos um triângulo rectângulo (ABC), de catetos *a* e *b* e hipotenusa *c*.

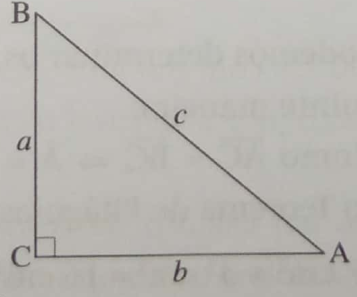


Fig. 1

Construindo quadrados sobre os lados deste triângulo, obtemos a figura seguinte (Fig. 2).

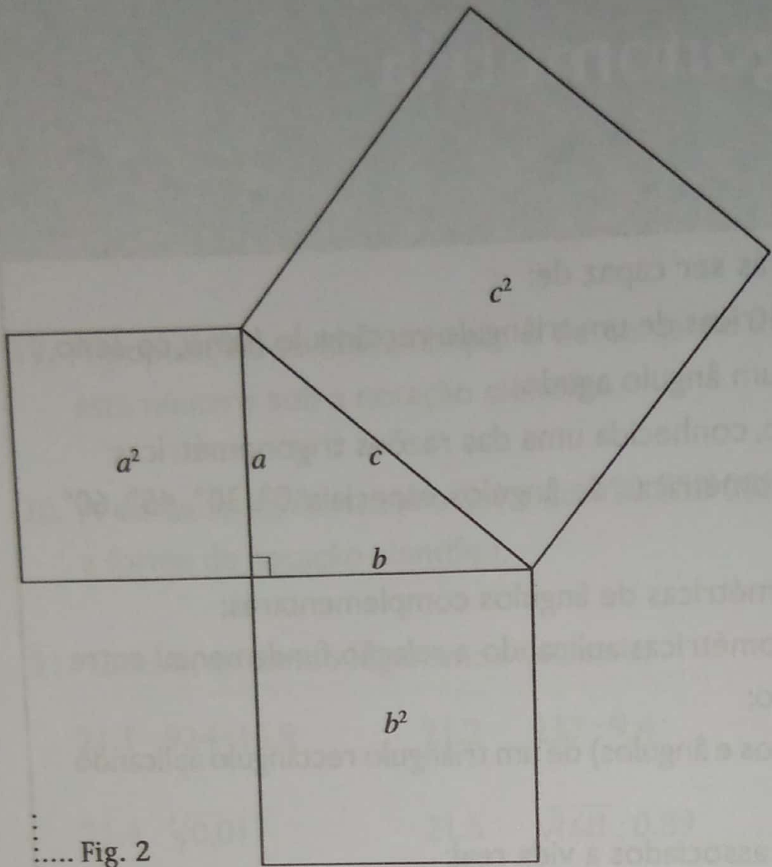


Fig. 2

Logo, as áreas dos quadrados são, respectivamente, a^2, b^2 e c^2.

No triângulo rectângulo, o quadrado do lado maior (hipotenusa) é igual à soma dos quadrados dos catetos: $c^2 = a^2 + b^2$.

Recordemos que damos o nome de elementos de um triângulo aos comprimentos dos seus lados e às medidas dos seus ângulos internos.

Consideremos dois triângulos, um rectângulo e o outro equilátero.

Seja o triângulo (ABC) rectângulo em C e isósceles, de medidas de catetos 4 cm.

$$\hat{C} = 90° \text{ e } \overline{AC} = \overline{BC} = 4\text{cm}.$$

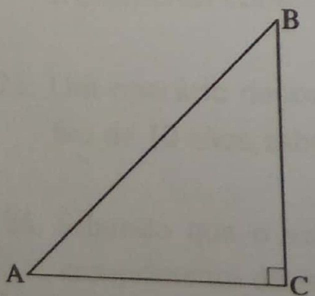


Fig. 3

Podemos determinar os outros elementos em falta da seguinte maneira:

Como $\overline{AC} = \overline{BC} \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} = \dfrac{90°}{2} = 45°$ $(\hat{A} + \hat{B} = 90°)$.

Pelo Teorema de Pitágoras: $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 =$

$4^2\ cm^2 + 4^2\ cm^2 = 16\ cm^2 + 16\ cm^2$

$\Rightarrow \overline{AB}^2 = 32\ cm^2$

$\Rightarrow \overline{AB} = \sqrt{32}\ cm = 2\sqrt[3]{2}$.

O seguinte triângulo (ABC) é equilátero, com medidas de lado 6 cm. $\overline{CD}$ é o segmento de altura.

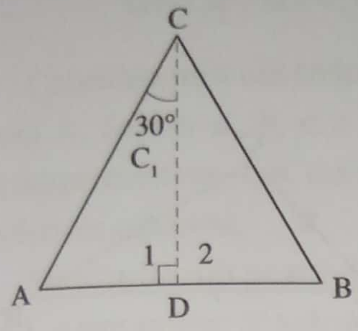


Fig. 4

Observando, temos:

$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60°$

$\hat{D} = 90°$

$\hat{C}_1 = 30°$

$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC} = 6 \text{ cm}$

$$\overline{AD} = \overline{BD} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{6 \text{ cm}}{2} = 3 \text{ cm}$$

$$\overline{CD} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{BD}^2}$$
$$= \sqrt{6^2 - 3^2}$$
$$= \sqrt{36 - 9}$$
$$= \sqrt{27} = 3\sqrt{3}.$$

Portanto, estes casos levam-nos à *trigonometria*, palavra de origem grega que significa «medidas dos triângulos» (*trigonos* = triângulos, *metria* ou *metron* = medidas).

8.1.2 Triângulos semelhantes

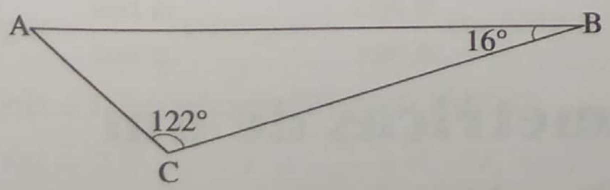
Um triângulo é uma figura plana com três lados.

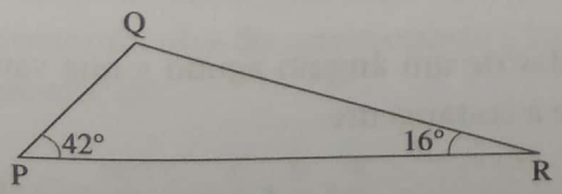
O conceito de semelhança em geometria significa que têm a mesma forma, mas tamanhos diferentes.

Portanto, diz-se que dois triângulos são semelhantes se têm todos os ângulos correspondentes congruentes (iguais) e todos os lados proporcionais (formam razões iguais). O símbolo de semelhança é ~.

Exemplo

Os seguintes triângulos são semelhantes:

- 

- 

8.1.3 Critérios de semelhança

1.º caso – ℓ.ℓ.ℓ. : se dois triângulos têm os seus três lados proporcionais, então são semelhantes.

$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ e $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$.

Logo, $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

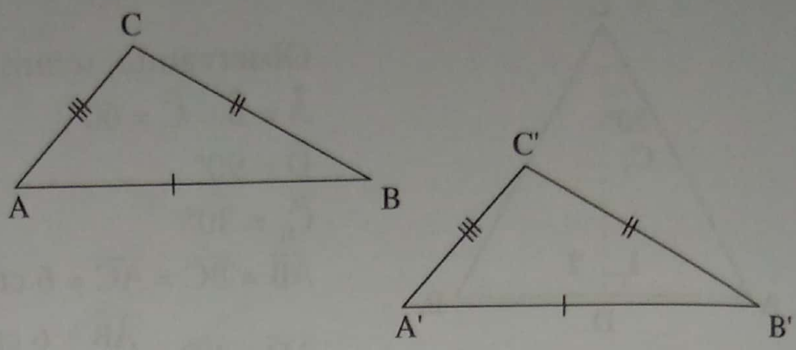


Fig. 5

2.º caso – a.a. : se dois triângulos têm dois ângulos correspondentes congruentes, então são semelhantes.

$\hat{A} \cong \hat{A}'$ e $\hat{C} \cong \hat{C}'$

Logo, $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

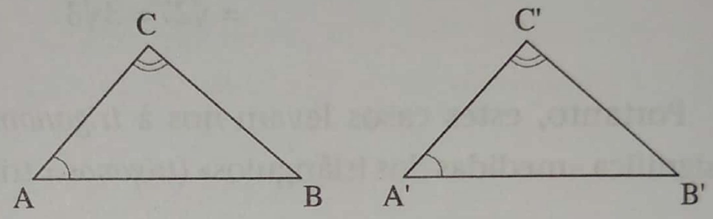


Fig. 6

3.º caso: ℓ.a.ℓ. – se dois triângulos têm dois lados proporcionais e os ângulos por eles formados congruentes, então os dois triângulos são semelhantes.

$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ e $\hat{B} \cong \hat{B}'$

Logo, $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

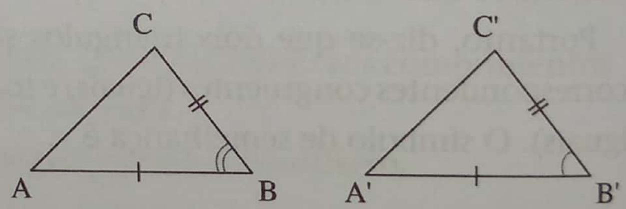


Fig. 7

8.2 Razões trigonométricas de um ângulo agudo

As razões trigonométricas mais conhecidas de um ângulo agudo e que vamos estudar, são: o seno, o co-seno, a tangente e a co-tangente.

8.2.1 Razões trigonométricas: seno, co-seno, tangente e co-tangente

Consideremos um triângulo (ABC), rectângulo em A. Sejam a, b, e c as medidas dos seus comprimentos, em correspondência com os vértices opostos.

Marcando um ponto B′ sobre $\overline{CB}$, tal que $\overline{CB'} = 1$, e um ponto A′ sobre $\overline{AC}$, de modo que $\overline{A'B'} \perp \overline{AC}$, teremos:

$\overline{A'B'} = \text{sen } C$ e ainda

$\overline{CA'} = \cos C$

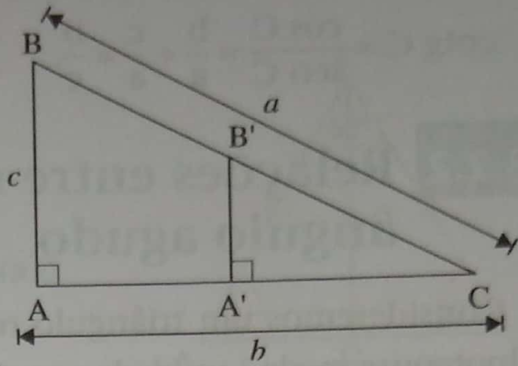


Fig. 8

Como os triângulos rectângulos (CAB) e (CA′B′) são semelhantes, a razão entre as suas medidas numa mesma unidade é constante e escreve-se: $\dfrac{c}{\text{sen } C} = \dfrac{a}{1} = \dfrac{b}{\cos C}$.

Da igualdade conclui-se que:

- $\dfrac{c}{\text{sen } C} = \dfrac{a}{1} \Leftrightarrow c = a \cdot \text{sen } C \Leftrightarrow \text{sen } C = \dfrac{c}{a}$
- $\dfrac{a}{1} = \dfrac{b}{\cos C} \Leftrightarrow b = a \cdot \cos C \Leftrightarrow \cos C = \dfrac{b}{a}$

Então, pode dizer-se que:

- o seno de um ângulo agudo de um triângulo rectângulo é a razão entre os comprimentos do cateto oposto e da hipotenusa;
- o co-seno de um ângulo agudo de um triângulo rectângulo é a razão entre os comprimentos do cateto adjacente e da hipotenusa.

Designando o ângulo agudo por α ($0° < \alpha < 90°$), vamos definir a tangente e a co-tangente usando o seno e o co-seno:

$\text{tg } \alpha = \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$ e $\text{cotg } \alpha = \dfrac{\cos \alpha}{\text{sen } \alpha}$ ou $\text{cotg } \alpha = \dfrac{1}{\text{tg } \alpha}$

Seja o triângulo rectângulo (ABC):

A tangente do ângulo agudo C é a razão entre os comprimentos do cateto oposto (c) e do cateto adjacente (b):

- $\text{tg } C = \dfrac{\text{sen } C}{\cos C} = \dfrac{c}{a} \div \dfrac{b}{a} = \dfrac{c}{b}$.

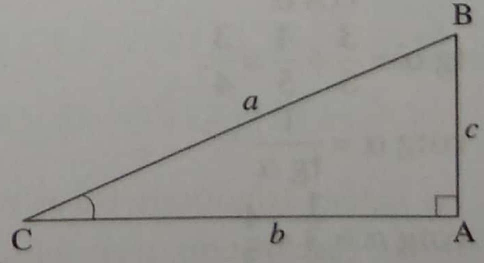


Fig. 9

A co-tangente do ângulo agudo C é a razão entre os comprimentos do cateto adjacente (*b*) e do cateto oposto (*c*):

- $\text{cotg } C = \dfrac{\cos C}{\text{sen } C} = \dfrac{b}{a} \div \dfrac{c}{a} = \dfrac{b}{c}.$

8.2.2 Relações entre razões trigonométricas de um ângulo agudo

Consideremos um triângulo rectângulo cuja hipotenusa mede 1 unidade e usemos a definição de seno e de co-seno de um triângulo.

Usando o teorema de Pitágoras, temos: $(\text{sen } \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1 \Leftrightarrow \text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$

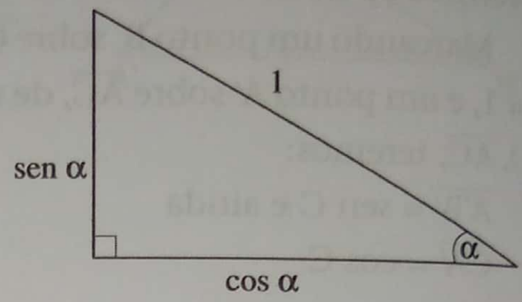


Fig. 10

A esta fórmula chama-se **identidade fundamental trigonométrica**.

Exemplo

Sabendo que $\text{sen } \alpha = \dfrac{3}{5}$, vamos calcular $\cos \alpha$, $\text{tg } \alpha$ e $\text{cotg } \alpha$.

Resolução

$$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\frac{9}{25} + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{25 - 9}{25}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{16}{25}$$

$$\cos \alpha = \pm\frac{4}{5}.$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{3}{5} \div \frac{4}{5} = \frac{3}{4}.$$

$$\text{cotg } \alpha = \frac{1}{\text{tg } \alpha}$$

$$\text{cotg } \alpha = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}.$$

8.2.3 Relações entre razões trigonométricas de ângulos especiais: 0° ; 30° ; 45°; 60° e 90°

Consideremos um triângulo equilátero (ABC).

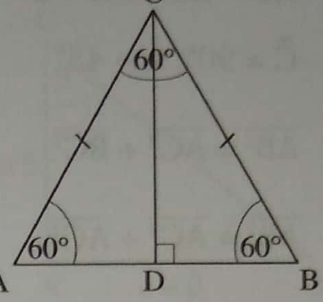


Fig. 11

Seja $\hat{A} = \alpha$.

Sabe-se que $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC}$ e $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$.

Construindo a altura que parte do vértice C para o ponto medio de $\overline{AB}$, D, teremos $\overline{AD} = \overline{BD} = \frac{\overline{AB}}{2}$.

Facilmente podemos calcular:

$$\cos \hat{A} = \cos \alpha = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB}}{2} \div \overline{AC} = \frac{\overline{AB}}{2\,\overline{AC}} = \frac{\overline{AB}}{2\,\overline{AB}} = \frac{1}{2}.$$

Logo, $\cos 60° = \frac{1}{2}$.

$\operatorname{sen} \hat{A} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}$. Mas do teorema de Pitágoras temos que:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 \Leftrightarrow \overline{CD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 - \left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{CD}^2 = \overline{AC}^2 - \frac{\overline{AB}^2}{4} \Leftrightarrow \overline{CD}^2 = \overline{AC}^2 - \frac{\overline{AC}^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow \overline{CD}^2 = \frac{3\overline{AC}^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow \overline{CD} = \frac{\sqrt{3\,\overline{AC}^2}}{4} = \frac{\overline{AC}}{2} \cdot \sqrt{3}.$$

$$\operatorname{sen} \hat{A} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} = \overline{AC} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \div \overline{AC} = \overline{AC} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2\,\overline{AC}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Logo, $\operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

A altura $\overline{CD}$ divide o $\triangle ABC$ em dois triângulos congruentes, logo, $\overline{CD}$ é bissectriz do $\hat{C}$. Como $A\hat{C}D = B\hat{C}D = 30°$:

$$\operatorname{sen} 30° = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{2} \div \overline{AC} = \frac{\overline{AC}}{2\,\overline{AC}} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30° = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} = \overline{AC}\frac{\sqrt{3}}{2} \div \overline{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Calculemos de seguida as razões trigonométricas de 45°, e para tal vamos usar um triângulo rectângulo isósceles (ABC), rectângulo em C:

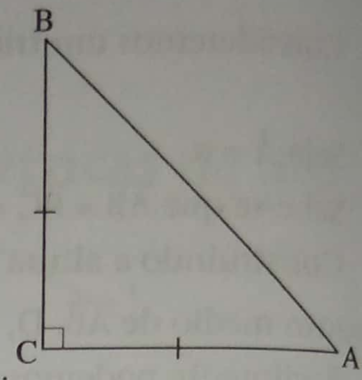


Fig. 12

$\overline{AC} = \overline{BC} \Leftrightarrow \hat{A} = \hat{B}$

$\hat{C} = 90°; \hat{A} = 45°$

$\overline{AB^2} = \overline{AC^2} + \overline{BC^2}$

$\overline{AB^2} = \overline{AC^2} + \overline{AC^2}$

$\overline{AB^2} = 2\overline{AC^2} \Rightarrow \overline{AC} = \sqrt{\frac{\overline{AB^2}}{2}}.$

$\overline{AC} = \frac{\overline{AB}}{\sqrt{2}} = \frac{\overline{AB}\sqrt{2}}{2}$

$\overline{AC} = \overline{BC} = \overline{AB} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}.$

$\text{sen } \hat{A} = \text{sen } 45° = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB} \cdot \sqrt{2}}{2} \div \overline{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

Logo, $\text{sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

$\cos 45° = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \overline{AB} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \div \overline{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Logo, $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

Conclusão

- $\text{tg } 30° = \frac{\text{sen } 30°}{\cos 30°} = \frac{1}{2} \div \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
- $\text{cotg } 30° = \frac{1}{\text{tg } 30°} = \frac{1\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$
- $\text{tg } 45° = \frac{\text{sen } 45°}{\cos 45°} = \frac{\sqrt{2}}{2} \div \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$
- $\text{cotg } 45° = 1$
- $\text{tg } 60° = \frac{\text{sen } 60°}{\cos 60°} = \frac{\sqrt{3}}{2} \div \frac{1}{2} = \sqrt{3}$
- $\text{cotg } 60° = \frac{1}{\text{tg } 60°} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

	0°	30°	45°	60°	90°
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
cotg	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0

Tabela 1 Tabela resumo das relações entre as razões trigonométricas de ângulos especiais.

8.2.4 Relações entre razões trigonométricas de ângulos complementares

Consideremos dois triângulos rectângulos geometricamente iguais.

Podemos verificar que:

- $\text{sen}\ \alpha = \cos\beta = \cos(90° - \alpha)$
- $\text{sen}\ \alpha = \cos(90° - \alpha)$.

- $\cos\alpha = \text{sen}\ \beta = \text{sen}\ (90° - \alpha)$
- $\cos\alpha = \text{sen}\ (90° - \alpha)$.

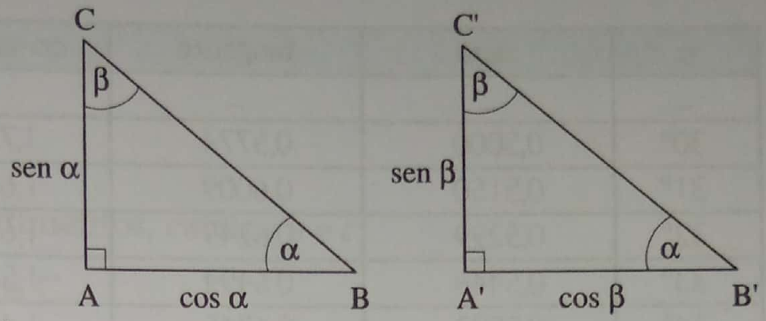


Fig. 13 Triângulos geometricamente iguais.

A partir destas duas fórmulas, podemos determinar a tangente e a co-tangente:

- $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\cos(90° - \alpha)}{\text{sen}(90° - \alpha)} = \text{cotg}\ (90° - \alpha)$
- $\text{cotg}\ \alpha = \text{tg}\ (90° - \alpha)\ \alpha = (90° - \alpha)$

Exemplos

- $\text{sen}\ 30° = \cos(90° - 30°) = \cos 60°$
- $\text{sen}\ 20° = \cos(90° - 20°) = \cos 70°$
- $\cos 34°\ 16' = \text{sen}\ (90° - 34°\ 16') = \text{sen}\ 55°\ 44'$
- $\text{tg}\ 27°\ 12' = \text{cotg}\ (90° - 27°\ 12') = \text{cotg}\ 62°\ 48'$

Razões trigonométricas de ângulos complementares	Razões trigonométricas de ângulos suplementares
$\text{sen}\ (90° - \alpha) = \cos\alpha$	$\text{sen}\ (180° - \alpha) = \text{sen}\ \alpha$
$\cos(90° - \alpha) = \text{sen}\ \alpha$	$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$
$\text{tg}\ (90° - \alpha) = \text{cotg}\ \alpha$	$\text{tg}\ (180° - \alpha) = -\text{tg}\ \alpha$
$\text{cotg}\ (90° - \alpha) = \text{tg}\ \alpha$	$\text{cotg}\ (180° - \alpha) = -\text{cotg}\ \alpha$

Tabela 2 Razões trigonométricas de ângulos complementares e ângulos suplementares.

Exemplos

- $\text{sen}\ 70° = \text{sen}\ (189° - 70°) = \text{sen}\ 110°$
- $\cos 70° = -\cos(180° - 70°) = -\cos 110°$
- $\text{tg}\ 70° = -\text{tg}\ (180° - 70°) = -\text{tg}\ 110°$
- $\text{cotg}\ 70° = -\text{cotg}\ (180° - 70°)\ 0 -\text{cotg}\ 110°$

8.2.5 Tabelas trigonométricas de 0º a 90º

A consulta de tabelas ou tábuas de valores naturais dá os valores das razões trigonométricas com quatro casas decimais.

α	seno	tangente	co-tangente	co-seno	
...	...	...	...	...	...
30°	0,5000	0,5774	1,7321	0,8660	60°
31°	0,5150	0,6009	1,6643	0,8572	59°
32°	0,5299	0,6249	1,6003	0,8480	58°
33°	0,5446	0,6494	1,5399	0,8387	57°
34°	0,5592	0,6745	1,4826	0,8290	56°
35°	0,5736	0,7002	1,4281	0,8192	55°
36°	0,5878	0,7265	1,3764	0,8090	54°
37°	0,6018	0,7536	1,3270	0,7986	53°
38°	0,6157	0,7813	1,2799	0,7880	52°
39°	0,6293	0,8098	1,2349	0,7771	51°
40°	0,6428	0,8391	1,192	0,7660	50°
41°	0,6561	0,6561	1,150	0,7547	49°
42°	0,6691	0,9004	1,111	0,7431	48°
43°	0,6820	0,9325	1,072	0,7314	47°
44°	0,6947	0,9657	1,036	0,7193	46°
45°	0,7071	1,0000		0,7071	45°
	co-seno	co-tangente	tangente	seno	**90° – α**

8.2.6 Resolução de triângulos rectângulos e problemas envolvendo aspectos da vida real

Exemplos

1. Consideremos um triângulo (ABC) rectângulo em A, com $\hat{C} = 62°$ e $\overline{BC} = 8$ cm. Vamos calcular os restantes elementos do triângulo ($\hat{B}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$).

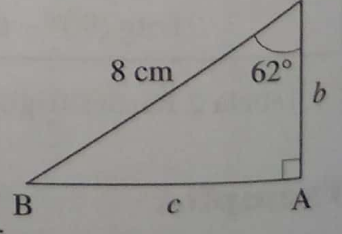


Fig. 14

A este tipo de problema, onde são dados alguns elementos de um triângulo rectângulo (um lado ou dois e um ângulo agudo) de modo a ser possível calcular os restantes elementos, dá-se o nome de resolução de triângulo rectângulo.

Resolução

Cálculo da medida do ângulo B:

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$

$\hat{B} = 180° - \hat{A} - \hat{C}$

$\hat{B} = 180° - 90° - 62°$

$\hat{B} = 180° - 152°$

$\hat{B} = 28°.$

Calculemos os restantes comprimentos, catetos *b* e *c*:

Cateto *b*: $\cos C = \dfrac{b}{a} \Leftrightarrow b = a \cdot \cos C$

$b = 8 \text{ cm} \times \cos 62°$

$b = 8 \text{ cm} \times 0{,}4695$ (cos 62º consultado na tabela 8.3.5)

$b = 3{,}75 \text{ cm}.$

Cateto *c*: $\text{sen } C = \dfrac{c}{a} \Leftrightarrow c = a \cdot \text{sen } C$

$c = 8 \text{ cm} \times \text{sen } 62°$ (sen 62º consultado na tabela 8.3.5)

$c = 8 \text{ cm} \times 0{,}8829$

$c = 7{,}06 \text{ cm}.$

2. Um poste telefónico vertical, com altura de 3,7 m, produz uma sombra com um comprimento de 2,24 m. Vamos determinar qual é a inclinação dos raios solares relativamente ao solo.

Resolução

$\overline{AC} = 2{,}24 \text{ m}$

$\overline{BC} = 3{,}7 \text{ m}$

$\text{sen } \hat{A} = \dfrac{3{,}7 \text{ m}}{\overline{AB}}$

Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2$

$\overline{AB} = \sqrt{3{,}7^2 + 2{,}24^2}$

$= \sqrt{13{,}69 + 5{,}0176}$

$\overline{AB} = \sqrt{18{,}7076} = 4{,}3 \text{ m}$

$\Leftrightarrow \text{sen } \hat{A} = \dfrac{3{,}7}{4{,}3} = 0{,}8604 \Leftrightarrow \hat{A} = 59°20'.$

A inclinação dos raios solares é de 59º 20'.

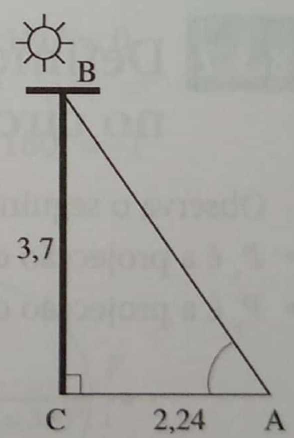


Fig. 15

3. Um prédio projecta, num plano horizontal, uma sombra com o comprimento de 72 m. Vamos determinar a altura deste prédio, sabendo que os raios solares têm uma inclinação de 52°, relativamente ao solo.

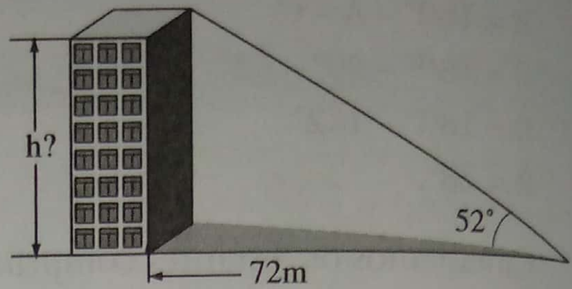


Fig. 16

Resolução

$\text{tg } 52° = \dfrac{h}{72} \Leftrightarrow h = 72 \cdot \text{tg } 52°$

$h = 72 \text{ m} \times 1{,}2799$

$h = 92 \text{ m}.$

A altura do prédio é de 92 m.

8.3 Circunferência orientada

8.3.1 Noção de círculo trigonométrico

O círculo trigonométrico é um círculo de raio igual à unidade, coincidindo o seu centro com a origem do sistema de eixos ortogonais. A cada região determinada pelos eixos ortogonais dá-se o nome de **quadrante**.

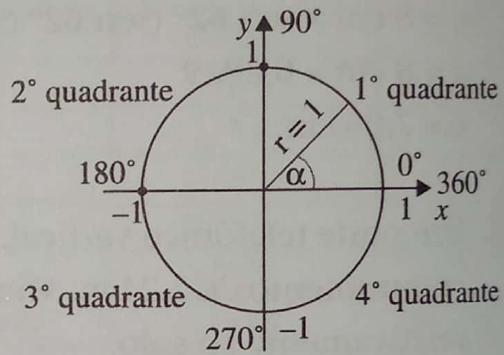
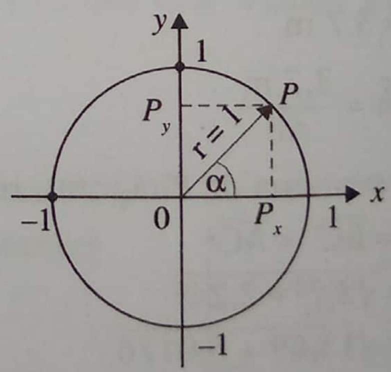


Fig. 17 Círculo trigonométrico.

8.3.2 Definição de razões trigonométricas no círculo

Observa o seguinte círculo trigonométrico:

- P_x é a projecção do ponto P no eixo x;
- P_y é a projecção do ponto P no eixo y.

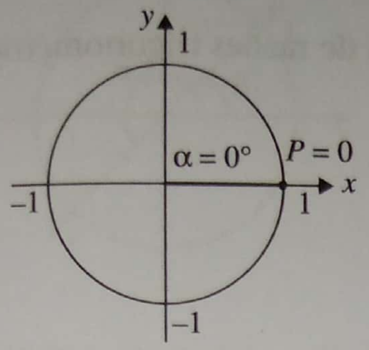


Considerando o ΔOPP_x, com $\overline{DP_x} = x_P$ e $\overline{OP_y} = y_P$, então:

- $\text{sen } \alpha = \dfrac{\overline{OP_y}}{\overline{OP}} = \dfrac{y_P}{1} \Rightarrow \text{sen } \alpha = x_P$
- $\cos \alpha = \dfrac{OP_x}{OP} = \dfrac{x_P}{1} \Rightarrow \cos \alpha = x_P$
- $\text{tg } \alpha = \dfrac{OP_y}{OP_x} = \dfrac{y_P}{x_P} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \dfrac{y_P}{x_P}$
- $\text{cotg } \alpha = \dfrac{OP_x}{OP_y} = \dfrac{x_P}{y_P} \Rightarrow \text{cotg } \alpha = \dfrac{x_P}{y_P}$

As razões trigonométricas dos ângulos 0°, 45°, 90°, 180°, 270° e 360°

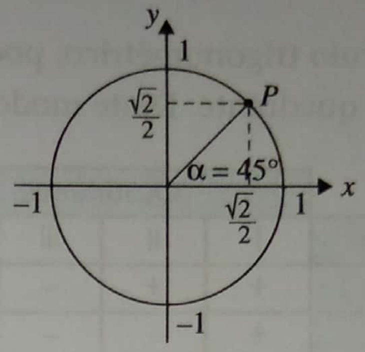
1.



Para α = 0°:

$x_P = 1$ ⎧ sen 0° = 0
$y_P = 0$ ⎩ cos 0° = 1

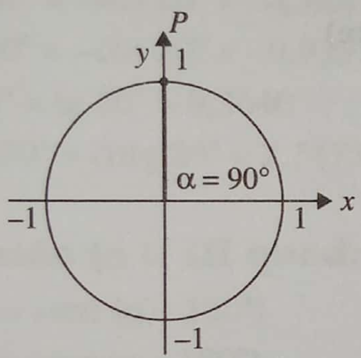
2.



Para α = 45°:

$x_P = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ⎧ sen 45° $= \frac{\sqrt{2}}{2}$
$y_P = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ⎩ cos 45° $= \frac{\sqrt{2}}{2}$

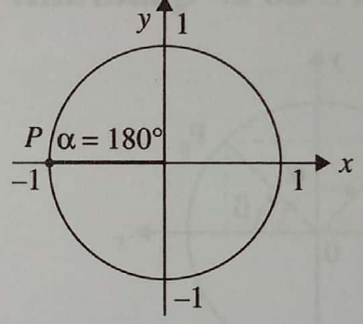
3.



Para α = 90°:

$x_P = 0$ ⎧ sen 90° = 1
$y_P = 1$ ⎩ cos 90° = 0

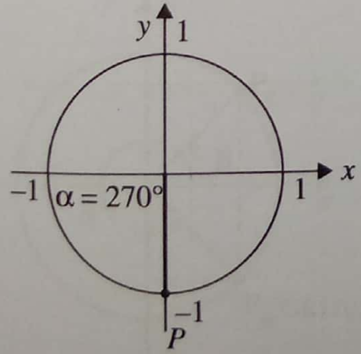
4.



Para α = 180°:

$x_P = -1$ ⎧ sen 180° = 0
$y_P = 0$ ⎩ cos 180° = –1

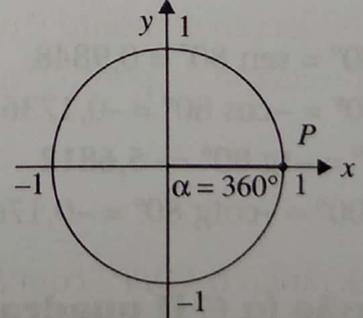
5.



Para α = 270°:

$x_P = 0$ ⎧ sen 270° = –1
$y_P = -1$ ⎩ cos 270° = 0

6.



Para α = 360°:

$x_P = 1$ ⎧ sen 360° = 0
$y_P = 0$ ⎩ cos 360° = 1

8.3.3 Variação do sinal de seno, co-seno, tangente e co-tangente nos 4 quadrantes

Do círculo trigonométrico, podemos obter o sinal de razões trigonométricas em qualquer quadrante. Deste modo:

	Quadrantes			
Função	I	II	III	IV
sen x	+	+	–	–
cos x	+	–	–	+
tg x	+	–	+	–
cotg x	+	–	+	–

8.3.4 Redução ao 1. ° quadrante

1.° caso: α do 2.° quadrante ($\alpha \in$ II quadrante)

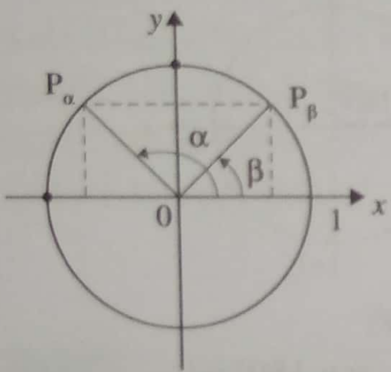


Fig. 18 Redução ao 1.° quadrante – 1.° caso.

$$\alpha = 100° \Rightarrow \beta = 180° - 100° = 80°$$

$$\text{sen } 100° = \text{sen } 80° = 0{,}9848$$
$$\cos 100° = -\cos 80° = -0{,}1736$$
$$\text{tg } 100° = -\text{tg } 80° = -5{,}6812$$
$$\text{cotg } 100° = -\text{cotg } 80° = -0{,}1763$$

Conclusão ($\alpha \in$ II quadrante)

- $\text{sen } \alpha = \text{sen } (180° - \alpha)$
- $\cos \alpha = -\cos (180° - \alpha)$
- $\text{tg } \alpha = -\text{tg } (180° - \alpha)$
- $\text{cotg } \alpha = -\text{cotg } (180° - \alpha)$

2.º caso: do III quadrante ao I quadrante ($\alpha \in$ III quadrante)

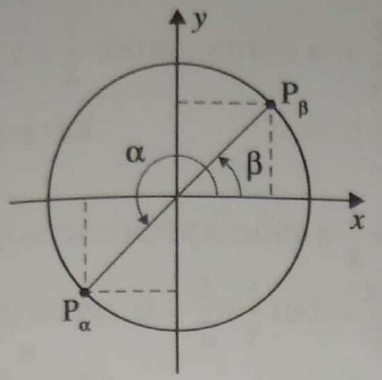


Fig. 19 Redução ao 1.º quadrante – 2.º caso.

$\alpha = 200° \Rightarrow \beta = 200° - 180° = 20°$

como $200° \in$ III quadrante $\Rightarrow$ sen $\alpha < 0$

sen $200° = -$sen $20° = -0{,}3420$

cos $200° = -$cos $20° = -0{,}9397$

tg $200° =$ tg $20° = 0{,}3640$

cotg $200° =$ cotg $20° = 2{,}7475$

Conclusão ($\alpha \in$ III quadrante):

- sen $\alpha = -$sen $(\alpha - 180°)$
- cos $\alpha = -$cos $(\alpha - 180°)$
- tg $\alpha =$ tg $(\alpha - 180°)$
- cotg $\alpha =$ cotg $(\alpha - 180°)$

3.º caso: do IV quadrante ($\alpha \in$ IV quadrante)

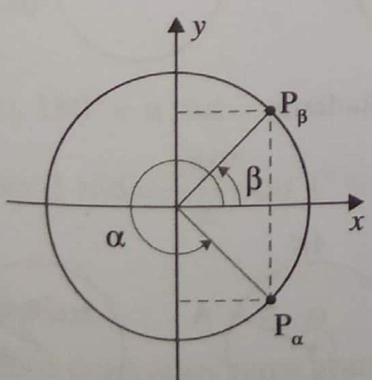


Fig. 20 Redução ao 1.º quadrante - 3.º caso.

$\alpha = 300° \Rightarrow \beta = 360° - 300° = 60°$

$\text{sen } 300° = -\text{sen } 60° = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} = -0{,}8660$

$\cos 300° = \cos 60° = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$

$\text{tg } 300° = -\text{tg } 60° = \sqrt{3} = -1{,}7320$

$\text{cotg } 300° = -\text{cotg } 60° = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} = -0{,}366$

Conclusão ($\alpha \in$ IV quadrante):

- $\text{sen}\alpha = -\text{sen } (360° - \alpha)$ $\quad 360° - \alpha = -\alpha$
- $\cos\alpha = \cos (360° - \alpha)$ $\quad 360° - \alpha = \alpha$
- $\text{tg}\alpha = -\text{tg } (360° - \alpha)$ $\quad 360° - \alpha = -\alpha$
- $\text{cotg}\alpha = -\text{cotg } (360° - \alpha)$ $\quad 360° - \alpha = -\alpha$

8.3.5 Unidade de redução de ângulos

Sistemas de redução	Unidade
Sexagesimal	Grau (°)
Centesimal	Grado (g)
Circular	Radiano (rad)

Conceito de radiano (rad)

Chama-se radiano ao comprimento de arco igual ao seu raio (raio da circunferência).

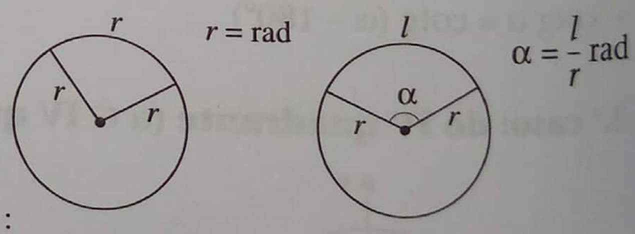


Fig. 21 Radiano.

- Se o comprimento de arco corresponde a uma volta completa da circunferência, isto é, $l = 2\pi$ rad, então $\alpha = \dfrac{2\pi r}{r}$ rad. Isto é:

  $\alpha = 2\pi$ rad.

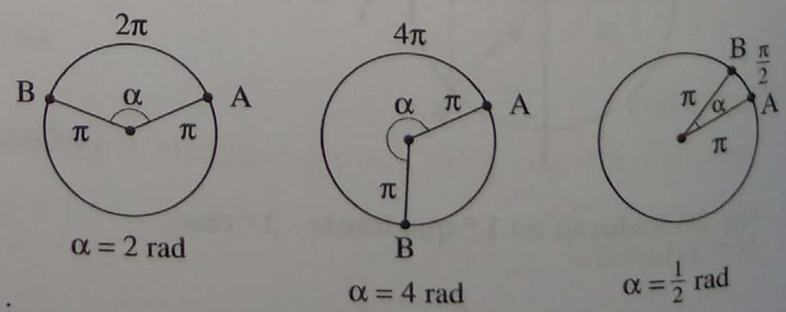


Fig. 22 Exemplos de arcos marcados em radianos.

- Se o arco corresponde a metade da volta da circunferência, isto é, $l = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \text{rad}$, então $\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi r}{r}$ rad. Isto é:

  $\alpha = \pi$ rad.

- Se o arco corresponder a $\frac{1}{4}$ da volta da circunferência, isto é, $l = \frac{1}{4} \cdot 2\pi\, r = \frac{1}{2} \cdot \pi r$ rad, então, $\alpha = \frac{1}{2}\pi \frac{r}{r}$ rad $= \frac{\pi}{2}$ rad. Isto é:

  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ rad.

- Se o arco corresponder à *n*-ésima parte da circunferência, isto é, $l = \frac{1}{n} \cdot 2\pi\, r$ rad, então, $\alpha = \frac{1}{n} \cdot \frac{2\pi r}{r}$ rad. Isto é:

  $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ rad.

8.3.6 Relações entre sistema sexagesimal e circular

Consideremos as circunferências abaixo:

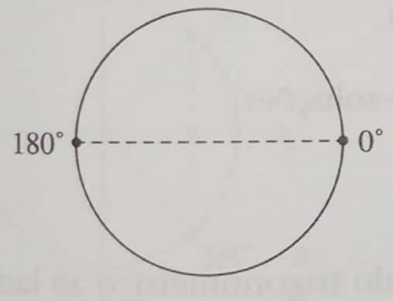


Fig. 23 A metade da circunferência mede 180°.

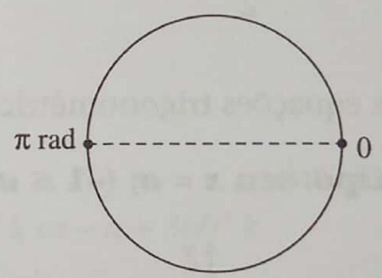


Fig. 24 A metade da circunferência mede π rad.

Logo, $180° = \pi$ rad

Então: $1 \text{ rad} = \frac{180°}{\pi}$ ou $1° = \frac{\pi}{180°}$ rad.

Exemplos

1. Vamos converter para graus o seguinte ângulo: $\alpha = \frac{\pi}{12}$ rad.

Resolução

$$\alpha = \frac{\pi}{12} \text{ rad} = \frac{\pi}{12} \cdot \frac{180°}{\pi} = \frac{180°}{12} = 15°.$$

2. Vamos converter para radiano o ângulo 135°.

Resolução

$$\alpha = \frac{135° \cdot \pi \text{ rad}}{180°} = \frac{3}{4} \text{ rad.}$$

8.3.7 Resolução de equações trigonométricas do tipo sen $x = a$, cos $x = a$, tg $x = a$ e cotg $x = a$, sendo $a \in \mathbb{R}$, em qualquer quadrante

Equações trigonométricas são igualdades entre expressões que envolvem um ou mais arcos incógnitos e são verdadeiras somente para certos valores atribuídos a esses arcos.

Exemplos

- sen $x = 0$
- $2\cos x - 1 = 0$
- $3\text{sen } x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

As equações trigonométricas têm uma infinidade de soluções.

1.° tipo: sen $x = a$; $(-1 \le a \le 1)$

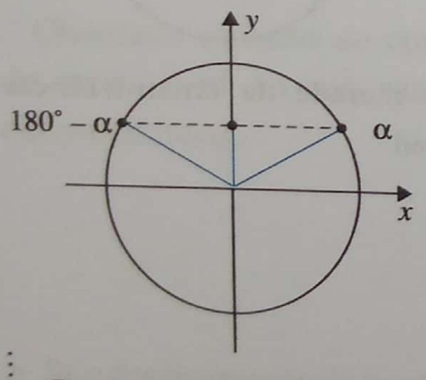


Fig. 25 Círculo trigonométrico sen $x = \alpha$.

Consideremos o círculo trigonométrico ao lado.

A equação trigonométrica sen $x = \alpha$ tem duas soluções: $x = \alpha$ e $x = 180° - \alpha$.

Em geral:

$$\text{sen } x = \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha + 360°\, k \\ x = (180° - \alpha) + 360°\, k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Em radianos, teríamos:

$$\begin{cases} x = \alpha + 2\pi k \\ x = (\pi - \alpha) + 2\pi k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Exemplo

Vamos resolver a equação sen $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

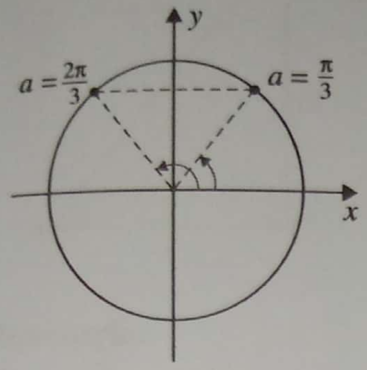


Fig. 26 Círculo trigonométrico sen $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Resolução

$$\text{sen } x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$x = 60°$ ou $x = 180° - 60° \Leftrightarrow x = 120°$.

Logo, $\begin{cases} x = 60° + 360°\,k \\ \\ x = 120° + 360°\,k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$

Em radianos, teríamos:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k \\ \\ x = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

2.º tipo: cos $x = a$ $(-1 \leq a \leq 1)$

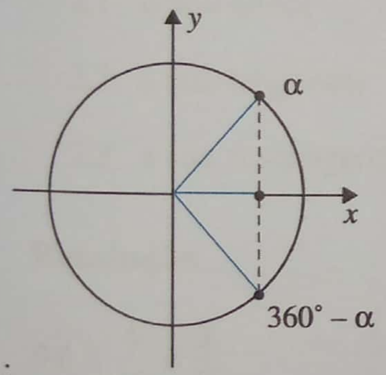


Fig. 27 Círculo trigonométrico cos $x = \alpha$.

A equação trigonométrica cos $x = a$ tem duas soluções: $x = \alpha$ e $x = 360° - \alpha$.

Em geral:

$$\begin{cases} x = \alpha + 360°\,k \\ \\ x = (360° - \alpha) + 360°\,k \Leftrightarrow -\alpha + 360°\,k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ou em radianos:

$$\begin{cases} x = \alpha + 2\pi k \\ \\ x = -\alpha + 2\pi k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Exemplo

Vamos resolver a equação cos $x = \frac{1}{2}$.

Resolução

$$\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}.$$

Logo, $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + 360°\,k \\ \\ x = \dfrac{-\pi}{3} + 360°\,k. \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$

3.° tipo: tg $x = a$ ou cotg $x = a$

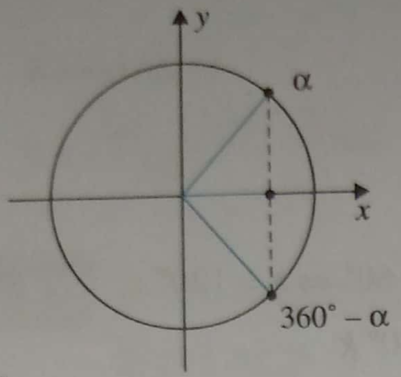


Fig. 28 Círculo trigonométrico

tg $x = \alpha$ e cotg $x = \alpha$.

Seja o círculo trigonométrico:

tg $x = a$ e cotg $x = a$

$\Rightarrow x = \alpha$ e $x = 180° + \alpha$.

Em geral:

$x = \alpha + 180°\, k,\ k \in \mathbb{Z}$

ou, radianos

$x = \alpha + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

Exemplo

Vamos resolver a equação tg $x = 1$.

Resolução

$\text{tg}x = 1 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4}$

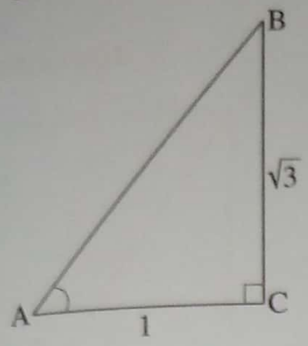
Logo, $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi\, k,\ k \in \mathbb{Z}$

ou $x = \dfrac{180°}{4} + 180°\, k$

$\Leftrightarrow x = 45° + 180°\, k,\ k \in \mathbb{Z}$

Exercícios resolvidos

1. Calcula o valor de $\hat{A}$ no triângulo rectângulo (ABC) seguinte:



Resolução

$\text{tg}\,\hat{A} = \frac{\sqrt{3}}{1} \Rightarrow \text{tg}\,\hat{A} = \sqrt{3}.$

Como $\text{tg}\,60° = \sqrt{3}. \Rightarrow \hat{A} = 60°.$

Ou seja, $\hat{A} = 60°.$

2. De um certo ângulo B, do IV quadrante, sabe-se que o seu co-seno é 0,6. Determina:

2.1 o seu seno;

2.2 a sua tangente;

2.3 a sua co-tangente.

Resolução

$0{,}6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$

2.1 $\text{sen}^2\,B + \cos^2 B = 1$

$\text{sen}^2\,B = 1 - \cos^2 B$

$\text{sen}^2\,B = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2$

$\text{sen}^2\,B = \frac{25-9}{25}$

$\text{sen}^2\,B = \frac{16}{25}$

$\text{sen}\,B = -\frac{4}{5}$

2.2 $\text{tg } B = \dfrac{\text{sen } B}{\cos B}$

$\text{tg } B = -\dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{5}{3} = -\dfrac{4}{3}$

2.3 $\text{cotg } B = \dfrac{1}{\text{tg}B}$

$\text{cotg } B = \dfrac{1}{-\dfrac{4}{3}}$

$\text{cotg } B = -\dfrac{3}{4}$

3. Sabendo que $\text{tg } \alpha = \dfrac{12}{5}$, calcula sen α e cos α.

Resolução

$$\begin{cases} \text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \\ \text{tg } \alpha = \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---------------} \\ \dfrac{12}{5} = \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---------------} \\ \text{sen } \alpha = \dfrac{12}{5} \cos \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{12}{5} \cos \alpha\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \\ \text{sen } \alpha = \dfrac{12}{5} \cos \alpha \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{144}{25} \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \\ \text{---------------} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{144}{25} + 1\right) \cos^2 \alpha = 1 \\ \text{---------------} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{169}{25} \cos^2 \alpha\right) = 1 \\ \text{sen } \alpha = \dfrac{12}{5} \cos \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 \alpha = \dfrac{25}{169} \\ \text{---------------} \end{cases}$$

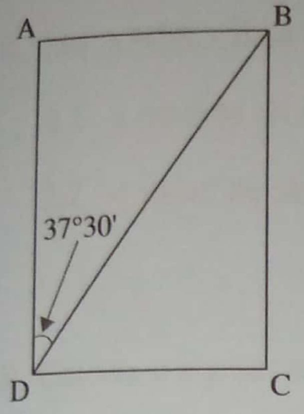
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \dfrac{5}{13} \\ \text{sen } \alpha = \dfrac{12}{5} \cdot \dfrac{5}{13} = \dfrac{12}{13} \end{cases}$$

Logo, $\text{sen } \alpha = \pm\dfrac{12}{13}$ e $\cos \alpha = \dfrac{5}{13}$.

Exercícios resolvidos

4. Dado o rectângulo [ABCD], calcula a medida dos seus lados e a sua área.

Resolução



- $\text{sen}37^\circ\ 30' = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \overline{CD} = \overline{AC} \cdot \text{sen}\ 37^\circ\ 30'$

  $\Leftrightarrow \overline{CD} = 42\ \text{cm} \cdot 0{,}6088 \approx 25{,}57\ \text{cm}$

- $\cos 37^\circ\ 30' = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{AC}}$

  $\Leftrightarrow \overline{AD} = \overline{AC} \cdot \cos 37^\circ\ 30'$

  $\Leftrightarrow \overline{AD} = 42\ \text{cm} \cdot 0{,}7934 \approx 33{,}32\ \text{cm}$

A área do rectângulo:

$A = \overline{BC} \cdot \overline{AB} = 33{,}32\ \text{cm} \cdot 25{,}57\ \text{cm} \approx 852\ \text{cm}^2$

Logo,

$\overline{AD} = \overline{BC} = 33{,}32\ \text{cm}$

$\overline{AB} = \overline{CD} = 25{,}57\ \text{cm}$

Área = 33,32 cm

5. Escolhe, para cada alínea da coluna A, a resposta certa na coluna B.

	A	B
5.1	sen 0	–1
5.2	$\dfrac{\text{sen}\ \pi}{2}$	0
5.3	sen π	1
5.4	$\dfrac{\text{sen}\ 3\pi}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
5.5	cos 45°	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
5.6	sen 270°	$\dfrac{1}{2}$
5.7	cos 360°	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Resolução

5.1 0 5.2 1 5.3 0 5.4 –1 5.5 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 5.6 –1 5.7 1

Exercícios resolvidos

6. Transforma 210° em radianos.

Resolução

$$\alpha = \frac{\text{graus} \cdot \pi \text{ rad}}{180°}$$

$$\alpha = \frac{210° \cdot \pi \text{ rad}}{180°} = \frac{7\pi}{6} \text{ rad}$$

7. Transforma $\frac{\pi}{3}$ rad em graus.

Resolução

$$\text{Grau} = 180° \cdot \frac{\alpha}{\pi}$$

$$\text{Grau} = \frac{180° \cdot \pi}{3} \div \pi = \frac{180°}{3} = 60°$$

8. Resolve a equação sen $x = 0$.

Resolução

Sabemos que sen 0° = 0. Então, sen x = sen 0° $\Rightarrow x = 0°$.

$$\text{sen } x = \text{sen } 0° \Rightarrow \begin{cases} x = 0° + 360° k \\ k \in \mathbb{Z} \\ x = (180° - 0°) + 360° k \end{cases}$$

9. Resolve a equação cos $x = 0$.

Resolução

Sabemos que cos 90° = 0. Então, cos x = cos 90° $\Rightarrow x = 90°$.

cos x = cos 90° $\Rightarrow x = \pm 90° + 360°k$, com $k \in \mathbb{Z}$

10. Resolve a equação sen $x = -\frac{1}{2}$.

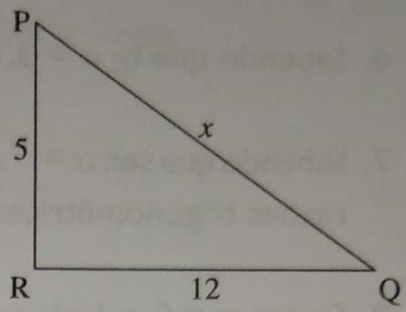
Resolução

$$\text{sen } x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k \\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{11\pi}{6} + 2\pi k \end{cases}$$

Exercícios não resolvidos

1. Num triângulo rectângulo, cujas medidas de catetos são $3\sqrt{3}$ cm e 3 cm, calcula o comprimento da sua hipotenusa, a medida dos seus ângulos e a área.

2. No $\triangle PQR$, calcula:

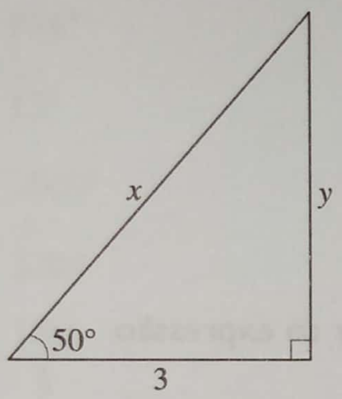


2.1 a medida de x;

2.2 o valor de sen P, cos P, tg Q e cotg Q.

3. Calcula x e y em cada uma das figuras seguintes:

3.1



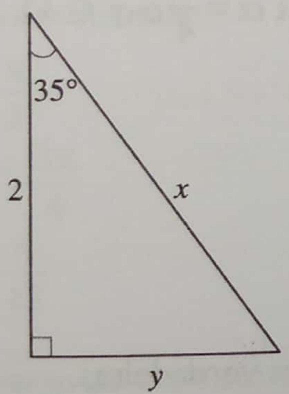
sen 50° = 0,7660

cos 50° = 0,6428

tg 50° = 1,192

cotg 50° = 0,8391

3.2



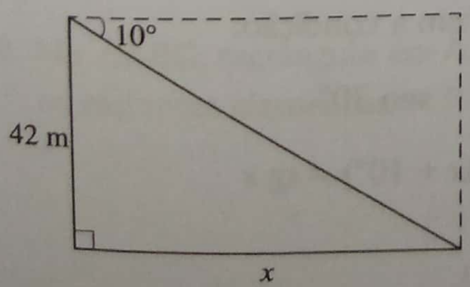
sen 35° = 0,5736

cos 35° = 0,8192

tg 35° = 0,7002

cotg 35° = 1,428

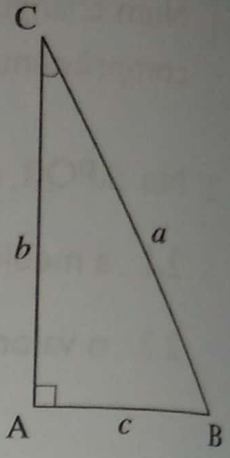
4. Calcula a medida de x na figura seguinte:



Exercícios não resolvidos

5. Resolve o triângulo rectângulo ao lado, sabendo que

$\operatorname{sen} \hat{C} = \frac{1}{3}$ e $c = 3$ cm.



6. Sabendo que $\operatorname{tg} \alpha = 3$, calcula $\operatorname{cotg} \alpha$.

7. Sabendo que $\operatorname{sen} \alpha = -\frac{1}{2}$ e $\alpha \in$ III quadrante, calcula as restantes razões trigonométricas.

8. Se $\operatorname{sen} \alpha = 0$, calcula as restantes razões trigonométricas.

9. Calcula as restantes razões trigonométricas dos ângulos envolvidos, se:

9.1 $\operatorname{sen} \alpha = \frac{12}{13}$ e $\alpha \in$ I quadrante

9.2 $\cos \alpha = \frac{11}{61}$ e $\operatorname{sen} \alpha > 0$

9.3 $\operatorname{tg} \alpha = -4$

10. Se $\operatorname{sen} \alpha = -\frac{2}{3}$ e $\alpha \in$ IV quadrante, calcula o valor da expressão

$$\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha - 5}{\operatorname{sen} \alpha}.$$

10.1 Calcula $\frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{cotg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha} + \operatorname{cotg} \alpha$, sabendo que $\cos \alpha = \frac{3}{4}$ e $\alpha \in \mathbb{Q}$.

11. Simplifica as expressões:

11.1 $\frac{2 - \operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \operatorname{tg}^2 \alpha$

11.2 $(1 - \cos x)^2 + \operatorname{sen}^2 x$

12. Completa as igualdades de forma a obter proposições verdadeiras.

12.1 $\operatorname{sen} 30° = \cos$ ______

12.2 $\operatorname{tg} 23° 30' = \operatorname{cotg}$ ______

12.3 $\cos 26° = \operatorname{sen}$ ______

12.4 $\operatorname{cotg} 37° 42' = \operatorname{tg}$ ______

13. Determina as medidas dos ângulos x que cumprem a condição:

13.1 $\operatorname{sen} x = \cos 70°$

13.2 $\cos 2x = \operatorname{sen} 30°$

13.3 $\operatorname{tg} x = \operatorname{cotg} 56°$

13.4 $\operatorname{cotg} (4x + 10°) = \operatorname{tg} x$

Exercícios não resolvidos

14. Completa, indicando um ângulo do I quadrante:

14.1 sen 149° = sen______ = cos______ 14.2 cos 250° = −cos______

14.3 $\text{tg}\,(\frac{3\pi}{4}\text{ rad}) = -\text{cotg}$ ______ 14.4 cotg 320° = −cotg ______

15. Calcula, usando a tabela:

15.1 cos 213° 15.2 sen 92° 15.3 sen (–85°)

15.4 tg 112° 15.5 sen (3 rad)

16. A que quadrante pertencem os seguintes ângulos?

16.1 914° 16.2 210°

16.3 13° 16.4 1203°

16.5 –500° 16.6 –50°

16.7 320° 16.8 $\frac{8\pi}{3}$

16.9 $\frac{15\pi}{3}$ 16.10 $-\frac{4\pi}{3}$

17. Calcula, no sistema sexagesimal, as medidas dos ângulos que, em radiano, têm as seguintes medidas:

17.1 $\frac{\pi}{3}$ 17.2 $\frac{3\pi}{2}$

17.3 $-\frac{3\pi}{4}$ 17.4 $\frac{\pi}{6}$

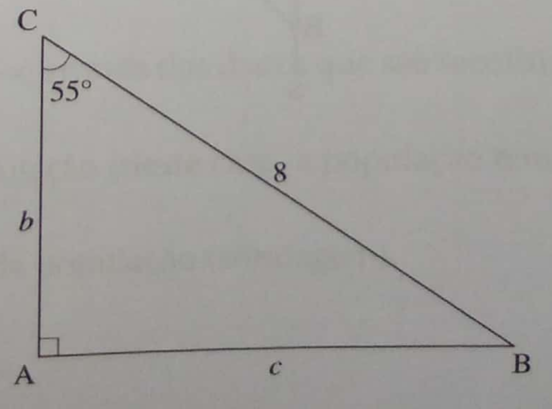
17.5 $\frac{\pi}{12}$

18. Converte para o sistema circular:

18.1 15° 18.2 –30° 18.3 3° 18.4 90°

19. Resolve a equação cos $3x = 0$.

20. No △ABC, rectângulo em A, calcula os restantes elementos.

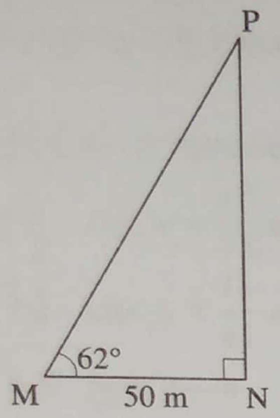


Exercícios não resolvidos

21. Um observador encontra-se a 85 metros de um prédio e avista o seu ponto mais alto sob um ângulo de 40° em relação à horizontal. Calcula a altura do prédio.

22. Sabendo que, num triângulo rectângulo, as medidas da hipotenusa e de um dos catetos são respectivamente, 43,6 m e 20,3 m, determina a medida dos restantes elementos desse triângulo.

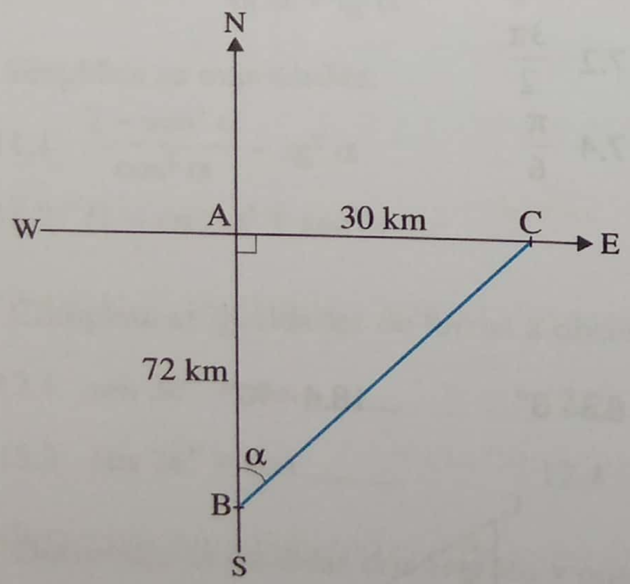
23. Calcula a medida NP, tendo em conta os dados da figura:



24. Os distritos A, B e C estão ligados entre si segundo mostra a figura em baixo.

24.1 Determina a distância de B e C.

24.2 Qual é a medida do ângulo α?



Unidade 9

Estatística

Ao terminar esta unidade, deverás ser capaz de:

- identificar população e amostra;
- interpretar tabelas e gráficos;
- identificar variáveis discretas e variáveis contínuas;
- organizar e interpretar informação estatística em tabelas e gráficos;
- construir gráficos circulares, de barras, histogramas e tabelas de frequência;
- determinar frequências absoluta, relativa, percentual e acumulada para dados agrupados por classes e variação;
- resolver problemas práticos aplicando conhecimentos da Estatística.

Algumas das noções que se tratam nesta unidade já foram abordadas em classes anteriores, daí que a intenção do estudo da Estatística nesta classe seja de completar algumas informações de forma progressiva.

9.1 Revisão de conceitos básicos de estatística descritiva

Em Estatística, certas palavras que usamos em linguagem corrente tomam sentidos diferentes:

- a palavra população designa um conjunto de seres humanos, de animais, de acontecimentos, etc.;
- uma população tem uma ou várias características comuns;
- cada elemento de uma população é um indivíduo.

O estudo estatístico de uma população faz-se através dos dados que são recolhidos por um dos processos:

- observação de todos os elementos da população (neste caso, a população tem de ser finita);
- observação de uma parte dos elementos da população (sondagem).

O processo de sondagem é mais económico, mais rápido e mais cómodo. A parte da população que será observada é chamada amostra.

As características que se podem analisar sobre a amostra de uma certa população são, por exemplo, a altura, o peso, a idade, a classificação numa avaliação, etc. Estas características são quantitativas, enquanto que a raça, a cor dos olhos, o sexo, etc., são alguns exemplos de características qualitativas.

- Chama-se **frequência absoluta** (f_a) ao número de vezes que uma dada característica ocorre.
- O quociente entre cada frequência absoluta (f_a) e o número total de elementos da população (n) chama-se **frequência relativa** (f_r).

$$f_r = \frac{f_a}{\text{número de elementos da população}} = \frac{f_a}{n}$$

9.2 Tabelas de frequência absoluta, relativa, percentual e acumulada

Numa turma da 10.ª classe, as idades dos alunos constam do quadro seguinte:

13	11	14	14
12	14	12	12
12	13	11	13
13	12	11	15
12	12	13	12

O estudo incide sobre 20 alunos desta turma (que constituem a população) e a variável estatística em estudo é a idade.

Organizando os dados numa tabela, temos:

Idade	Contagem	f_a	f_r
11	III	3	$\frac{3}{20} = 0{,}15$
12	~~IIII~~ III	8	$\frac{8}{20} = 0{,}4$
13	~~IIII~~	5	$\frac{5}{20} = 0{,}25$
14	III	3	$\frac{3}{20} = 0{,}15$
15	I	1	$\frac{1}{20} = 0{,}05$
	Total (n)	$n = 20$	

Frequência percentual

Vimos que a frequência relativa (f_r) obtém-se pela fórmula: $f_r = \frac{f_a}{n}$.

A frequência percentual é obtida multiplicando a frequência relativa (f_r) por 100, ou seja:

$$f_{\%} = \frac{f_a}{n} \times 100$$

Exemplo

1. No caso da turma da 10.ª classe, para calcularmos a percentagem ou frequência percentual dos alunos com 13 anos de idade, faremos:

$$\frac{5}{20} \times 100 = 5 \times \frac{100}{20} = 25.$$

Portanto, a frequência percentual dos alunos com 13 anos de idade é de 25%.

Frequência acumulada

Para obtermos a frequência absoluta acumulada (F_a) partimos das frequências absolutas. Mantendo a primeira como f_a, obtemos a seguinte, pela soma com o anterior.

Da turma da 10.ª classe, temos:

f_a	F_a
3	3 = 3
8	8 + 3 = 11
5	5 + 11 = 16
3	3 + 16 = 19
1	1 + 19 = 20

9.3 Medidas de tendência central (média, moda e mediana)

Média aritmética ($\overline{x}$)

Obtém-se a média de uma série de dados estatísticos, calculando o quociente da sua soma pelo seu número total.

$$\overline{x} = \sum_{a=1}^{n}$$

Exemplos

1. A média das idades dos 20 alunos da turma da 10.ª classe anterior é:

$$\overline{x} = \frac{3 \times 11 + 8 \times 12 + 5 \times 13 + 3 \times 4 + 1 \times 15}{20}$$

$$\overline{x} = \frac{251}{20} = 12{,}55 \text{ (aproximação às centésimas).}$$

Logo, a idade média da turma é de 12,55 anos.

2. As classificações obtidas pela Fernanda, em Matemática, durante o ano lectivo passado foram: 7, 8, 11, 14, 13, 9, 10, 12, 9.

Para calcularmos a sua média anual, fazemos:

$$\overline{x} = \frac{7 + 8 + 11 + 14 + 13 + 9 + 10 + 12 + 9}{9}$$

$$\overline{x} = \frac{93}{9} = 10{,}3.$$

A média anual da Fernanda é de 10,3.

Moda (Mo)

Chama-se moda e representa-se por *Mo*, ao valor dos dados que ocorre com maior frequência.

Exemplos

1. Da referida turma da 10.ª classe, com as idades 11, 12, 13, 14, 15, qual é a moda?

Resolução

A moda é 12, por ser a idade que aparece com mais frequência (8 vezes).

2. Qual é a moda dos dados: 5, 5, 2, 5, 2, 7, 9, 3, 3, 3?

Resolução

Neste caso temos duas modas: 3 e 5. É, por isso, uma distribuição bi-modal.

Mediana (Md ou $\tilde{x}$)

A mediana é o valor que ocupa a posição central, numa série de dados estatísticos, dispostos por ordem crescente ou decrescente.

Consideremos o exemplo da média aritmética, sobre as classificações da Fernanda: 7, 8, 11, 14, 13, 9, 10, 12, 9.

Colocando por ordem crescente os dados:

$$\underbrace{7,\ 8,\ 9,\ 9,}_{\text{4 classificações}}\ \underbrace{10,}_{\text{Md ou } \tilde{x}}\ \underbrace{11,\ 12,\ 13,\ 14}_{\text{4 classificações}}$$

A mediana é então ~ = 10.

Exemplo

1. Qual é a mediana dos dados: 5, 5, 2, 5, 2, 7, 9, 3, 3, 3?

Ordenando os dados por ordem crescente:

$$\underbrace{2,\ 2,\ 3,\ 3,}_{\text{4 dados}}\ \underline{\underline{3,\ 5,}}\ \underbrace{5,\ 5,\ 7,\ 9}_{\text{4 dados}}$$

A mediana será a semi-soma dos valores centrais: $\frac{(3 + 5)}{2} = \frac{8}{2} = 4$.

9.4 Gráficos circulares e de barras

Consideremos a tabela das idades dos alunos da 10.ª classe:

Idade (x)	f_a	$f_{\%}$
11	3	15
12	8	40
13	5	25
14	3	15
15	1	5
	$n = 20$	100

Na construção do gráfico de barras, a frequência absoluta representa-se no eixo das ordenadas e a variável estatística (idade), no eixo das abcissas.

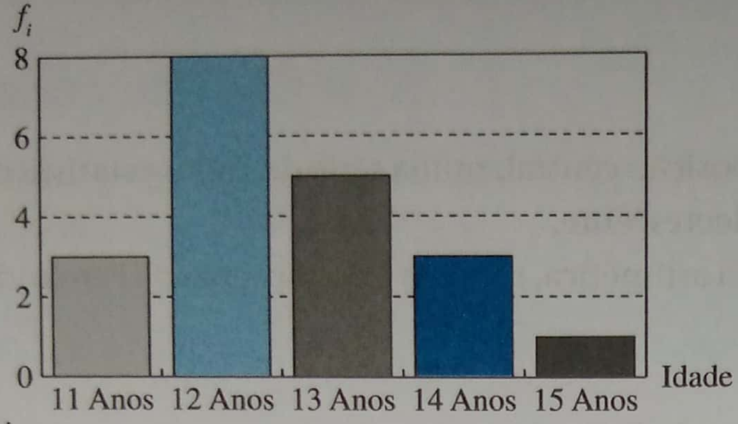


Fig. 1 Gráfico de barras.

O gráfico circular da mesma distribuição, será:

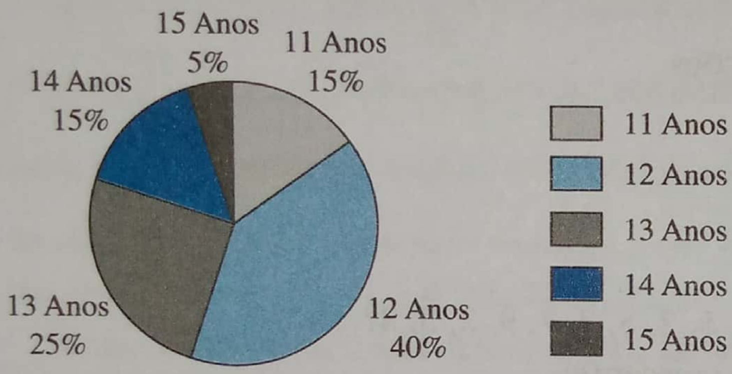


Fig. 2 Gráfico circular.

Regra: para sabermos o ângulo correspondente a certa percentagem, usamos a regra de três simples.

$360° - 20$ alunos ($n = 20$, total de dados)

$x - f_a$

ou seja, $x = \dfrac{f_a \times 360°}{20}$.

Exemplos

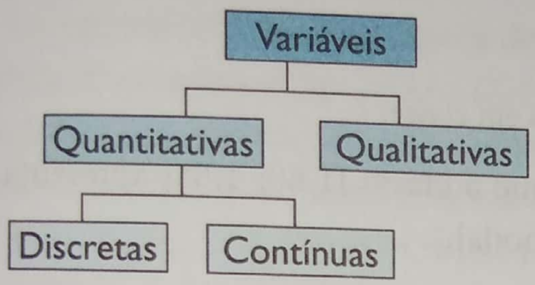
- 12 anos (40%) $\rightarrow x = \dfrac{8 \times 360°}{20} = 144°$
- 11 anos (15%) $\rightarrow x = \dfrac{3 \times 360°}{20} = 54°$
- 13 anos (25%) $\rightarrow x = \dfrac{5 \times 360°}{20} = 90°$
- 14 anos (15%) $\rightarrow x = \dfrac{3 \times 360°}{20} = 54°$
- 15 anos (5%) $\rightarrow x = \dfrac{1 \times 360°}{20} = 18°$

9.5 Variáveis discretas e contínuas

As variáveis características estatísticas podem ser **quantitativas** ou **qualitativas**. Alguns exemplos destas variáveis quantitativas são: a altura, o peso, a idade, o número de irmãos, o número de filhos, etc.

Às variáveis que apresentam um dado quantificado ou fixo (por exemplo, o número de irmãos, o número de filhos, a idade, etc.) chama-se **variáveis discretas**. Aos dados que apresentam uma variação contínua ou em intervalos (por exemplo, a altura de uma pessoa, o peso, etc.) chama-se **variáveis contínuas**.

As variáveis classificam-se em:



9.6 Tabelas e gráficos para dados agrupados por classes

Tomemos como variável estatística, as alturas dos alunos da 10.ª classe, em metros: 1,49; 1,52; 1,57; 1,71; 1,62; 1,50; 1,66; 1,69; 1,73; 1,62; 1,53; 1,59; 1,61; 1,51; 1,48; 1,63; 1,60; 1,56; 1,57; 1,64; 1,55; 1,64; 1,66 m.

Neste caso, a variável estatística é contínua, porque pode tomar qualquer valor. Para tal é mais fácil organizar os dados em classes ou em intervalos de classe.

Consideremos classes com um intervalo de altura de 0,05 m:

[1,45; 1,50[; [1,50; 1,55[; [1,55; 1,60[; [1,60; 1,65[; [1,65; 1,70[; [1,70; 1,75].

As tabelas de frequências serão:

Classes (altura em m)	f_a	f_r	F_a	$f_\%$
[1,45; 1,50]	2	$\frac{2}{23} = 0{,}09$	2	9
[1,50; 1,55]	4	$\frac{4}{23} = 0{,}17$	6	17
[1,55; 1,60]	5	$\frac{5}{23} = 0{,}22$	11	22
[1,60; 1,65]	7	$\frac{7}{23} = 0{,}30$	18	30
[1,65; 1,70]	3	$\frac{3}{23} = 0{,}13$	21	13
[1,70; 1,75]	2	$\frac{2}{23} = 1{,}09$	23	9
	$n = 23$	1,00		100%

Vamos fazer a representação gráfica dos dados agrupados em classe, do exemplo anterior:

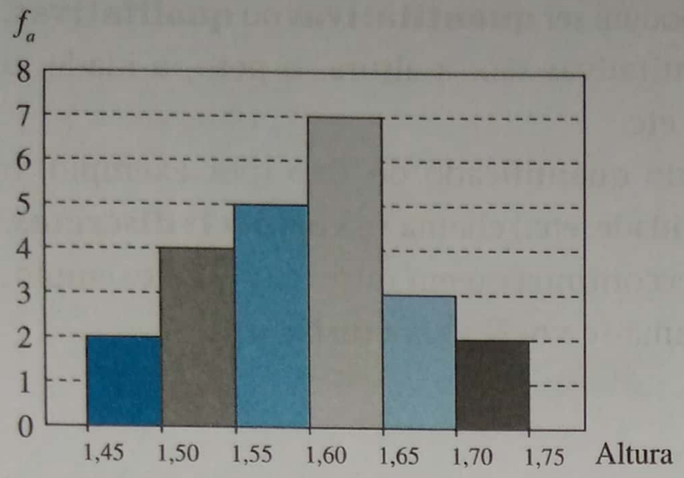


Fig. 3 Representação gráfica dos dados agrupados em classe.

Observando as alturas das barras, nota-se que a classe [1,60; 1,65[apresenta a maior frequência. Logo, esta classe é a classe modal.

9.7 Medidas de dispersão de uma amostra

As medidas de dispersão de um amostra são:

- desvio médio;
- desvio padrão;
- variância;
- intervalos de variação.

Desvio médio (d)

Supondo que as classificações obtidas pelo João e pela Ana nos testes de Matemática, ao longo do ano lectivo, tenham sido as seguintes:

João	Ana
12; 13; 11; 15; 14	10; 16; 13; 15; 11

Em qualquer dos casos, a média das classificações é 13 e, pela simples observação dos dados, parece claro que as classificações da Ana são mais dispersas em relação à média do que as do João.

Para avaliar a dispersão das classificações podemos calcular a média dos desvios do tipo $|x_a - \overline{x}|$. Organizando os dados em tabelas, como podes ver na página seguinte.

x_i (João)	$x_a - \overline{x}$	$\lvert x_a - \overline{x} \rvert$
11	11 – 13 = –2	2
12	12 – 13 = –1	1
13	13 – 13 = 0	0
14	14 – 13 = 1	1
15	15 – 13 = 2	2
Total		6

x_i (Ana)	$x_a - \overline{x}$	$\lvert x_a - \overline{x} \rvert$
10	10 – 13 = –3	3
11	11 – 13 = –2	2
13	13 – 13 = 0	0
15	15 – 13 = 2	2
16	16 – 13 = 3	3
Total		10

$$d_{(\text{João})} = \frac{6}{5} = 1,2 \quad d_{(\text{Ana})} = \frac{10}{5} = 2.$$

Os valores obtidos chamam-se desvios médios e, tal como foi previsto, o desvio médio das classificações da Ana (2) é maior do que o desvio médio das classificações do João (1,2). Este resultado deve-se ao facto do desvio médio aumentar à medida que os valores observados se afastam da média.

Se $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ são os n valores observados de uma variável quantitativa e $\overline{x}$ a sua média, ao valor assim obtido chama-se **desvio médio** e representa-se por **d**.

Para dados não agrupados: $d = \dfrac{\sum_{a=1}^{n} \lvert x_a - \overline{x} \rvert}{n}$;

Para dados agrupados em classes: $d = \dfrac{\sum_{a=1}^{n} f_a \lvert x_a - \overline{x} \rvert}{n}$.

Variância (σ^2)

Seja $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ os n valores de uma variável quantitativa e $\overline{x}$ a sua média. Chama-se **variância** de uma variável à medida da sua dispersão estatística, indicando quão longe em geral os seus valores se encontram do valor esperado, e representa-se por σ^2, valor dado pela fórmula:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{a=1}^{n} (x_a - \overline{x})^2}{n}$$

Exemplo

1. Vamos utilizar novamente os dados das notas do João e da Ana:

$$\sigma^2_{(\text{João})} = \frac{(13-13)^2 + (15-13)^2 + (14-13)^2 + (12-13)^2 + (11-13)^2}{5} = 2$$

$$\sigma^2_{(\text{Ana})} = \frac{(16-13)^2 + (11-13)^2 + (10-13)^2 + (15-13)^2 + (13-13)^2}{5}$$

$$= \frac{3^2 + (-2)^2 + (-3)^2 + 2^2 + 0^2}{5} = \frac{9+4+9+4}{5} = \frac{26}{5} = 5,2$$

Desvio padrão (σ)

O desvio padrão é a raiz quadrada positiva da variância.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{a=1}^{n}(x_a - \overline{x})^2}{n}} \quad \text{ou} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{a=1}^{n} x_a^2}{n} - \overline{x}^2}$$

Exemplo

1. Consideremos as classificações de um certo aluno, Mauro, num certo período:

   13; 12; 11; 13; 15; 15; 16; 17; 14

   Vamos calcular a média:

   $$\overline{x} = \frac{11 + 12 + 2 \times 13 + 14 + 2 \times 15 + 16 + 17}{9} = 14.$$

   Vamos calcular o desvio padrão:

   $$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{a=1}^{n}(x_a - \overline{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{a=1}^{9}(x_a - 14)^2}{9}} = \sqrt{\frac{30}{9}} = \sqrt{\frac{10}{3}} = 1{,}8257.$$

   $\sigma = 1{,}8257 \sim 1{,}8$ (desvio padrão calculado a uma casa decimal).

Cálculo do desvio padrão para dados agrupados

Exemplo

Consideremos a tabela:

Passageiros por autocarro	Número de carros (f_a)
0	18
1	35
2	16
3	24
4	7
Total	100

Para casos como este, em que os dados estão agrupados por repetição, usamos a fórmula:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{a=1}^{m} f_a(x_a - \overline{x})^2}{n}} \quad \text{ou} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{a=1}^{m} f_a \cdot x_a^2}{n} - \overline{x}^2}$$

Para facilitar o uso da fórmula, vamos completar primeiro a tabela:

x_a	f_a	x_a	$f_a x_a$	$f_a x_a^2$
0	18	0	0	0
1	35	1	35	35
2	16	4	32	64
3	24	9	72	216
4	7	16	28	112
Total	100		$\sum f_a x_a = 167$	$\sum f_a x_a^2 = 427$

Logo, $\overline{x} = \dfrac{\sum_{a=1}^{5} f_a \cdot x_a}{100} = \dfrac{167}{100} = 1{,}67$ e $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum_{a=1}^{5} f_a \cdot x_a^2}{100} - 1{,}67^2} = 1{,}2.$

Portanto, cada autocarro transporta em média aproximadamente 1,7 passageiros com um desvio padrão de 1,2 passageiros.

Cálculo do desvio padrão para dados agrupados a partir de intervalos de classes

Exemplo

Um curioso notou que os seus discos de música tocavam durante períodos de tempo diferentes. De seguida, agrupou-os de acordo com os intervalos de tempo seguintes:

Intervalos de tempo	20 – 25	25 – 30	30 – 35	35 – 40	40 – 45
N.º de discos	2	8	13	18	6

Ou seja:

Classes	f_a	x_a	x_a^2	$f_a x_a$	$f_a x_a^2$
20 – 25	2	22,5	506,25	45	1012,5
25 – 30	8	27,5	756,25	220	6050
30 – 35	13	32,5	1056,25	422,5	13731,25
35 – 40	18	37,5	1406,25	675	25312,5
40 – 45	6	42,5	1806,25	255	10837,5
Total	47			$\sum f_a x_a = 1617{,}5$	$\sum f_a \cdot x_a{}^2 = 56943{,}75$

Logo, $\overline{x} = \dfrac{\sum_{a=1}^{5} f_a \cdot x_a}{47} = \dfrac{1617{,}5}{47}$ e $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum f_a \cdot x_a^2}{n} - \overline{x}^2} = \sqrt{\dfrac{56943{,}75}{47} - \left(\dfrac{1617{,}5}{47}\right)^2}$

$= \sqrt{(1211{,}6 - 1184{,}4)} = \sqrt{27{,}2} = 5{,}2.$

O desvio padrão é de 5,2.

Exercícios resolvidos

1. A altura (em cm) de 20 alunos de uma certa turma da 11.ª classe, é:

157 160 162 157 163 162 162 156 165 155

156 164 150 162 158 163 161 148 160 157

1.1 Constrói uma tabela de frequências absolutas e de frequências absolutas acumuladas.

1.2 Quantas alunas medem menos de 150 cm?

1.3 Escreve a percentagem das alunas com a altura de 163 cm.

1.4 Quantas alunas medem mais do que 160 cm?

1.5 Qual é a altura mais comum?

1.6 Escreve em percentagem a frequência relativa referente a 157 cm.

Resolução

1.1

Altura	f_a	F_a
148	1	1
150	1	2
155	1	3
156	2	5
157	3	8
158	1	9
160	2	11
161	1	12
162	4	16
163	2	18
164	1	19
165	1	20
Total	$n = 20$	

1.2 1

1.3 $\frac{2}{20} = 0,1 = 10\%$

1.4 9

1.5 162 cm

1.6 $\frac{3}{20} = 0,15 = 15\%$

Exercícios resolvidos

2. Um certo professor de Matemática deu a mesma ACS a duas turmas diferentes:

Turma 1

10	9	15	9	6
14	15	13	9	6
6	7	6	15	10
10	8	8	7	10
13	9	8	7	8
				9

Turma 2

3	3	6	4	4
6	7	10	2	10
5	5	5	5	6
11	19	17	17	11
20	10	19	20	19
3				

2.1 Constrói uma tabela de frequências para cada uma das turmas.

2.2 Constrói um gráfico de barras num único sistema de eixos para as duas turmas.

2.3 Calcula, em cada turma, a média, a moda e a mediana.

2.4 Faz uma comparação das duas turmas, preenchendo a seguinte tabela:

TURMA	MÉDIA	MODA	MEDIANA
1			
2			

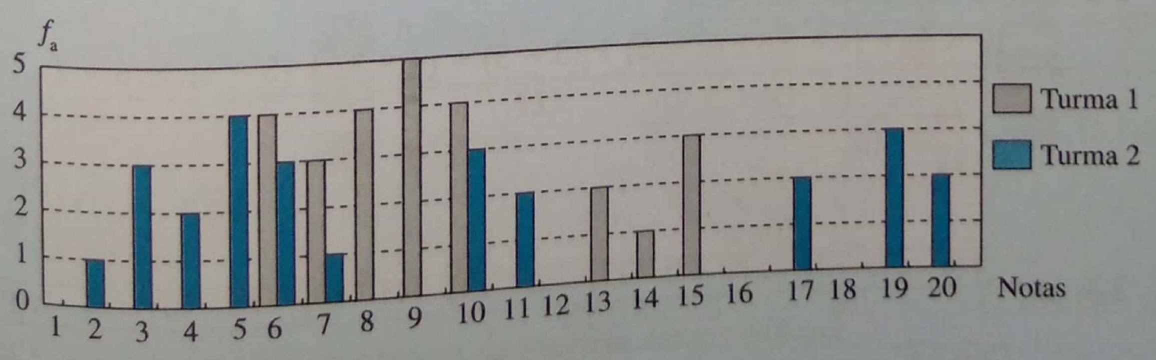
Resolução

2.1

Turma 1	Notas	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	n
	f_a	4	3	4	5	4	0	0	2	1	3	26

Turma 2	Notas	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	n
	f_a	1	3	2	4	3	1	0	0	3	2	
	Notas	12	13	14	15	16	17	18	19	20		
	f_a	0	0	0	0	0	2	0	3	2		26

2.2



2.3 Média turma $1 = \frac{4 \times 6 + 3 \times 7 + 4 \times 8 + 5 \times 9 + 4 \times 10 + 2 \times 13 + 14 \times 3 \times 15}{26} = 9{,}5.$

Média turma 2

$$\bar{x} = \frac{1 \times 2 + 3 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 5 + 3 \times 6 + 1 \times 7 + 3 \times 10 + 2 \times 11 + 2 \times 17 + 3 \times 19 + 2 \times 20}{26}$$

$= 9{,}5.$

Moda turma 1 = 9.

Moda turma 2 = 5.

Mediana turma 1 = 9.

Mediana turma 2 = 6,5.

2.4

TURMA	MÉDIA	MODA	MEDIANA
1	9,5	9	9
2	9,5	6,5	5

3. A distribuição de faltas de alunos duma certa turma de 10.ª classe na disciplina de Biologia é:

N.° de faltas	0	1	2	3	4	5	6
N.° de alunos	4	3	6	5	3	4	2

3.1 Calcula a amplitude das faltas, isto é, a diferença entre valor máximo e mínimo.

3.2 Determina a média.

3.3 Determina o desvio padrão das faltas.

Resolução

3.1 Amplitude = valor máximo – valor mínimo = 6 – 0 = 6.

3.2 Média das faltas

$$\bar{x} = \frac{(0 \times 4) + (1 \times 3) + (2 \times 6) + (3 \times 5) + (4 \times 3) + (5 \times 4) + (6 \times 2)}{27}$$

$$= \frac{74}{27} = 2{,}7.$$

3.3 $\sigma = \sqrt{\frac{(0-2{,}7)^2 + (1-2{,}7)^2 + (2-2{,}7)^2 + (3-2{,}7)^2 + (4-2{,}7)^2 + (5-2{,}7)^2 + (6-2{,}7)^2}{7}}$

$$= \sqrt{\left(\frac{28{,}63}{7}\right)} = \sqrt{4{,}09} = 2{,}022.$$

Exercícios não resolvidos

1. Um estudante contou o número de vogais de uma certa frase e escreveu:

e e o i a a e a a a u i e o a a e o a o i o o i u

Constrói um quadro de frequências absolutas, frequências relativas e frequências relativas percentuais.

2. Em 2008, o consumo de água, em m^3, da família da Joaquina, foi o seguinte:

5; 8; 6; 6; 10; 12; 9; 10; 8; 8; 6; 5

2.1 Constrói uma tabela de frequências absolutas e de frequências absolutas acumuladas.

2.2 Em quantos meses a família de Joaquina gastou menos de 8 m^3?

2.3 E menos de 10 m^3?

3. A média aritmética de 12 avaliações é 9. Qual é a sua soma?

4. Indica a moda e a mediana de cada uma das séries:

4.1 20; 31; 34; 35; 38; 21; 32; 39

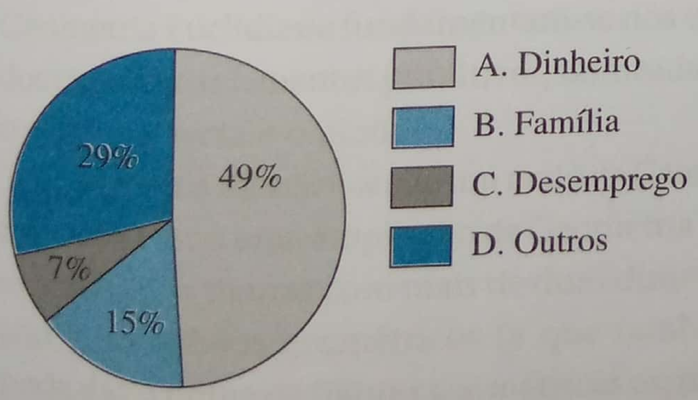
4.2 6; 2; 3; 4; 3; 1

4.3 8; 7; 3; 6; 2; 1; 6

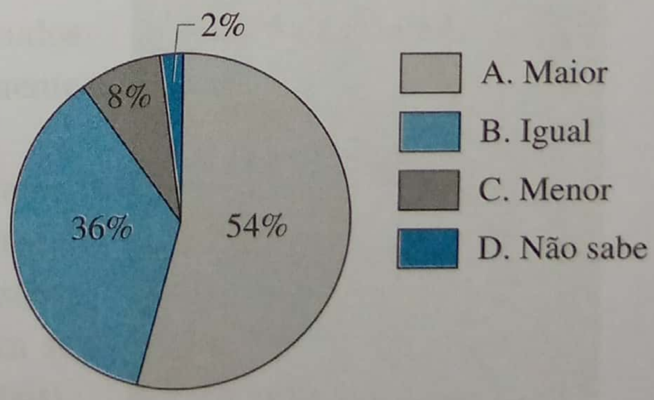
4.4 15; 14; 13; 10; 15; 18; 19; 12; 17; 11

5. Feitos inquéritos a alunos de uma turma de 10.ª classe sobre os seus principais problemas e sobre a maneira como sentem a sua felicidade em relação à dos seus pais, obteve-se:

Principais problemas



Felicidade em relação aos pais



5.1 Qual o principal problema da maioria destes alunos?

5.2 A maioria destes alunos considera-se mais ou menos feliz do que os seus pais?

5.3 Qual é a percentagem de alunos que:

a) Se acham tão felizes como os seus pais?

b) Consideram o desemprego o seu principal problema?

c) Não consideram a família como o seu principal problema?

d) Se acham tanto ou mais felizes do que os seus pais?

e) Afirmam não ter uma felicidade maior do que a dos seus pais?

Geometria espacial

No fim desta unidade, deverás ser capaz de:
- identificar e interpretar relações espaciais;
- desenvolver a visualização e o raciocínio geométrico.

10.1 Introdução

A Geometria, um dos ramos da Matemática, estuda as formas e as propriedades de tudo aquilo que rodeia o ser humano. O seu surgimento deve-se à necessidade que o Homem tinha de compreender o que estava ao seu redor, bem como para resolver problemas do dia-a-dia.

Na Antiguidade, os Egípcios deram um valioso contributo para o desenvolvimento da Geometria. As cheias do Nilo levavam às marcações dos limites das propriedades, pelo que estes tinham de ser definidos todos os anos. A construção de pirâmides e de templos deu também um enorme contributo para o desenvolvimento do conhecimento geométrico.

Na Grécia antiga desenvolveu-se também o estudo da Geometria Plana, também chamada de Geometria Euclidiana em homenagem a Euclides.

Os princípios que nortearam a elaboração da Geometria Euclidiana fundamentam-se nos estudos dos chamados elementos primitivos, nomeadamente o ponto, a recta e o plano.

A Geometria Espacial, sendo um ramo da Geometria, funciona como uma ampliação da Geometria Plana, estudando as figuras com mais de duas dimensões, isto é, os sólidos geométricos (a que também se pode dar o nome de figuras geométricas espaciais), assim como as relações entre eles: por exemplo, o cubo, o paralelepípedo, o prisma, a pirâmide, o cone, a esfera ou o cilindro.

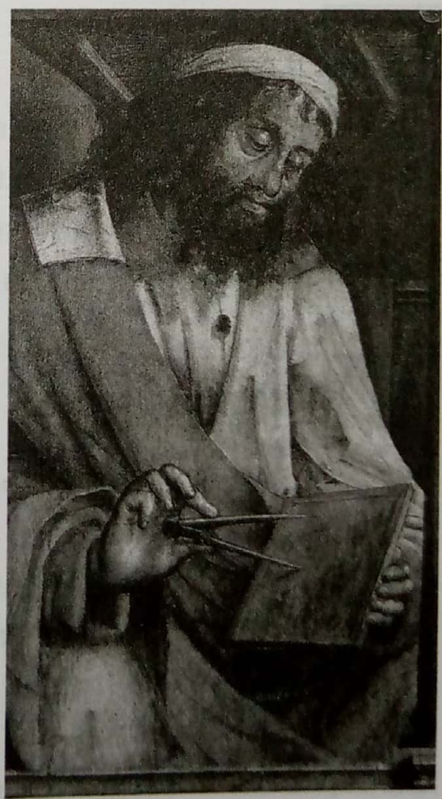


Fig. 1 Euclides de Alexandria, matemático grego, viveu entre os séculos IV e III a. C.

10.2 Conceitos primitivos

Vamos começar por fazer referência a conceitos fundamentais, chamados conceitos primitivos, nomeadamente, os conceitos de ponto, recta e plano.

10.2.1 O ponto

O ponto é um objecto geométrico que pode fazer parte de uma recta, plano ou espaço. O ponto não tem volume, comprimento nem área. Diz-se que o ponto é um objecto geométrico de dimensões nulas.

Euclides definiu o ponto como «aquilo que não tem parte».

O ponto é designado, normalmente, por letras maiúsculas: A, B, C, etc.

Fig.2 Representação de um ponto A.

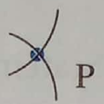


Fig. 3 Ponto P como intersecção de duas linhas curvas.

Fig. 4 Ponto R como intersecção de duas linhas rectas.

O ponto pode ser o resultado da intersecção de duas rectas ou de duas linhas curvas.

10.2.2 A recta

A recta é um objecto geométrico uni-dimensional, sem curvatura, que se estende infinitamente mas que não tem largura nem espessura. A recta contém infinitos pontos. Geralmente, a recta é designada por letras minúsculas: a, b, c, etc.

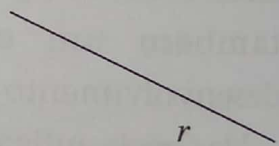


Fig. 5 Representação de uma recta r.

10.2.3 O plano

O plano é um objecto geométrico bi-dimensional de superfície com largura e comprimentos infinitos, mas espessura e curvatura nulas. O plano contém pontos e rectas definidos por quaisquer dois pontos nesse plano.

Um plano pode ser caracterizado por qualquer uma das seguintes situações:

- três pontos não colineares, isto é, que não pertencem à mesma recta;
- um ponto e uma recta que não contém o ponto;
- um ponto e um segmento de recta que não contém o ponto;
- duas rectas paralelas;
- duas rectas concorrentes, isto é, cuja intersecção é um ponto.

O plano, normalmente, é designado por letras minúsculas do alfabeto grego: α, β, etc.

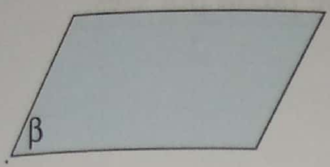


Fig. 6 Plano β.

10.3 Postulados

A Geometria baseia-se em dois tipos de afirmações:

- por um lado, temos as afirmações chamadas **postulados ou axiomas**. Os postulados são afirmações que são aceites como verdadeiros e não necessitam de demonstração;
- por outro lado, existem os **teoremas**, que são afirmações que necessitam de demonstração. Os postulados são utilizados para demonstrar a veracidade dos teoremas. Vamos apresentar alguns postulados.

10.3.1 Postulados de existência

P1. Numa recta, e fora dela, existe um número infinito de pontos.

Observação: se um conjunto de pontos pertence a uma recta diz-se que eles são **colineares**. Assim, os pontos A, B e C são colineares e os pontos D e E não são colineares.

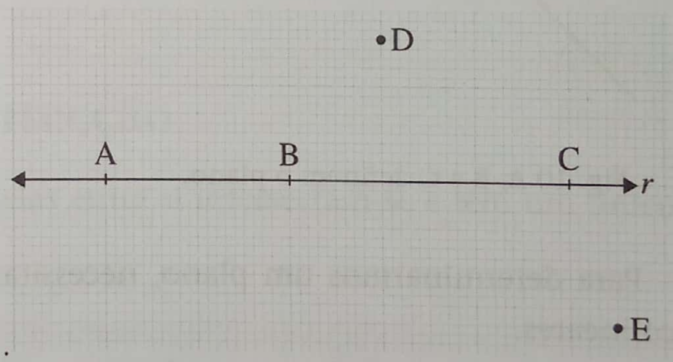


Fig. 7 Os pontos A, B e C pertencem à recta r ($A \in r$, $B \in r$, $C \in r$, $D \notin r$ e $E \notin r$).

P2. Num plano, e fora dele, há um número infinito de pontos.

Observação: se um conjunto de pontos pertence a um mesmo plano, diz-se que são **coplanares**. Assim, os pontos A, B e C são coplanares e os pontos D, E, F e G não são coplanares.

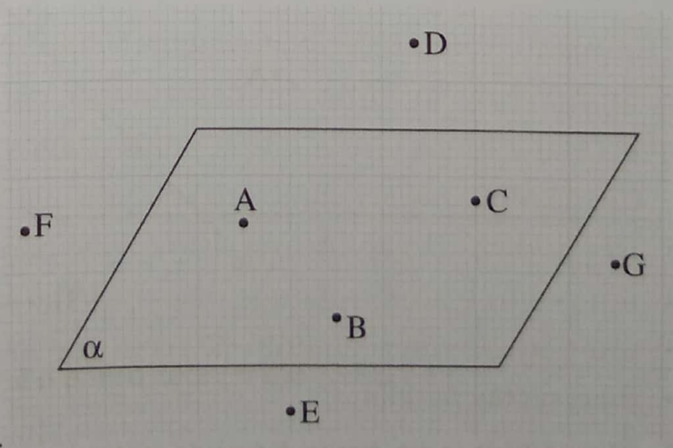


Fig. 8 Os pontos A, B e C pertencem ao plano α ($A \in \alpha$, $B \in \alpha$, $C \in \alpha$, $D \notin \alpha$ e $E \notin \alpha$, $F \notin \alpha$ e $G \notin \alpha$).

10.3.2 Postulados de determinação

P3. Dois pontos distintos determinam uma única recta que passa por eles.

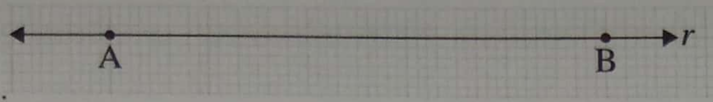


Fig. 9 A e B são dois pontos da recta *r*.

A e B são dois pontos distintos, sendo $A \in r$ e $B \in r$.
Logo, os pontos A e B determinam a recta *r* e esta é única.

P4. Três pontos não colineares determinam um plano.

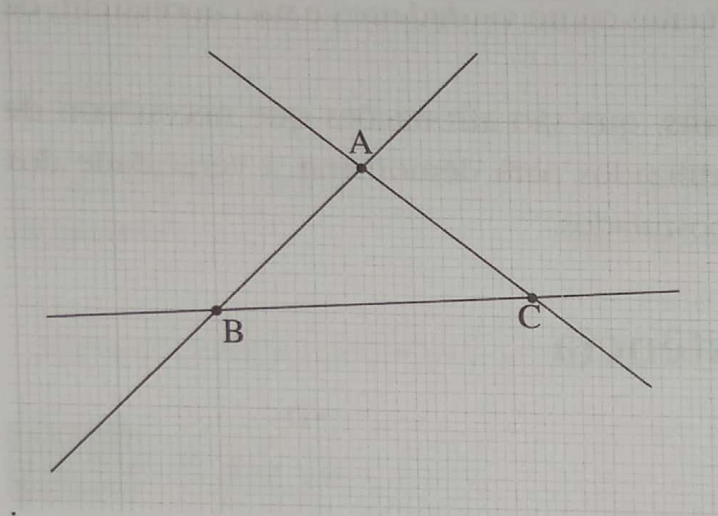


Fig. 10 A, B e C definem o plano.

Para determinarmos um plano, necessitamos de pelo menos três pontos não colineares.

Existem outras três formas de determinar um plano e são:

- uma recta e um ponto fora dela;
- duas rectas concorrentes;

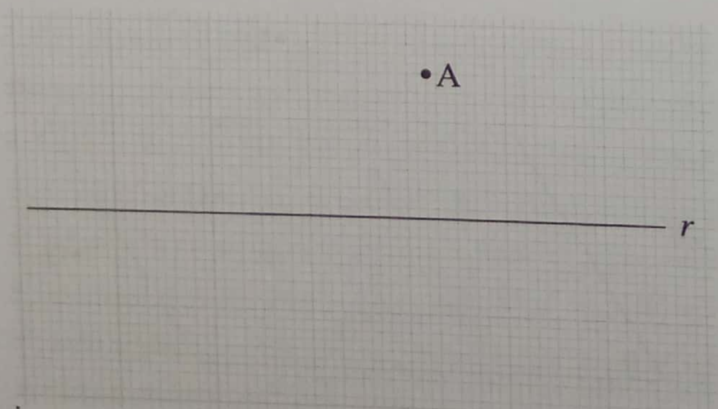


Fig. 11 Recta *r* e o ponto A fora da recta.

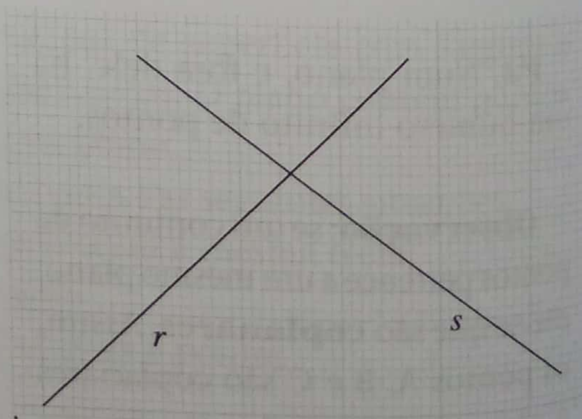


Fig. 12 Recta *r* e *s* concorrentes.

- duas rectas paralelas não coincidentes.

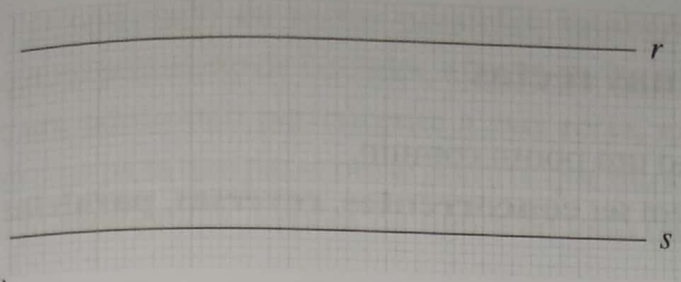


Fig. 13 Recta r e s paralelas.

10.3.3 Postulado de inclusão

P5. Se dois pontos distintos A e B de uma recta pertencem a um plano α, então todos os pontos dessa recta pertencem ao plano α.

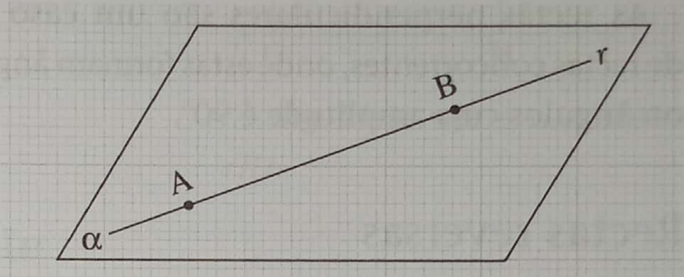


Fig. 14 Os pontos A e B pertencem ao plano α.

10.3.4 Postulado de intersecção

P6. Duas rectas distintas não paralelas entre si intersectam-se e têm um único ponto em comum.

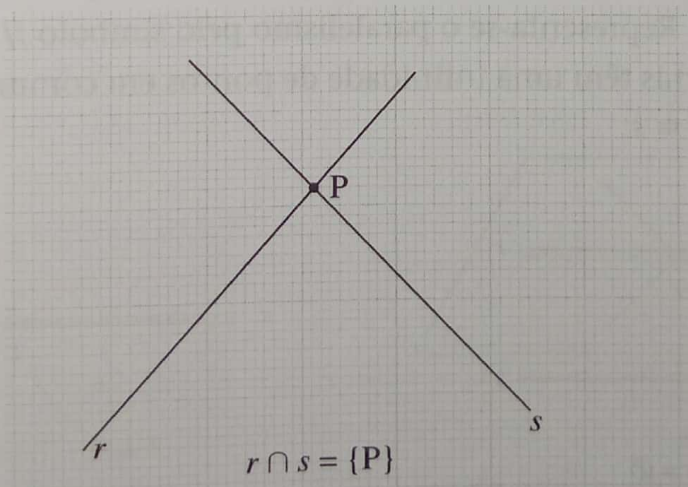


Fig. 15 O ponto P é o ponto comum das rectas r e s.

10.4 Posição relativa de rectas e planos

10.4.1 Posição relativa de duas rectas

Duas rectas distintas têm no máximo um ponto comum.

No espaço, duas rectas distintas podem ser **concorrentes, reversas, paralelas** ou **coincidentes.**

Rectas concorrentes

As rectas concorrentes definem-se como rectas que se intersectam num único ponto.

As rectas perpendiculares são um caso particular de rectas concorrentes, onde estas formam ângulos rectos ou ângulos cuja amplitude é 90º.

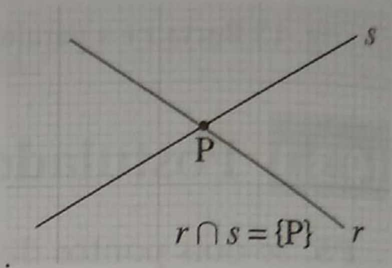


Fig. 16 As rectas *r* e *s* intersectam-se no ponto P.

Rectas reversas

Diz-se que duas rectas são reversas entre si quando não existe nenhum plano que contenha ambas as rectas.

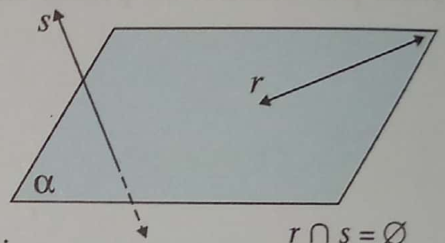
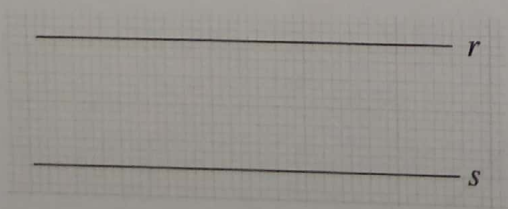


Fig. 17 As rectas *r* e *s* não são coplanares e não se intersectam.

Rectas paralelas e rectas coincidentes

Rectas paralelas são rectas que não se intersectam, isto é, que não possuem nenhum ponto em comum. Representa-se o paralelismo pelo símbolo //.

Quando duas rectas têm uma infinidade de pontos em comum, então diz-se que são coincidentes: $r \equiv s$.



$r \,//\, s$
ou $r \cap s = \varnothing$

Fig. 18 Rectas *r* e *s* paralelas.

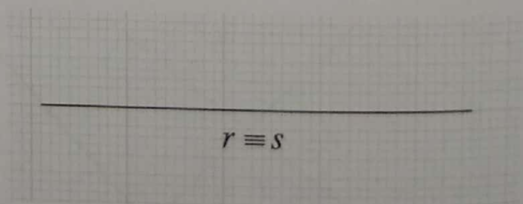


Fig. 19 Rectas *r* e *s* coincidentes.

Postulado de rectas paralelas

O postulado de rectas paralelas, também chamado quinto postulado de Euclides, afirma: dada qualquer recta e um ponto não pertencente a essa recta, existe uma e só uma recta que passa nesse ponto e que nunca intersecta a primeira recta. Repara na figura ao lado (Fig. 20).

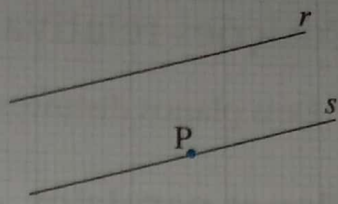


Fig. 20 Na recta s, existe um ponto $P \in s$, tal que $s // r$ e s é único.

Paralelismo

Duas rectas paralelas a uma terceira recta são paralelas entre si. Observa a figura ao lado (Fig. 21).

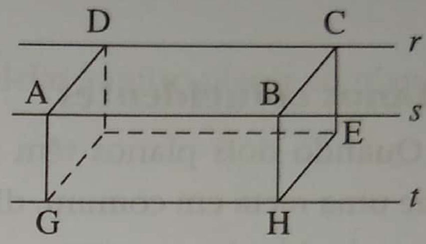


Fig. 21 Se $r // s$ e $s // t$, então $r // t$.

10.4.2 Perpendicularidade

Quaisquer duas rectas que sejam perpendiculares entre si formam um ângulo recto, ou seja, um ângulo cuja amplitude é de 90 graus.

As rectas r e s são perpendiculares (Fig. 22). A perpendicularidade representa-se pelo símbolo $\perp$. Assim, na figura, $r \perp s$.

Uma recta concorrente com um plano, num determinado ponto, é perpendicular ao plano se é perpendicular a todas as rectas do plano que passam por esse ponto (Fig. 23).

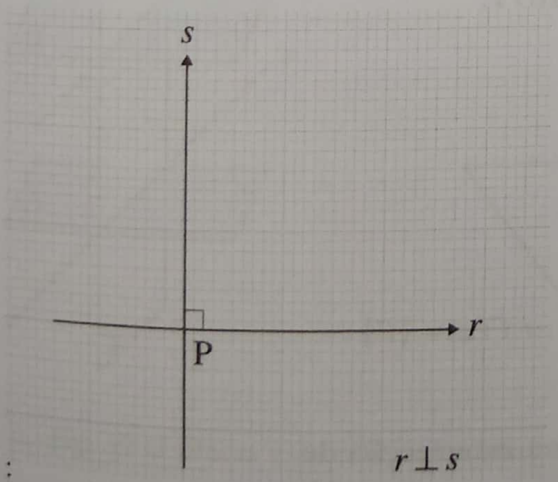


Fig. 22 Rectas s e r perpendiculares, formando um ângulo recto.

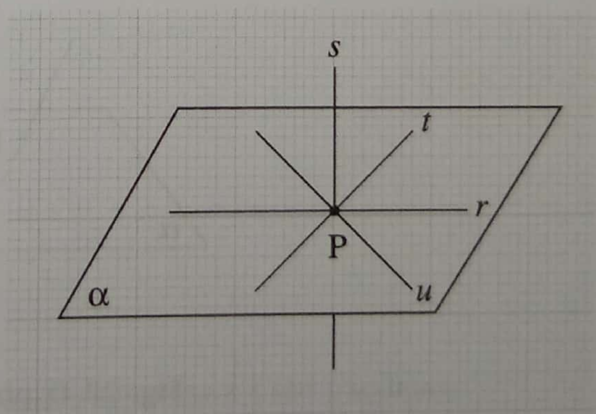


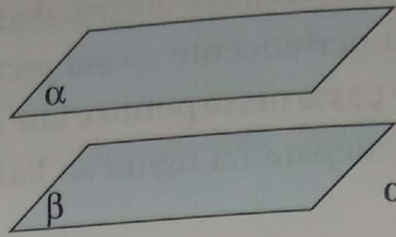
Fig. 23 Recta s concorrente ao plano α e perpendicular às rectas t, r e u.

Posições relativas de dois planos

Dois planos distintos podem ser paralelos, coincidentes ou secantes.

Planos paralelos

Diz-se que dois planos, α e β, são paralelos quando a sua intersecção é o conjunto vazio.



$\alpha \cap \beta = \varnothing \Rightarrow \alpha // \beta$

Fig. 24 Os planos α e β, são paralelos.

Planos coincidentes

Quando dois planos têm mais do que uma recta em comum, diz-se que são coincidentes.

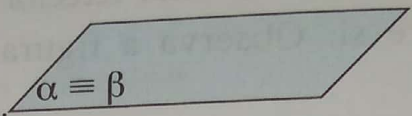
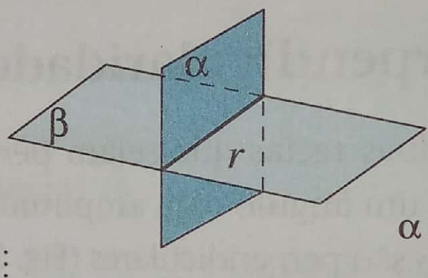


Fig. 25 Os planos α e β são coincidentes.

Planos concorrentes ou secantes

Diz-se que dois planos, α e β, são concorrentes quando a sua intersecção é uma recta.



$\alpha \cap \beta = r$

Fig. 26 Os planos α e β são concorrentes.

Posição relativa entre recta e plano

Uma recta e um plano podem intersectar-se de acordo com as condições seguintes:

- A recta r intersecta o plano α num único ponto P.

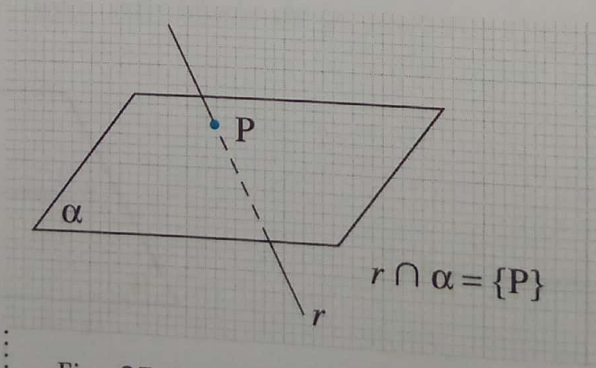


Fig. 27 O ponto P e a intersecção do plano α com a recta r.

- A recta r está contida no plano α.

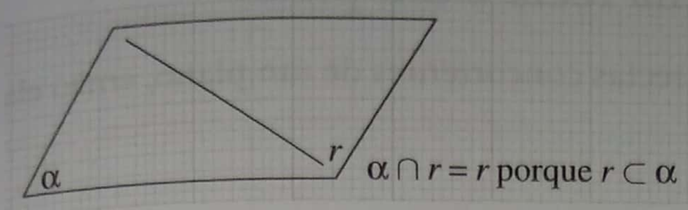


Fig. 28 A recta r está contida no plano α.

Critérios de paralelismo entre planos

- Se um plano contém duas rectas concorrentes paralelas a outro plano, os planos são paralelos.

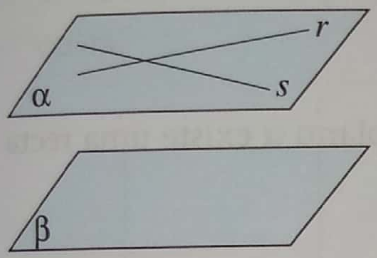


Fig. 29 As rectas r e s do plano α são concorrentes e paralelas ao plano β, por isso os planos α e β são paralelos.

- Se um plano intersecta dois outros planos, as rectas de intersecção são paralelas.

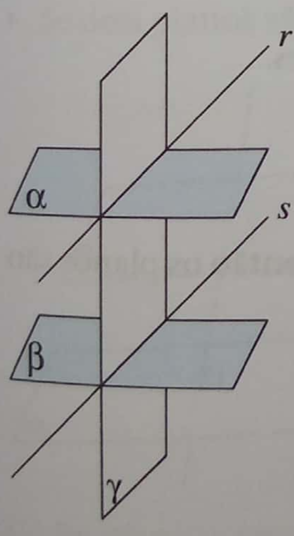


Fig. 30 O plano γ intersecta os planos α e β, logo as rectas r e s são paralelas.

Perpendicularidade entre uma recta e um plano

Se uma recta é perpendicular a duas rectas concorrentes de um plano, então ela é perpendicular ao plano.

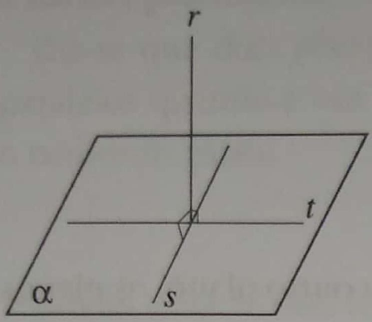


Fig. 31 A recta *r* é perpendicular às rectas *s* e *t* do plano α, por isso a recta *r* é perpendicular ao plano α.

Perpendicularidade entre dois planos

Diz-se que dois planos α e β são perpendiculares se no plano α existe uma recta *r* perpendicular ao plano β e vice-versa.

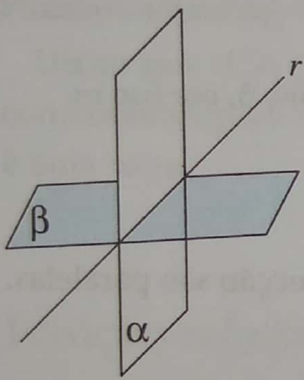


Fig. 32 Os planos α e β são perpendiculares.

Critérios de perpendicularidade

- Se num plano existe uma recta perpendicular a outro plano, então os planos são perpendiculares.

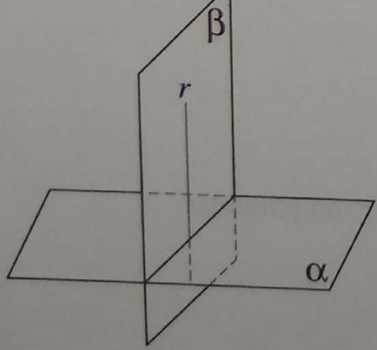
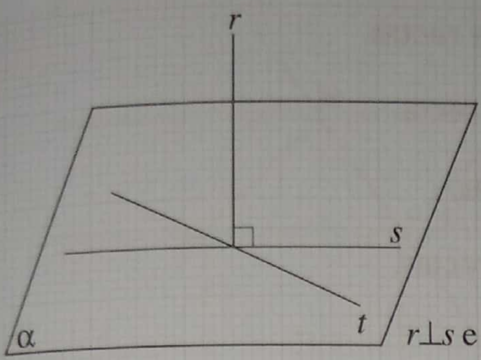


Fig. 33 A recta *r* é perpendicular ao plano α, por isso, os planos α e β são perpendiculares.

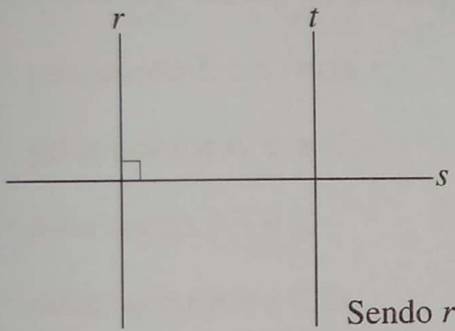
- Se uma recta é perpendicular a duas rectas concorrentes de um plano, então é perpendicular ao plano.



$r \perp s$ e $r \perp t$, logo $r \perp \alpha$

Fig. 34 A recta r é perpendicular às rectas s e t do plano. Por isso, é perpendicular ao plano α.

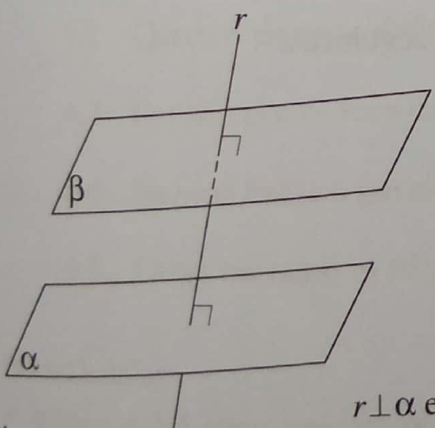
- Se duas rectas são perpendiculares, toda a recta paralela a uma é perpendicular à outra.



Sendo $r \perp s$ e $t \,//\, r$, então $t \perp s$

Fig. 35 A recta s e perpendicular à recta r e t.

- Se dois planos são perpendiculares à mesma recta, então os planos são paralelos.



$r \perp \alpha$ e $r \perp \beta \perp\Rightarrow \alpha \,//\, \beta$

Fig. 36 Os planos α e β são perpendiculares à recta r.

Exercícios resolvidos

1. Assinala com V as afirmações verdadeiras e com F as afirmações falsas:

1.1 Por um ponto passa um número infinito de rectas.

1.2 Por dois pontos distintos passa uma única recta.

1.3 Três pontos distintos são sempre colineares.

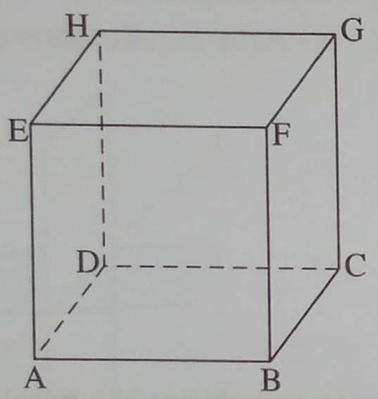
1.4 Um plano contém um número infinito de rectas.

1.5 Duas rectas coplanares são concorrentes.

Resolução

1.1 V 1.2 V 1.3 F 1.4 V 1.5 F

2. A figura a seguir é um cubo.



Classifica como verdadeiras ou falsas as afirmações seguintes:

2.1 As rectas AE e BF são reversas.

2.2 As rectas BC e CG são perpendiculares.

2.3 As rectas BF e AE são paralelas.

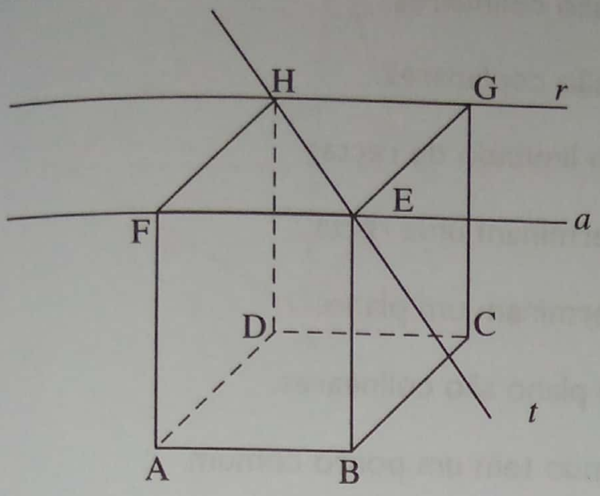
2.4 Os pontos A, B, C e D são coplanares.

2.5 Os pontos B e H são colineares.

Resolução

2.1 F 2.2 V 2.3 V 2.4 V 2.5 F

3. De acordo com a figura seguinte, indica quatro diferentes formas de definir o plano α.



Resolução

O plano α pode ser definido, por exemplo:

- pelo ponto E e a recta *r*;
- pelos pontos A, B e C;
- pelas rectas AB e *s*;
- pelas rectas AB e CD.

4. Diz, justificando, quais das seguintes afirmações são falsas:

4.1 Duas rectas coplanares podem ser perpendiculares.

4.2 Quatro pontos definem sempre quatro pontos.

4.3 Por um ponto fora de uma recta passa uma única recta paralela a uma recta dada.

4.4 Se uma recta é paralela a um plano, ela é paralela a todas as rectas desse plano.

4.5 Duas rectas que não se intersectam definem um plano.

Resolução

A alínea 4.2 é falsa, pois os quatro pontos podem pertencer a um mesmo plano.
A alínea 4.4 é também falsa porque se uma dada recta *r* é paralela a uma recta *s* de um plano, *r* não é paralela às rectas concorrentes com *s* num ponto.

Exercícios não resolvidos

1. Assinala com V as afirmações verdadeiras e com F as afirmações falsas:

   1.1 Todos os pontos de uma recta são colineares.

   1.2 Todos os pontos de uma recta são coplanares.

   1.3 Por um ponto passa um número limitado de rectas.

   1.4 Três pontos não colineares determinam uma recta.

   1.5 Três pontos não colineares determinam um plano.

   1.6 Todos os pontos de um mesmo plano são colineares.

   1.7 Duas rectas são coplanares quando tem um ponto comum.

   1.8 Duas rectas paralelas são sempre coplanares.

   1.9 Se duas rectas têm um único ponto comum, então elas são concorrentes.

2. Observa a figura ao lado.

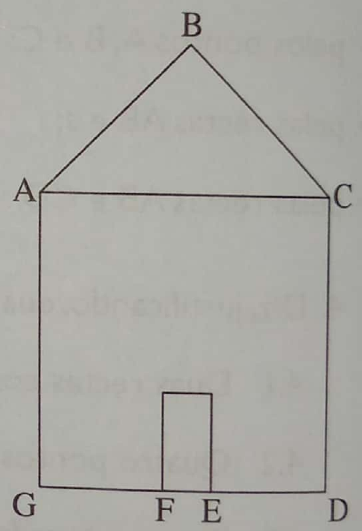
   Assinala com V as proposições verdadeiras e com F as proposições falsas:

   2.1 Os pontos A, B e C são coplanares.

   2.2 Os pontos A, B e C são colineares.

   2.3 Os pontos D, E, F e G são colineares.

   2.4 Os pontos A, B, C, D, E, F e G são coplanares.



3. Assinala com V as proposições verdadeiras e com F as proposições falsas:

   3.1 Se uma recta é perpendicular a um plano, então ela é perpendicular a todas as rectas desse plano.

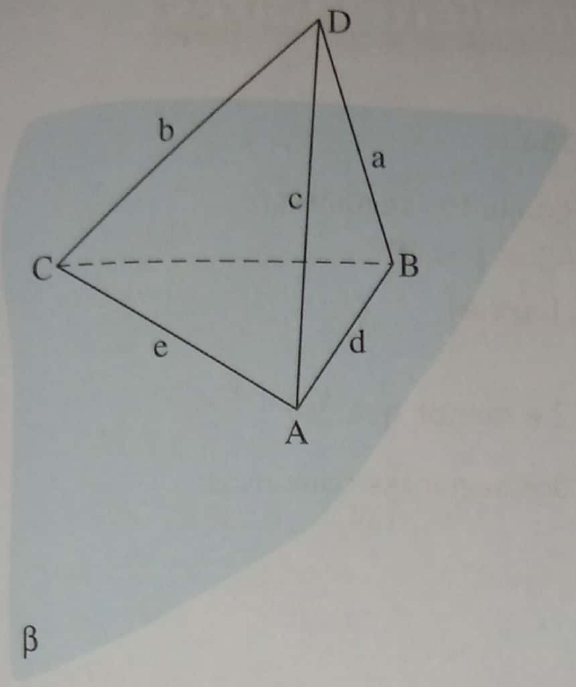
   3.2 Se duas rectas são perpendiculares a um mesmo plano, elas são paralelas entre si.

   3.3 Dois planos perpendiculares entre si são secantes.

   3.4 Se dois planos distintos são perpendiculares a um plano dado, então eles são paralelos entre si.

4. Observa a figura:

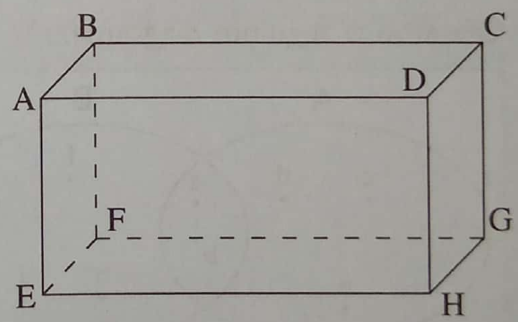
Exercícios não resolvidos



Determina:

4.1 $a \cap d$ 4.2 $d \cap \beta$ 4.3 $c \cap \beta$ 4.4 $b \cap d$

5. Sejam *r*, *s* e *t* três rectas no espaço, tais que $r \perp s$ e $t \perp r$. O que se pode dizer da posição relativa das rectas s e *t*?



6. Considera a figura ao lado.

Indica:

6.1 duas rectas paralelas;

6.2 duas rectas concorrentes;

6.3 uma recta perpendicular a base;

6.4 dois planos concorrentes;

6.5 dois planos paralelos;

6.6 dois planos perpendiculares;

6.7 duas rectas nao coplanares.

7. Tendo em atenção a figura do exercício anterior, indica diferentes formas de definir o plano que contém a face [ABEF].

Exercícios complementares

▶ Unidade 1: Teoria de conjuntos

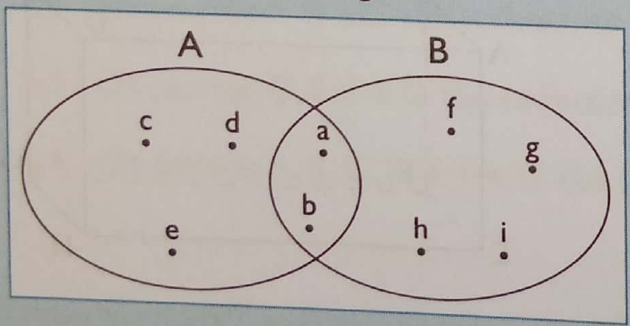
1. Representa em extensão cada um dos conjuntos seguintes:
   1.1 $\{x: x$ é um número inteiro tal que $-3 < x \leq 7\}$
   1.2 $\{x: x$ é um mês que começa com a letra A$\}$
   1.3 $\{x: x$ é a capital de Moçambique$\}$
   1.4 $\{x: x$ é número primo maior que 12 e menor que 30$\}$

2. Representa em compreensão cada um dos seguintes conjuntos:
   2.1 {a, e, i, o, u}
   2.2 {Sofala, Manica, Tete, Zambézia}
   2.3 {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19}
   2.4 {2, 4, 8, 16, 32, 64}

3. Determina o conjunto X, tal que: $\{a,b,c,d\} \cup X = \{a,b,c,d,e\}$.

4. Dados os conjuntos $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3,4\}$ e $C = \{1,3,4,5\}$, determina:
   4.1 $(A \cap B \cap C)$
   4.2 $(A - C) \cup (C - B)$
   4.3 $(A - C) \cup (C - B) \cup (A \cap B \cap C)$

5. Observa o seguinte diagrama.



O número de elementos do conjunto A é 5, logo, $n(A) = 5$.

Determina:
5.1 $n(B)$
5.2 $n(A \cup B)$
5.3 $n(A \cap B)$

Exercícios complementares

6. Dados os conjuntos A = {x: x é um número inteiro, tal que $-3 < x < -3$} e B = {x: x é solução da equação $x^2 - 4 = 0$}, determina:
   6.1 $n(A \cup B)$
   6.2 $n(A \cap B)$
   6.3 $(A \cup B) \cap A$
   6.4 $(A \cap B) \cup A$
   6.5 $A \backslash B \cap B \backslash A$

7. Dados os conjuntos A = {a, b}, B = {a, c, d} e C = {a, b, c, d}, classifica como verdadeiras (V) ou falsas (F) cada uma das afirmações seguintes:
   7.1 $A \subset B$
   7.2 $\{b\} \not\subset A$
   7.3 $A \subset C$
   7.4 $B \in C$
   7.5 $B \subset C$
   7.6 $\{a, c\} \in B$
   7.7 $(A \cap B) \subset C$

8. Considera os conjuntos P = {x: x é um polígono}, Q = {x: x é um quadrilátero} e T = {x: x é um triângulo}. Classifica as seguintes afirmações como verdadeiras (V) ou falsas (F):
   8.1 $Q \cap T = \varnothing$
   8.2 $P \subset Q$
   8.3 $Q \subset T$
   8.4 $Q \not\subset T$
   8.5 $P \cap T$ = {x: x é um triângulo}
   8.6 $P \cup Q$ = {x: x é um quadrilátero}

9. Sejam A, B e C subconjuntos do conjunto dos números naturais, tais que $A = \{x: x \geq 5\}$, $B = \{x: x < 8\}$ e $C = \{x: 5 \leq x \leq 8\}$.
   Determina em extensão os seguintes conjuntos:
   9.1 $(A \cup B) \cap C$
   9.2 $(A \cap B) \cup C$
   9.3 $A \cup (B \cap C)$

Exercícios complementares

10. No universo dos triângulos, considera:

A = {x: x é um triângulo isósceles}

B = {x: x é um triângulo equilátero}

Determina:

10.1 O complementar de A em relação a B.

10.2 O complementar de B em relação a A.

11. No universo dos números naturais considera os conjuntos:

A = {x: x é divisor de 30};

B = {x: x é divisor de 12};

C = {x: x é divisor de 20}.

Determina:

11.1 B\A

11.2 A\B

11.3 A\(B\C)

11.4 (A\B) ∩ C

12. No universo dos números naturais, considera os conjuntos:

A = {x: x é múltiplo de 3 menor que 16}

B = {x: x é múltiplo de 6 maior que 10 e menor que 37}

C = {x: x é múltiplo de 9 menor que 55}

Determina o conjunto dos múltiplos comuns de:

12.1 A e B

12.2 A e C

12.3 B e C

12.4 A, B e C

13. Numa escola, 100 alunos praticam voleibol, 150 futebol, 20 as duas modalidades e 110 alunos nenhuma das modalidades. Qual é o número total de alunos?

14. Num seminário organizado pelo Ministério da Educação, 29 dos 65 professores ensinam Português, 17 ensinam Inglês e 9 ensinam as duas línguas. Quantos professores não ensinam nem Português nem Inglês?

15. Dos 390 alunos da 10.ª classe de uma escola, 102 inscreveram-se para as Olimpíadas de Matemática, 97 para as Olimpíadas de Física e 57 inscreveram-se para ambas as Olimpíadas. Quantos alunos não se inscreveram em nenhuma das Olimpíadas?

Exercícios complementares

Unidade 2: Equações quadráticas paramétricas simples

1. Considera a equação $3x^2 - 6x - k = 0$.
   1.1 Resolve-a para $k = 0$.
   1.2 Determina os valores de k de modo a que a equação tenha duas raízes reais e distintas.

2. Determina valores de k na equação $x^2 - 6x + k = 0$, de modo a que a equação tenha duas raízes reais iguais.

3. Que valores pode tomar m para que a equação $x^2 + 4x + 2m = 0$:
   3.1 não tenha raízes reais;
   3.2 tenha raízes reais e iguais.

4. Calcula m de modo a que a equação $x^2 + (m - 1)x + 2 = 0$ tenha raízes reais iguais.

5. Considera a equação $px^2 + 4x + 4 = 0$.
   5.1 Resolve-a para $p = 1$.
   5.2 Determina os valores do parâmetro p para os quais a equação admite:
      a) raízes reais e diferentes;
      b) uma só raiz.

6. Determina para que valores as raízes da equação $4x^2 - 3m^2x + mx - 2$ são simétricas.

7. Determina m na equação $(m + 2)x^2 - 7x + 2m = 0$, de modo a que uma das raízes seja igual a 2.

8. Considera a equação em x: $x^2 - 4x + p = 0$ e p um parâmetro real.
   Determina o valor de p, de modo a que a equação tenha:
   8.1 duas soluções reais;
   8.2 uma solução única.

9. Na equação $x^2 + 2mx + (m + 2) = 0$, determina os valores do parâmetro m de forma a que a equação tenha soluções reais positivas.

Exercícios complementares

▶ Unidade 3: Equações biquadradas

1. Calcula o valor de x na equação $(3x^2 - 1)(7x^2 + 2) = 0$.

2. Resolve as seguintes equações:
   2.1 $(2x - 1)^4 = 4$
   2.2 $(2x - 1)^4 = 9$
   2.3 $x^4 - 2a^2x^2 + a^4$ (em ordem a x)
   2.4 $x^2 - 2 = \dfrac{2}{x^4 - 1}$
   2.5 $x^4 - 5x^2 + 10$

3. Escreve a equação biquadrada que admite as raízes:
   3.1 1 e (-3)
   3.2 1 e 4
   3.3 $-\dfrac{1}{3}$ e $\dfrac{1}{2}$
   3.4 $-3a; -\dfrac{1}{2}a; \dfrac{1}{2}a$ e $3a$
   3.5 $-2; -\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}$ e 2

4. Simplifica as fracções:
   4.1 $\dfrac{36x^4 - 13x^2 + 1}{\left(x^2 + \dfrac{1}{6}\right)\left(x - \dfrac{1}{2}\right)}$
   4.2 $\dfrac{36x^4 - 13x^2 + 1}{x^4 - \dfrac{2}{9}x^2 + \dfrac{1}{81}}$

5. Calcula:
   5.1 a diferença entre as duas raízes negativas da equação:
   $4x^2 - 17x^2 + 4 = 0$
   5.2 a soma entre a maior e a menor raiz da equação:
   $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$
   5.3 o produto das raízes inteiras da equação:
   $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$

Exercícios complementares

Unidade 4: Função quadrática

1. Determina o valor de m para que a expressão $f(x) = (4 + m)x^2 + 2x$ descreve uma função quadrática.

2. Seja $f(x) = -x^2 + x + 6$.

   2.1 Determina os zeros da função.

   2.2 Calcula $f(-3)$, $f(0)$, $f(1)$ e $f(\frac{1}{2})$.

   2.3 Determina o sinal da função no intervalo $[0, 5]$.

3. Dada a função $f(x) = \frac{x^2}{2} - 3x + 4$, determina:

   3.1 $f(-3)$ 3.2 $f(0)$ 3.3 $f(-1)$ 3.4 $f(\frac{1}{2})$ 3.5 $f(-2)$

   3.6 $f(1)$ 3.7 $f(-\frac{1}{4})$ 3.8 $f(\sqrt{2})$ 3.9 $f(5)$

4. Sabendo que -2 e 3 são raízes de uma função quadrática e o ponto $(-1, 8)$ pertence ao gráfico dessa função, qual é o valor do seu máximo?

5. Considera a função $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

   5.1 Determina, através do gráfico, o conjunto dos valores de x para os quais a função é:

   a) positiva;

   b) negativa.

   5.2. Indica:

   a) as coordenadas do vértice;

   b) a equação do eixo de simetria;

   c) o contradomínio da função;

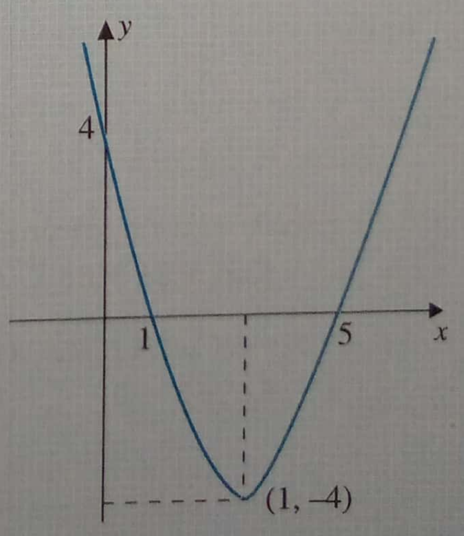
   d) os zeros da função.

6. Observa o gráfico ao lado.

   6.1 Determina, através do gráfico, o conjunto dos valores de x para os quais a função é:

   a) positiva;

   b) negativa.



Exercícios complementares

6.2 Indica:

a) as coordenadas do vértice;

b) a equação do eixo de simetria;

c) o contradomínio da função;

d) os zeros da função.

6.3 Determina a expressão analítica da função representada pelo gráfico.

7. Estuda a variação da função (monotonia) e a variação do sinal das seguintes funções:

7.1 $f(x) = -3x^2 + 7x - 2$

7.2 $f(x) = 7x^2 + 6x - 1$

7.3 $f(x) = -x^2 + 4x - 3$

8. Esboça os gráficos das funções a seguir usando papel milimétrico.

8.1 $f(x) = x^2 - 2x + 1$

8.2 $f(x) = -3x^2 + 4x - 1$

8.3 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$

9. Indica a(s) opção(ões) verdadeira(s) que completa(m) a seguinte frase:

O gráfico da função real $f(x) = 4 - x^2$…

a) … intersecta o eixo dos x no ponto $(1, 0)$.

b) … intersecta o eixo dos x no ponto $(0, 1)$.

c) … intersecta o eixo dos x no ponto $(2, 0)$.

d) … intersecta o eixo dos x no ponto $(0, -2)$.

e) … não intersecta o eixo dos x.

Exercícios complementares

Unidade 5: Inequações quadráticas

1. Determina valores reais de x que satisfazem as seguintes condições:
   1.1 $\frac{x^2+1}{15}-\frac{x-2}{15}\geq 0$
   1.2 $-x^2-2x+3\leq 0$
   1.3 $2x^2-9x-56>0$
   1.4 $x^2-2x-3>2x-3$
   1.5 $-12\leq -3x^2\leq -3$
   1.6 $x-2\geq \frac{2}{x-1}$ (com $x\neq 1$)
2. Resolve analiticamente as inequações:
   2.1 $-x^2+x+6>0$
   2.2 $x^2-3x-10\leq 0$
   2.3 $x^2+6x+8>3x^2+14x-16$
3. Resolve graficamente as inequações:
   3.1 $x^2+6x-7\leq 0$
   3.2 $x^2-2x-3>2x-3$
4. Quantos números inteiros e positivos satisfazem a inequação $\frac{x^2-2}{x}\leq 1$, com $x\neq 0$?

Exercícios complementares

▶ Unidade 6: Função exponencial

1. Indica a(s) opção(ões) verdadeira(s) que completam a seguinte frase:
   As funções $y = a^x$ e $y = b^x$ com $a > 0$ e $b > 0$ e $a \neq b$ têm gráficos que se interceptam em…
   a) …apenas um ponto.
   b) …2 pontos.
   c) … 3 pontos.
   d) … 4 pontos.
   e) …nenhum ponto.

2. Indica o valor de cada uma das seguintes funções exponenciais para $x = 4$ e $x = -2$.
   2.1 $y = 2^x$
   2.2 $y = 3^{-x}$
   2.3 $y = 4^x$
   2.4 $y = 2^x - 1$

3. Das seguintes funções exponenciais, assinala as que são crescentes.
   a) $f(x) = 5^{-x}$
   b) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
   c) $f(x) = (0,1)^x$
   d) $f(x) = 5^x$
   e) $f(x) = (0,5)^x$
   f) $f(x) = 100^x$

4. Considera a função $f(x) = 2^x$. Determina os valores de x para os quais a função é:
   4.1 2
   4.2 4
   4.3 16
   4.4 0,25
   4.5 64
   4.6 128
   4.7 1024

5. Faz o esboço gráfico das seguintes funções exponenciais.
   5.1 $f(x) = 3^x$
   5.2 $y = 2^{x+1}$
   5.3 $f(x) = 1 + 2^x$

Exercícios complementares

6. Observa os gráficos seguintes:

Gráfico 1

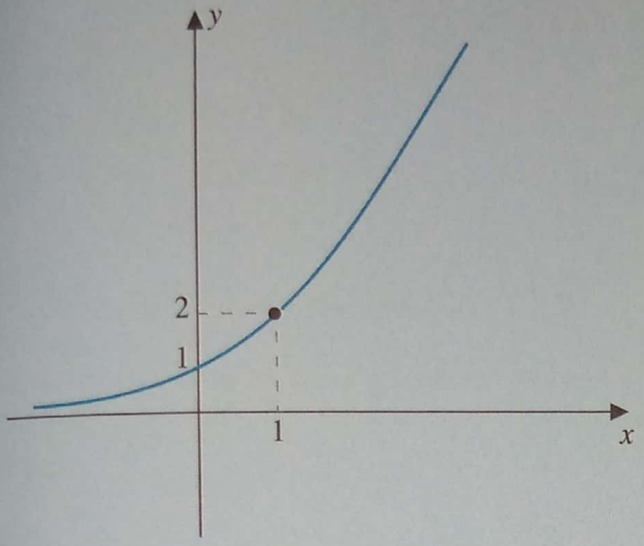
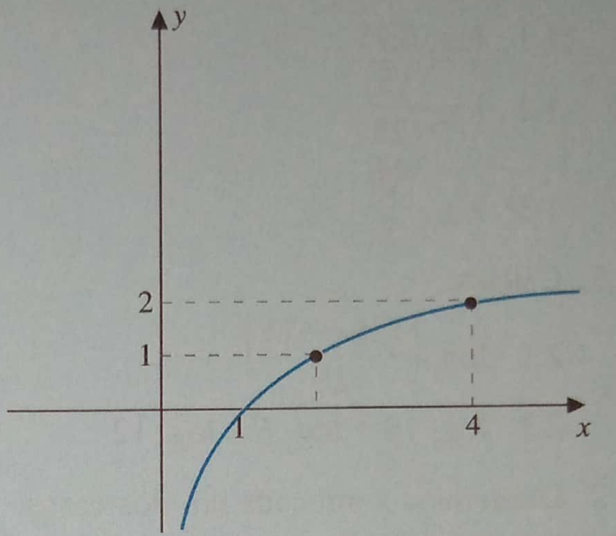


Gráfico 2



De acordo com os gráficos, indica qual(ais) a(s) opção(ões) verdadeira(s):

a) $y = 2x$ está representado no gráfico 1.
b) $y = x^2 + 1$ está representado no gráfico 2.
c) $y = \log_2 x$ está representado no gráfico 2.
d) $y = 2^x$ está representado no gráfico 2.
e) $y = \log_2 x$ está representado no gráfico 1.
f) $y = \log x$ está representado no gráfico 2.

7. O crescimento de uma certa cultura de bactérias obedece à expressão $N(t) = 25 \cdot 2^t$, onde N é o número de bactérias e t é o tempo em horas.

7.1 Quantas bactérias serão produzidas em 6 horas?
7.2 E em 10 horas?
7.3 Quantas bactérias são produzidas em 24 horas?
7.4 Para se atingir uma população de 800 bactérias, quantas horas serão necessárias?

8. Uma população de mosquitos desenvolve-se segundo a função $A(t) = 2^{0{,}25t}$, onde a variável t indica o tempo em horas.

8.1 Qual é a população passadas 12 horas?
8.2 E após 40 horas?
8.3 Para se atingir uma população de 4096 mosquitos, quantas horas serão necessárias?

Exercícios complementares

Unidade 7: Logaritmo e função logarítmica

1. Calcula o valor de:
   1.1 $\log_2 0,25$
   1.2 $\log_5 \frac{\sqrt{5}}{125}$
   1.3 $\log_{\sqrt{3}} \frac{\sqrt[3]{9}}{3}$
2. Calcula:
   2.1 $\log_5 \left(\frac{125x \cdot 625}{25}\right)$
   2.2 $\log_3 18 + \log_3 6 - \log_3 12$
3. Determina x em cada um dos casos:
   3.1 $\log_x 8 = 3$
   3.2 $\log_x 3 = \frac{1}{2}$
   3.3 $\log_{2x} 216 = 3$
4. Indica a única propriedade correcta:
   a) $\lg (a \cdot b) = \log a \cdot \log b$
   b) $\lg (a + b) = \log a + \log b$
   c) $\lg m \cdot a = m \cdot \log a$
   d) $\lg a^m = \log m \cdot a$
   e) $\lg a^m = m \cdot \log a$
5. Indica os valores de x que satisfazem a igualdade $\log (x - 5) = \log 6$.
6. Sabendo que $\lg b - \lg a = 5$, calcula o valor do quociente $\frac{b}{a}$.
7. Sendo $\lg 2 = 0,3010$ e $\lg 3 = 0,4771$, quanto é $\log 12$?
8. Se $\lg 123 = 2,09$, qual é o valor de $\log 1,23$?
9. Se $\log 2 = a$ e $\log 3 = b$, como se escreve $\log \frac{32}{27}$ em função de a e b?
10. Se $\lg 8 = a$, calcula $\lg 5$.
11. Se $\log \sqrt{a} = 1,236$, então qual o valor de $\log \sqrt[3]{a}$?
12. Sendo $\lg 2 = 0,3010$ e $\log 3 = 0,4771$, calcula:
    12.1 $\lg 15$
    12.2 $\lg 45$
    12.3 $\lg 60$
    12.4 $\lg 900$
    12.5 $\lg 32$
    12.6 $\lg_6 30$

Exercícios complementares

13. Quanto é lg 0,001 + lg 100?

14. Calcula o valor da expressão $\dfrac{(\log_3 1 + \lg 0{,}01)}{\log_2\left(\frac{1}{64}\right)\cdot \log_4 \sqrt{8}}$.

15. Determina x em cada um dos casos:

15.1 $\lg x = 5{,}7348$

15.2 $\lg x = 1{,}7348$

15.3 $\lg x = 0{,}8200$

16. Sendo $\lg 2 = 0{,}3010$, calcula $\log 5^{10}$.

17. Determina o valor dos seguintes logaritmos:

17.1 lg 192

17.2 lg 68,4

18. Encontra o valor de x em cada uma das equações:

18.1 $\lg x = \lg 4$

18.2 $\lg x = \log 3 + \lg 5$

18.3 $\lg (x - 3) = \lg 2$

18.4 $\lg (5x + 9) = \lg x + \log 2$

19. Calcula, usando logaritmos:

19.1 $39{,}37 \times 6{,}127$

19.2 $\dfrac{0{,}003893}{0{,}02548}$

19.3 $(0{,}4161)^4$

19.4 $\sqrt[3]{3{,}968}$

20. Quanto mede a aresta de um cubo de 40 m^3 de volume?

21. Uma empresa agrícola pretende construir silos cilíndricos, com a capacidade de armazenar 17 000 toneladas de milho cada. Sabendo que cada silo terá um diâmetro de 12 metros, qual deverá ser a sua altura? ($V = A_b \times h$)

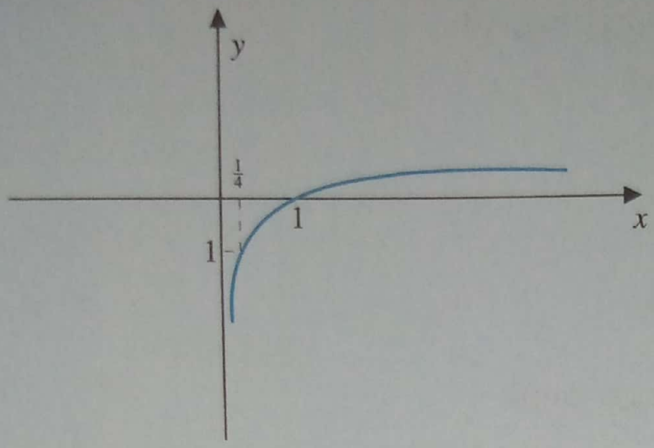
22. Classifica como crescente ou decrescente cada uma das funções:

22.1 $f(x) = \log_5 x$

22.2 $f(x) = \log_{0{,}5} x$

Exercícios complementares

23. A figura seguinte mostra o gráfico da função logaritmo na base b. Indica o valor de b.



24. Calcula o volume de uma esfera, usando logaritmos decimais, sabendo que:
   24.1 $r = 2{,}38$ cm
   24.2 $r = 3$ cm
   24.3 $r = 1{,}03$ cm

25. Determina o volume de um cilindro de revolução, sabendo que o comprimento da geratriz é igual ao dobro do raio e o raio é igual a 2,34 cm.

   $V = \pi \cdot r^3 \cdot g$

26. Sabendo que o volume de um cilindro de revolução é 6378 cm^3 e que o comprimento da sua geratriz é igual ao triplo do comprimento do raio, determina a medida do raio.
   $V = \pi \cdot r^3 \cdot g$

   ($V = \pi \cdot r^3 \cdot g$ e $g = 3r$, então $V = 3\pi \cdot r^3$)

27. Uma caixa de feijão tem 304 cm de comprimento, 167 cm de largura e 58 cm de altura. Determina a quantidade de feijão em litros.

28. Uma bola de futebol tem 22 cm de diâmetro. Calcula o seu volume em litros.

Exercícios complementares

Unidade 8: Trigonometria

1. Verifica a que quadrante pertencem os ângulos que se seguem:

1.1 1327°	1.2 −1327°	1.3 −67°
1.4 170°	1.5 −170°	1.6 1729°

2. Determina:

2.1 sen 170°	2.5 cos 120°	2.9 cos (−99°)
2.2 cos 305°	2.6 cotg 315°	2.10 tg (−77°)
2.3 tg 66°	2.7 sen (−300°)	2.11 sen (−204°)
2.4 cotg 170°	2.8 cotg (−119°)	

3. O sen 70° é igual a:

a) sen 20° b) tg 20° c) −sen 20° d) −cos 20° e) cos 20°

4. O valor de tg 50° é igual a:

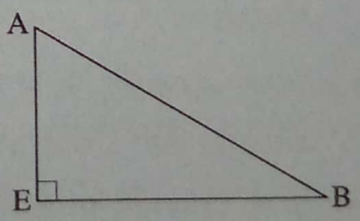
a) cotg 40° b) −cotg 40° c) sen 40° d) −sen 40° e) cos 40°

5. Considera o triângulo rectângulo ABC recto em A, sabendo que o segmento BC mede 10 cm e cos $y = \frac{3}{5}$. Calcula o perímetro do triângulo.

6. A altura de um triângulo equilátero mede 5 cm. Calcula:
   - 6.1 a medida do lado do triângulo;
   - 6.2 o perímetro do triângulo;
   - 6.3 a área do triângulo.

7. Uma escada apoiada numa parede, num ponto distante 5 m do solo, forma com essa parede um ângulo de 60°. Qual é o comprimento da escada?

8. Considera um triângulo ABE recto em E. Sabendo que:
   - 8.1 BÂE = 2BÊA, qual é a medida do ângulo BAE?
   - 8.2 |ÂE| = 5 cm e BÂE = 60°, quanto mede a hipotenusa?
   - 8.3 Qual é a medida do ângulo BAE?

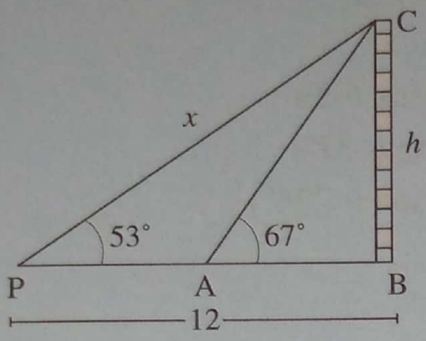


9. Num triângulo rectângulo ABC, tem-se Â = 90°, |AB| = 45 e |AC| = 6. Calcula a tangente e a co-tangente do ângulo B.

Exercícios complementares

10. Um observador colocado num ponto P, vê um prédio sob um ângulo de 53°. Dá alguns passos para a frente até o ponto A e vê o mesmo prédio mas sob um ângulo de 67°.

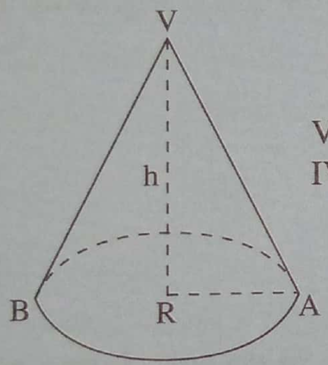
A distância do ponto P ao ponto C na base do prédio é de 12 m.



10.1 Determina a altura do prédio.

10.2 Calcula a distância do ponto A ao ponto C.

11. Observa a figura e calcula o volume do cilindro.

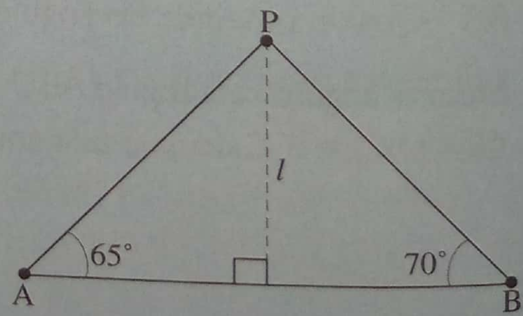


$V\hat{A}B = 60°$
$|VA| = 10$ cm

12. Uma criança está a brincar com um papagaio. O fio do papagaio mede 95 metros e o ângulo formado pelo fio e o chão é de 45°. A que altura se encontra o papagaio?

13. Dois meninos, A e B, distanciados um do outro 50 m, observam um ponto P, situado numa outra margem do rio, segundo os ângulos de 65° e 70°, de acordo com a figura ao lado.

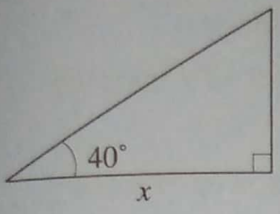
Qual é a largura do rio, sabendo que a distância do menino A ao ponto P é de 15 m?



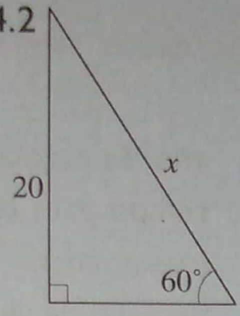
Exercícios complementares

14. Determina a incógnita x em cada caso.

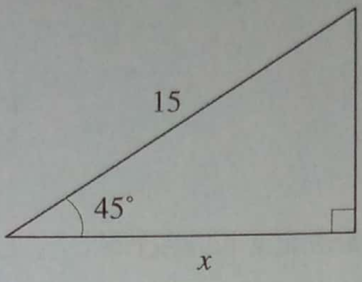
14.1



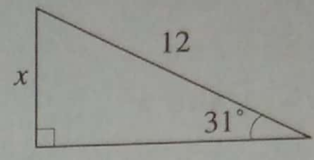
14.2



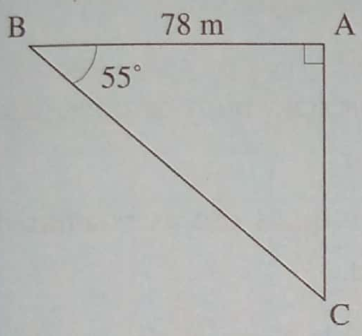
14.3



14.4

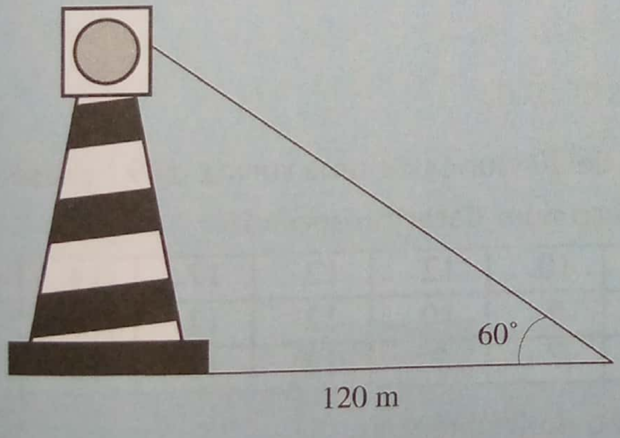


15. Observa a figura.



Calcula a medida dos elementos que faltam.

16. Observa a figura.



Calcula a altura do farol.

Exercícios complementares

▶ Unidade 9: Estatística

1. Num estudo feito numa escola, recolheram-se dados referentes às seguintes variáveis:

A. idade
B. sexo
C. altura
D. tempo de permanência na escola
E. nota na disciplina de Matemática
F. distância de casa à escola
G. local de estudo
H. número de irmãos
I. ano de nascimento
J. ano de escolaridade
K. tempo para fazer um teste de Matemática
L. número de alunos aprovados por turma
M. número de bactérias em 200 litros de água
N. religião
O. classificação num campeonato escolar

1.1 Das variáveis indicadas, quais são as quantitativas e quais são as qualitativas?
1.2 Das variáveis quantitativas, diz quais são contínuas.

2. Sessenta alunos da 10.ª classe da Escola Secundária Paulo Samuel Kankomba de Lichinga responderam a um inquérito sobre o número de irmãos que cada um tem.

2.1 Qual é a população de estudo?
2.2 Qual é a amostra?
2.3 Indica a variável em estudo e classifica-a.

3. A tabela abaixo mostra a média anual de 30 alunos de uma turma da 9.ª classe de uma escola privada na cidade de Maputo num determinado ano.

10	9	9	7	8	10	12	12	17	14
11	8	8	9	9	9	10	12	13	15
13	14	13	8	9	7	9	12	10	10

3.1 Elabora uma tabela de distribuição de frequências:
a) absoluta;
b) absoluta acumulada;
c) relativa;
d) relativa acumulada.

3.2 Quantos alunos tiveram média de 8?
3.3 Quantos alunos tiveram média menor do que 8?
3.4 Quantos alunos tiveram média maior do que 8 e menor do que 13?
3.5 Qual é a percentagem dos alunos com média de 8?
3.6 Qual é a percentagem dos alunos com média maior do que 14?

Exercícios complementares

4. As alturas, em centímetros, de 16 dos 50 alunos de uma turma da 10.ª classe de uma escola secundária são as seguintes:

150	135	162	176	150	134	154	162
166	172	148	159	170	163	149	162

4.1 Indica:

a) a população;

b) a amostra;

c) a variável estatística do estudo e classifica-a.

4.2 Constrói a tabela de frequências, agrupando os dados em classes.

4.3 Representa os dados num gráfico de barras.

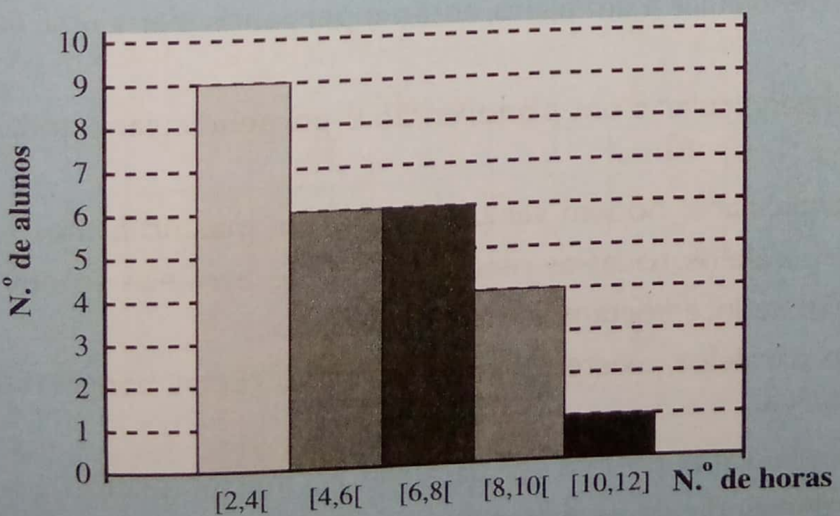
5. As alturas, em centímetros, dos alunos de uma turma do 10.º ano são as seguintes:

150	169	174	155	165	170	172
170	171	162	171	161	154	168
152	158	163	158	166	158	166
161	164	166	164	162	156	167

5.1 Constrói uma tabela de frequências, agrupando os dados em classes.

5.2 Representa graficamente os dados.

6. O Maquil fez um inquérito sobre quantas horas os colegas estudavam por dia. Apresentou os resultados no seguinte gráfico (histograma):



6.1 Quantas classes formou o Maquil?

6.2 Em que intervalo se encontra a resposta mais frequente?

6.3 Qual a percentagem de alunos que estuda no máximo 6 e no mínimo horas?

6.4 Há alunos que estudam mais do que meio-dia?

Exercícios complementares

Unidade 10: Geometria espacial

1. Por um ponto, quantas rectas podem passar?

2. Por uma recta, quantos planos podem passar?

3. Três planos α, β e γ, que se intersectam dois a dois, podem ter em comum:
   a) Uma única recta.
   b) Duas rectas.
   c) Três rectas.
   d) Quatro rectas.

4. Assinala com V as afirmações verdadeiras e com F as falsas.
   a) Se duas rectas são paralelas, então têm um ponto comum.
   b) Se duas rectas são concorrentes, então têm um ponto comum.
   c) Quatro pontos definem sempre um plano.
   d) Se uma recta é paralela a um plano, existe no plano uma única recta que lhe é paralela.
   e) Por um ponto exterior a uma recta passa uma única recta paralela a uma recta dada.
   f) Se uma recta é paralela a um plano, existe no plano uma infinidade de rectas paralelas àquela.
   g) Se uma recta é paralela a um plano, então é paralela a todas as rectas do plano.
   h) Se uma recta é perpendicular a um plano, então é perpendicular a uma única recta do plano.
   i) Se uma recta é perpendicular a um plano, então é perpendicular a todas as rectas do plano.
   j) Duas rectas perpendiculares podem ser paralelas a um mesmo plano.
   k) Se dois planos são paralelos, todas as rectas de um são paralelas ao outro.
   l) Duas rectas que não se intersectam definem um plano.
   m) Se dois planos são paralelos, existem num deles duas rectas concorrentes paralelas ao outro.
   n) Duas rectas perpendiculares podem ser paralelas ao mesmo plano.
   o) Se dois planos são perpendiculares, existe num deles uma recta perpendicular ao outro.
   p) Se dois planos são perpendiculares, todas as rectas de um são perpendiculares ao outro.
   q) Se uma recta é paralela a um plano, então é paralela a todas as rectas desse plano.

Soluções

Unidade 1: Teoria de conjuntos

1.1 {1, 2, 3, 4, 5, 6}
1.2 {Janeiro, Fevereiro, Abril, Maio, Junho, Setembro, Outubro, Dezembro}
1.3 {25 de Junho}
1.4 {Mercúrio, Vénus, Terra, Marte, Júpiter, Saturno, Úrano, Neptuno}
1.5 {−2, −1, 0, 1, 2, 3, 4, 5}
1.6 {0, 1, 2, 3, 4, 5}

2.1 {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} 2.2 {4, 6}

3.1 {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}
3.2 {−3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4}
3.3 {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}
3.4 {−3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}
3.5 {0, 1, 2, 3, 4}
3.6 {0, 1, 2, 3, 4}

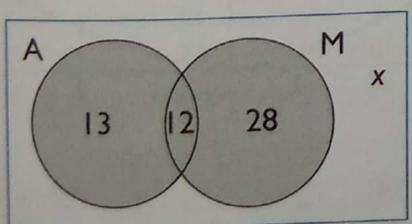
4.1 F 4.2 V 4.3 F 4.4 V 4.5 F

5.1 {1, 2, 3, 4, 5,}
5.2 {2, 5, 6, 7, 9}
5.3 {0, 2, 4, 6, 8}
5.4 {2, 5}
5.5 {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9}
5.6 {2}
5.7 {2, 5, 6}
5.8 5 5.9 2 5.10 8
6. 21 7. 128 8. 10 e 6

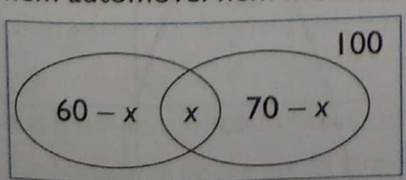
9. {−2, 2}

10.1 V 10.2 F 10.3 V 10.4 F
10.5 V 10.6 V 10.7 V 10.8 F

11. b) 12. b) 13. 28

14.1


47% dos habitantes não sabe conduzir nem automóvel nem motorizada.

15.1


30% dos alunos lêem ambos os jornais.

16. 130

Unidade 2: Equações quadráticas paramétricas simples

1.1 $a = 1;\ b = -12;\ c = k$
1.2 $a = 2;\ b = -6;\ c = 3m + 2$
1.3 $a = 2;\ b = m + 3;\ c = -1$
1.4 $a = -1;\ b = m\ ;\ c = -7$

2.1 $a = 2;\ b = -6;\ c = -3k$

2.2 a) $k = \frac{3}{2}$ b) $k > \frac{3}{2}$

3.1 $a = 1;\ b = k + 1;\ c = 4$
3.2 −5 ou 3

4.1 $\frac{9}{4}$
4.2 $p > \frac{41}{8}$
4.3 $]-\infty, -4]$ ou $[4, +\infty[$
4.4 $\frac{7}{9}$

5.1 $a > \frac{25}{6}$ 5.2 $a = \frac{25}{6}$
5.3 $a < \frac{25}{6}$ 5.4 $a \leq \frac{25}{6}$

6.1 −1 ou 1 6.2 $m < \frac{1}{6}$

7. $m = 2$

8. $p = 8$

9.1 $k = -5$ 9.2 $k = 22$

10.1 A variável principal é x.
10.2 $b < -4$
10.3 $x = 0$ ou $x = 4$

Unidade 3: Equações biquadradas

1.1 N 1.2 S 1.3 N
1.4 S 1.5 N 1.6 N
2.1 $a = 1, b = 7$ e $c = 16$
2.2 $a = 9, b = 10$ e $c = 1$
2.3 $a = -\frac{1}{3}, b = 3$ e $c = -5$
2.4 $a = 2, b = -3$ e $c = -7$
2.5 $a = 1, b = -3$ e $c = 36$
2.6 $a = 1, b = -8$ e $c = 9$
2.7 $a = -2, b = 5$ e $c = -3$
2.8 $a = 1, b = -17$ e $c = 16$
2.9 $a = 9, b = -13$ e $c = 4$
2.10 $a = 1, b = -5$ e $c = 0$

3.1 a) $a = 1; b = -17; c = 16$
b) $a = 1; b = -32; c = 256$
c) $a = 1; b = -5; c = 4$
d) $a = 1; b = -18; c = 81$
e) $a = 36; b = -13; c = 1$
f) $a = 1; b = -13; c = 36$
g) $a = 3; b = -8; c = 5$

3.2 a) $-4, -1, 1, 4$
b) $-4, 4$
c) $-2, -1, 1, 2$
d) $-3, 3$
e) $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$
f) $-3, -2, 2, 3$
g) $-1, 1$

4. -1

5.1 $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$
5.2 $x^4 + 4x^2 - 60 = 0$
5.3 $x^4 + 8x^2 - 9 = 0$
5.4 $x^4 - \frac{1}{9}x^2 = 0$
5.5 $x^4 + 49x^2 = 0$

6.1 -4 6.2 2 6.3 -2
6.4 4 6.5 3 6.6 20

7.1 $\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$
7.2 $\{-2\frac{\sqrt{2}}{5}, 2\frac{\sqrt{2}}{5}\}$
7.3 $\{-3, 3\}$
7.4 $\{-3, 0, 3\}$
7.5 $\{-2, 2\}$
7.6 $\{-2, 2\}$

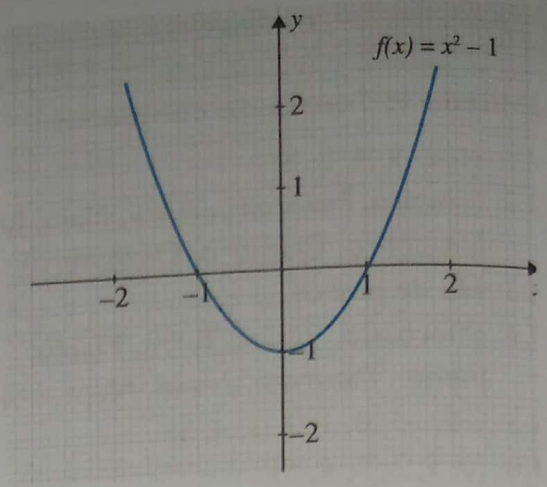
Unidade 4: Função quadrática

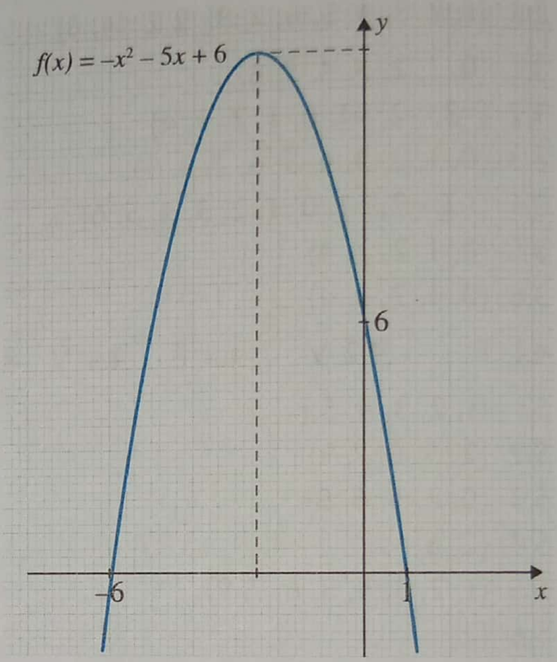
1.1 S 1.2 N 1.3 S
1.4 S 1.5 N 1.6 N

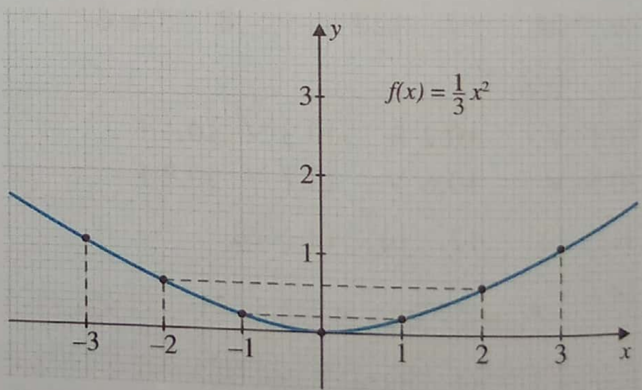
2.1 $a = -1; b = -8; c = -20$
2.2 $a = 5; b = -3; c = 1$
2.3 $a = 1; b = -8; c = 0$
2.4 $a = -1; b = 0; c = 1$
2.5 $a = \frac{1}{3}; b = -1; c = -2$

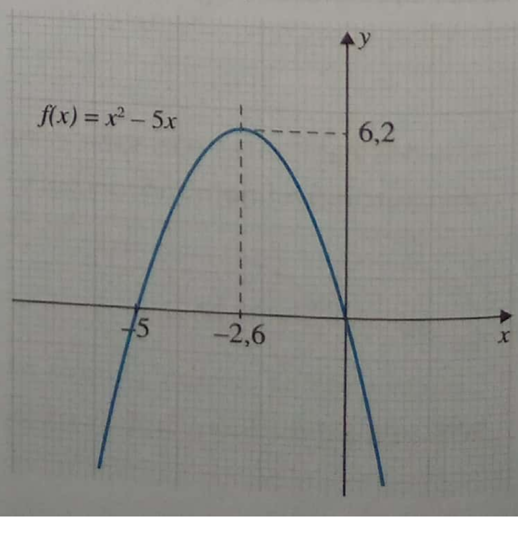
3.1 $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ 3.2 $\mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{2}\}$ 3.3 $\mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{3}\}$

4.1 $\frac{1}{3}$ 4.2 $-\frac{5}{3}$ 4.3 -1
4.4 $-\frac{17}{12}$ 4.5 $-\frac{5}{9}$ 4.6 $-\frac{11}{9}$

5.1


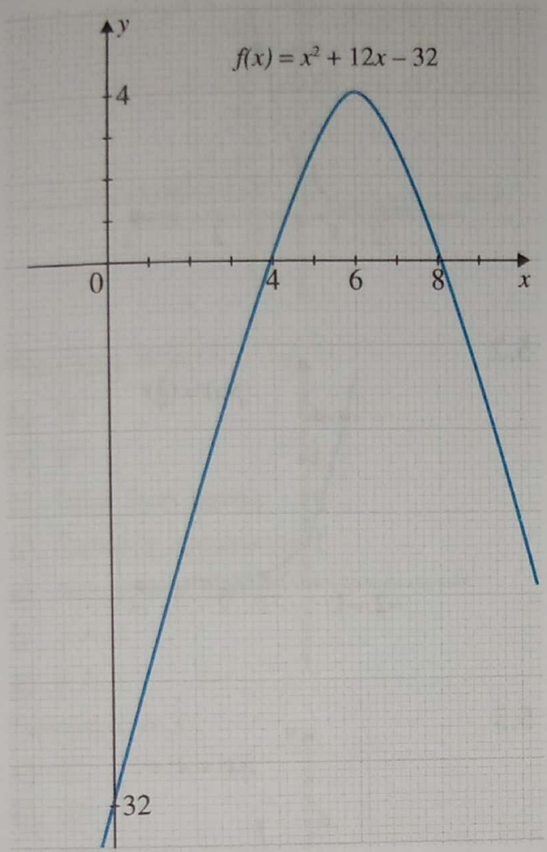
5.2


5.3


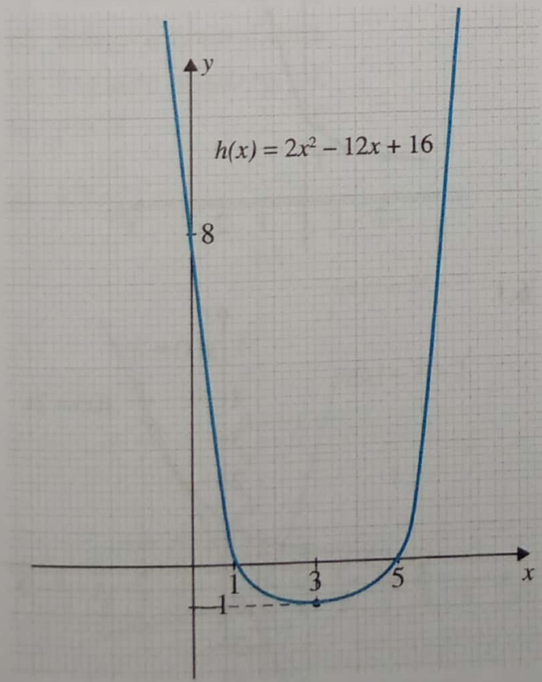
5.4


6.1 $(-2,0)$ e $(3,0)$
6.2 $(3,0)$
6.3 $(-1,0)$ e $(9,0)$
7.1 $y = 8$ 7.2 $y = -10$ 7.3 $y = -7$

8.1



8.2



9.1 $D_f = \mathbb{R}$
9.2 $CD_f =]-\infty, 6[$
9.3 4 e 8
9.4 Concavidade da parábola virada para baixo, pois $a < 0$.
9.5 $V(6, 4)$
9.6 $x = 6$
9.7 $(4, 0)$ e $(8, 0)$
9.8 $(0, -32)$
9.9 $f(x) > 0$ para $x \in]4,8[$ e $f(x) < 0$ para $x \in]-\infty,4[$ e $x \in]8, +\infty[$
9.10 $f(x)$ crescente para $x \in]-\infty,6[$ e $f(x)$ decrescente para $x \in]6, +\infty[$

Para a função $h(x) = 2x^2 - 12x + 16$:

9.1 $D_f = \mathbb{R}$
9.2 $CD_f =]1, +\infty[$
9.3 2 e 4
9.4 Concavidade da parábola virada para cima, pois $a > 0$.
9.5 $V(3, -1)$
9.6 $x = 3$
9.7 $(2, 0)$ e $(4, 0)$
9.8 $(0, 16)$
9.9 $h(x) > 0$ para $x \in]-\infty, 2[$ ou $x \in]4, +\infty[$ e $h(x) < 0$ para $x \in]2, 4[$
9.10 $h(x)$ crescente para $x \in]3, +\infty[$ e $f(x)$ decrescente para $x \in]-\infty, 3[$
10.1 $-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 3$
10.2 $-\frac{5}{12}x^2 - \frac{17}{12}x + 4$
10.3 $x^2 + 4x + 3$
10.4 $\frac{5}{4}x^2 - \frac{5}{6}x - 5$
11.1 $y = -2x^2 + 4x + 6$;
11.2 $y = x^2 - 2x - 2$
12.1 -3 e 2
12.2 $a = 1, b = 1$ e $c = -6$
13. Opção 13.4
14. -3 e -1
15. Opção 15.1
16.1 A função é crescente se $x \in \mathbb{R}: x > \frac{3}{4}$ ou $x \in]\frac{3}{4}, +\infty[$
16.2 A função é crescente se $x \in \mathbb{R}: x > 2$ ou $x \in]2, +\infty[$
16.3 A função é crescente se $x \in \mathbb{R}: x < 5$ ou $x \in]-\infty, 5[$

16.4 A função é crescente se $x \in \mathbb{R}: x < -\frac{3}{2}$ ou $x \in \left]-\infty, -\frac{3}{2}\right[$

17.1 V 17.2 F 17.3 F

17.4 F 17.5 F

18. $x \in \mathbb{R}: x > -20$

19.1 F 19.2 F 19.3 V 19.4 F 19.5 V

20.1 Valor máximo: $\frac{9}{4}$

20.2 Valor máximo: -4

21. $a = 3$ e $b = 2$

22. -32

Unidade 5: Inequações quadráticas

1.1 $S = \{x \in \mathbb{R}: x < -1 \text{ ou } x > 3\}$

1.2 $S = \{x \in \mathbb{R}: x \leq -1 \text{ ou } x \geq 4\}$

1.3 $S = \{x \in \mathbb{R}: x < -2 \text{ ou } x > 5\}$

1.4 $S = \{x \in \mathbb{R}: -3 \leq x \leq 3\}$

1.5 $S = \{x \in \mathbb{R}: x \leq -4 \text{ ou } x \geq 0\}$

1.6 $S = \{x \in \mathbb{R}: x \leq 0 \text{ ou } x \geq 10\}$

1.7 $S = \{x \in \mathbb{R}: x \leq -3 \text{ ou } x \geq \frac{1}{3}\}$

2.1 Ponto 6 positivo.

2.2 Pontos -2 e 3.

2.3 A função é nula para $x = -2$ ou $x = 3$.

2.4 A função é positiva em $\{x \in \mathbb{R}: -2 < x < 3\}$.

2.5 A função é negativa em $\{x \in \mathbb{R}: x < -2 \text{ ou } x \geq 3\}$.

3.1 $\{x \in \mathbb{R}: x < x_1 \text{ ou } x > x_2\}$

3.2 $\{x \in \mathbb{R}: x_1 < x < x_2\}$

3.3 $x = x_1$ ou $x = x_2$

4. $x = 0$ ou $x = 5$.
A função é positiva em $\{x \in \mathbb{R}: 0 < x < 5\}$
e negativa em $\{x \in \mathbb{R}: x < 0 \text{ ou } x > 5\}$.

5. $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

6. Opção 6.1

7.1 3 7.2. -3 7.3 0 7.4 $\{0, 1, 2, 3\}$ 7.5 $[-3,3]$

8.1 $\frac{1}{2}$ 8.2 $x \in \varnothing$ 8.3 $\mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{2}\}$

Unidade 6: Função exponencial

1. As funções exponenciais são: a), b) e, d) .

2.1 F 2.2 V 2.3 F 2.4 V

3. As funções a) e c) são exponenciais.

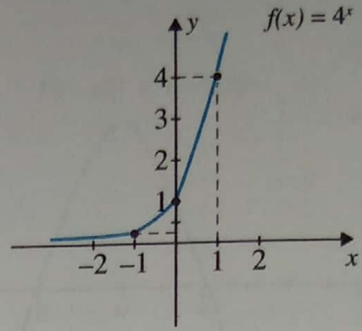
4.1 $f(x) = 5^x$ é crescente

4.2 $f(x) = \left(\frac{1}{9}\right)^x$ é decrescente

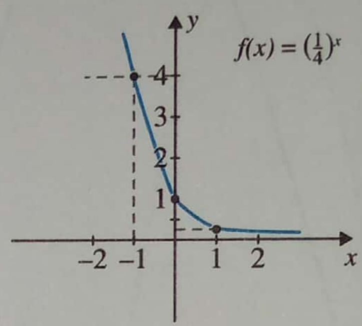
4.3 $f(x) = (0,5)^x$ é decrescente

4.4 $f(x) = 100^x$ é crescente

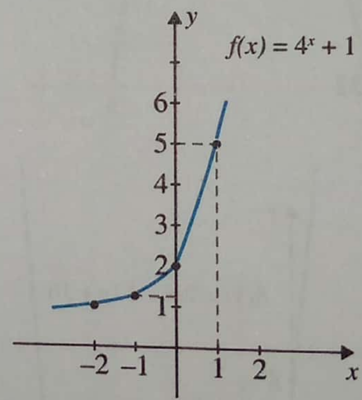
5.1



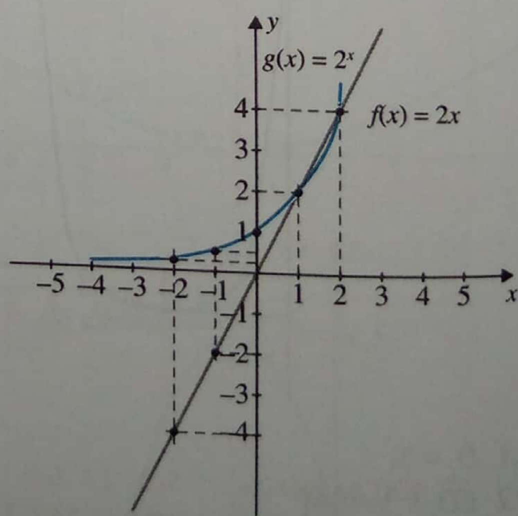
5.2



5.3

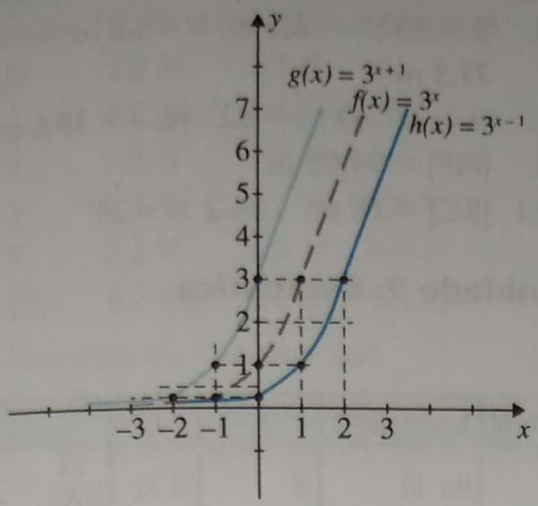


6.1



6.2 $f(x) = g(x)$, para valores $x = 1$ e $x = 2$

7.1



7.2 Função $y = 3^{x+1}$

a) $\mathbb{R}$

b) $\mathbb{R}^+$

c) Não tem zeros.

d) Sempre crescente.

e) Sempre positiva.

f) $y = 0$

g) $y = 3$

Função $y = 3^{x-1}$

a) $\mathbb{R}$

b) $\mathbb{R}^+$

c) Não tem zeros.

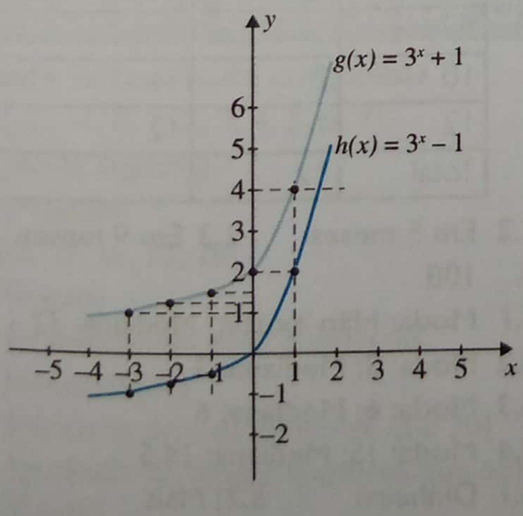
d) Sempre crescente.

e) Sempre positiva.

f) $y = 0$

g) $y = \frac{1}{3}$

8.



9.1 38 400 bactérias. 9.2 $t = 6\ h$

10.1 124,86 Mt 10.2 1.263,37 Mt

Unidade 7: Logaritmo e função logarítmica

1.1 2 1.2 −3 1.3 $\frac{1}{2}$ 1.4 2

1.5 4 1.6 $\frac{3}{5}$ 1.7 0 1.8 −5

1.9 6 1.10 $\frac{3}{2}$

2.1 1 2.2 2 2.3 −4 2.4 −1

3.1 5 3.2 8

3.3 10

3.4 $\sqrt{7}$

4.1 6 4.2 8

5.1 30 5.2 256

6.1 2 6.2 −8 6.3 $\frac{2}{3}$ 6.4 8

7.1 F 7.2 V 7.3 F

7.4 V 7.5 F

8.1 4 8.2 2

10.1 V 10.2 V 10.3 F

10.4 F 10.5 F 10.6 V

11.1 1,3 11.2 3 11.3 0,23

12. −0,6

13. 11

14.1 13 14.2 11 14.3 2 14.4 1

15.1 1,7323 15.2 0,0880

15.3 0,0184 15.4 0,2510

16.1 1,73 16.2 3,9961

16.3 3,3304 16.4 0,8014

16.5 0,0492

17.1 100 000 17.2 10 000

17.3 2 000 17.4 2,35

17.5 7,6 17.6 6,6

18.a) $5,8 \times 10^1$ b) $2,34 \times 10^2$

c) $2,3419 \times 10^4$ d) $2,34 \times 10^1$

e) 436×10^{-4} f) $1,23456 \times 10^2$

g) $1,23456 \times 10^3$ h) $7,653 \times 10^6$

i) $4,56789 \times 10^{-1}$ j) $2,12 \times 10^{-10}$

l) $9,8 \times 10^{-7}$ m) $7,91 \times 10^1$

19. 2×10^7

20. $1,5 \times 10^8$

21.1 88 100 21.2 25,2

21.3 0,0393 21.4 0,257

21.5 13,7 21.6 1,77

21.7 2,67 21.8 8,87

22. 1,06 dm

23. 337 cm
24. 32,2 anos
25. 7430,00 Mt
26. 0,86 cm
27. 6,28 cm

Unidade 8: Trigonometria

1. 6 cm, 30°, 60° e $9 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ cm^2

2.1 $x = 13$

2.2 0, 9230; 0, 3846; 0, 4166 e 2,4.

3.1 $x = 4{,}6$ e $y = 2{,}9$ 3.2 $x = 2{,}44$ e $y = 1{,}4$

4. 238,2

5. C = 19° 30'
B = 70° 30'
$a = 8{,}9$ cm e $b = 3{,}6$ cm

6. $\text{cotg}\ \alpha = \frac{1}{3}$

7. $\cos \alpha = \frac{-\sqrt{3}}{2}$; $\text{tg}\ \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\text{cotg}\ \alpha = \sqrt{3}$

8. $\cos \alpha = -1$; $\text{tg}\ \alpha = 0$; cotg α – não definido

9.1 $\cos \alpha = \frac{5}{13}$; $\text{tg}\ \alpha = \frac{12}{5}$; $\text{cotg}\ \alpha = \frac{5}{12}$

9.2 $\text{sen}\ \alpha = \frac{60}{61}$; $\text{tg}\ \alpha = \frac{60}{11}$; $\text{cotg}\ \alpha = \frac{11}{60}$

9.3 $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{17}}{17}$; $\text{sen}\ \alpha = \frac{4\sqrt{17}}{17}$;
$\text{cotg}\ \alpha = -\frac{1}{4}$

10. $\frac{169}{30}$ 10.1 $-\frac{1}{8}$

11.1 2 11.2 $2 - 2\cos x$

12.1 cos 60° 12.2 sen 66°30′

12.3 cotg 64° 12.4 tg 52°18′

13.1 20° 13.2 30° 13.3 34° 13.4 16°

14.1 31° e 59° 14.2 70°

14.3 $\frac{\pi}{4}$ rad 14.4 40°

15.1 –0,8387 15.2 0,9994

15.3 –0,9962 15.4 –2,4751

15.5 0,1411

16.1 III Q 16.2 II Q

16.3 I Q 16.4 II Q

16.5 III Q 16.6 IV Q

16.7 IV Q 16.8 II Q

16.9 IV Q 16.10 II Q

17.1 60° 17.2 270°

17.3 –135° 17.4 30°

17.5 15°

18.1 $\frac{\pi}{12}$ 18.2 $-\frac{\pi}{6}$ 18.3 $\frac{\pi}{60}$ 18.4 $\frac{\pi}{2}$

19. $30° \pm k\,60°$; $k \in \mathbb{Z}$

20. B = 35°; c = 6,5 m; b = 4,6 m

21. 71,3 m

22. $\alpha = 27°\ 42'$; $\gamma = 62°\ 18$; $x = 38{,}6$ m

23. $|NP| = 94{,}05$ m

24.1 $|BC| = 78$ m 24.2 $\alpha \approx 24°$

Unidade 9: Estatística

1.

Vogal	Contagem	f_a	f_r	$f_\%$
a	𝍸 III	8	0,32	$\frac{32}{100} = 32\%$
e	𝍸	5	0,20	$\frac{20}{100} = 20\%$
i	𝍸	4	0,16	$\frac{16}{100} = 16\%$
o	𝍸 I	6	0,24	$\frac{24}{100} = 24\%$
u	II	2	0,08	$\frac{8}{100} = 8\%$
		$n = 25$		100

$\frac{8}{25} = 0{,}32$; $\frac{5}{25} = 0{,}20$; $\frac{4}{25} = 0{,}16$;
$\frac{6}{25} = 0{,}24$; $\frac{2}{25} = 0{,}08$

2.1

Consumo	f_a	F_a
5	2	2
6	3	5
8	3	8
9	1	9
10	2	11
12	1	12
Total	12	

2.2 Em 5 meses. 2.3 Em 9 meses.

3. 108

4.1 Moda: Não existe; Mediana: 32

4.2 Moda: 3; Mediana: 3

4.3 Moda: 6; Mediana: 6

4.4 Moda: 15; Mediana: 14,5

5.1 Dinheiro 5.2 Mais

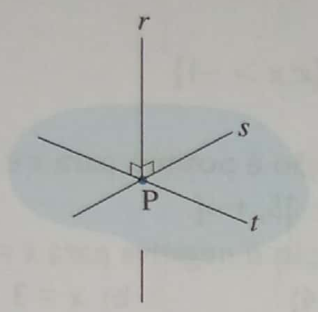
5.3 a) 60% b) 7%
c) 85% d) 90% e) 44%

Soluções

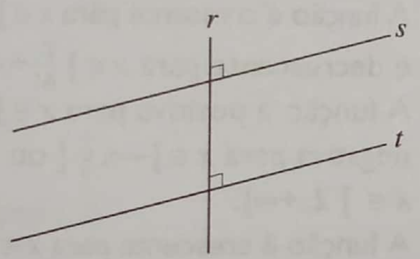
Unidade 10: Geometria espacial

1.1 V	1.2 V	1.3 F	
1.4 F	1.5 V	1.6 F	
1.7 F	1.8 V	1.9 V	
2.1 V	2.2 F	2.3 V	2.4 V
3.1 F	3.2 V	3.3 V	3.4 F
4.1 {B}	4.2 {d}	4.3 {A}	4.4 $\varnothing$

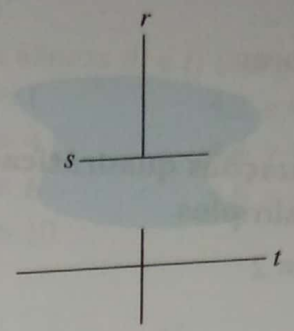
5. As rectas *s* e *t* podem ser:
   a) Concorrentes, caso em que *r* é $\perp$ ao plano determinado pelas rectas *s* e *t*.



   b) Paralelas, caso em que *r*, *s* e *t* são coplanares.



   c) Cruzadas (reversas), caso em que *s* e *t*, sendo perpendiculares à recta *r*, não são coplanares.



6.1 AE e BF ou AD e BC,...
6.2 BC e BF, ...
6.3 BF, CG, ...
6.4 ABC e BCG, ...
6.5 ABF e CDH, ...
6.6 ABC e BCG,...
6.7 BF e DH.

7. A face [ABEF] pode ser definida por:
   a) pontos A, B e F;
   b) pontos A, E e F;
   c) pontos B, E e F;
   d) rectas AE e BF; rectas AB e EF, as rectas AB e AE; as rectas AE e EF; as rectas EF e FB; etc.

Soluções – Exercícios Complementares

Unidade 1: Teoria de conjuntos

1.1 {–2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}
1.2 {Abril, Agosto}
1.3 {Maputo}
1.4 {13, 17, 19, 23, 29}
2.1 {vogais}
2.2 {províncias da zona centro de Moçambique}
2.3 {números primos menores que 20}
2.4 {potência de base 2 menores que 65}
3. X = {e}
4.1 {3} 4.2 {1,2,5} 4.3 {1,2,3,5}
5.1 n(B) = 6
5.2 n(AB) = 9
5.3 $n(A \cap B) = 2$
6.1 $n(A \cup B) = 5$
6.2 $n(A \cap B) = 2$
6.3 $(A \cup B) \cap A = \{-2, 2\}$
6.4 $(A \cap B) \cup A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
6.5 $A/B \cap B/A = \varnothing$

7.1 F	7.2 F	7.3 V	7.4 F
7.5 V	7.6 F	7.7 V	
8.1 V	8.2 F	8.3 F	8.4 V
8.5 V	8.6 F		

9.1 {5, 6, 7, 8} 9.2 C 9.3 A
10.1 {*x*: *x* é um triângulo com apenas dois lados iguais}
10.2 {*x*: *x* é um triângulo equilátero}
11.1 {4, 12}

11.2 $\{5, 10, 15, 30\}$
11.3 $\{1, 2, 5, 10, 15, 30\}$
11.4 $\varnothing$
12.1 $\{12\}$ 12.2 $\{0, 9\}$
12.3 $\{18, 36\}$ 12.4 $\varnothing$
13. 340 alunos
14. 28 professores
15. 198 alunos

Unidade 2: Equações quadráticas paramétricas simples

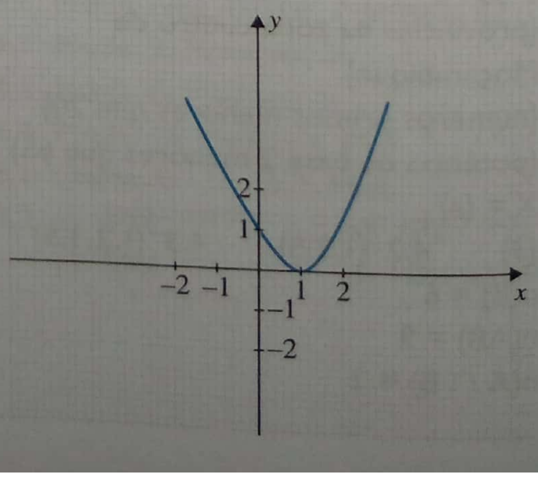
1.1 $x = 0$ ou $x = 2$
1.2 $k > -3$
2. $k = 9$
3.1 $m > 2$ 3.2 $m = 2$
4. $m = 1 - 2\sqrt{2}$ ou $m = 1 + 2\sqrt{2}$
5.1 $x = -2$ 5.2 a) $p < 1$ b) $p = 1$
6. $m = 0$ ou 3
7. $m = 1$
8.1 $p \leq 4$ 8.2 $p = 4$
9. $[2, +\infty[$

Unidade 3: Equações biquadradas

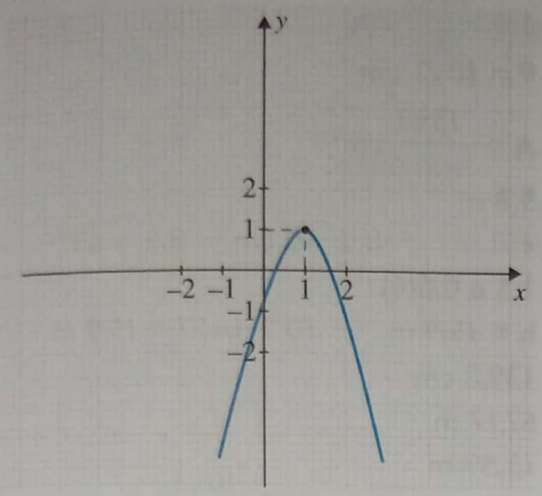
1. $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ou $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$
2.1 $x = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$ ou $x = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}$
2.2 $x = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ ou $x = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$
2.3 $x = -a$ ou $x = a$
2.4 ± 2 2.5 $\varnothing$
3.1 $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$
3.2 $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$
3.3 $x^4 - \frac{13}{36}x^2 + \frac{1}{36} = 0$
3.4 $2x^4 - 19a^2 x^2 - 90^4 = 0$
3.5 $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$
4.1 $\dfrac{\left(x^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\left(x^2 + \frac{1}{6}\right)}$
4.2 $\dfrac{\left(x^2 - \frac{1}{4}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)}{\left(x - \frac{1}{3}\right)}$
5.1 $-\frac{3}{2}$ 5.2 1 5.3 -4

Unidade 4: Função quadrática

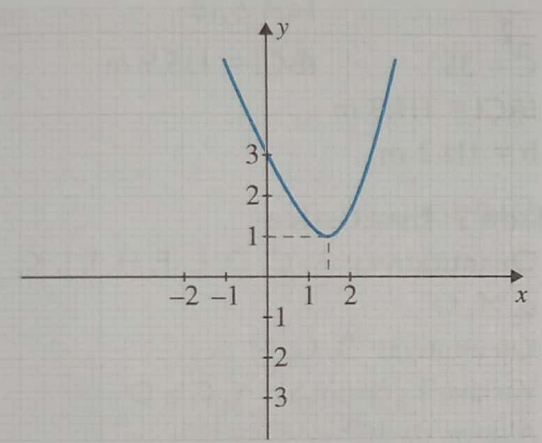
1. $m \neq -4$
2.1 -2 e 3
2.2 $-6, 6, 6$ e $\frac{25}{4}$
2.3 A função é positiva para x: $x \in [0,3]$.
3.1 $\frac{35}{2}$ 3.2 4 3.3 $\frac{15}{2}$
3.4 $\frac{21}{8}$ 3.5 12 3.6 $\frac{3}{2}$
3.7 $\frac{153}{32}$ 3.8 $2 - 3\sqrt{2}$ 3.9 $\frac{3}{2}$
4. O valor máximo é 12,5.
5.1 a) A função é positiva para $x \in]-\infty, 1[$ ou $x \in]3, +\infty[$
b) A função é negativa para $x \in]1, 3[$
5.2 a) $V(2, -1)$
b) $x = 2$
c) $D'_f = \{x : x > -1\}$
d) 1 e 3
6.1 a) A função é positiva para $x \in]-\infty, 1[$ ou $x \in]5, +\infty[$.
b) A função é negativa para $x \in]1, 5[$.
6.2 a) $V(1, -4)$ b) $x = 3$
c) $D'_f = \{x : x > -4\}$ d) 1 e 5
6.3 $\frac{4}{5}x^2 - \frac{6}{5}x + 4$
7.1 a) A função é crescente para $x \in]-\infty, \frac{7}{6}[$ e decrescente para $x \in]\frac{7}{6}, +\infty[$.
b) A função é positiva para $x \in]\frac{1}{3}, 2[$ e negativa para $x \in]-\infty, \frac{1}{3}[$ ou $x \in]2, +\infty[$.
7.2 a) A função é crescente para $x \in]-\infty, \frac{3}{5}[$ e decrescente para $x \in]\frac{3}{5}, +\infty[$.
b) A função é positiva para $x \in]\frac{1}{5}, 1[$ e negativa para $x \in \frac{1}{5}]-\infty, \frac{1}{5}[$ ou $x \in]1, +\infty[$.
7.3 a) A função é crescente para $x \in]4, +\infty[$ e decrescente para $x \in]-\infty, 4[$.
b) A função é positiva para $x \in \mathbb{R}\ \{4\}$.
8.1



8.2



8.3



9. Opção c)

Unidade 5: Inequações quadráticas

1.1 $x: x \in]-\infty, -1[$ ou $x \in]2, +\infty[$

1.2 $x: x \in]-\infty, -3[$ ou $x \in]1, +\infty[$

1.3 $x: x \in]-\infty, -\frac{7}{3}[$ ou $x \in]8, +\infty[$

1.4 $x: x \in]-\infty, 0[$ ou $x \in]4, +\infty[$

1.5 $x: x \in [-2,-1]$ ou $x \in [1, 2]$

1.6 $x \leq -1$ ou $x \geq 4$

2.1 $x: x \in]-2, 3[$

2.2 $x: x \in [-2,5]$

2.3 $x: x \in]-3, -1[$

3.1 $x: x \in [-7,1]$

3.2 $x: x \in]4, +\infty[$

4. São 2 números inteiros ($-1 \leq x \leq 2$).

Unidade 6: Função exponencial

1. Opção a)

	para $x = 4$	para $x = -2$
2.		
2.1	16	$\frac{1}{4}$
2.2	$\frac{1}{81}$	9
2.3	256	$\frac{1}{16}$
2.4	15	$-\frac{3}{4}$

3 As alíneas *d)* e *f)* são crescentes

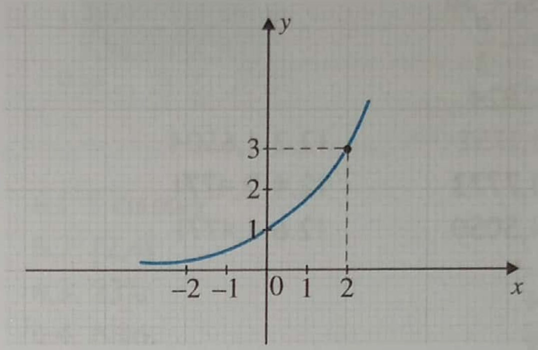
4.1 $x = 1$ 4.2 $x = 2$

4.3 $x = 4$ 4.4 $x = -2$

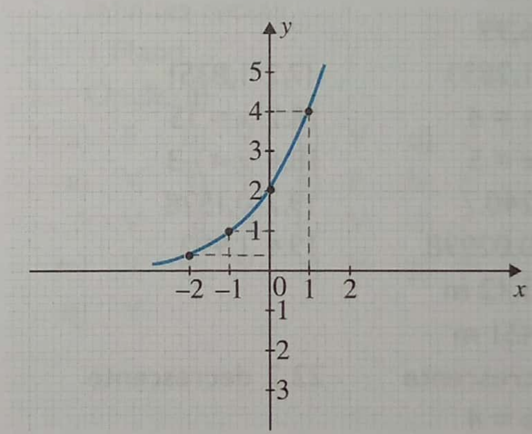
4.5 $x = 6$ 4.6 $x = 7$

4.7 $x = 10$

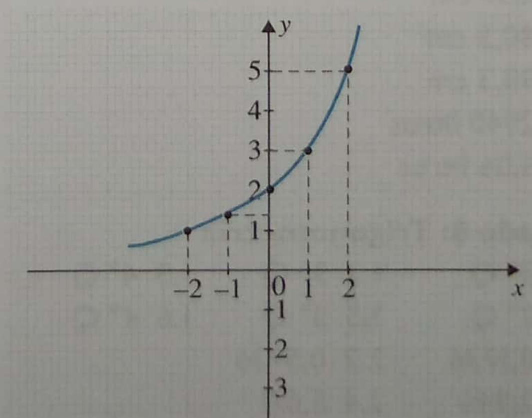
5.1



5.2



5.3



6. Opções c) e d)

7.1 400 7.2 25 600

7.3 25×2^{24} 7.4 $t = 5$ h

8.1 8   8.2 1024   8.3 $t = 48$ h

Unidade 7: Logaritmo e função logarítmica

1.1 -2 1.2 $-\frac{5}{2}$ 1.3 1
2.1 5   2.2 2
3.1 $x = 2$ 3.2 $x = 9$ 3.3 $x = 3$
4. Alínea e)
5. $x = 11$
6. 32
7. 1,0790
8. 0,09
9. 5a – 3b
10. $1 - \frac{a}{3}$
11. 0,824
12.1 1,1752   12.2 1,6504
12.3 1,7773   12.4 2,4771
12.5 1,5050   12.6 1,4771
13. -1
14. $\frac{4}{9}$
15.1 543 000   15.2 54,3
15.3 6,61
16. 6,99
17.1 1,2833   17.2 1,8351
18.1 $x = 4$ 18.2 $x = 15$
18.3 $x = 5$ 18.4 $x = -3$
19.1 240,7   19.2 0,1528
19.3 0,02998   19.4 1,992
20. 3,42 m
21. 451 m
22.1 crescente   22.2 decrescente
23. $b = 4$
24.1 56,3 cm   24.2 113 cm
24.3 4,56 cm
25. 80,5 cm^3
26. 98,3 cm
27. 2940 litros
28. 5,06 litros

Unidade 8: Trigonometria

1.1 3° Q   1.2 3° Q   1.3 4° Q
1.4. 2° Q   1.5 3° Q   1.6 4° Q
2.1. 0,1736   2.2 0,5736
2.3 2,246   2.4 5,671
2.5 1   2.6 1
2.7 0,8660   2.8 1,804
2.9 0,1564   2.10 0,2309
2.11 0,9135
3. e) cos 20°
4. a) cotg 40°
5. P = 24 cm
6.1 $a = \frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm
6.2 $P = 10\sqrt{3}$ cm
6.3 $A = \frac{25\sqrt{3}}{3}$ cm^2
7. 5,8 m
8.1 45°   8.2 10 cm   8.3 ≈ 63°
9. 1,5 e 0,6(6)
10.1 h = 15,9 m   10.2 |AC| = 19,9 m
11. 139,8 cm^3
12. 67,17 m
13. 13,59 m
14.1 17,8   14.2 $\frac{40\sqrt{3}}{3}$
14.3 $\frac{15\sqrt{2}}{2}$ 14.4 6,18
15. $\hat{C} = 35°$ |BC| = 135,9 m
|AC| = 111,3 m
16. h = 111,3 m

Unidade 9: Estatística

1.1 Quantitativas: A, C, D, E, F, H, I, J, K, L, M, O
Qualitativas: B, G, N
1.2 Variáveis contínuas: A, C e O
2.1 Alunos da 10.ª classe.
2.2 60 alunos.
2.3 Número de irmãos; variável quantitativa discreta.
3.1

x_i	Frequência absoluta (f_a)	Frequência absoluta acumulada (F_a)	Frequência relativa (f_r)	Frequência relativa acumulada (F_r)
7	2	2	0,06	0,06
8	4	6	0,13	0,19
9	7	13	0,23	0,42
10	5	18	0,16	0,58
11	1	19	0,03	0,61
12	4	23	0,13	0,74
13	2	26	0,1	0,84
14	2	28	0,06	0,90
15	1	29	0,03	0,93
17	1	30	0,03	0,96

3.2 4 alunos   3.3 2 alunos

Soluções – Exercícios Complementares

3.4 17 alunos 3.5 19%

3.6 6%

4.1 a) Alunos de uma turma da 10.ª classe.

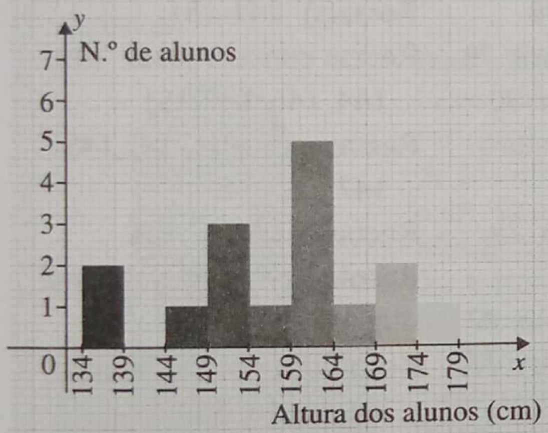
b) 16 alunos da turma.

c) Quantitativa e contínua.

4.2.

Classe	Frequência
[134,139[	2
[196,144[	0
[144,149[	1
[149,154[	3
[154,159[	1
[159,164[	5
[164,169[	1
[169,176[	2
[176,179[	1

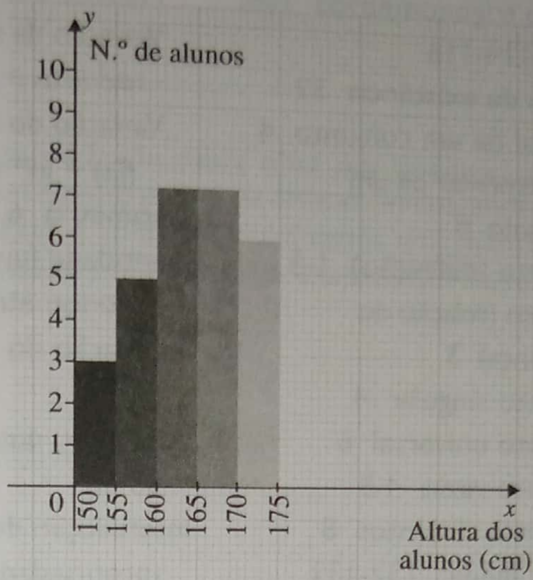
4.3



5.1.

Classe	Frequência
[150,155[	3
[155,160[	5
[160,165[	7
[165,170[	7
[170,175[	6

5.2



6.1. 5 classes.

6.2. [2,4[

6.3. 23%

6.4. Não.

Unidade 10 – Geometria espacial

1. Infinitas rectas
2. 1 Plano
3. Opção a)
4. a) F b) V c) V d) F
   e) V f) V g) F h) F
   i) V j) V k) V l) F
   m) V n) V o) V p) F
   q) V

Índice Remissivo

Pearson Moçambique, Lda.
Maputo, Moçambique

Titulo: *Saber Matemática 10*
ISBN 9780636096929
Registado no INLD sob o número: 6396/RLINLD/2010
4.ª Tiragem 2015
Arranjo gráfico – capa: Mark Standley
Paginação: Ink Design; Lorne McGregor
Ilustração: Ink Design
Fotografia da capa: Gallo Images/Getty Images – CommerceandCultureAgency
Impressão e acabamentos: CTP Printers, Cape Town
CT15533

Autores:

Dinis Hilário Guibundana
Licenciado em Ensino da Matemática e Física pela Universidade Pedagógica de Maputo. Foi professor de Matemática e Didáctica de Matemática nos Institutos Médios Pedagógicos da Manhiça e do Maputo. Fez igualmente parte da equipa do INDE que elaborou os programas de Matemática, no âmbito do novo currículo do Ensino Básico e da equipa de revisão dos programas de Matemática da Reforma Curricular do Ensino Secundário Geral. Actualmente, é técnico pedagógico no Instituto Nacional do Desenvolvimento da Educação (INDE) no Departamento de Planificação e Desenvolvimento Curricular.

João Carlos Sapatinha
Licenciado em Matemática e Física pela Universidade Pedagógica de Maputo. Foi professor de Matemática nas Escolas Samora Machel-Beira, Escola Francisco Manyanga, Escola Secundária Josina Machel e ADPP. Actualmente, é instrutor do Instituto de Formação de Professores na disciplina de Metodologia da Matemática, em Maputo, onde é chefe do Departamento de Ciências Naturais e Matemática.

Créditos fotográficos: páginas 77 (Figs. 1 e 2) e 141 (Fig. 1) – domínio público.

SÍMBOLOS DA REPÚBLICA DE MOÇAMBIQUE

Bandeira

Emblema

Hino Nacional

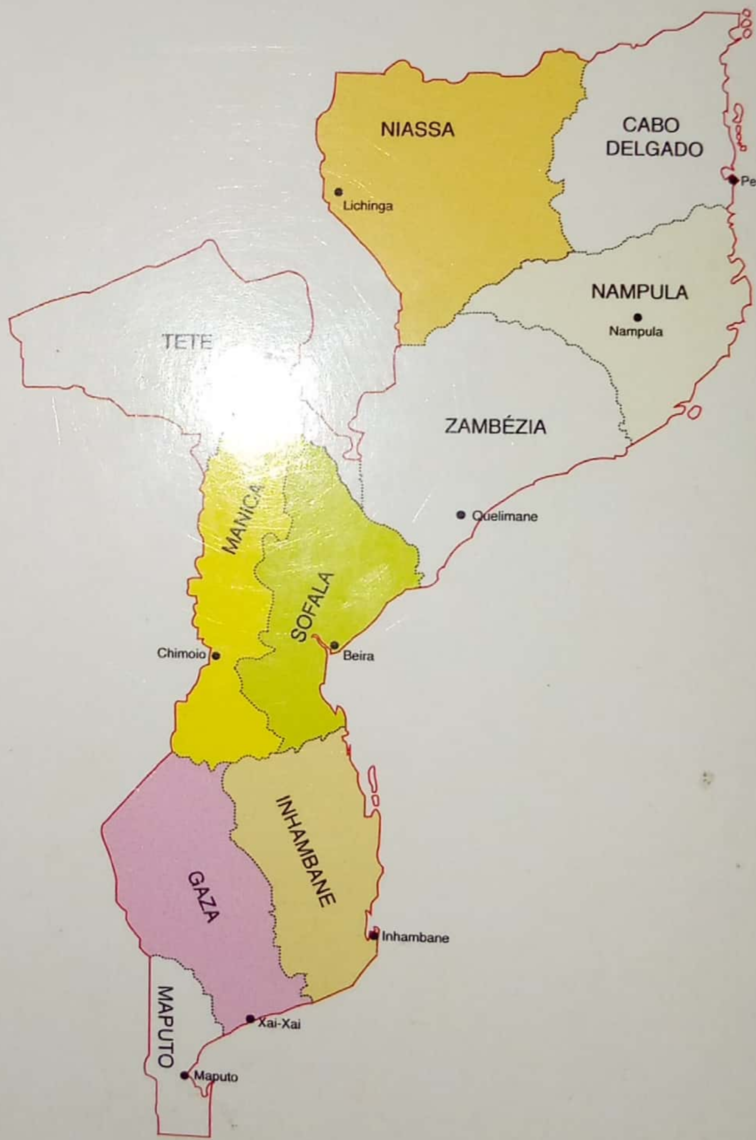
Pátria Amada

Na memória de África e do mundo
Pátria bela dos que ousaram lutar
Moçambique o teu nome é liberdade
O sol de Junho para sempre brilhará.

Coro
Moçambique nossa terra gloriosa
Pedra a pedra construindo o novo dia
Milhões de braços, uma só força
Ó pátria amada vamos vencer.

Povo unido do Rovuma ao Maputo
Colhe os frutos do combate pela paz
Cresce o sonho ondulado na Bandeira
E vai lavrando na certeza do amanhã.

Flores brotando no chão do teu suor
Pelos montes, pelos rios pelo mar
Nós juramos por ti, ó Moçambique.
Nenhum tirano nos irá escravizar.



ISBN 978-0-636-09692-9