DE ACORDO COM O NOVO PROGRAMA

10

10.ª classe

Livro aprovado pelo **Ministério da Educação**

Heitor Langa

AMO A VIDA

Matemática

PLURAL EDITORES

LIVRO DO ALUNO

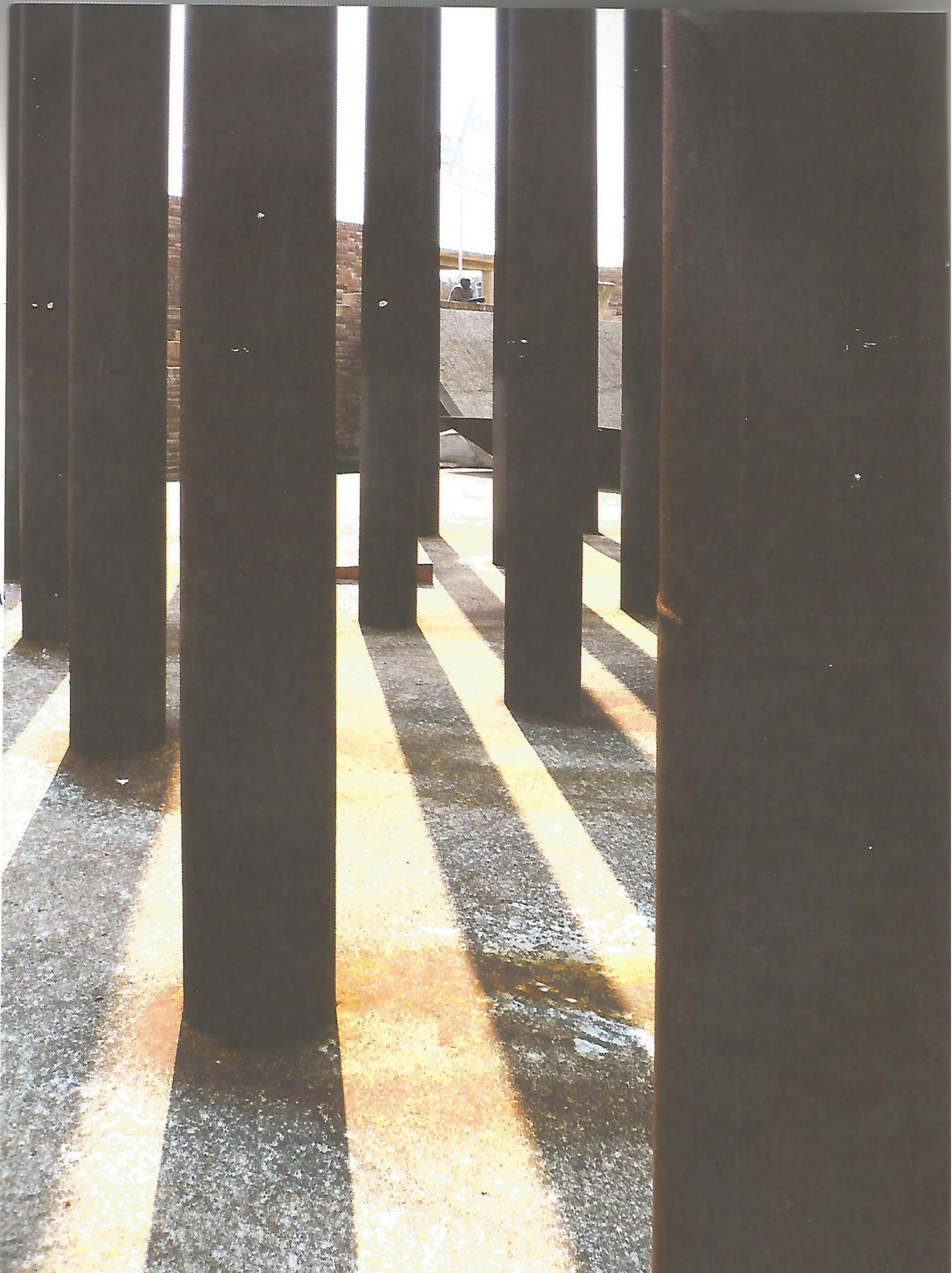
10

10.ª classe

Heitor Langa

Matemática

PLURAL EDITORES



ISBN 978-989-611-170-0

APRESENTAÇÃO

A Matemática, pela sua universalidade, assume uma importância fundamental no processo de formação do aluno.

No Ensino Secundário Geral, os instrumentos matemáticos são especialmente importantes na consolidação dos conhecimentos e sua aplicação. Mas não só. Possivelmente, não existe nenhuma actividade contemporânea - da música à informação, do comércio à meteorologia, da medicina à cartografia, das engenharias às comunicações – que não recorra à Matemática, para codificar, ordenar, quantificar e interpretar dados, taxas, dosagens, coordenadas, tensões, frequências e tantas outras variáveis.

O presente manual, concebido com base no Programa de Matemática para a 10.ª Classe e aprovado pelo Ministério da Educação da República de Moçambique (MINED), destina-se a auxiliar os alunos na formulação e sistematização das teorias matemáticas relativas a cada conteúdo e na aplicação desses conteúdos na resolução de problemas e exercícios bem como na elaboração e aplicação de resolução de problemas de outras disciplinas e no seu dia-a-dia.

Assim, o manual foi estruturado por forma a, além da apresentação dos conteúdos teóricos, conter variados exercícios resolvidos e outros propostos em cada unidade temática, terminando com uma síntese da matéria dada para uma melhor consolidação dos conteúdos abordados, antecedida de uma avaliação formativa destinada a aferir o nível de progressão do aluno na aquisição dos conteúdos ministrados.

No fim do manual, são apresentadas as soluções de todos os problemas propostos, possibilitando ao aluno fazer uma auto-avaliação da sua aprendizagem.

De acordo com George Polya (1995), em A arte de resolver problemas, se tiver dificuldades em resolver um problema proposto, procure, antes, rever a resolução dos exercícios resolvidos correspondentes e resolver algum problema do mesmo tipo, recorrendo à leitura da parte teórica, pois é no processo de resolução de problemas que se aprende Matemática.

Apresentamos referências históricas relativas a cada unidade temática em estudo para estimular o aluno a gostar e querer aprender cada vez mais Matemática.

Desejamos que este manual se revele um importante material de apoio no processo de ensino-aprendizagem de Matemática.

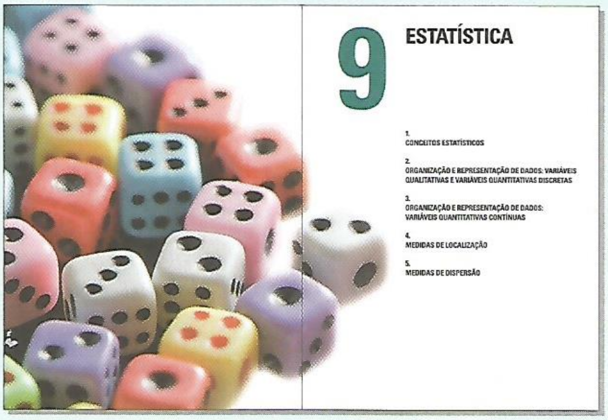
O autor

EXPLORAÇÃO DO MANUAL

Como utilizar o manual?

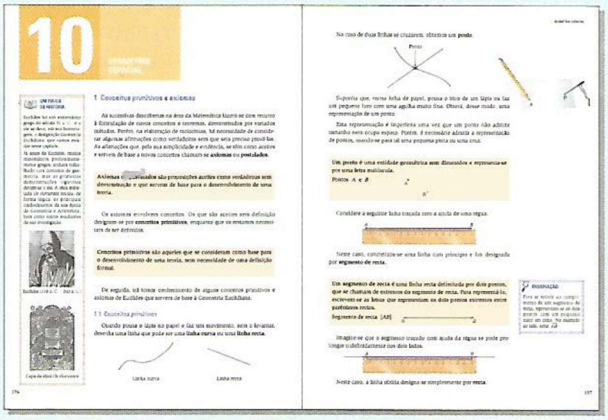
O manual **Matemática 10.ª Classe** pretende aplicar, de uma forma pedagogicamente adequada, as linhas orientadoras do currículo do Ensino Secundário Geral conjugadas com os conteúdos da disciplina de Matemática da 10.ª Classe. Está estruturado em dez unidades temáticas e as competências e as orientações do programa são desenvolvidas de forma coerente e funcional.

Em cada unidade temática encontra:



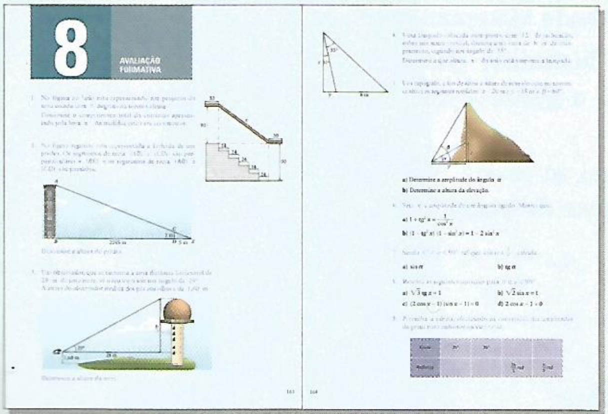
Abertura de unidade

Imagem sugestiva relacionada com os conteúdos a abordar e uma listagem dos temas tratados.



Desenvolvimento de conteúdos

Textos, imagens, esquemas e tabelas com informação rigorosa.



Avaliação formativa

Relaciona os conteúdos abordados permitindo uma auto-avaliação.

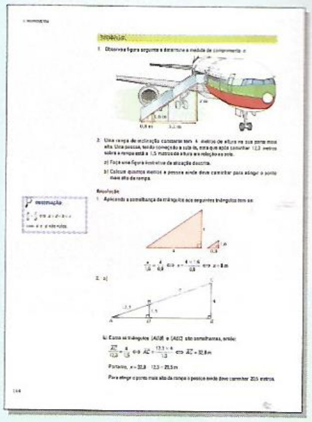
Para a consolidação dos conteúdos:

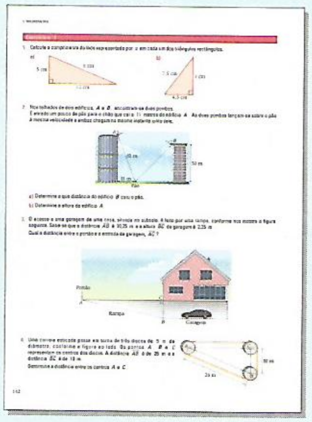
Conhecimento

Expõe definições e propriedades fundamentais à aprendizagem.

Exemplos

Orientam na consolidação dos novos conhecimentos ou evidenciam métodos de resolução.



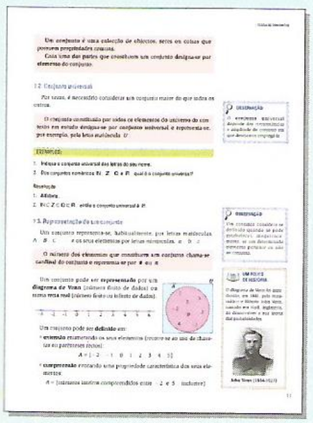


Exercícios

Aplicação dos conhecimentos adquiridos para incrementar a aprendizagem.

Observação / Um pouco de História...

Apresenta pequenos comentários que facilitam a compreensão do conteúdo em questão e, ainda, pequenas notas históricas.



Síntese

Sintetiza as aprendizagens adquiridas.

ÍNDICE

1 TEORIA DE CONJUNTOS

2 EQUAÇÃO QUADRÁTICA PARAMÉTRICA SIMPLES

3 EQUAÇÃO BIQUADRÁTICA

4 FUNÇÃO QUADRÁTICA

5 INEQUAÇÃO QUADRÁTICA

6 FUNÇÃO EXPONENCIAL

7 LOGARITMO E FUNÇÃO LOGARÍTMICA

8 TRIGONOMETRIA

9 ESTATÍSTICA

10 GEOMETRIA ESPACIAL

1 TEORIA DE CONJUNTOS

1 TEORIA DE CONJUNTOS

1. Noções básicas da teoria de conjuntos

UM POUCO DE HISTÓRIA...

Georg Cantor (1845-1918)

As ideias essenciais da teoria de conjuntos foram introduzidas por Georg Cantor no final do século XIX. Desde então, desenvolveu-se intensamente, de tal forma que hoje pode afirmar-se que todos os ramos da Matemática foram profundamente influenciados e enriquecidos por esta teoria que se encontra, por isso, na base de toda a Matemática.

1.1. Noção de conjunto e elemento de um conjunto

Antes de nos debruçarmos sobre a noção de conjunto, comecemos por dar alguns exemplos.

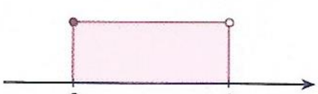
a) Os membros de uma família são: o Augusto, a Maria, o Carlos, a Fernanda, o Diogo e a Bianca.

b) No mapa de Moçambique apresentado ao lado podemos observar:

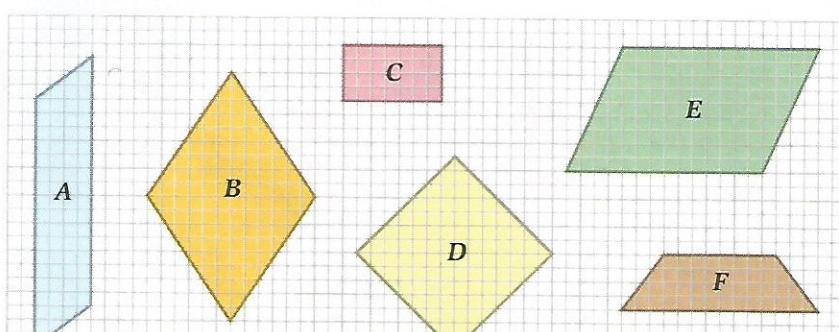
- o grupo das províncias: Maputo, Gaza, Inhambane, Sofala, Manica, Zambézia, Tete, Cabo Delgado, Nampula e Niassa;
- o grupo das capitais provinciais de Moçambique: Maputo, Xai-Xai, Inhambane, Beira, Chimoio, Quelimane, Tete, Pemba, Nampula e Lichinga.

c) O conjunto dos números reais que são solução da equação $x^3 - x = 0$: $\{-1 \, , \, 0 \, , \, 1\}$.

d) O conjunto dos números reais maiores ou iguais a zero e menores do que um: $[0 \, , \, 1[$.



e) O grupo de quadriláteros:



Cada um dos grupos acima referidos designa-se por **conjunto**.

Um **conjunto** é uma colecção de objectos, seres ou coisas que possuem propriedades comuns.

Cada uma das partes que constituem um conjunto designa-se por **elemento** do conjunto.

1.2. Conjunto universal

Por vezes, é necessário considerar um conjunto maior do que todos os outros.

O conjunto constituído por todos os elementos do universo do contexto em estudo designa-se por **conjunto universal** e representa-se, por exemplo, pela letra maiúscula U.

OBSERVAÇÃO:

O **conjunto universal** depende das circunstâncias e amplitude do contexto em que desejamos empregá-lo.

EXEMPLOS:

1. Indique o conjunto universal das letras do seu nome.
2. Dos conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$, qual é o conjunto universal?

Resolução

1. Alfabeto.
2. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, então o conjunto universal é $\mathbb{R}$.

OBSERVAÇÃO:

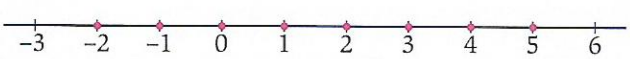
Um conjunto considera-se definido quando se pode estabelecer, inequivocamente, se um determinado elemento pertence ou não ao conjunto.

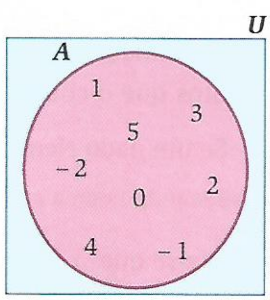
1.3. Representação de um conjunto

Um conjunto representa-se, habitualmente, por letras maiúsculas, A, B, C, ... e os seus elementos por letras minúsculas, a, b, c, ...

O número dos elementos que constituem um conjunto chama-se **cardinal** do conjunto e representa-se por # ou n.

Um conjunto pode ser **representado** por um **diagrama de Venn** (número finito de dados) ou numa **recta real** (número finito ou infinito de dados).





Um conjunto pode ser **definido** em:

- **extensão** enumerando os seus elementos (recorre-se ao uso de chavetas ou parênteses rectos):

$$A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

- **compreensão** evocando uma propriedade característica dos seus elementos:

$A = \{$números inteiros compreendidos entre -2 e 5, inclusive$\}$

UM POUCO DE HISTÓRIA...

O diagrama de Venn foi introduzido, em 1881, pelo matemático e filósofo John Venn, nascido em Hull, Inglaterra, ao desenvolver a sua teoria das probabilidades.

John Venn (1834-1923)

EXEMPLO:

Seja:

- o conjunto A constituído pelos números naturais entre 3 e 12, inclusive;
- o conjunto B constituído pelos números 5, 6 e 7;
- o conjunto C composto pelos números reais maiores que 0 e menores ou iguais a 6.

a) Defina os conjuntos A, B e C em extensão.

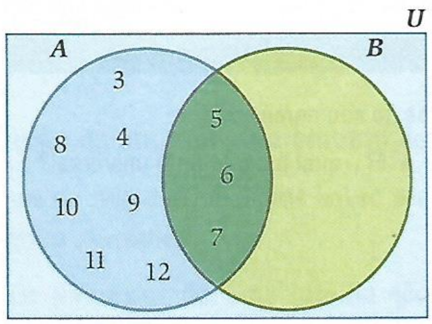
b) Represente os conjuntos A e B num mesmo diagrama de Venn.

c) Determine o cardinal dos conjuntos A e B.

Resolução

a) $A=\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ $B=\{5, 6, 7\}$ $C=]0, 6]$

b)



c) $\#A=10$ e $\#B=3$.

Exercício n.º 1

1. Defina em extensão os seguintes conjuntos.
   - a) $A=\{\text{Vogais do alfabeto}\}$
   - b) $B=\{\text{Números pares entre } 7 \text{ e } 13\}$
   - c) $C=\{\text{Divisores de } 18\}$
   - d) $D=\{x \in \mathbb{R} : x^2=1\}$
   - e) $E=\{x \in \mathbb{N} : 4<x\leqslant 10\}$
   - f) $F=\{x : x \text{ é algarismo do número } 240\,160\}$

2. Defina em compreensão os seguintes conjuntos.
   - a) $A=\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$
   - b) $B=\{4, 6, 8, 10, 12, 14\}$
   - c) $C=\{2, 4, 8, 16\}$

1.4. Relação de pertença

O conhecimento de um conjunto implica conhecer cada um dos elementos que o constituem.

Se um dado elemento x pertence a um conjunto A, escreve-se:

$$x \in A.$$

Diz-se que x é um elemento do conjunto A.

No caso de um objecto y não pertencer a um conjunto B escreve-se:

$$y \notin B.$$

OBSERVAÇÃO:

$x^2-9=0 \iff x^2=9$

$\iff x=-\sqrt{9} \vee x=\sqrt{9}$

$\iff x=-3 \vee x=3$

EXEMPLOS:

a) Maputo $\in$ {cidades moçambicanas}

b) Pombo $\notin$ {quadrúpede}

c) $-25 \notin \mathbb{N}$

d) $-3 \in \{x \in \mathbb{R} : x^2-9=0\}$

1.5. Conjunto vazio e conjunto singular

Consideremos os seguintes conjuntos definidos em compreensão:

$$A = \{\text{dinossauros vivos}\} \ ; \ B = \{\text{Números primos pares}\}$$

Verifica-se que o conjunto A não tem elementos e o conjunto B tem um único elemento, $B = \{2\}$.

Um conjunto que não tem elementos chama-se **conjunto vazio** e representa-se por $\{\ \}$ ou $\emptyset$.

Um conjunto com um único elemento chama-se **conjunto singular.**

No exemplo anterior, $A = \emptyset$ e $B = \{2\}$, onde $\#A = 0$ e $\#B = 1$.

EXEMPLOS:

1. Defina em extensão os seguintes conjuntos.
   a) $A = \{\text{números primos divisíveis por } 6\}$
   b) $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 0\}$

2. $\{\emptyset\}$ é o mesmo que $\{\ \}$? Justifique a resposta.

Resolução

1. a) $A = \{\ \}$
   b) $B = \emptyset$, pois a equação $x^2 + 1 = 0$ é impossível.

2. Não, pois $\{\emptyset\}$ é um conjunto singular com um único elemento, $\emptyset$, e $\{\ \}$ é um conjunto sem elementos, ou seja, um conjunto vazio.

Exercício n.º 2

1. Seja:
   - A o conjunto dos números naturais entre 8 e 12, inclusive;
   - B o conjunto dos números pares entre 1 e 15;
   - C o conjunto dos números primos até 20.

   a) Defina, em extensão, cada um dos conjuntos.

   b) Defina, em compreensão, cada um dos conjuntos.

   c) Complete os espaços com os símbolos $\in$ ou $\notin$ de forma a obter afirmações verdadeiras.

3 ___ A	3 ___ B	3 ___ C	10 ___ A
10 ___ B	10 ___ C	2 ___ A	2 ___ B

2. Seja $A = \{3, 5, 7, 9, 11, 15\}$.

   a) Defina, em extensão, cada um dos conjuntos:

   $B = \{x \in A : x \text{ é ímpar}\}$ $\qquad$ $C = \{x \in A : x \text{ é múltiplo de } 15\}$

   $D = \{x \in A : x \text{ é múltiplo de } 5\}$ $\qquad$ $E = \{x \in A : x \text{ é divisível por } 2\}$

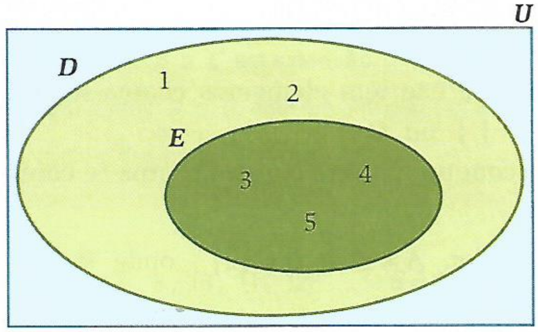
   b) Indique o cardinal de cada um dos conjuntos obtidos na alínea anterior.

   c) Classifique, quanto ao número de elementos, os conjuntos C e E.

2. Relações entre conjuntos

2.1. Subconjuntos. Relação de inclusão

Consideremos os conjuntos $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $E = \{3, 4, 5\}$ representados no seguinte diagrama de Venn:



Como podemos constatar, todos os elementos do conjunto E são também elementos de D. Diz-se, então, que o conjunto E está **contido** no conjunto D; E é **subconjunto** de D ou que D **contém** E e escreve-se $E \subset D$ (lê-se "E está contido em D") ou $D \supset E$ (lê-se "D contém E").

Se pelo menos um dos elementos de um conjunto A não pertencer a um dado conjunto B, então diz-se que **A não está contido em B** ou que **B não contém A** e escreve-se $A \not\subset B$ (lê-se "A não está contido em B") ou $B \not\supset A$ (lê-se "B não contém A").

OBSERVAÇÃO:

É fácil verificar que o conjunto vazio é subconjunto (está contido) de **qualquer conjunto**, pois se tal **não** fosse existiria, pelo menos, um elemento de $\emptyset$ que **não** estaria no conjunto, mas isso é impossível porque o conjunto vazio não tem elementos.

Sejam A e B dois conjuntos quaisquer. Dizemos que A está contido em B, e escrevemos $A \subset B$, se e só se todos os elementos do conjunto A pertencerem ao conjunto B. Neste caso, A é um subconjunto de B.

EXEMPLOS:

1. Considere os seguintes conjuntos:

$A = \{3, 6, 9, 12, 15\}$ $\quad$ $B = \{6, 12\}$

$C = \{\text{Números ímpares}\}$ $\quad$ $D = \{\text{Números pares}\}$

$E = \{\text{Países africanos}\}$ $\quad$ $F = \{\text{Moçambique, Angola, Tanzânia}\}$

$G = \{x \in \mathbb{N} : 2 \leqslant x \leqslant 10\}$ $\quad$ $H = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 = 0\}$

Usando os símbolos $\subset$, $\supset$, $\not\subset$ e $\not\supset$ complete os espaços de forma a obter afirmações verdadeiras.

a) A ______ B **b)** D ______ C **c)** F ______ E

d) G ______ A **e)** H ______ B **f)** H ______ G

2. Represente todos os subconjuntos do conjunto $A = \{1, 2, 3\}$.

Resolução

1. **a)** $A \supset B$ **b)** $D \not\subset C$ **c)** $F \subset E$

d) $G \not\subset A$ **e)** $H \not\subset B$ **f)** $H \not\subset G$

2. $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$ e $\{1, 2, 3\}$.

2.2. Igualdade de conjuntos

Consideremos os conjuntos:

$A = \{x \in \mathbb{N} : x > 5\}$

$B = \{0\ ,\ 2\ ,\ 4\ ,\ 6\ ,\ 8\ ,\ 10\ ,\ ...\}$

$C = \{6\ ,\ 7\ ,\ 8\ ,\ 9\ ,\ 10\ ,\ ...\}$

Observe que os conjuntos A e C são constituídos pelos mesmos elementos. Dizem-se, por isso, **iguais** e escreve-se $A = C$. No entanto, pelo menos um elemento do conjunto B não é elemento de A nem de C. Nestas condições, o conjunto B é diferente tanto do conjunto A como de C e escreve-se $B \neq C$ e $B \neq A$.

Dois conjuntos A e B são **iguais** se, e somente se, $A \subset B$ e $B \subset A$, ou seja, se tiverem os mesmos elementos, e escreve-se:

$$A = B$$

EXEMPLOS:

1. Para cada caso, verifique se existe igualdade entre os conjuntos.

   a) $A=\{0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\}$; $B=\{2\ ,\ 3\ ,\ 4\ ,\ 1\ ,\ 0\}$

   b) $C=\{1\ ,\ 3\ ,\ 2\ ,\ 5\}$; $D=\{3\ ,\ 2\ ,\ 5\ ,\ 6\}$

   c) $E=\{x \in \mathbb{N} : -3 \leqslant x \leqslant 3\}$; $F=\{x \in \mathbb{Z} : -3 \leqslant x \leqslant 3\}$

2. Dados os conjuntos $A=\{1\ ,\ 3\ ,\ 2y\}$ e $B=\{4\ ,\ 1\ ,\ 3\}$, determine o valor de y para o qual $A=B$.

Resolução

1. a) $A=B$ pois os dois conjuntos têm os mesmos elementos apesar da ordem não ser igual.

   b) $C \neq D$ porque o elemento 1 do conjunto C não pertence a D e o elemento 6 do conjunto D não pertence a C.

   c) Em extensão, os conjuntos são definidos da seguinte forma:

   $E=\{1\ ,\ 2\ ,\ 3\}$

   $F=\{-3\ ,\ -2\ ,\ -1\ ,\ 0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ 3\}$

   Apesar dos elementos do conjunto E pertencerem a F, os conjuntos não são iguais pois os elementos -3, -2, -1 e 0 não pertencem a E, logo, $E \neq F$.

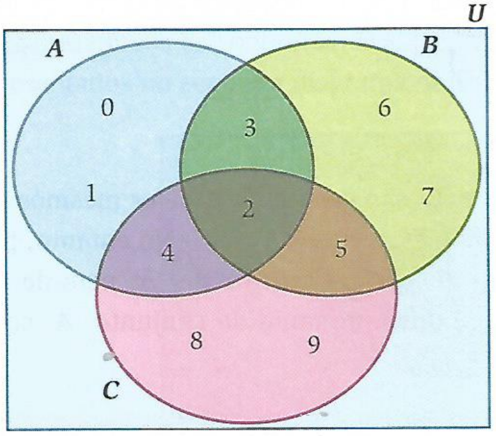
2. Para que os dois conjuntos sejam iguais, falta apenas $2y=4$.

   $2y=4 \iff y=2$

   O valor de y para o qual $A=B$ é 2.

Exercício n.º 3

1. Considere os conjuntos representados pelo seguinte diagrama de Venn:



Defina em extensão os conjuntos A, B e C.

2. Escreva em linguagem matemática as seguintes afirmações.

a) a é elemento do conjunto A.

b) A é subconjunto de B.

c) A contém B.

d) A não está contido em B.

e) a não é um elemento de B.

f) A não contém B.

3. Dado o conjunto $A=\{a, e, i\}$ identifique as afirmações verdadeiras (V) e as falsas (F).

a) $a \in A$

b) $a \subset A$

c) $h \notin A$

d) $\{a\} \not\subset A$

e) $\{e, i\} \subset A$

f) $A \subset A$

g) $A \supset \{a, e, u\}$

h) $\emptyset \subset A$

4. Defina os seguintes conjuntos em extensão.

a) $A=$ {letras da palavra biologia}

b) $B=\{x \in \mathbb{N} : x^2+16=9\}$

c) $C=\{x \in \mathbb{Z} : -3<x \leqslant 3\}$

d) $D=\{x \in \mathbb{N} : x^2+2x-3=0\}$

5. Indique todos os subconjuntos do conjunto $B=\{\{1\}, \{2, 3\}\}$.

6. Identifique as afirmações verdadeiras (V) e as falsas (F).

a) $\{1, 2, 3\}=\{3, 2, 1\}$

b) $\{0, 2, 3\} \subset \{3, 2, 1\}$

c) {gatos, cães, vacas} $\supset$ {animais}

d) $\emptyset \subset \{1, 2, 3\}$

e) $\{2, 3\} \supset \{x : x^2-5x+6=0\}$

f) $\{4\} \in \{\{4\}\}$

g) $\{x \in \mathbb{N} : 1 \leqslant x \leqslant 10\}=\{x \in \mathbb{R} : 1 \leqslant x \leqslant 10\}$

7. Determine o conjunto A que satisfaça, simultaneamente, as seguintes condições:

- $A \subset \{a, b, c, d\}$
- $A \subset \{a, c, e\}$
- $\{a, c\} \subset A$

3. Operações com conjuntos

Uma operação é um processo a partir do qual dados dois elementos quaisquer se pode obter um terceiro elemento de mesma natureza. Deste modo, as **operações com conjuntos** consistem em determinar um terceiro conjunto dados dois conjuntos quaisquer.

3.1. Reunião de conjuntos

EXEMPLO:

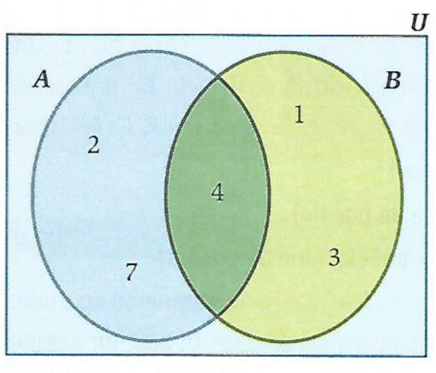
Sejam $A=\{2\ ,\ 4\ ,\ 7\}$ e $B=\{1\ ,\ 3\ ,\ 4\}$ dois subconjuntos do conjunto dos números naturais, $\mathbb{N}$.

a) Represente os dois conjuntos num mesmo diagrama de Venn.

b) Defina em extensão o conjunto C cujos elementos pertencem a **pelo menos** um dos conjuntos A ou B.

Resolução

a)



b) Os elementos 2 e 7 pertencem só a A, 1 e 3 pertencem só a B e o elemento 4 pertence aos dois conjuntos. Assim, $C=\{1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\ ,\ 7\}$.

Ao conjunto constituído pelos elementos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos A ou B (podendo pertencer aos dois) chama-se **conjunto reunião** dos conjuntos A e B (ou simplesmente **reunião de** A e B) e representa-se por $A \cup B$ (lê-se "A reunião com B" ou "A ou B").

Relativamente aos conjuntos do exemplo anterior:

$$A \cup B=\{1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\ ,\ 7\}\ .$$

Sejam A e B dois conjuntos quaisquer. Chama-se **reunião** ou **união de** A **com** B ao conjunto de todos os elementos que pertencem a **pelo menos** um dos conjuntos A ou a B e representa-se por:

$$A \cup B$$

Assim, $A \cup B=\{x : x \in A \ \vee \ x \in B\}$.

OBSERVAÇÃO:

A **reunião** de um conjunto A com o conjunto vazio é o conjunto A, ou seja:

$$A \cup \emptyset = A$$

EXEMPLOS:

1. Sejam os conjuntos:

$A=\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$; $B=\{4, 8, 12, 19\}$;

$C=$ {Alunos que gostam de futebol}; $D=$ {Alunos que gostam de basquetebol};

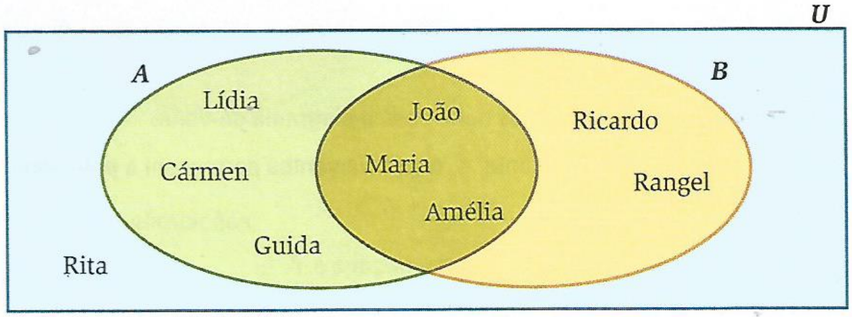
determine:

a) $A \cup B$ **b)** $C \cup D$

2. No universo de alunos de uma escola definiram-se os conjuntos:

$A=$ {Leitores de literatura policial}; $B=$ {Leitores de poesia}

que estão representados no diagrama de Venn seguinte:



Defina, em extensão, os conjuntos:

a) $A \cup B$;

b) $C=$ {Leitores só de poesia};

c) $D=$ {Leitores só de literatura policial};

d) $E=$ {Leitores de literatura policial e de poesia};

e) $F=$ {Não-leitores nem de literatura policial nem de poesia}.

3. Considere os seguintes conjuntos:

$M=\{x \in \mathbb{R} : -1 \leqslant x < 4\}$; $N=\{x \in \mathbb{R} : 2 < x < 9\}$

Determine $M \cup N$.

Resolução

1. **a)** $A \cup B=\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 19\}$

b) $C \cup D=$ {Alunos que gostam de futebol ou de basquetebol}

2. **a)** $A \cup B=$ {Lídia, Cármen, Guida, João, Maria, Amélia, Ricardo, Rangel}

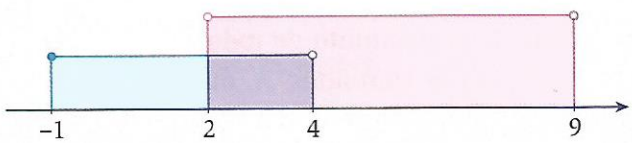
b) $C=$ {Ricardo, Rangel}

c) $D=$ {Lídia, Cármen, Guida}

d) $E=$ {João, Maria, Amélia}

e) $F=$ {Rita}

3. Representação na mesma recta real dos dois conjuntos:



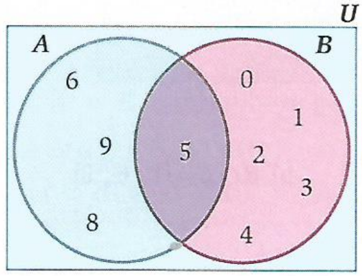
Os elementos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos são:

$M \cup N=\{x \in \mathbb{R} : -1 \leqslant x < 9\}$

3.2. Intersecção de conjuntos

Considere os conjuntos $A=\{5\ ,\ 6\ ,\ 8\ ,\ 9\}$ e $B=\{0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\ ,\ 5\}$. Seja C o conjunto constituído pelos **elementos comuns** aos dois conjuntos.

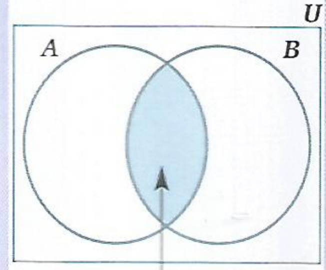
Representando os dois conjuntos pelo diagrama de Venn seguinte, observa-se:



O conjunto constituído pelos elementos comuns aos conjuntos dados chama-se **conjunto intersecção**.

O conjunto intersecção dos conjuntos A e B dados representa-se por $A \cap B$ e lê-se "A intersecção com B". Assim, $C = A \cap B = \{5\}$.

> **OBSERVAÇÃO:**
>
> Os diagramas de Venn ajudam a visualizar a reunião e a intersecção de conjuntos correspondendo a **reunião** a todos os elementos presentes no interior dos balões do diagrama e a **intersecção** apenas à região sombreada.



Intersecção

Sejam A e B dois conjuntos quaisquer. Chama-se intersecção de A com B ao conjunto de todos os elementos que pertencem, simultaneamente, a A e a B e simboliza-se por: $A \cap B$.

Assim, $A \cap B = \{x : x \in A \ \wedge \ x \in B\}$.

> **OBSERVAÇÃO:**
>
> A **intersecção** de um conjunto A com o conjunto vazio é o conjunto vazio, ou seja:
>
> $A \cap \varnothing = \varnothing$

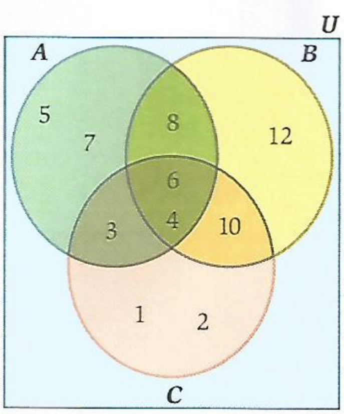
EXEMPLOS:

1. Considere os conjuntos $B=\{-3\ ,\ -4\ ,\ -5\ ,\ -6\}$ e $C=\{-7\ ,\ -8\ ,\ -9\}$.
   a) Represente-os num mesmo diagrama de Venn.
   b) Determine o conjunto $B \cap C$.

2. Dados os conjuntos $A=\{2\ ,\ 3\ ,\ 5\ ,\ 6\ ,\ 7\ ,\ 8\}$, $B=\{1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 6\ ,\ 8\}$ e $C=\{1\ ,\ 4\ ,\ 6\ ,\ 8\}$, determine:
   a) $A \cap B$
   b) $B \cap C$
   c) $A \cap B \cap C$

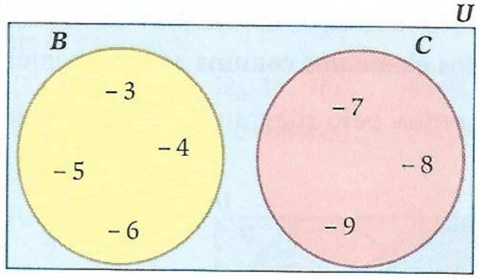
3. Considere os conjuntos:
   $A=$ {números naturais menores que 7}
   $B=$ {números naturais maiores que 4 e menores que 11}
   Defina, em extensão, os conjuntos:
   a) A b) B c) $A \cup B$ d) $A \cap B$

4. Observe o diagrama de Venn representado ao lado.
   Defina, em extensão, os conjuntos:
   a) A b) B c) C d) $A \cup B$
   e) $A \cup C$ f) $B \cup C$ g) $A \cap B$ h) $A \cap C$
   i) $B \cap C$ j) $A \cap B \cap C$ l) $A \cup B \cup C$



Resolução

1. a)



b) $B \cap C = \emptyset$

2. a) $A \cap B = \{2, 3, 6, 8\}$ b) $B \cap C = \{1, 6, 8\}$ c) $A \cap B \cap C = \{6, 8\}$

3. a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ b) $B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
c) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ d) $A \cap B = \{5, 6\}$

4. a) $A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ b) $B = \{4, 6, 8, 10, 12\}$
c) $C = \{1, 2, 3, 4, 6, 10\}$ d) $A \cup B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12\}$
e) $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$ f) $B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 12\}$
g) $A \cap B = \{4, 6, 8\}$ h) $A \cap C = \{3, 4, 6\}$
i) $B \cap C = \{4, 6, 10\}$ j) $A \cap B \cap C = \{4, 6\}$
l) $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12\}$

3.3. Diferença de conjuntos

EXEMPLO:

Dados dois conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$:

a) represente os dois conjuntos num mesmo diagrama de Venn.

b) defina em extensão o conjunto:

i) $A \cup B$;

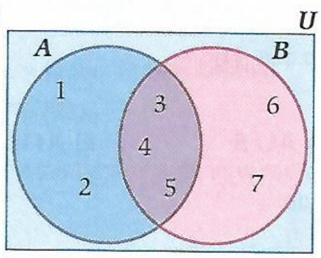
ii) $A \cap B$;

iii) C constituído por elementos do conjunto A que não pertencem ao conjunto B;

iv) D constituído por elementos do conjunto B que não pertencem ao conjunto A.

Resolução

a)



b) i) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

ii) $A \cap B = \{3, 4, 5\}$

iii) $C = \{1, 2\}$

iv) $D = \{6, 7\}$

Dados os conjuntos A e B quaisquer, o conjunto constituído pelos elementos de A que não pertencem a B chama-se **conjunto diferença entre** A **e** B (ou simplesmente **diferença entre** A **e** B) e representa-se por: $A \backslash B$

Assim, $A \backslash B = \{x : x \in A \ \wedge \ x \notin B\}$.

O conjunto reunião dos conjuntos $A \backslash B$ e $B \backslash A$ chama-se **diferença simétrica dos conjuntos** A **e** B e designa-se por $A \Delta B$, pelo que:

$$A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) \ .$$

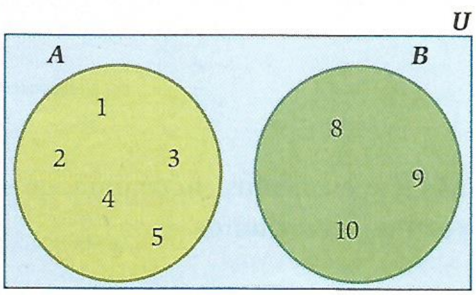
Assim, $A \Delta B = \{x : (x \in A \ \wedge \ x \notin B) \ \vee \ (x \in B \ \wedge \ x \notin A)\}$.

EXEMPLOS:

1. Dados os conjuntos $A = \{1 , 2 , 3 , 4 , 5\}$ e $B = \{8 , 9 , 10\}$.
   a) Represente os conjuntos dados num mesmo diagrama de Venn.
   b) Determine:
   i) $A \cap B$ ii) $A \cup B$ iii) $A \backslash B$ iv) $B \backslash A$ v) $A \Delta B$
2. Dados os conjuntos $A = \{2 , 3 , 5 , 6 , 7 , 8\}$, $B = \{1 , 2 , 3 , 6 , 8\}$ e $C = \{1 , 4 , 6 , 8\}$, determine $(A \backslash B) \cap C$.

Resolução

1. a)



b) i) $A \cap B = \emptyset$ ii) $A \cup B = \{1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 8 , 9 , 10\}$ iii) $A \backslash B = A$
iv) $B \backslash A = B$ v) $A \Delta B = A \cup B$

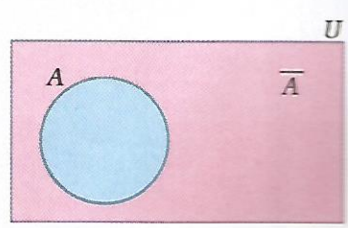
2. $(A \backslash B) \cap C = \{5 , 7\} \cap C = \emptyset$

3.4. Complementar de um conjunto

Seja o conjunto A qualquer e o conjunto universal U tal que $A \subset U$. **O complementar do conjunto** A é o conjunto de todos os elementos que pertencem a U e não pertencem a A e simboliza-se por:

$$\overline{A} \text{ ou } c(A).$$

Assim, $\overline{A} = \{x : x \in U \ \wedge \ x \notin A\}$.



Do diagrama de Venn representado ao lado resulta que $A \cup \overline{A} = U$ e $A \cap \overline{A} = \emptyset$.

EXEMPLO:

Sejam $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $B=\{5, 6\}$ definidos no conjunto universo dos números naturais. Determine:

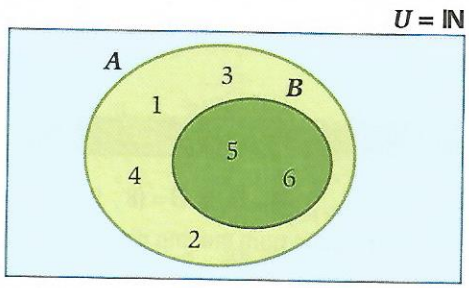
a) o complementar de A;

b) o complementar de B;

c) a diferença entre A e B;

d) a diferença entre B e A.

Resolução



a) $\overline{A}=\{7, 8, 9, 10, 11, ...\}$

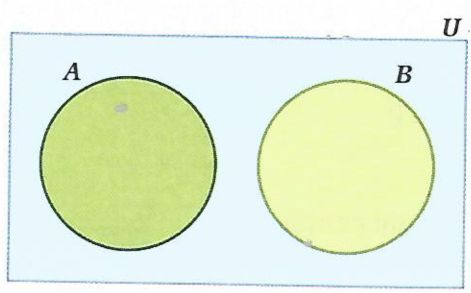
b) $\overline{B}=\{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, ...\}$

c) $A \backslash B=\{1, 2, 3, 4\}$

d) $B \backslash A=\{\}$

3.5. Conjuntos disjuntos

Se dois conjuntos A e B não têm elementos em comum, ou seja, $A \cap B = \emptyset$, então A e B são **conjuntos disjuntos.**



EXEMPLO:

Para os conjuntos $A=\{1, 2, 3\}$ e $B=\{4, 5, 6\}$, temos que $A \cap B=\emptyset$, pelo que os conjuntos são disjuntos.

3.6. Propriedades das operações com conjuntos

Para quaisquer conjuntos A , B e C definidos sobre um conjunto universal U , as operações de reunião e intersecção verificam as seguintes propriedades:

PROPRIEDADE	REUNIÃO	INTERSECÇÃO
Comutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Associativa	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Elemento neutro	$\emptyset$ é o elemento neutro da reunião de conjuntos $A \cup \emptyset = A$	U é o elemento neutro da intersecção de conjuntos $A \cap U = A$
Elemento absorvente	U é o elemento absorvente da reunião de conjuntos $U \cup A = U$	$\emptyset$ é o elemento absorvente da intersecção de conjuntos $A \cap \emptyset = \emptyset$
Idempotência	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
Distributiva	Em relação à intersecção: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	Em relação à reunião: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

EXEMPLO:

Sendo U o conjunto universal de dois conjuntos A e B quaisquer, demonstre as seguintes igualdades:

a) $(A \cup B) \cap \overline{B} = A \cap \overline{B}$

b) $A \cup (A \cap B) = A$

Resolução

a) $(A \cup B) \cap \overline{B} = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{B})$
$= (A \cap \overline{B}) \cup \emptyset$
$= A \cap \overline{B}$

(Propriedade distributiva da intersecção em relação à reunião)

b) $A \cup (A \cap B) = (A \cup A) \cap (A \cup B)$
$= A \cap (A \cup B)$
$= A$

(Propriedade distributiva da reunião em relação à intersecção)

Exercício n.º 4

1. No conjunto universal $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, definem-se os conjuntos $A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B=\{2, 4, 6, 8\}$ e $C=\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Determine:

a) $A \cup B$ b) $A \cup C$ c) $A \cap B$
d) $A \cap C$ e) $A \backslash C$ f) $C \backslash A$
g) $A \backslash B$ h) $B \backslash A$ i) $A \Delta B$
j) $\overline{A}$ l) $\overline{C}$ m) $\overline{A \cup B}$
n) $\overline{A \cap C}$ o) $\overline{A \backslash B}$ p) $\overline{A \backslash C}$
q) $(A \backslash B) \cap C$ r) $(A \backslash B) \cup (B \backslash C)$ s) $(A \cup B) \cap (A \cup C)$

2. Se $A=\emptyset$ e $B=\{\emptyset\}$, quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

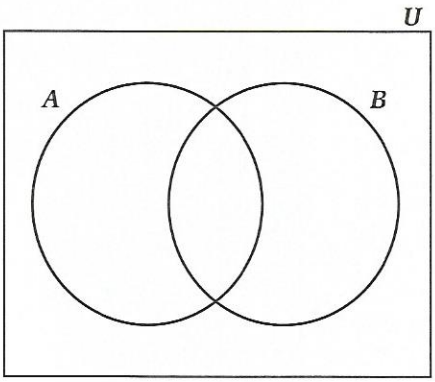
(A) $A \in B$ (B) $A \cup B=\emptyset$ (C) $A=B$
(D) $A \cap B=B$ (E) $B \subset A$

3. Dados os conjuntos $A=\{x \in \mathbb{R} : -3<x<5\}$ e $B=\{x \in \mathbb{Z} : -1<x<7\}$, determine $A \cap B$.

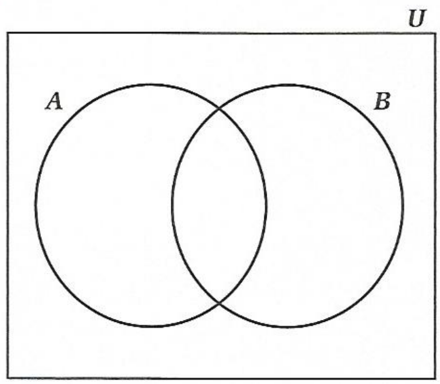
4. Dados os conjuntos $A=\{x \in \mathbb{N} : x \text{ é ímpar}\}$, $B=\{x \in \mathbb{Z} : -3 \leqslant x<4\}$ e $C=\{x \in \mathbb{Z} : x<6\}$, determine $(A \cap B) \cup (B \cap C)$.

5. Nos seguintes diagramas, assinale as áreas correspondentes a:

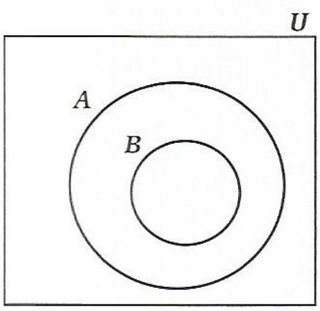
a) $\overline{A}$



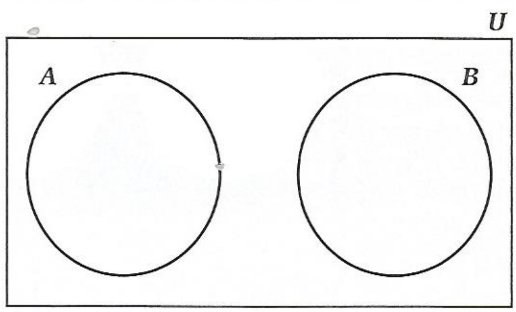
b) $A \backslash B$



c) $A \cap \overline{B}$



d) $\overline{A} \cap \overline{B}$



6. Seja U o conjunto universal onde se define o conjunto A. Determine:

a) $U \cup A$ b) $\overline{A} \cup A$ c) $A \cap \overline{A}$ d) $A \cup A$
e) $U \cap \overline{A}$ f) $\overline{U}$ g) $\overline{\{\}}$ h) $U \cap A$
i) $A \backslash \emptyset$ j) $\emptyset \cup A$ l) $U \backslash A$ m) $A \backslash U$

4. Resolução de problemas

Existem vários problemas do quotidiano que podem ser resolvidos com o auxílio da teoria de conjuntos. Nestas situações, procura-se o método de resolução mais conveniente. Habitualmente, é útil a representação dos conjuntos por diagramas de Venn.

EXEMPLOS:

1. Numa avaliação de Matemática com apenas duas perguntas, 300 alunos acertaram **somente** numa das perguntas e 260 acertaram na **segunda**. Sabendo que 100 alunos acertaram nas **duas** e 210 alunos **erraram** na primeira pergunta, calcule o número de alunos que foram submetidos à avaliação.

2. Dos 150 funcionários de uma repartição pública, 60 lêem a revista A, 80 lêem a revista B e todos os funcionários lêem **pelo menos** uma delas.
   Determine o número de funcionários que lêem as **duas** revistas.

3. Um levantamento epidemiológico entre os pacientes de um centro de saúde de uma cidade, revelou que exactamente 17% sofrem de tuberculose, 22% de sida e 8% de tuberculose e sida.

   Determine a percentagem de pacientes do centro de saúde que não sofrem de tuberculose nem de sida.

4. Numa comunidade de 1800 pessoas os programas de televisão favoritos são três: **desporto** (E), **telenovela** (N) e **telejornal** (H).

   A tabela seguinte mostra quantas pessoas assistem a esses programas.

PROGRAMAS	E	N	H	E e N	E e H	N e H	E, N e H
NÚMERO DE TELESPECTADORES	400	1220	1080	220	180	800	100

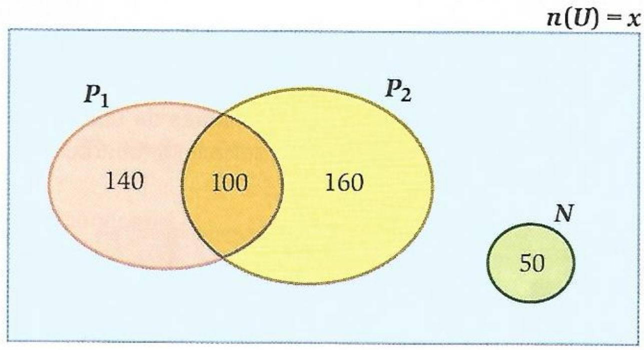
   Determine o número de pessoas da comunidade que não assistem a qualquer um dos três programas.

Resolução

1. Sejam:
   - U = {alunos submetidos à avaliação}
   - P_1 = {alunos que acertaram na primeira pergunta}
   - P_2 = {alunos que acertaram na segunda pergunta}
   - N = {alunos que erraram as duas perguntas}

- Cem alunos acertaram nas duas questões. Se 260 acertaram na segunda, então $260 - 100 = 160$ acertaram **apenas** na segunda questão.
- Se 300 acertaram somente uma das questões e 160 acertaram apenas a segunda, $300 - 160 = 140$ acertaram **somente** na primeira.
- Como 210 erraram a primeira, incluindo os 160 que também erraram a primeira, $210 - 160 = 50$ erraram as duas.

De modo a facilitar a resolução do que se pretende, esquematiza-se a situação com o auxílio do diagrama de Venn seguinte:

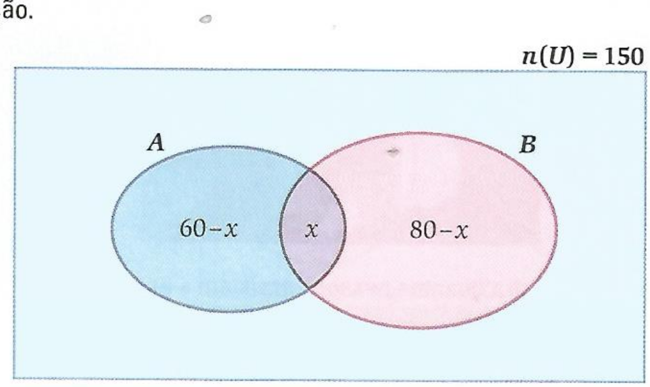


Número de alunos submetidos à avaliação: $x = 140 + 100 + 160 + 50 = 450$

Resposta: Foram submetidos à avaliação 450 alunos.

2. Sejam:
   - U = {funcionários}
   - A = {funcionários que lêem a revista A}
   - B = {funcionários que lêem a revista B}
   - x = o número dos funcionários que lêem as duas revistas

Com base nos dados, procede-se à elaboração de um diagrama de Venn, colocando o número de elementos dos conjuntos, começando sempre pelo conjunto intersecção.



Do diagrama de Venn, tem-se:

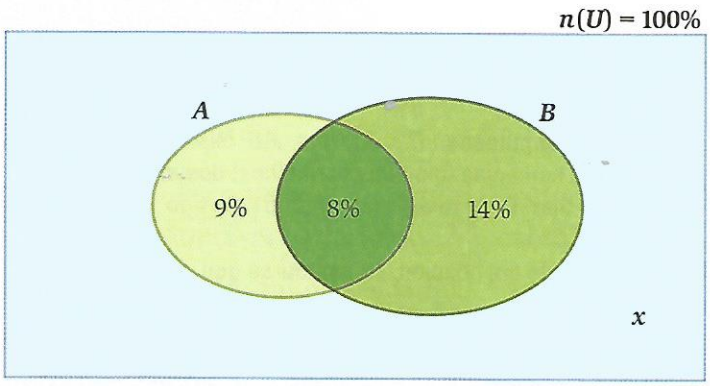
$60 - x + x + 80 - x = 150 \iff x = 150 - (60 + 80) \iff x = 10$

Resposta: 10 funcionários lêem as duas revistas.

3. Sejam:

- $U = \{$habitantes da cidade$\}$
- $A = \{$habitantes da cidade com tuberculose$\}$
- $B = \{$habitantes da cidade com sida$\}$
- $x =$ o número dos habitantes da cidade que não têm tuberculose nem sida

Com base nos dados, construímos um diagrama de Venn, colocando as percentagens respectivas a cada um dos conjuntos. Comece por anotar a percentagem relativa à intersecção dos conjuntos A e B, a partir da qual pode concluir as restantes a registar no diagrama.



OBSERVAÇÃO:

$n(A \setminus B) = 17\% - 8\% = 9\%$

$n(B \setminus A) = 22\% - 8\% = 14\%$

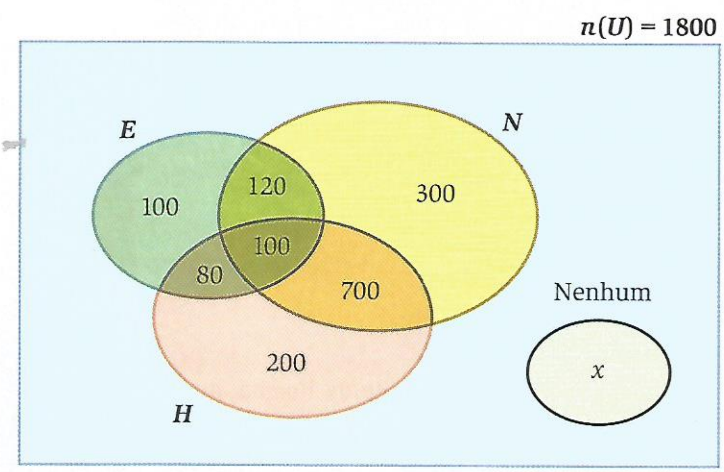
$n(A \cap B) = 8\%$

Do diagrama de Venn, tem-se:

$$x + 9\% + 8\% + 14\% = 100\% \Leftrightarrow x + 31\% = 100\% \Leftrightarrow x = 100\% - 31\%$$
$$\Leftrightarrow x = 69\%$$

Resposta: 69% dos habitantes da cidade não têm tuberculose nem sida.

4. Seja o conjunto universal $U = \{$pessoas da comunidade$\}$. No diagrama de Venn colocamos o número de elementos dos conjuntos, começando sempre pela intersecção, que tem 100 elementos. Seja x o número de pessoas da comunidade que não assiste a nenhum dos três programas referidos.



Do diagrama de Venn, tem-se:

$$x + 100 + 120 + 100 + 80 + 300 + 700 + 200 = 1800 \Leftrightarrow x = 1800 - 1600 \Leftrightarrow x = 200$$

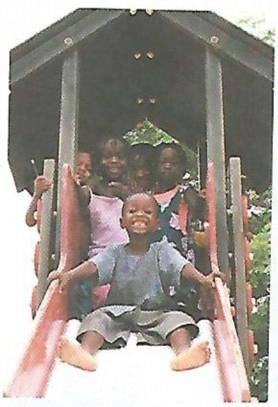
Resposta: 200 pessoas da comunidade não assistem a qualquer dos três programas.

Exercício n.º 5

1. Numa experiência de Biologia com um total de 30 moscas, 18 têm olhos vermelhos, 14 têm asas azuis e 5 têm ambas as características.
Quantas destas moscas nem têm olhos vermelhos nem asas azuis?

2. Os seres humanos apresentam quatro **grupos** ou **tipos sanguíneos**: O, A, B e AB (sistema ABO), cuja diferença é determinada pela presença/ausência na superfície das hemácias (glóbulos vermelhos) dos antigénios A e B. Diz-se que um sangue é do tipo A se tem o antigénio A; do tipo B se tem o antigénio B; do tipo AB se tem os antigénios A e B e do tipo O se não tem nenhum dos dois.
Numa pesquisa efectuada a um grupo de 120 pacientes de um hospital, constatou-se que 40 deles têm o antigénio A, 35 têm o antigénio B e 14 têm os dois antigénios.
Determine qual o número de pacientes cujo sangue **não** tem os antigénios A nem B.

3. Ao analisar os cartões de vacinação das 84 crianças de uma creche, verificou-se que 68 receberam a vacina Sabin (contra a paralisia infantil); 50 receberam a vacina contra o sarampo e 12 não foram vacinadas.
Determine o número de crianças que receberam:
a) as duas vacinas: contra a paralisia infantil e contra o sarampo;
b) apenas uma das vacinas;
c) pelo menos uma das vacinas.



4. Por ocasião da campanha de vacinação de idosos realizada na cidade de Pemba, num centro de saúde, foram aplicadas as vacinas contra a gripe (G), pneumococo (P) e antitétano (A), segundo a tabela seguinte:

VACINAS	G	P	A	G e P	G e A	P e A	G, P e A
NÚMERO DE VACINADOS	300	200	150	50	80	70	30

Determine o total de idosos vacinados neste centro, sabendo que todos os idosos tomaram pelo menos uma das vacinas.

1 AVALIAÇÃO FORMATIVA

1. Dados os conjuntos $A = \{0\ ,\ 1\}$, $B = \{0\ ,\ 2\ ,\ 3\}$ e $C = \{0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ 3\}$, identifique as afirmações verdadeiras (V) e as falsas (F).

a) $A \subset B$ b) $\{1\} \subset A$ c) $A \subset C$
d) $B \supset C$ e) $B \subset C$ f) $\{0\ ,\ 2\} \in B$

2. Se A e B são dois conjuntos diferentes tais que $A \subset B$ e $A \neq \emptyset$, identifique as afirmações verdadeiras (V) e as falsas (F).

a) Existe sempre $x \in A$ tal que $x \notin B$.
b) Existe sempre $x \in B$ tal que $x \notin A$.
c) Se $x \in B$, então $x \in A$.
d) Se $x \notin B$, então $x \notin A$.
e) $A \cap B = \emptyset$.

3. A Bianca e os amigos vão participar num concurso interturmas. Os grupos formados são:

A = {Augusto, Bianca, Carlos, Diogo}
B = {Bianca, Carlos, Diogo, Ernesto}
C = {Augusto, Carlos, Fernanda}

Determine:

a) $A \cup B$ b) $B \cap A$ c) $A \setminus B$ d) $B \setminus A$
e) $A \cap C$ f) $A \cup C$ g) $(A \cup B) \setminus C$ h) $A \cap (B \cup C)$

4. Num concurso para admissão de pessoal numa empresa, foram entrevistados 979 candidatos, dos quais 527 falam a língua inglesa, 251 a língua francesa e 321 não falam nenhum desses idiomas. Determine o número de candidatos que falam as línguas inglesa e francesa.

5. Num grupo de 99 desportistas, 40 jogam voleibol; 20 jogam voleibol e xadrez; 22 jogam xadrez e ténis; 18 jogam voleibol e ténis e 11 jogam as três modalidades. O número de desportistas que jogam xadrez é igual ao número de desportistas que jogam ténis. Quantos jogam:

a) ténis e não jogam voleibol?
b) xadrez ou ténis e não jogam voleibol?
c) voleibol e não jogam xadrez?

6. Uma pesquisa de mercado sobre a preferência de 200 consumidores por três produtos P_1, P_2 e P_3 mostrou que, dos entrevistados:

- 20 consumiam os três produtos;
- 30 os produtos P_1 e P_2;
- 50 os produtos P_2 e P_3;
- 60 os produtos P_1 e P_3;
- 120 o produto P_1;
- 75 o produto P_2.

Se todas as 200 pessoas entrevistadas preferiram, pelo menos, um dos produtos, determine quantas:

a) consumiam somente o produto P_3;

b) consumiam, pelo menos, dois dos produtos;

c) consumiam os produtos P_1 e P_2 e não P_3.

7. Uma pequena cidade do interior apresentava dois candidatos a presidente: Ricardinho, representante do PD (partido da direita), e André, representante do PE (partido de esquerda).

Uma semana antes da eleição foi elaborada uma sondagem com 500 eleitores. Estes deveriam indicar, num boletim de voto, em quem votariam. Os eleitores poderiam votar nos dois candidatos, em caso de dúvida, apenas num deles ou então votar em branco. Não era permitido anular o voto. Os resultados foram os seguintes:

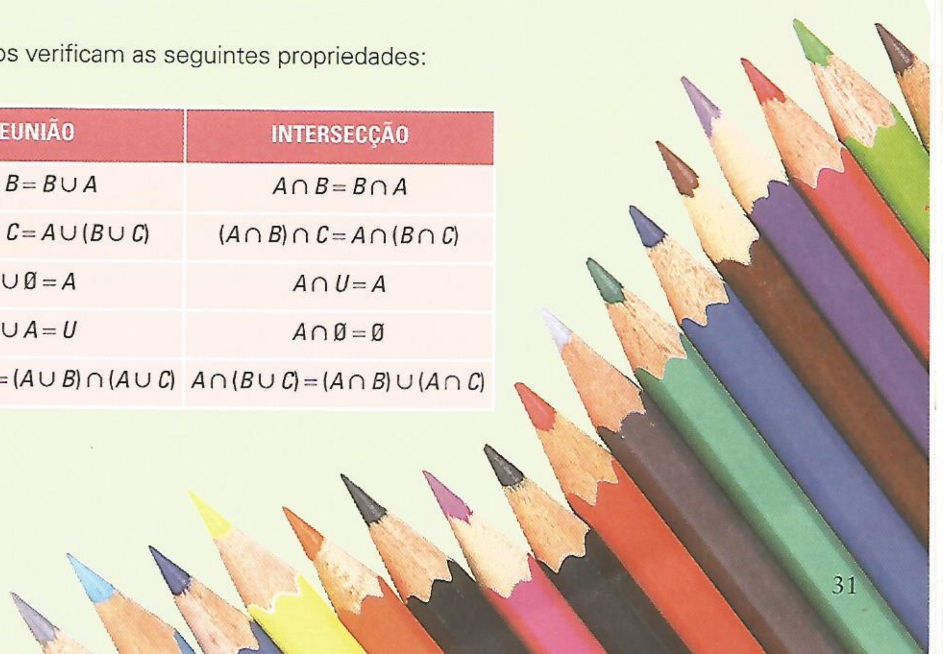
- 200 eleitores votaram em branco
- 320 eleitores não votaram no PD
- 330 eleitores não votaram no PE

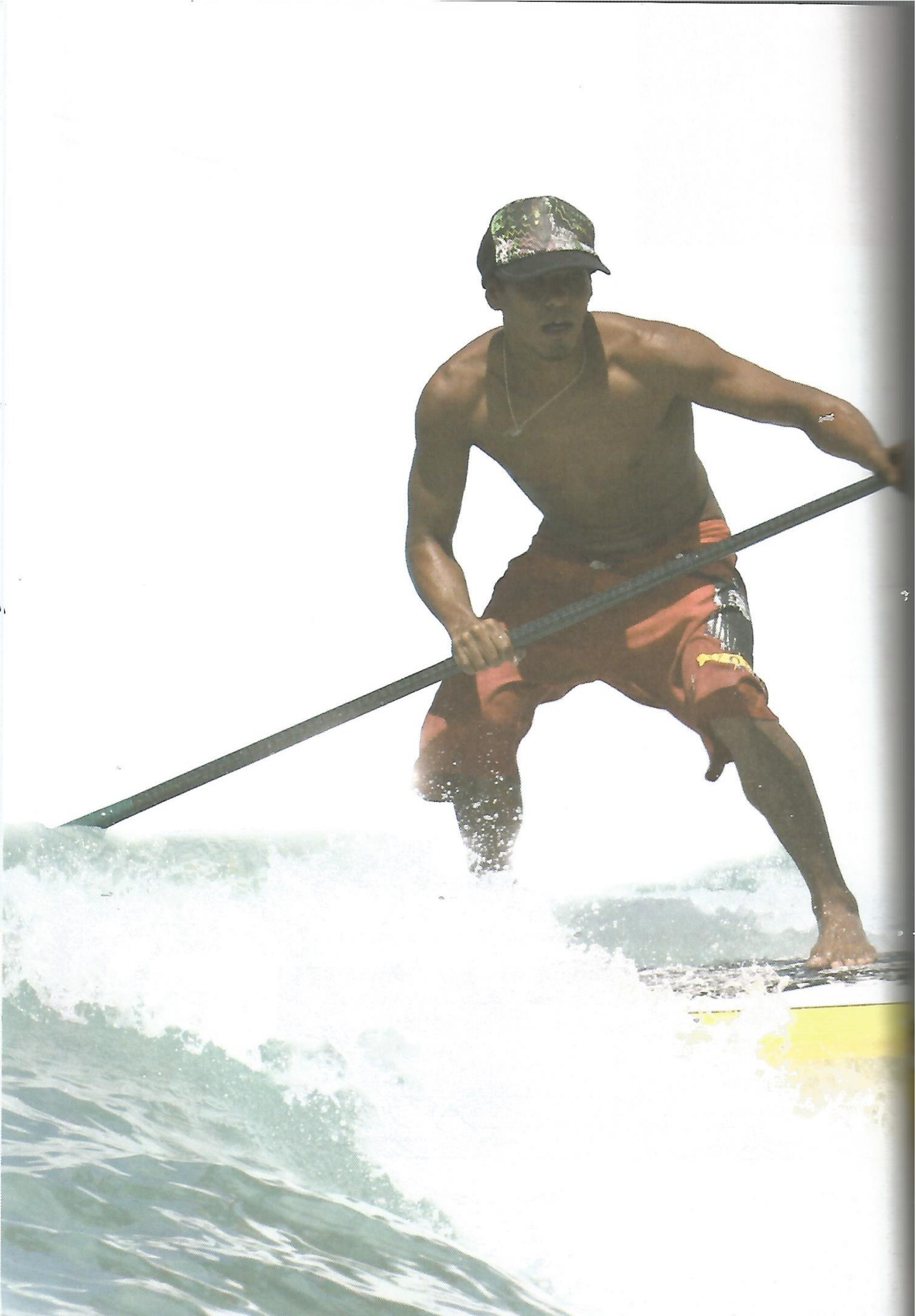
Calcule o número de eleitores que votaram em ambos os candidatos.

SÍNTESE

- Um **conjunto** é uma colecção de objectos, seres ou coisas que possuem propriedades comuns. Cada uma das partes que constituem um conjunto designa-se por **elemento** do conjunto. O número de elementos de um conjunto A chama-se **cardinal** do conjunto e representa-se por $\#A$ ou $n(A)$.
- Ao conjunto que contém todos os elementos relativos a um dado contexto que se está a considerar chama-se **conjunto universal**.
- Um conjunto pode ser definido em **extensão** e em **compreensão**.
- Um conjunto pode ser representado por um **diagrama de Venn** e/ou numa **recta real**.
- Um conjunto que não tem elementos chama-se **conjunto vazio** e representa-se por $\{\}$ ou $\emptyset$. Um conjunto com um único elemento chama-se **conjunto singular**.
- Se todo o elemento de um conjunto A é também elemento do conjunto B diz-se que o conjunto A **está contido** no conjunto B, que A é **subconjunto** do conjunto B ou que B **contém** A e escreve-se $A \subset B$ ou $B \supset A$.
- Se os conjuntos A e B são constituídos pelos mesmos elementos dizem-se **iguais** e escreve-se $A = B$.
- Sejam os conjuntos A e B quaisquer.
  - **Conjunto reunião:** $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$
  - **Conjunto intersecção:** $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$
  - **Conjunto diferença:** $A \backslash B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$
  - **Diferença simétrica:** $A \triangle B = \{x : (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$
  - **Complementar de A:** $\overline{A} = \{x : x \in U \wedge x \notin A\}$
  - **Conjuntos disjuntos:** $A \cap B = \emptyset$
- As propriedades operatórias de conjuntos verificam as seguintes propriedades:

PROPRIEDADE	REUNIÃO	INTERSECÇÃO
Comutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Associativa	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Elemento neutro	$A \cup \emptyset = A$	$A \cap U = A$
Elemento absorvente	$U \cup A = U$	$A \cap \emptyset = \emptyset$
Distributiva	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$





2 EQUAÇÃO QUADRÁTICA PARAMÉTRICA SIMPLES

1.
EQUAÇÃO QUADRÁTICA PARAMÉTRICA SIMPLES

2.
RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES QUADRÁTICAS PARAMÉTRICAS SIMPLES

2 EQUAÇÃO QUADRÁTICA PARAMÉTRICA SIMPLES

1. Equação quadrática paramétrica simples

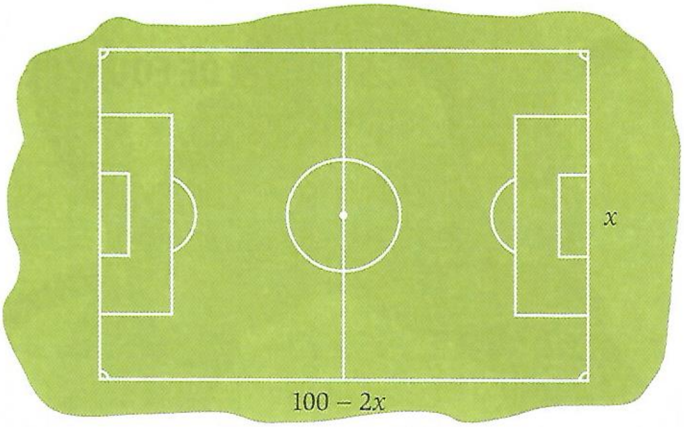
UM POUCO DE HISTÓRIA...

François Viète, matemático francês, contribuiu bastante para o desenvolvimento da teoria das equações e foi o pioneiro na introdução de letras para designar quantidades. Inicialmente, sugeriu o uso de vogais para representar quantidades desconhecidas – as **incógnitas** – e consoantes para representar números supostamente conhecidos – os **parâmetros**. Ficou conhecido como o "pai" da Álgebra por ter sido o primeiro a usar símbolos no mundo da Matemática, abrindo uma porta para a simplificação de raciocínios e consequente desenvolvimento desta ciência.

François Viète (1540-1603)

Na classe anterior estudámos as equações quadráticas e alguns métodos de resolução.

Consideremos as seguintes medidas de comprimento do campo de futebol com a forma rectangular da escola da Maria cuja área é igual a 1200 m^2.



Sabendo que a área de um rectângulo é $A = c \times l$, então:

$A = x \times (100 - 2x) = -2x^2 + 100x$

Como o campo de futebol tem 1200 m^2, substituindo na equação anterior temos que:

$$-2x^2 + 100x = 1200 \iff -2x^2 + 100x - 1200 = 0$$
$$\iff -x^2 + 50x - 600 = 0$$

A equação encontrada designa-se por **equação quadrática** ou **equação do 2.º grau**.

OBSERVAÇÃO:

O **grau** de uma equação cujos termos semelhantes estejam simplificados é sempre o maior expoente da incógnita.

Uma equação quadrática ou **equação do 2.º grau de incógnita x é uma equação que, pela aplicação dos princípios de equivalência, pode ser reduzida à forma:**

$$ax^2 + bx + c = 0\,,$$

com a, b e c números reais e $a \neq 0$.

EXEMPLO:

Considere as seguintes equações:

$A: x^2=4$ $B: x-25=0$ $C: x^3-x=0$ $D: 2x(x+1)=1$

Identifique as que são equações quadráticas.

Resolução

$A: x^2=4 \iff x^2-4=0$ é uma equação quadrática incompleta.

$B: x-25=0$ não é uma equação quadrática porque é uma equação do 1.º grau.

$C: x^3-x=0$ não é uma equação quadrática porque é uma equação do 3.º grau.

$D: 2x(x+1)=1 \iff 2x^2+2x-1=0$ é uma equação quadrática completa.

EXEMPLO:

Identificação dos parâmetros a, b e c em equações quadráticas:

	EQUAÇÃO	COEFICIENTES		
		a	b	c
(I)	$5x^2-3x+3=0$	5	-3	3
(II)	$-2x^2+(2m-1)x+m=0$	-2	$2m-1$	m
(III)	$m^2x^2-m=0$	m^2	0	$-m$
(IV)	$2x^2-5x-3=0$	2	-5	-3

Nas equações (II) e (III) do exemplo anterior, além da incógnita, alguns termos dependem de uma outra variável chamada **parâmetro**. Contrariamente, nas equações (I) e (IV), a única variável que figura na equação é a incógnita, x.

As equações quadráticas que, além da incógnita, dependem de uma outra variável (parâmetro) dizem-se **equações quadráticas paramétricas**; as que somente dependem da incógnita designam-se por **equações quadráticas numéricas**.

EXEMPLO:

Identificação de parâmetros importantes em equações quadráticas paramétricas em x:

EQUAÇÃO	COEFICIENTES			SOMA DAS RAÍZES	PRODUTO DAS RAÍZES	$\Delta = b^2-4ac$
	a	b	c			
$2x^2+(m+3)x-1=0$	2	$m+3$	-1	$-\frac{m+3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$m^2+6m+17$
$(2m+3)x^2-3x+1=0$	$2m+3$	-3	1	$\frac{3}{2m+3}$	$\frac{1}{2m+3}$	$-8m-3$
$x^2+(3-m)x-2=0$	1	$3-m$	-2	$m-3$	-2	$m^2-6m+17$

OBSERVAÇÃO:

Relação entre as raízes e os coeficientes de uma equação quadrática:

$ax^2+bx+c=0$

$\iff x^2-Sx+P=0$

com:

$S=x_1+x_2=-\frac{b}{a}$

e

$P=x_1\times x_2=\frac{c}{a}$

onde a, b e c são os coeficientes da equação cujas raízes são x_1 e x_2.

A b^2-4ac designamos por **binómio discriminante** e representamos pela letra grega Δ (lê-se "delta").

2. Resolução de equações quadráticas paramétricas simples

Na resolução de equações quadráticas paramétricas o procedimento é idêntico ao da resolução de equações quadráticas numéricas, tendo-se sempre em conta as condições a que o parâmetro fica sujeito no enunciado do problema.

OBSERVAÇÃO:

Casos notáveis da multiplicação (revisão)

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

(Diferença de quadrados)

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

(Quadrado de um binómio)

para quaisquer números reais a e b.

Lei do anulamento do produto (revisão)

$a \times b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$

para quaisquer números reais a e b.

Fórmula resolvente de uma equação quadrática (revisão)

$ax^2 + bx + c = 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

para quaisquer números reais a, b e c com $a \neq 0$.

EXEMPLO:

Resolva as seguintes equações quadráticas numéricas pelo processo que entender mais simples.

a) $3(x^2 + 1) = 3$

b) $(2 + x)^2 = 2(x + 2)$

c) $2(x^2 - 9) = 0$

d) $(x + 5)^2 = (1 + x)(1 - x)$

Resolução

a) $3(x^2 + 1) = 3 \Leftrightarrow 3x^2 + 3 = 3 \Leftrightarrow 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$S = \{0\}$

b) $$\begin{aligned}(2 + x)^2 = 2(x + 2) &\Leftrightarrow 4 + 4x + x^2 = 2x + 4\\ &\Leftrightarrow x^2 + 2x = 0\\ &\Leftrightarrow x(x + 2) = 0\\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2\end{aligned}$$

$S = \{-2, 0\}$

c) $$\begin{aligned}2(x^2 - 9) = 0 &\Leftrightarrow x^2 - 9 = 0\\ &\Leftrightarrow (x - 3)(x + 3) = 0\\ &\Leftrightarrow x - 3 = 0 \vee x + 3 = 0\\ &\Leftrightarrow x = 3 \vee x = -3\end{aligned}$$

$S = \{-3, 3\}$

Outro processo:

$$\begin{aligned}2(x^2 - 9) = 0 &\Leftrightarrow x^2 - 9 = 0\\ &\Leftrightarrow x^2 = 9\\ &\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{9}\\ &\Leftrightarrow x = \pm 3\end{aligned}$$

$S = \{-3, 3\}$

d) $$\begin{aligned}(x + 5)^2 = (1 + x)(1 - x) &\Leftrightarrow x^2 + 10x + 25 = 1 - x^2\\ &\Leftrightarrow 2x^2 + 10x + 24 = 0\\ &\Leftrightarrow x^2 + 5x + 12 = 0\\ &\Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 1 \times 12}}{2}\\ &\Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{-23}}{2} \notin \mathbb{R}\end{aligned}$$

A equação não tem soluções em $\mathbb{R}$.

Como já foi referido, a resolução de equações quadráticas paramétricas é idêntica à resolução das equações paramétricas numéricas, pelo que, depois da revisão já efectuada, o processo torna-se simples.

EXEMPLOS:

1. Resolva as equações quadráticas paramétricas em x.

   $A: x^2-5ax+6a^2=0$ $\qquad$ $B: x^2-4ax=1-4a^2$

2. Dada a equação $2x^2+(m+3)x-1=0$, cujas raízes são x_1 e x_2, determine o parâmetro real m de modo que $\dfrac{x_1+x_2}{x_1\times x_2-3}=2$.

3. Determine os valores de $k\in\mathbb{R}$ para que cada uma das funções dadas seja quadrática.

   a) $f(x)=(2-k)x^2+2x+k^2+2k-3$

   b) $g(x)=(k^2+2k-3)x^2-2(k+2)x-1$

4. Considere a equação quadrática paramétrica em x, $x^2+2x+3-m=0$.

   a) Resolva a equação para $m=2$.

   b) Determine o parâmetro real m de modo que a equação admita:

   i) duas raízes reais e diferentes; **ii)** duas raízes reais e iguais;
   iii) duas raízes não reais; **iv)** duas raízes reais;
   v) raízes reais do mesmo sinal; **vi)** raízes reais de sinais contrários;
   vii) uma só raiz nula; **viii)** duas raízes nulas.

Resolução

1. Aplicando a fórmula resolvente das equações quadráticas:

$$A: x^2-5ax+6a^2=0 \Leftrightarrow x=\frac{5a\pm\sqrt{25a^2-24a^2}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{5a\pm\sqrt{a^2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{5a\pm a}{2} \Leftrightarrow x=\frac{5a+a}{2} \vee x=\frac{5a-a}{2} \Leftrightarrow x=3a \vee x=2a$$

$$B: x^2-4ax=1-4a^2 \Leftrightarrow x^2-4ax-1+4a^2=0 \Leftrightarrow x=2a\pm\sqrt{4a^2+1-4a^2}$$

$$\Leftrightarrow x=2a\pm1 \Leftrightarrow x=2a+1 \vee x=2a-1$$

> **OBSERVAÇÃO:**
>
> Na equação A:
>
> $a=1$, $b=-5a$ e $c=6a^2$.
>
> Na equação B:
>
> $a=1$, $b=-4a$, $c=-1+4a^2$ e $k=-2a$.

> **OBSERVAÇÃO:**
>
> **Simplificação da fórmula resolvente (revisão)**
>
> $ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow$
>
> $\Leftrightarrow x=-k\pm\sqrt{k^2-c}$, com $b=2k$ e $a=1$ (c e k não nulos).

2. Da equação $2x^2+(m+3)x-1=0$, tem-se:

$x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$, pelo que $x_1+x_2=-\dfrac{m+3}{2}$

$x_1\times x_2=\dfrac{c}{a}$, pelo que $x_1\times x_2=-\dfrac{1}{2}$. Donde resulta:

$$\frac{x_1+x_2}{x_1\times x_2-3}=2 \Leftrightarrow \frac{-\frac{m+3}{2}}{-\frac{1}{2}-3}=2 \Leftrightarrow \frac{-\frac{m+3}{2}}{-\frac{7}{2}}=2 \Leftrightarrow \frac{m+3}{2}=7 \Leftrightarrow m+3=14$$

$$\Leftrightarrow m=14-3 \Leftrightarrow m=11$$

3. Para que um polinómio do segundo grau defina uma função quadrática, o coeficiente do termo quadrático tem que ser não nulo.

   a) $2-k\neq0 \Leftrightarrow -k\neq-2 \Leftrightarrow k\neq2$, logo, $k\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

   b) $k^2+2k-3\neq0 \Leftrightarrow k\neq-1\pm\sqrt{1^2-(-3)} \Leftrightarrow k\neq-1\pm\sqrt{1+3} \Leftrightarrow k\neq-1\pm2$

   $\Leftrightarrow k\neq-1-2 \wedge k\neq-1+2 \Leftrightarrow k\neq-3 \wedge k\neq1$

   Assim, $k\in\mathbb{R}\setminus\{-3, 1\}$.

OBSERVAÇÃO:

Sendo $ax^2+bx+c=0$

com a, b, $c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$:

- Se $\Delta > 0$, a equação admite **duas raízes reais.**
- Se $\Delta = 0$, a equação admite **duas raízes reais iguais.**
- Se $\Delta < 0$, a equação admite **duas raízes não reais.**

4. **a)** Fazendo $m=2$ na equação $x^2+2x+3-m=0$, vem:

$$x^2+2x+3-2=0 \iff x^2+2x+1=0 \iff (x+1)^2=0 \iff x+1=0 \iff x=-1$$

b) **i)** Para que a equação dada admita duas raízes reais e diferentes é necessário que $\Delta = b^2-4ac>0$.

$\Delta = b^2-4ac = 2^2-4(3-m) = 4-12+4m = -8+4m$

$\Delta > 0 \iff -8+4m>0 \iff 4m>8 \iff m>\frac{8}{4} \iff m>2$

$S =]2, +\infty[$

ii) Para que a equação dada admita duas raízes reais e iguais é necessário que $\Delta = b^2-4ac=0$, ou seja, $-8+4m=0 \iff 4m=8 \iff m=\frac{8}{4} \iff m=2$

iii) Para que a equação dada admita duas raízes não reais é necessário que $\Delta = b^2-4ac<0$, ou seja, $-8+4m<0 \iff 4m<8 \iff m<\frac{8}{4} \iff m<2$

$m \in]-\infty, 2[$

iv) Para que a equação dada admita duas raízes reais (distintas ou não) é necessário que $\Delta = b^2-4ac \geqslant 0$.

$\Delta \geqslant 0 \iff -8+4m \geqslant 0 \iff 4m \geqslant 8 \iff m \geqslant \frac{8}{4} \iff m \geqslant 2$

$m \in]2, +\infty[$

v) Para que a equação dada admita duas raízes do mesmo sinal é necessário que $P = x_1 \times x_2 > 0$, ou seja, $3-m>0 \iff -m>-3 \iff m<3$ e que $\Delta \geqslant 0 \iff -8+4m \geqslant 0 \iff m \geqslant 2$, ou seja, $2 \leqslant m < 3$.

$m \in [2, 3[$

vi) Para que a equação dada admita raízes reais de sinais contrários é necessário que $P = x_1 \times x_2 < 0$, ou seja, $3-m<0 \iff -m<-3 \iff m>3$ e que $\Delta > 0 \iff -8+4m>0 \iff m>2$, ou seja, $m>3$.

$m \in]3, +\infty[$

vii) Para que a equação dada admita uma só raiz nula é necessário que:

$\begin{cases} \Delta = b^2-4ac>0 \\ P = \frac{c}{a} = 0 \end{cases}$, donde:

$$\begin{cases} \Delta = b^2-4ac>0 \\ P = \frac{c}{a} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -8+4m>0 \\ 3-m=0 \end{cases} \iff \begin{cases} -8+4m>0 \\ -m=-3 \end{cases} \iff \begin{cases} 4m>8 \\ m=3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} m>\frac{8}{4} \\ m=3 \end{cases} \iff \begin{cases} m>2 \\ m=3 \end{cases} \iff m=3$$

viii) Para que a equação dada admita duas raízes nulas é necessário que:

$$\begin{cases} \Delta = b^2-4ac=0 \\ P = \frac{c}{a} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -8+4m=0 \\ 3-m=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4m=8 \\ -m=-3 \end{cases} \iff \begin{cases} m=2 \\ m=3 \end{cases}$$

$$\iff m \in \emptyset$$

Exercício n.º 1

1. Das seguintes equações identifique as que são quadráticas.

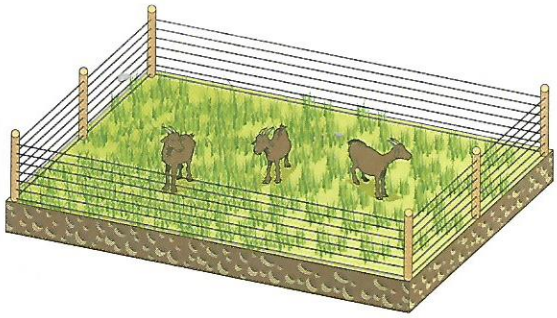
   (A) $x(x-1)=5-x$

   (B) $x^2-1=x^3+4$

   (C) $x^2(x-3)=2$

   (D) $(x-2)^2=x-5$

2. Para vedar um terreno rectangular com $750\ m^2$ de área foram utilizados $110\ m$ de cerca. Calcule as dimensões do terreno.



3. Resolva as equações quadráticas paramétricas em x:

   a) $x^2-kx-k^2=0$ b) $x^2+2xp+1=0$

4. Considere as funções $f(x)=(m^2-9m+20)x^2+m^2x-10m+24$ e $g(x)=(2-m)x^2+mx+m-1$.
   Determine o valor real de m para que a função:

   a) $f(x)$ não seja quadrática;

   b) $g(x)$ tenha a concavidade voltada para baixo.

5. Determine o valor de $m \in \mathbb{R}$, de modo que as raízes da equação $x^2+(m-1)x+m-4=0$ sejam de sinais contrários, sendo negativa a de maior valor absoluto.

6. Considere a equação $x^2-(1-m^2)x+m-1=0$ quadrática paramétrica em x.

   a) Preencha a tabela seguinte.

EQUAÇÃO	COEFICIENTES			SOMA DAS RAÍZES	PRODUTO DAS RAÍZES	$\Delta=b^2-4ac$
	a	b	c			
(A): $x^2-(1-m^2)x+m-1=0$						
(B): $(1-m^2)x^2-2x+m=0$						

   b) Para a primeira equação da alínea anterior, determine o valor de $m \in \mathbb{R}$ de modo que admita duas raízes simétricas.

7. Dada a equação $mx^2+3x+(3+m)=0$, determine $m \in \mathbb{R}$ para que $x=-1$ seja uma das raízes da equação.

8. Dada a equação $2x^2+5x+m=0$, determine $m \in \mathbb{R}$ para que a equação não tenha raízes reais.

9. Dada a equação $2x^2+7x+m-1=0$, determine $m \in \mathbb{R}$ para que o produto das suas raízes seja $\frac{1}{2}$.

10. Dada a equação $(m-1)x^2+(m^2+1)x-5=0$, determine $m \in \mathbb{R}$ para que a soma das suas raízes seja 1.

2

AVALIAÇÃO FORMATIVA

1. Resolva as equações quadráticas paramétricas em x.

   a) $2x^2 - ax - a^2 = 0$

   b) $(m + 1)x^2 + (m^2 - 1)x = 0$

2. Considere a equação $x^2 + (2m - 3)x + (m + 1) = 0$.

   a) Resolva a equação para $m = -1$.

   b) Determine m real de modo que a equação admita:

      i) uma raiz nula;

      ii) raízes reais do mesmo sinal;

      iii) duas raízes simétricas.

3. Determine o valor de $m \in \mathbb{R}$ para que:

$$f(x) = (m^2 + 2m)x^2 + mx + m - 1$$

   seja quadrática.

4. Determine o valor de $k \in \mathbb{R}$ na equação:

$$4kx^2 - k^2 x = 0$$

   de modo que uma das raízes seja 1.

5. As raízes da equação $x^2 - mx + n = 0$ são os números 2 e 5. Determine o valor de $m^2 + n^2$.

6. Determine $m \in \mathbb{R}$ para que na equação:

$$(m - 2)\, x^2 - (2m + 1)\, x + m = 0$$

   se verifique a condição $\dfrac{x_1 + x_2}{x_1 \times x_2} = -2$ onde x_1 e x_2 são as duas raízes reais não nulas da equação dada.

7. Determine o valor de $p \in \mathbb{R}$ para o qual a soma dos inversos das raízes da equação $x^2 - (3p + 1)\, x + 2p = 0$ é igual a -1.

8. Determine o valor de $k \in \mathbb{R}$ na equação $(k^2 + 2)\, x^2 - 5x + 3 = 0$ para que uma das raízes seja igual ao inverso da outra.

SÍNTESE

→ Um dos métodos de resolução de **equações quadráticas**, $ax^2 + bx + c = 0$ com a, b, $c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ é a aplicação da **fórmula resolvente**:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

→ Se x_1 e x_2 são raízes reais da equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$, então a soma e o produto delas são dados respectivamente por:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{e} \quad P = x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}.$$

A equação é equivalente a $x^2 + Sx + P = 0$.

→ Para uma equação da forma $ax^2 + bx + c = 0$ com a, b, $c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$:

- A equação é quadrática se $a \neq 0$.
- Pelo estudo do binómio discriminante conclui-se o número de raízes da equação.
- Pelo estudo da soma e/ou produto das raízes concluem-se os sinais das raízes.

→ Uma equação quadrática diz-se **paramétrica** se, além da incógnita, contiver uma outra variável chamada de **parâmetro**, caso contrário designa-se por **equação quadrática numérica**.

→ Na resolução de equações quadráticas paramétricas procede-se do mesmo modo que na resolução de equações quadráticas numéricas, tendo-se sempre em conta as condições a que o parâmetro fica sujeito no enunciado do problema.

3 EQUAÇÃO BIQUADRÁTICA

1.
EQUAÇÃO BIQUADRÁTICA

2.
RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES BIQUADRÁTICAS

3 EQUAÇÃO BIQUADRÁTICA

UM POUCO DE HISTÓRIA...

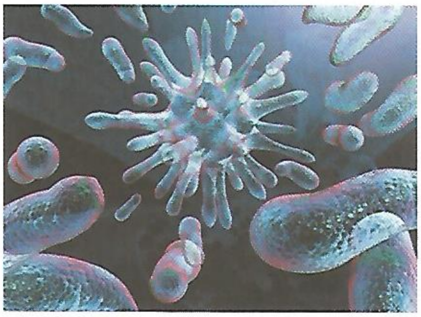
Cardano, ilustre matemático do século XVI, acolheu Ludovico Ferrari como servo em sua casa, vindo este a tornar-se o mais famoso dos seus discípulos e colaboradores.

Era habitual, na época, os matemáticos proporem desafios uns aos outros. Certo dia, Zuanne de Tonini da Coi propôs a Cardano uma questão que envolvia a equação $x^4 + 6x^2 - 60x + 36 = 0$. Após inúmeras tentativas sem êxito, decidiu passar a questão a Ferrari. Este foi o pretexto para que este brilhante jovem encontrasse um método geral para a resolução de equações do 4.º grau.

Girolamo Cardano (1501-1576)

1. Equação biquadrática

Numa dada localidade, decidiu-se estudar a presença de um determinado tipo de bactérias na água de um tanque.



Para tal, realizaram-se diversas análises à água, tendo-se concluído que a população desta bactéria tem um comportamento, em função da temperatura, que pode traduzir-se aproximadamente pela equação:

$$P(t) = t^4 - 925t^2 + 22\,500$$

onde $P(t)$ traduz o número de bactérias encontradas quando a água se encontra à temperatura t em graus Celsius.

Pretende-se conhecer as temperaturas para as quais as bactérias são extintas, isto é, quando a população se reduz a zero. Para a resolução deste problema, procura-se conhecer as soluções da equação:

$$t^4 - 925t^2 + 22\,500 = 0$$

Este tipo de equação designa-se por **equação biquadrática** e o seu método de resolução irá ser apresentado mais à frente. Com a resolução desta equação, conclui-se que $P(t)$ é nulo para $t = -30$; $t = -5$; $t = 5$ e $t = 30$.

A toda a equação que, pela aplicação dos princípios de equivalência, pode ser reduzida à forma canónica:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

com a, b e c números reais quaisquer e $a \neq 0$, chama-se **equação biquadrática.**

Se, numa equação biquadrática, os coeficientes a, b e c são todos não nulos, a equação diz-se **completa**; caso contrário, diz-se **incompleta.**

2. Resolução de equações biquadráticas

2.1. Resolução de equações do tipo $ax^4 = 0$ $(a \neq 0)$

Para todo o número real a não nulo, tem-se: $ax^4 = 0 \iff x = 0$

EXEMPLOS:

a) $-3x^4 = 0 \iff x = 0$; $S = \{0\}$

b) $\frac{1}{2}x^4 = 0 \iff x = 0$; $S = \{0\}$

2.2. Resolução de equações do tipo $ax^4 + c = 0$ $(a \neq 0)$

Para todo o número real a não nulo, tem-se:

$ax^4 + c = 0 \iff ax^4 = -c \iff x^4 = -\frac{c}{a} \iff x = \pm\sqrt[4]{-\frac{c}{a}}$, sendo que $\frac{c}{a} \leqslant 0$

EXEMPLOS:

a) $x^4 - 256 = 0 \iff x^4 = 256 \iff x = \pm\sqrt[4]{256} \iff x = -4 \vee x = 4$

$S = \{-4, 4\}$

b) $2x^4 - 162 = 0 \iff x^4 = \frac{162}{2} \iff x^4 = 81 \iff x = \pm\sqrt[4]{81}$

$\iff x = -3 \vee x = 3$

$S = \{-3, 3\}$

2.3. Resolução de equações do tipo $ax^4 + bx^2 = 0$ $(a \neq 0)$

Para todo o número real a não nulo, tem-se:

$ax^4 + bx^2 = 0 \iff x^2(ax^2 + b) = 0 \iff x^2 = 0 \vee ax^2 + b = 0$

$\iff x = 0 \vee x = \pm\sqrt{-\frac{b}{a}}$, sendo que $\frac{b}{a} \leqslant 0$

EXEMPLOS:

a) $x^4 - 2x^2 = 0 \iff x^2(x^2 - 2) = 0 \iff x^2 = 0 \vee x^2 - 2 = 0$

$\iff x = 0 \vee x = \pm\sqrt{2}$

$\iff x = 0 \vee x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2}$

$S = \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$

b) $-5x^4 + 10x^2 = 0 \iff x^2(-5x^2 + 10) = 0 \iff x^2 = 0 \vee -5x^2 + 10 = 0$

$\iff x = 0 \vee x^2 = 2 \iff x = 0 \vee x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2}$

$S = \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$

2.4. Resolução de equações do tipo $ax^4 + bx^2 + c = 0$ $(a \neq 0)$

Existe uma fórmula que permite resolver todas as equações biquadráticas especialmente útil para as equações biquadráticas completas.

Pode-se considerar uma equação biquadrática como uma equação quadrática em x^2, pois:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \iff a(x^2)^2 + b(x^2) + c = 0$$

Assim, na equação biquadrática $ax^4 + bx^2 + c = 0$, fazendo $y = x^2$, vem:

$$ay^2 + by + c = 0 \iff y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Como $y = x^2 \iff x = \pm\sqrt{y}$, então as soluções da equação biquadrática são da forma:

$$x = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}}, \text{ onde } \Delta = b^2 - 4ac.$$

Fórmula resolvente das equações biquadráticas

As soluções de uma equação biquadrática cuja expressão analítica é:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

são da forma:

$$x = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}}, \text{ onde } \Delta = b^2 - 4ac \text{ e } \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \geqslant 0.$$

As raízes reais da equação biquadrática, se existirem, são, no **máximo**, quatro e, nesse caso, são **simétricas duas a duas**.

EXEMPLOS:

1. Resolva as seguintes equações:

a) $(x^2 - 1)^2 = 5 - x^4$

b) $9 - (x^2 - 3)^2 = x^4$

c) $(x^2 - 2)^2 - \left(\frac{1}{2}x^2\right)^2 = -4x^2$

d) $\frac{4}{3}(x^2 - 2)^2 + x^2 = \frac{16 - 13x^2}{3}$

2. Considere uma função g definida, para um certo $m \in \mathbb{R}$, pela seguinte expressão analítica:

$$g(x) = (m^2 - 1)x^4 - 2x^2 + m.$$

Determine o conjunto de valores de m de modo que g seja uma função biquadrática.

3. Simplifique as fracções que se seguem.

a) $\frac{x^4 - 50x^2 + 49}{(x - 7)(x - 1)}$

b) $\frac{x^4 - 13x^2 + 36}{x^2 - x - 6}$

Resolução

1. Observe que as equações não estão na forma canónica. É vantajoso reduzi-las primeiro a esta forma.

a) $(x^2-1)^2=5-x^4 \iff x^4-2x^2+1=5-x^4$

$$\iff 2x^4-2x^2-4=0$$
$$\iff x^4-x^2-2=0$$

Fazendo $y=x^2$, tem-se:

$$y^2-y-2=0 \iff y=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}$$
$$\iff y=\frac{1\pm 3}{2}$$
$$\iff y=2 \lor y=-1$$

$y=2 \iff x^2=2 \iff x=\pm\sqrt{2}$

$y=-1 \iff x^2=-1 \iff x=\pm\sqrt{-1}\notin \mathbb{R}$

$S=\{-\sqrt{2},\ \sqrt{2}\}$

b) $9-(x^2-3)^2=x^4 \iff 9-x^4+6x^2-9=x^4$

$$\iff 2x^4-6x^2=0$$
$$\iff x^4-3x^2=0$$
$$\iff x^2(x^2-3)=0$$
$$\iff x^2=0 \lor x^2-3=0$$
$$\iff x^2=0 \lor x^2=3$$
$$\iff x=0 \lor x=\pm\sqrt{3}$$

$S=\{-\sqrt{3},\ 0,\ \sqrt{3}\}$

c) $(x^2-2)^2-\left(\frac{1}{2}x^2\right)^2=-4x^2 \iff x^4-4x^2+4-\frac{1}{4}x^4=-4x^2$

$$\iff 4x^4-16x^2+16-x^4=-16x^2$$
$$\iff 3x^4+16=0$$
$$\iff x^4=-\frac{16}{3}$$
$$\iff x=\pm\sqrt[4]{-\frac{16}{3}}\notin \mathbb{R}$$

A equação não admite soluções: $S=\emptyset$

d) $\frac{4}{3}(x^2-2)^2+x^2=\frac{16-13x^2}{3} \iff 4(x^4-4x^2+4)+3x^2=16-13x^2$

$$\iff 4x^4-16x^2+16+3x^2-16+13x^2=0$$
$$\iff 4x^4=0$$
$$\iff x=0$$

$S=\{0\}$

2. Para que g seja uma função biquadrática, o coeficiente do termo em x^4 não poderá ser nulo. Desta forma:

$$m^2-1\neq 0 \Longleftrightarrow m^2\neq 1 \Longleftrightarrow m\neq -1 \wedge m\neq 1$$

Portanto, g é uma função biquadrática para $m\in \mathbb{R}\setminus\{-1\ ,\ 1\}$.

OBSERVAÇÃO:

Se um polinómio ax^4+bx^2+c admite os zeros x_1, x_2, x_3, x_4, então pode escrever-se na forma factorizada:

$ax^4+bx^2+c=$

$=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$

3. Para simplificar as fracções, é necessário factorizar o numerador e o denominador das fracções. No caso de surgirem factores comuns, estes podem ser eliminados.
O conhecimento dos zeros de um polinómio é útil para a sua factorização.

a) Fazendo $y=x^2$ na equação $x^4-50x^2+49=0$, vem:

$$\begin{aligned} y^2-50y+49=0 &\Longleftrightarrow y=\frac{-(-50)\pm\sqrt{(-50)^2-4\times 1\times 49}}{2\times 1}\\ &\Longleftrightarrow y=\frac{50\pm 48}{2}\\ &\Longleftrightarrow y=49 \vee y=1\end{aligned}$$

Como $y=x^2$, vem que:

$$x^2=49 \vee x^2=1 \Longleftrightarrow x=-7 \vee x=7 \vee x=-1 \vee x=1$$

Portanto:

$$x^4-50x^2+49=(x-1)(x+1)(x-7)(x+7)$$

Concluindo:

$$\begin{aligned}\frac{x^4-50x^2+49}{(x-7)(x-1)} &= \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)\cancel{(x-7)}(x+7)}{\cancel{(x-7)}\cancel{(x-1)}}\\ &=(x+1)(x+7)\\ &=x^2+8x+7\end{aligned}$$

b) Fazendo $y=x^2$ na equação $x^4-13x^2+36=0$, vem:

$$\begin{aligned} y^2-13y+36=0 &\Longleftrightarrow y=\frac{-(-13)\pm\sqrt{(-13)^2-4\times 1\times 36}}{2\times 1}\\ &\Longleftrightarrow y=\frac{13\pm 5}{2}\\ &\Longleftrightarrow y=9 \vee y=4\end{aligned}$$

Como $y=x^2$, vem que:

$$x^2=9 \vee x^2=4 \Longleftrightarrow x=-3 \vee x=3 \vee x=-2 \vee x=2$$

Portanto:

$$x^4-13x^2+36=(x-3)(x+3)(x-2)(x+2)$$

$$\begin{aligned} x^2-x-6=0 &\Longleftrightarrow x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times 1\times(-6)}}{2\times 1}\\ &\Longleftrightarrow x=\frac{1\pm 5}{2}\\ &\Longleftrightarrow x=3 \vee x=-2\end{aligned}$$

Portanto: $x^2-x-6=(x-3)(x+2)$

Concluindo:

$$\frac{x^4-13x^2+36}{x^2-x-6}=\frac{\cancel{(x-3)}(x+3)(x-2)\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x-3)}\cancel{(x+2)}}=(x+3)(x-2)=x^2+x-6$$

Exercício n.º 1

1. Resolva as seguintes equações utilizando a fórmula resolvente das equações biquadráticas.

   a) $2x^4 + x^2 - 1 = 0$

   b) $(x^2 + 1)^2 = 5x^2 - 1$

2. Resolva as seguintes equações.

   a) $x(x+3)(x+1)(x-1) = 3x(x^2 - 1) + 2$

   b) $(x^2 + 3)(x^2 + 4) = 2x^2(2x^2 - 1)$

   c) $\frac{6}{x^2} + x^2 = 5$

   d) $x^2\left(\frac{3}{4} - x^2\right) = x^2 + \frac{1}{2}$

   e) $\frac{2}{3}(x^4 + 1) = \frac{1}{2} + \frac{1 + x^4}{6}$

   f) $\frac{(x^2 - 1)^2}{2} - \frac{x^2(x^2 + 1)}{3} = \frac{1}{2}$

3. Considere a função h definida para $k \in \mathbb{R}$ por:

   $h(x) = (3 - k)x^4 - 2kx^2 + 3$

   Determine os valores de k para os quais h é uma função biquadrática.

4. Considere, definida para $p \in \mathbb{R}$, a função:

   $g(x) = (2p + p^2)x^4 - 7px^2 - 2$

   Determine o valor de p de forma que g não seja uma função biquadrática, mas seja uma função quadrática.

5. Simplifique as fracções seguintes.

   a) $\frac{x^4 - 26x^2 + 25}{x^2 - 4x - 5}$

   b) $\frac{x^4 - 8x^2 + 16}{x^2 - 4}$

   c) $\frac{x^4 - 26x^2 + 25}{2x^2 + 8x - 10}$

3 AVALIAÇÃO FORMATIVA

1. Resolva as seguintes equações.

   a) $(x^2 - 3x - 5)^2 = 25$

   b) $(x^2 - x - 30)^2 = 12(x^2 - x - 30)$

   c) $(x^2 + 2)^2 = 2(3x^2 + 2)$

   d) $(x^2 + 2x)^2 - 4x^3 = 5$

2. Para cada uma das seguintes funções, determine $m \in \mathbb{R}$ de modo que sejam biquadráticas completas.

   a) $a(x) = (m - 2)x^4 - (2m + 1)x^2 + m$

   b) $b(x) = (5 - 2m)x^4 - 5x^2 + 3m - 1$

   c) $c(x) = (9 - m^2)x^4 - (1 - m)x^2 + 10$

3. Simplifique cada uma das seguintes fracções.

   a) $\dfrac{x^4 - 13x^2 + 36}{x^2 + x - 6}$

   b) $\dfrac{x^4 - 40x^2 + 144}{x^2 - 8x + 12}$

4. Sem utilizar a fórmula resolvente das equações biquadráticas, resolva cada uma das seguintes equações.

   a) $7x^4 - 567 = 0$

   b) $- 3x^4 + 48x^2 = 0$

   c) $5x^2(3 - x^2) = 15x^2 - 10x^4$

   d) $7x^4 + 50x^2 - 7x = 3x + 5(-2x + x^4)$

   e) $x^4 + 500x - 10\,000 = 500x$

SÍNTESE

- Toda a equação que, pela aplicação dos princípios de equivalência, pode simplificar-se de modo a escrever-se na forma:

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ , onde } a \text{ , } b \text{ , } c \text{ são números reais e } a \neq 0 \text{ ,}$$

diz-se **equação quadrática**.

- Toda a equação que, pela aplicação dos princípios de equivalência, pode simplificar-se de modo a escrever-se na forma:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \text{ , onde } a \text{ , } b \text{ , } c \text{ são números reais e } a \neq 0 \text{ ,}$$

diz-se **equação biquadrática**.

- As equações biquadráticas podem classificar-se de **completas** ou **incompletas**:
  - no caso de $b \neq 0$ e $c \neq 0$, são equações biquadráticas completas;

    (por exemplo: $2x^4 + 3x^2 - 1 = 0$)
  - no caso de $b = 0$ e/ou $c = 0$, são equações biquadráticas incompletas;

    (por exemplo: $3x^4 - 2 = 0$ e $-2x^4 = 0$)

- **Fórmula resolvente das equações biquadráticas**:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \iff x = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}} \text{ onde } \Delta = b^2 - 4ac \text{ .}$$

- No caso de equações incompletas, pode-se adoptar métodos de resolução diferentes:
  - $ax^4 = 0 \iff x = 0$
  - $ax^4 + c = 0 \iff x = \pm\sqrt[4]{-\frac{c}{a}}$
  - $ax^4 + bx^2 = 0 \iff x = 0 \vee x = \pm\sqrt{-\frac{b}{a}}$

4 FUNÇÃO QUADRÁTICA

1.
FUNÇÃO QUADRÁTICA

2.
FUNÇÃO DO TIPO $y = ax^2$, $a \neq 0$

3.
FUNÇÃO DO TIPO $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

4.
RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

4 FUNÇÃO QUADRÁTICA

1. Função quadrática

UM POUCO DE HISTÓRIA...

Deve-se ao matemático indiano Bhaskara Akaria a descoberta da fórmula resolvente de equações quadráticas. A partir daqui, muitas outras fórmulas foram encontradas.

A noção de função quadrática está associada à de equação do 2.° grau. Supõe-se que Arquimedes já tivesse conhecimentos associados às propriedades das parábolas. Porém, foi na época do Renascimento que, nas tentativas de explicar as trajectórias de bolas de canhão ou do movimento de um corpo em queda livre, se aprofundaram os conhecimentos da curva de 2.° grau – parábola. Surge, então, a necessidade de associar curvas a equações e, de um modo geral, a Álgebra à Geometria.

Bhaskara Akaria (1114-1185)

No nosso quotidiano são inúmeras as situações onde identificamos modelos de funções quadráticas.

Chama-se **função quadrática** ou **função polinomial do 2.° grau** a qualquer função f, real de variável real, que pode definir-se por uma expressão analítica da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a, b e c são números reais e $a \neq 0$.

O domínio de uma função quadrática é o conjunto dos números reais.

O gráfico de uma função quadrática é uma parábola.

Repare em alguns exemplos de funções quadráticas, definidas pelas respectivas expressões analíticas:

- $m(x) = 3x^2 - 4x + 1$, onde $a = 3$, $b = -4$ e $c = 1$
- $h(x) = -4x^2$, onde $a = -4$, $b = 0$ e $c = 0$
- $n(x) = (x-1)(x+1)$ equivalente a $n(x) = x^2 - 1$, onde $a = 1$, $b = 0$ e $c = -1$
- $r(x) = 2(x+3)^2 - 5$ equivalente a $r(x) = 2x^2 + 12x + 13$, onde $a = 2$, $b = 12$ e $c = 13$
- $g(x) = x(-x+8)$ equivalente a $g(x) = -x^2 + 8x$, onde $a = -1$, $b = 8$ e $c = 0$

EXEMPLOS:

1. Encontre uma condição para o parâmetro $m \in \mathbb{R}$, de modo que a função:

$$f(x) = (4m^2 - 16)x^2 + 3x$$

seja quadrática.

2. Considere a função g real de variável real $g(x) = x^2 - 5x + 6$.

   a) Determine os zeros de g e defina a função por uma expressão analítica na forma factorizada.

   b) Resolva a equação $\dfrac{g(2) - f(x)}{g(1) \times f(2)} = \dfrac{g(4)}{f(-2)}$ onde $f(x) = x + 1$.

Resolução

1. Por definição de função quadrática, o coeficiente do termo quadrático não pode ser nulo. Assim:

$$4m^2 - 16 \neq 0 \iff 4m^2 \neq 16 \iff m^2 \neq 4 \iff m \neq \pm\sqrt{4} \iff m \neq \pm 2$$

$m \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$

2.

a) $g(x) = 0 \iff x^2 - 5x + 6 = 0 \iff x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} \iff x = \dfrac{5 \pm 1}{2}$

$\iff x = 2 \vee x = 3$

Como 2 e 3 são os zeros de g, então $g(x) = (x-2)(x-3)$.

b) $\dfrac{g(2) - f(x)}{g(1) \times f(2)} = \dfrac{g(4)}{f(-2)} \iff \dfrac{2^2 - 5 \times 2 + 6 - (x+1)}{(1^2 - 5 \times 1 + 6)(2+1)} = \dfrac{4^2 - 5 \times 4 + 6}{-2+1}$

$\iff -\dfrac{x+1}{6} = \dfrac{2}{-1} \iff -(x+1) = -12$

$\iff x = 12 - 1 \iff x = 11$

$S = \{11\}$

Exercício n.º 1

1. Considere as funções f, g e h, reais de variável real, definidas por:

$$f(x) = x^2 - 2x - 3, \qquad g(x) = \frac{3}{2}x + m \qquad \text{e} \qquad h(x) = (m^2 - 4)x^2 - 2x + 5.$$

   a) Determine o valor do parâmetro $m \in \mathbb{R}$ para que a função h seja quadrática.

   b) Sabendo que $f(0) + g(0) = -5$, determine o valor da expressão $f(m) - 2g(m)$.

2. Dada a função $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$, determine:

   a) $f(-x)$ b) $f(x+1)$ c) a para que $f(a-1) = 0$.

3. De uma função quadrática, sabe-se que $f(m+3) = 2m^2 - 2m + 1$. Determine:

   a) $f(1)$ b) $f(2)$ c) $f(x)$

4. Dada a função f real de variável real definida por $f(x) = x^2 - 3x - 18$, determine:

   a) $\dfrac{f(-2) + 3f(5)}{\frac{2}{7}f(-1)}$ b) o valor de x tal que $f(x) = 10$.

5. Sendo $f(x) = x^2 - x - 6$, simplifique a fracção $\dfrac{f(t+2)}{f(t) - 14}$.

2. Função do tipo $y = ax^2$, $a \neq 0$

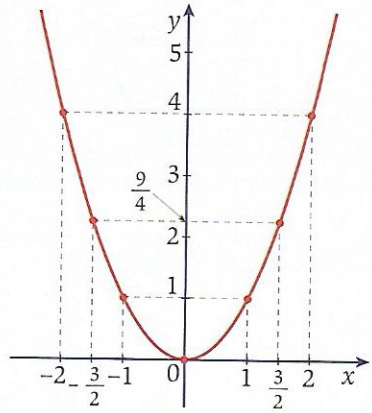
OBSERVAÇÃO:

Por simplificação de linguagem, utiliza-se o termo **gráfico de uma função** para referir uma sua representação.

Comecemos por representar a função quadrática $y = x^2$ $(a = 1)$.

Antes da representação gráfica da função, é útil construir uma tabela onde se registem as coordenadas de pontos pertencentes ao gráfico. Para tal, escolhem-se valores para x e calculam-se os respectivos valores de y , atendendo ao facto de $y = x^2$.

x	y
-2	4
$-\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$
-1	1
0	0
1	1
$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$
2	4



Para a representação gráfica da função $y = ax^2$ vamos considerar dois casos:

1.° caso: $y = ax^2$, $a > 0$

EXEMPLO:

Considere as seguintes funções:

$y_1 = x^2$ $\qquad$ $y_2 = 2x^2$ $\qquad$ $y_3 = 4x^2$

Represente graficamente as funções e para cada uma delas indique:

a) o domínio e o contradomínio;

b) as coordenadas do vértice e o eixo de simetria das parábolas que representam graficamente as funções;

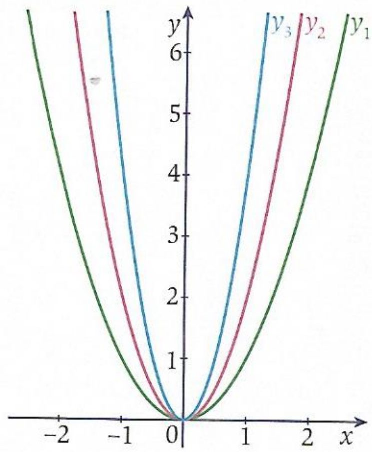
c) o sentido da concavidade da parábola que representa a função;

d) a monotonia da função;

e) a variação do sinal da função.

Resolução

x	$y_1 = x^2$	$y_2 = 2x^2$	$y_3 = 4x^2$
-2	4	8	16
-1	1	2	4
0	0	0	0
1	1	2	4
2	4	8	16



a) $D = \mathbb{R}$ e $D' = \mathbb{R}_0^+ = [0\ ,\ +\infty[$ nas três funções.
b) $V(0\ ,\ 0)$ e $x = 0$ nas três funções.
c) Todas as parábolas têm a concavidade voltada para cima.
d) Todas estas funções são decrescentes para $x \leqslant 0$ e crescentes para $x \geqslant 0$.
e) Estas funções são positivas para todo $x \neq 0$.

De um modo geral, os pontos do gráfico da função $y = ax^2$, $a \neq 0$ podem obter-se a partir dos pontos do gráfico da função $y = x^2$, para a mesma abcissa, fazendo a extensão da ordenada em "a" vezes, ficando, por isso, acima dos valores de $y = x^2$.

2.° caso: $y = ax^2$, $a < 0$

EXEMPLO:

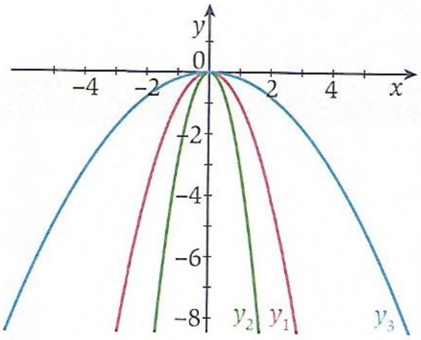
Considere as seguintes funções:

$y_1 = -x^2$ $\qquad y_2 = -3x^2$ $\qquad y_3 = -\dfrac{1}{5}x^2$

Represente graficamente as funções e para cada uma delas indique:
a) o domínio e o contradomínio;
b) as coordenadas do vértice e o eixo de simetria das parábolas que representam graficamente as funções;
c) o sentido da concavidade da parábola que representa a função;
d) a monotonia da função;
e) a variação do sinal da função.

Resolução

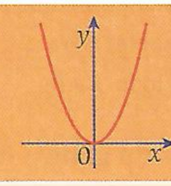
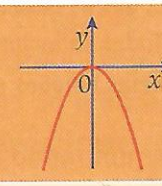
x	$y_1 = -x^2$	$y_2 = -3x^2$	$y_3 = -\frac{1}{5}x^2$
-2	-4	-12	$-\frac{4}{5}$
-1	-1	-3	$-\frac{1}{5}$
0	0	0	0
1	-1	-3	$-\frac{1}{5}$
2	-4	-12	$-\frac{4}{5}$



a) $D = \mathbb{R}$ e $D' = \mathbb{R}_0^- =]-\infty\ ,\ 0]$ nas três funções.
b) Todas as parábolas que representam estas funções têm o vértice na origem do referencial: $V(0\ ,\ 0)$ e $x = 0$ nas três funções.
c) Todas estas parábolas têm a concavidade voltada para baixo.
d) Todas estas funções são crescentes para $x \leqslant 0$ e decrescentes para $x \geqslant 0$.
e) Estas funções são negativas para todo $x \neq 0$.

Os gráficos das funções $y = ax^2$ e $y = -ax^2$, para os mesmos valores de x , têm as ordenadas iguais em valor absoluto e sinais contrários, pois $a < 0 \iff -a > 0$. Portanto, o gráfico da função $y = ax^2$ é simétrico do gráfico da função $y = -ax^2$ em relação ao eixo das abcissas.

Da exploração dos exemplos anteriores e das representações gráficas das funções resulta o seguinte quadro-resumo.

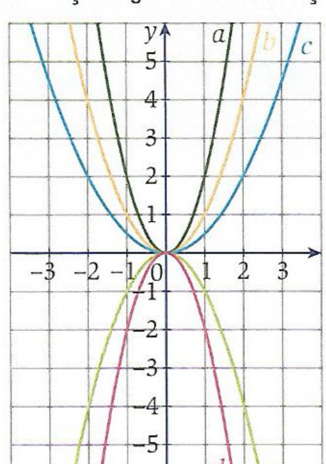
$y = ax^2$	$a > 0$ 	$a < 0$ 
Domínio	$D = \mathbb{R}$	$D = \mathbb{R}$
Contradomínio	$D' = \mathbb{R}_0^+ = [0\,,\, +\infty[$	$D' = \mathbb{R}_0^- =]-\infty\,,\, 0]$
Intersecção com os eixos coordenados	$O(0\,,\,0)$	$O(0\,,\,0)$
Vértice da parábola	$V(0\,,\,0)$	$V(0\,,\,0)$
Eixo de simetria	$x = 0$	$x = 0$
Extremos	Mínimo: 0 Minimizante: 0	Máximo: 0 Maximizante: 0
Sentido da concavidade	Concavidade voltada para cima.	Concavidade voltada para baixo.
Monotonia	Decrescente para $x \leqslant 0$; Crescente para $x \geqslant 0$.	Crescente para $x \leqslant 0$; Decrescente para $x \geqslant 0$.
Sinal	Positiva em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.	Negativa em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Influência do parâmetro *a*	À medida que aumenta o valor absoluto de a, a parábola é mais fechada, isto é, os ramos ficam mais próximos do eixo de simetria.	

Exercício n.º 2

Considere as seguintes funções definidas por:

$$y_1 = x^2 \qquad y_2 = 2x^2 \qquad y_3 = \frac{1}{2}x^2 \qquad y_4 = -2x^2 \qquad y_5 = -x^2$$

No seguinte referencial cartesiano estão representações gráficas das funções, correspondendo cada uma delas a uma parábola.



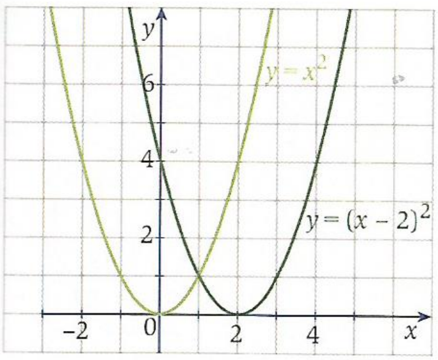
Faça a correspondência da função à sua parábola que a representa graficamente.

3. Função do tipo $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

3.1. Família de funções do tipo $y = a(x - p)^2$, $a \neq 0$

Comecemos por comparar a função $y = a(x - p)^2$ com a função $y = ax^2$.

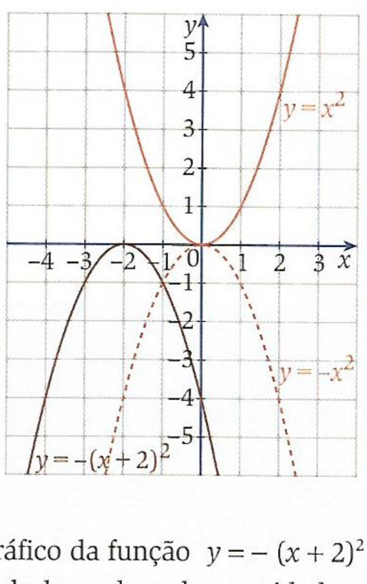
Consideremos o caso em que $a = 1$ e $p = 2$, ou seja, $y = (x - 2)^2$, e comparemos as representações gráficas das funções $y = x^2$ e $y = (x - 2)^2$.



x	$y = x^2$	$y = (x - 2)^2$
-2	4	16
-1	1	9
0	0	4
1	1	1
2	4	0

O gráfico da função $y = (x - 2)^2$ obtém-se a partir do gráfico da função $y = x^2$ deslocando-o duas unidades para a direita.

No caso de $a = -1$ e $p = -2$, ou seja, $y = -(x + 2)^2$, as representações gráficas das funções $y = x^2$ e $y = -(x + 2)^2$ são as seguintes:



x	$y = x^2$	$y = -(x + 2)^2$
-2	4	0
-1	1	-1
0	0	-4
1	1	-9
2	4	-16

O gráfico da função $y = -(x + 2)^2$ obtém-se a partir do gráfico da função $y = x^2$ deslocando-o duas unidades para a esquerda e invertendo o sentido da concavidade passando a ter concavidade voltada para baixo.

A translação da função $y = -(x + 2)^2$ no eixo horizontal de duas unidades para a esquerda deve-se ao facto de:

$$y = -(x + 2)^2 \iff y = -(x - (-2))^2$$

O gráfico da função $y = a(x - p)^2$ obtém-se a partir do gráfico da função $y = x^2$ deslocando-o $|p|$ unidades de comprimento. No caso de $p < 0$, a translação é para a esquerda e de comprimento $|p|$ e, quando $p > 0$, a translação é para a direita e de comprimento $|p|$.

O vértice da parábola $y = a(x - p)^2$ é o ponto $V(p\ ,\ 0)$ e o gráfico desta função é simétrico em relação à recta $x = p$.

EXEMPLO:

Considere as seguintes funções $f(x) = (x - 1)^2$ e $g(x) = -2\,(x - 1)^2$.

Represente-as no mesmo sistema cartesiano ortogonal e indique:

a) o domínio e o contradomínio;

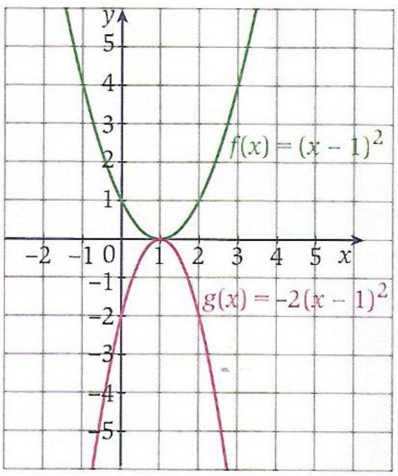
b) as coordenadas do vértice e o eixo de simetria das parábolas que representam graficamente as funções;

c) o sentido da concavidade da parábola que representa a função;

d) a monotonia da função;

e) a variação do sinal da função.

Resolução



x	$f(x)$	$g(x)$
−1	4	−8
0	1	−2
1	0	0
2	1	−2
3	4	−8

a) $D = \mathbb{R}$ nas duas funções.

$D'_f = \mathbb{R}_0^+ = [0\ ,\ +\infty[$ e $D'_g = \mathbb{R}_0^- =]-\infty\ ,\ 0]$.

b) $V(1\ ,\ 0)$ e $x = 1$ nas duas funções.

c) A função f tem concavidade voltada para cima e a função g tem concavidade voltada para baixo.

d) A função f é decrescente de $]-\infty\ ,\ 1]$ e crescente de $[1\ ,\ +\infty[$.

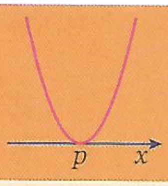
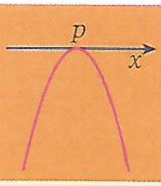
A função g é crescente de $]-\infty\ ,\ 1]$ e decrescente de $[1\ ,\ +\infty[$.

e) A função f é positiva em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, enquanto que a função g é negativa em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

OBSERVAÇÃO:

Na função f e g , 0 é um mínimo e 1 é o minimizante correspondente.
Na função g , 0 é um máximo e 1 é o maximizante correspondente.

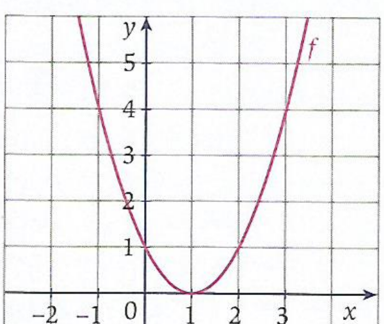
Da exploração dos exemplos anteriores e das representações gráficas das funções resulta o seguinte quadro-resumo.

$y=a(x-p)^2$	$a>0$ $p\in\mathbb{R}$ 	$a<0$ $p\in\mathbb{R}$ 
Domínio	$D=\mathbb{R}$	$D=\mathbb{R}$
Contradomínio	$D'=\mathbb{R}_0^+=[0\,,\,+\infty[$	$D'=\mathbb{R}_0^-=]-\infty\,,\,0]$
Intersecção com os eixos coordenados	Eixos das abcissas: $P(p\,,\,0)$ Eixos das ordenadas: $Q(0\,,\,ap^2)$	
Vértice da parábola	$V(p\,,\,0)$	$V(p\,,\,0)$
Eixo de simetria	$x=p$	$x=p$
Extremos	Mínimo: ordenada do vértice; Minimizante: abcissa do vértice.	Máximo: ordenada do vértice; Maximizante: abcissa do vértice.
Sentido da concavidade	Concavidade voltada para cima.	Concavidade voltada para baixo.
Monotonia	Decrescente para $x\leqslant p$; Crescente para $x\geqslant p$.	Crescente para $x\leqslant p$; Decrescente para $x\geqslant p$.
Sinal	Para todo $x\neq p$, a função é positiva se $a>0$ e negativa se $a<0$.	
Influência do parâmetro *a*	À medida que aumenta o valor absoluto de a, a parábola é mais fechada, isto é, os ramos ficam mais próximos do eixo de simetria.	

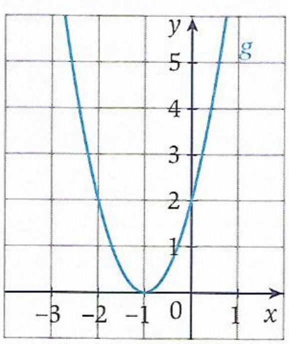
Exercício n.º 3

Escreva na forma $y=a(x-p)^2$ as funções cujas representações gráficas são as seguintes:

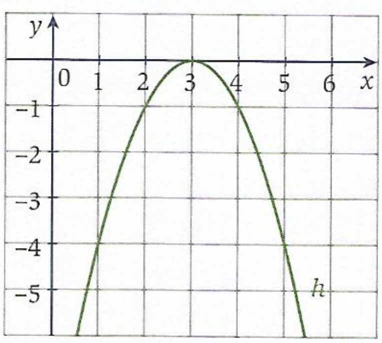
(A)



(B)

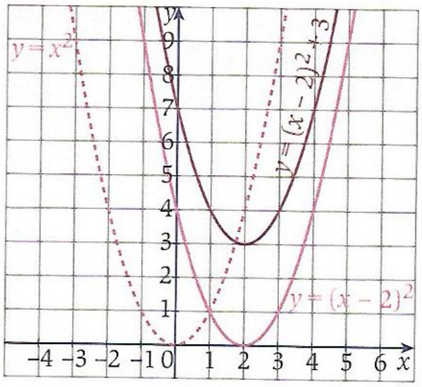


(C)



3.2. Família de funções do tipo $y = a(x-p)^2 + q$, $a \neq 0$

Consideremos as representações gráficas das funções $y = x^2$ e $y = (x-2)^2 + 3$.

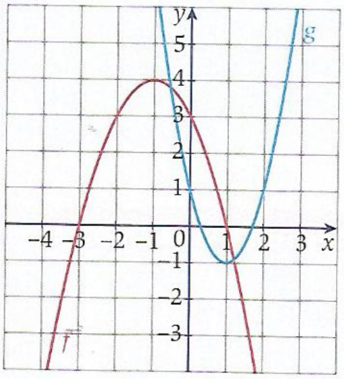


x	$y = x^2$	$y = (x-2)^2 + 3$
−1	1	12
0	0	7
1	1	4
2	4	3
3	9	4

O gráfico da função $y = (x-2)^2 + 3$ obtém-se a partir do gráfico da função $y = x^2$ deslocando-o duas unidades para a direita e três unidades para cima.

O gráfico da função $y = a(x-p)^2 + q$ pode ser obtido pela translação vertical de comprimento $|q|$ do gráfico da função $y = a(x-p)^2$. A translação será para cima se $q > 0$ e para baixo se $q < 0$.

O vértice da parábola é o ponto $V(p\ ,\ q)$ e o gráfico desta função é simétrico em relação à recta $x = p$.



EXEMPLO:

Considere as seguintes funções $f(x) = -(x+1)^2 + 4$ e $g(x) = 2(x-1)^2 - 1$.

Represente-as no mesmo sistema cartesiano ortogonal e indique:

a) o domínio e o contradomínio;

b) as coordenadas do vértice e o eixo de simetria das parábolas que representam graficamente as funções;

c) o sentido da concavidade da parábola que representa a função;

d) a monotonia da função;

e) a variação do sinal da função.

Resolução

a) $D = \mathbb{R}$ nas duas funções; $D'_f =]-\infty\ ,\ 4[$ e $D'_g = [-1\ ,\ +\infty[$.

b) Na função f : $V_f(-1\ ,\ 4)$ e $x = -1$; Na função g : $V_g(1\ ,\ -1)$ e $x = 1$.

c) A função f tem concavidade voltada para baixo e a função g tem concavidade voltada para cima.

d) A função f é crescente de $]-\infty\ ,\ -1]$ e decrescente de $[-1\ ,\ +\infty[$.
A função g é decrescente de $]-\infty\ ,\ 1]$ e decrescente de $[1\ ,\ +\infty[$.

e) A função f é negativa em $\mathbb{R} \setminus [-3\ ,\ 1]$ e positiva em $]-3\ ,\ 1[$.

A função g é positiva em $\mathbb{R} \setminus \left[1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ e negativa em $\left]1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$.

OBSERVAÇÃO:

$2(x-1)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = \frac{1}{2}$

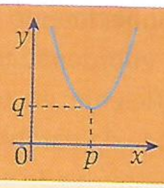
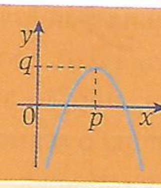
$\Leftrightarrow x - 1 = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

$\Leftrightarrow x - 1 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow x = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \vee x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$

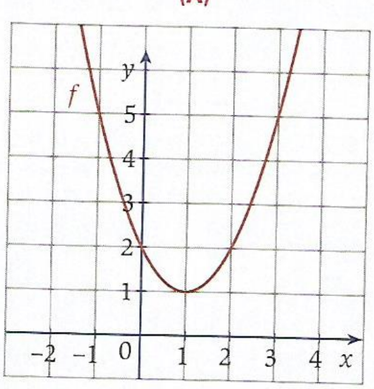
Da exploração dos exemplos anteriores e das representações gráficas das funções resulta o seguinte quadro-resumo.

$y = a(x-p)^2 + q$	$a > 0$ $p,\ q \in \mathbb{R}$ 	$a < 0$ $p,\ q \in \mathbb{R}$ 
Domínio	$D = \mathbb{R}$	$D = \mathbb{R}$
Contradomínio	$D' = [q,\ +\infty[$	$D' =]-\infty,\ q]$
Intersecção com os eixos coordenados	Eixos das abcissas: $P_1\left(p+\sqrt{-\frac{q}{a}},\ 0\right)$ e $P_2\left(p-\sqrt{-\frac{q}{a}},\ 0\right)$ Eixos das ordenadas: $Q(0,\ ap^2+q)$	
Vértice da parábola	$V(p,\ q)$	$V(p,\ q)$
Eixo de simetria	$x = p$	$x = p$
Extremos	Mínimo: ordenada do vértice; Minimizante: abcissa do vértice.	Máximo: ordenada do vértice; Maximizante: abcissa do vértice.
Sentido da concavidade	Concavidade voltada para cima.	Concavidade voltada para baixo.
Monotonia	Decrescente para $x \leqslant p$; Crescente para $x \geqslant p$.	Crescente para $x \leqslant p$; Decrescente para $x \geqslant p$.
Sinal	Positiva em: $\mathbb{R} \setminus \left[p-\sqrt{-\frac{q}{a}},\ p+\sqrt{-\frac{q}{a}}\right]$ Negativa em: $\left]p-\sqrt{-\frac{q}{a}},\ p+\sqrt{-\frac{q}{a}}\right[$.	Positiva em: $\left]p-\sqrt{-\frac{q}{a}},\ p+\sqrt{-\frac{q}{a}}\right[$ Negativa em: $\mathbb{R} \setminus \left[p-\sqrt{-\frac{q}{a}},\ p+\sqrt{-\frac{q}{a}}\right]$
Influência do parâmetro *a*	À medida que aumenta o valor absoluto de a, a parábola é mais fechada, isto é, os ramos ficam mais próximos do eixo de simetria.	

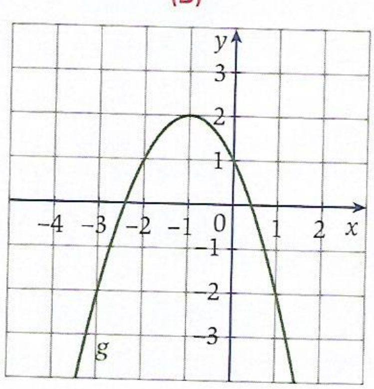
Exercício n.º 4

Escreva na forma $y = a(x-p)^2 + q$ as funções cujas representações gráficas são as seguintes:

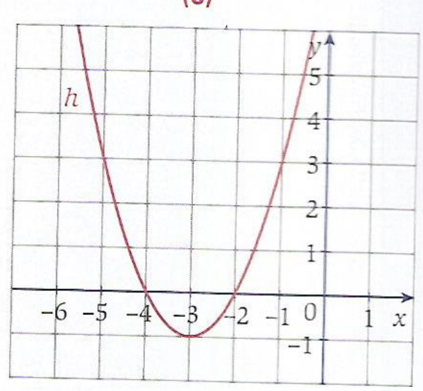
(A)



(B)



(C)



3.3. Família de funções do tipo $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

Dada uma função quadrática, para esboçar a sua representação gráfica, uma parábola, basta ter conhecimento dos pontos de intersecção com os eixos coordenados, das coordenadas do vértice da parábola e prestar atenção ao sinal do coeficiente do termo quadrático (a) que determina o sentido da concavidade da parábola.

Determinando mais alguns pontos pode-se aperfeiçoar a precisão da imagem gráfica.

A função quadrática na forma $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ pode ser representada na forma $y = a(x - p)^2 + q$ tal que:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \text{ com } p = -\frac{b}{2a} \text{ e } q = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}.$$

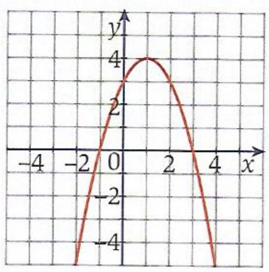
O vértice da parábola representativa da função tem coordenadas $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ e o seu eixo de simetria tem de equação $x = -\frac{b}{2a}$.

EXEMPLOS:

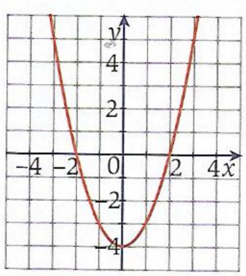
1. Considere as seguintes funções: $f(x) = x^2 + x$ e $g(x) = -x^2 + 2x - 4$.
Represente-as no mesmo sistema cartesiano ortogonal e indique:
   a) o domínio e o contradomínio;
   b) as coordenadas dos pontos de intersecção do gráfico com os eixos coordenados.
   c) as coordenadas do vértice e o eixo de simetria das parábolas que representam graficamente as funções;
   d) o sentido da concavidade da parábola que representa a função;
   e) a monotonia da função;
   f) a variação do sinal da função.

2. Os gráficos seguintes representam funções.

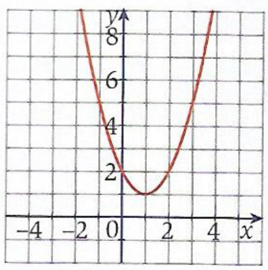
(A)



(B)



(C)



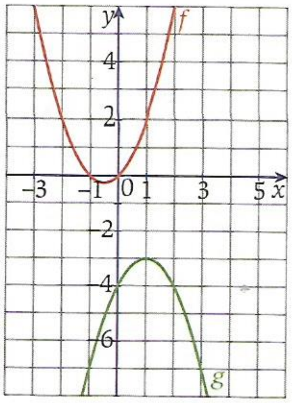
Para cada uma das funções, proceda ao mesmo estudo que foi efectuado na questão anterior.

3. O valor mínimo da função $f(x) = x^2 - kx + 15$ é -1. Determine o valor de k.

4. A parábola de equação $y = ax^2$ passa pelo vértice da parábola $y = 4x - 4x^2$.
Determine o valor de a.

Resolução

1.



a) $D_f = \mathbb{R}$; $D_g = \mathbb{R}$

Na função f: $y_v = -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow y_v = -\frac{1}{4}$, logo $D'_f = \left[-\frac{1}{4}, +\infty\right[$

Na função g: $y_v = -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow y_v = -\frac{2^2 - 4 \times (-1) \times (-4)}{4 \times (-1)} \Leftrightarrow y_v = -3$, logo

$D'_g =]-\infty, -3]$.

b) Intersecção com o eixo das abcissas:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(x+1) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1$

Os pontos de intersecção são $(0, 0)$ e $(-1, 0)$.

$g(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{1-4} \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{-3} \notin \mathbb{R}$

A função g não intersecta o eixo das abcissas.

Intersecção com o eixo das ordenadas:

$f(0) = 0^2 + 0 = 0$, logo, o ponto de intersecção é $(0, 0)$.

$g(0) = -0^2 + 2 \times 0 - 4$, logo, o ponto de intersecção é $(0, -4)$.

c) Sabendo que $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ e que a equação do eixo de simetria é $x = -\frac{b}{2a}$:

Função f: $V_f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$; $x = -\frac{1}{2}$

Função g: $V_g(1, -3)$; $x = 1$.

d) A parábola representativa da função f tem concavidade voltada para cima, enquanto que a função g tem concavidade voltada para baixo.

e) A função f é decrescente em $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right]$ e crescente em $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

A função g é crescente em $]-\infty, 1]$ e decrescente em $[1, +\infty[$.

f) A função f é positiva em $\mathbb{R} \setminus [-1, 0]$ e negativa em $]-1, 0[$.

A função g toma valores negativos em todo o seu domínio.

2.

GRÁFICO	(A)	(B)	(C)
a)	$D=\mathbb{R}$ $D'=]-\infty\,,\,4]$	$D=\mathbb{R}$ $D'=[-4\,,\,+\infty[$	$D=\mathbb{R}$ $D'=[1\,,\,+\infty[$
b)	$P(-1\,,\,0)$ $Q(3\,,\,0)$ $R(0\,,\,3)$	$P(-2\,,\,0)$ $Q(2\,,\,0)$ $R(0\,,\,-4)$	$R(0\,,\,2)$
c)	$V(1\,,\,4)\,;\;x=1$	$V(0\,,\,-4)\,;\;x=0$	$V(1\,,\,1)\,;\;x=1$
d)	Concavidade voltada para baixo	Concavidade voltada para cima	Concavidade voltada para cima
e)	Crescente: $]-\infty\,,\,1]$ Decrescente: $[1\,,\,+\infty[$	Decrescente: $]-\infty\,,\,0]$ Crescente: $[0\,,\,+\infty[$	Decrescente: $]-\infty\,,\,1]$ Crescente: $[1\,,\,+\infty[$
f)	Negativa: $x\in\mathbb{R}\setminus[-1\,,\,3]$ Positiva: $x\in]-1\,,\,3[$	Negativa: $x\in]-2\,,\,2[$ Positiva: $x\in\mathbb{R}\setminus[-2\,,\,2]$	A função é sempre positiva qualquer que seja o valor de x.

3. A parábola que representa a função f tem a concavidade voltada para cima. O mínimo da função é a ordenada do vértice $V(x_v\,,\,y_v)$ da parábola.

$$y_v=-\frac{\Delta}{4a}\implies -\frac{\Delta}{4a}=-1\iff \frac{k^2-60}{4}=1$$
$$\iff k^2-60=4$$
$$\iff k^2=64$$
$$\iff k=\pm\sqrt{64}$$
$$\iff k=\pm 8$$

$k\in\{-8\,,\,8\}$

4. Coordenadas do vértice da parábola $y=4x-4x^2$:

$$x_v=-\frac{b}{2a}\implies x_v=-\frac{4}{-8}=\frac{1}{2}$$

$$y_v=-\frac{\Delta}{4a}\implies y_v=-\frac{16-0}{-16}=1$$

Assim, o vértice da parábola é: $V\left(\frac{1}{2}\,,\,1\right)$

Se $V\left(\frac{1}{2}\,,\,1\right)$ pertence à parábola $y=ax^2$, então $a\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=1\iff \frac{1}{4}a=1\iff a=4$.

Exercício n.º 5

1. Determine a distância do vértice da parábola $y = -x^2 + 8x - 17$ ao eixo das abcissas.

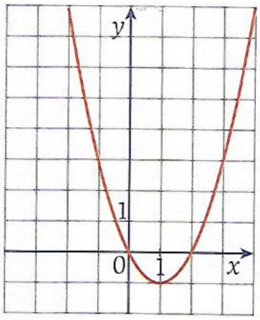
2. O gráfico da função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 + mx + (15 - m)$, é tangente ao eixo das abcissas e corta o eixo das ordenadas no ponto $P(0, k)$.
Sabendo que a abcissa do vértice da parábola é negativa, determine o valor de k.

3. Uma função define-se por $g(x) = x^2 - kx + 15$ para um determinado valor de $k < 0$. Sabendo que o valor mínimo da função é -1, determine o valor de k.

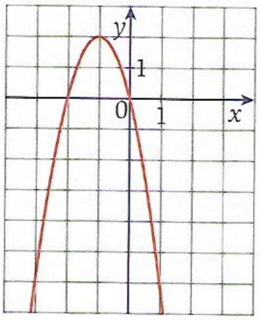
4. Determine o valor de $m \in \mathbb{R}$ para que a parábola definida por $f(x) = x^2 + mx + 9$ seja tangente ao eixo das abcissas.

5. A seguir apresentam-se representações gráficas de algumas funções quadráticas.

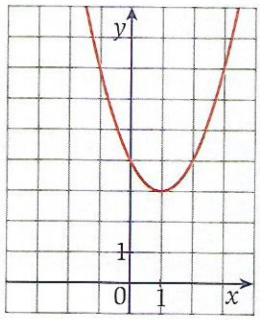
(A)



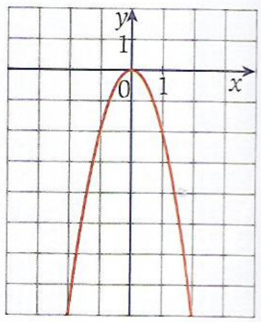
(B)



(C)



(D)



Para cada uma das representações gráficas, indique:

a) o domínio e o contradomínio;

b) os zeros se existirem;

c) as coordenadas dos pontos de intersecção com os eixos coordenados;

d) as coordenadas do vértice da parábola, o extremo e a equação do eixo de simetria;

e) os intervalos de monotonia;

f) os intervalos de variação do sinal.

6. Considere a parábola definida pela equação $y = x^2 - 4x + m$.
Determine o valor de $m \in \mathbb{R}$ para que a abcissa e a ordenada do vértice da parábola sejam iguais.

7. O gráfico da função $f(x) = x^2 - mx + m - 1$, onde $m \in \mathbb{R}$, intersecta o eixo das abcissas num só ponto.
Determine a ordenada do ponto do gráfico de f que tem de abcissa 2.

8. Considere as seguintes funções:

$f(x) = -x^2 + 2x - 1$; $\quad g(x) = -x^2 + 4$; $\quad h(x) = x^2 - 6x + 8$.

a) Represente as funções no mesmo sistema cartesiano ortogonal.

b) Para cada uma das funções indique:

i) o domínio e o contradomínio;

ii) os intervalos de monotonia;

iii) a variação de sinal.

3.4. Determinação da expressão analítica de uma função quadrática

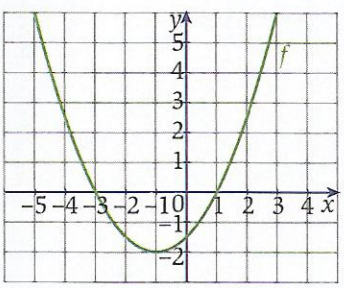
Conhecidos alguns pontos do gráfico de uma função quadrática, é possível determinar uma expressão analítica que a defina.

No caso de se conhecer:

- o vértice da parábola $V(p\,,\,q)$, então $y=a(x-p)^2+q$, $a\neq 0$;
- os zeros da parábola, x_1 e x_2 , então $y=a(x-x_1)\,(x-x_2)$, $a\neq 0$;
- 3 pontos do gráfico, determinam-se os valores de a , b e c .

Nos dois primeiros casos, para conhecer o valor de a basta substituir as coordenadas de um ponto na expressão analítica obtida.

EXEMPLO:



Sabendo que o gráfico da função representada ao lado passa no ponto $\left(0\,,-\frac{3}{2}\right)$, a expressão analítica da função pode ser calculada usando um dos três casos referidos:

- Como $V(-1\,,\,-2)$, então $f(x)=a(x+1)^2-2$. Para calcular o valor de a , basta substituir as coordenadas de um ponto na expressão:

  $(1\,,\,0)\in f \Longrightarrow a(1+1)^2-2=0 \Longleftrightarrow 4a=2 \Longleftrightarrow a=\frac{1}{2}$

  Assim, $f(x)=\frac{1}{2}(x+1)^2-2 \Longleftrightarrow f(x)=\frac{1}{2}x^2+x-\frac{3}{2}$.

- Os zeros da parábola são $x_1=-3$ e $x_2=1$, logo $f(x)=a(x+3)\,(x-1)$.

  $(-1\,,\,-2)\in f \Longrightarrow a(-1+3)\,(-1-1)=-2 \Longleftrightarrow -4a=-2 \Longleftrightarrow a=\frac{1}{2}$

  Assim, $y=\frac{1}{2}(x+3)\,(x-1) \Longleftrightarrow y=\frac{1}{2}x^2+x-\frac{3}{2}$.

- A expressão analítica de uma função quadrática é da forma $f(x)=ax^2+bx+c$.

  $f(0)=-\frac{3}{2} \Longleftrightarrow a(0)^2+b(0)+c=-\frac{3}{2} \Longleftrightarrow c=-\frac{3}{2}$

  $f(1)=0 \Longleftrightarrow a\times 1^2+b\times 1-\frac{3}{2}=0 \Longleftrightarrow a+b=+\frac{3}{2} \Longleftrightarrow a=-b+\frac{3}{2}$

  $f(-3)=0 \Longleftrightarrow a(-3)^2+b(-3)-\frac{3}{2}=0 \Longleftrightarrow 9a-3b=\frac{3}{2} \Longleftrightarrow a=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}b$

  Logo, $-b+\frac{3}{2}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}b \Longleftrightarrow -\frac{4}{3}b=-\frac{4}{3} \Longleftrightarrow b=1$, pelo que $a=-1+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$.

  A expressão analítica da função é $f(x)=\frac{1}{2}x^2+x-\frac{3}{2}$.

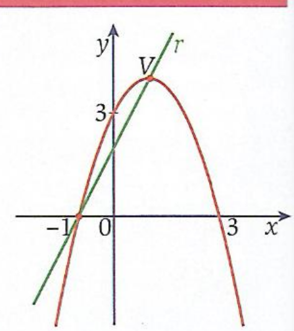
Exercício n.º 6

Na figura ao lado estão representadas uma parábola de vértice V e uma recta r que contém esse ponto V.

Determine uma equação da :

a) parábola;

b) recta r.



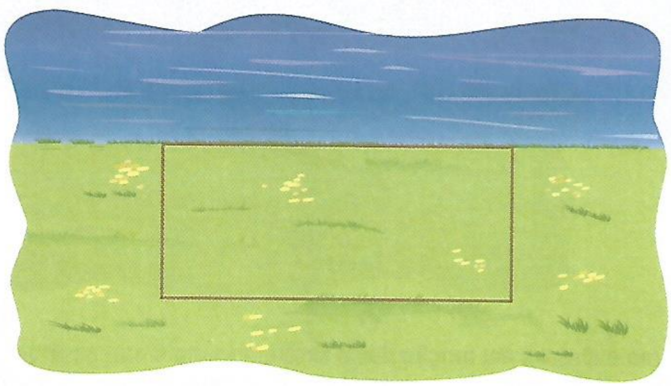
4. Resolução de problemas

Em muitas situações do dia-a-dia, o modelo matemático que melhor descreve as variáveis em estudo é a função quadrática.

EXEMPLOS:

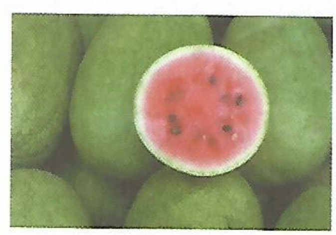
1. Um trajecto de uma montanha-russa tem a forma de uma parábola.
Um carrinho atinge o começo da subida com velocidade de 40 km/h.
A altura h, em metros, que o carrinho atinge em relação ao solo, em função do tempo t, em segundos, é dada pela expressão $h(t) = -5t^2 + 40t + 100$.
a) Em que instante o carrinho atinge a altura máxima?
b) Qual é a altura máxima atingida pelo carrinho?

2. O Sr. António tem 100 metros de rede para vedar um terreno rectangular à beira do rio. Só quer vedar os três lados que não dão para o rio.



Qual deve ser a medida de cada um dos lados da vedação para que a área do terreno seja máxima?

3. Um fazendeiro vende melancias na feira aos domingos. Neste domingo, ele tem 5 melancias, que pode vender a 8,00 Mt cada. Porém, se ele esperar para vendê-las, a cada semana vai colher mais 2 melancias. Entretanto, a cada domingo, o preço de cada melancia diminui 1,00 Mt. Quantas semanas deve o fazendeiro esperar para vender as suas melancias pelo maior valor total possível?



4. A secção transversal de um túnel tem a forma de um arco de parábola com 10 m de largura na base e 6 m de altura (medida acima do ponto médio da base). De cada lado, é reservado 1,5 m para passagem de peões e o restante é dividido em duas pistas para veículos.
As autoridades só permitem que um veículo passe por esse túnel caso tenha uma altura de, no máximo, 30 cm a menos do que a altura mínima do túnel sobre as pistas para veículos.
Calcule a altura máxima que um veículo pode ter para que a sua passagem pelo túnel seja permitida.

Resolução

1 **a)** Como a altura atingida pelo carrinho pode ser traduzida graficamente por uma parábola de concavidade voltada para baixo, este atinge a altura máxima no vértice $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ dessa parábola. Assim, $t=-\frac{b}{2a} \Leftrightarrow t=-\frac{40}{2(-5)}=4$.

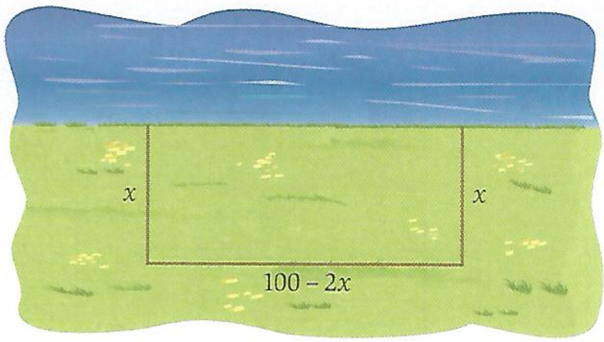
O carrinho atinge a altura máxima em 4 s.

b) A altura máxima atingida pelo carrinho da montanha-russa corresponde à ordenada no vértice da parábola. Deste modo:

$$h(4)=-\frac{\Delta}{4a} \Longrightarrow h(4)=-\frac{40^2-4\times(-5)\times 100}{4\times(-5)}=180$$

A altura máxima atingida pelo carrinho é de 180 m.

2. Seja x o comprimento de um dos lados iguais da vedação a construir. O terceiro lado pode traduzir-se por $100-2x$.



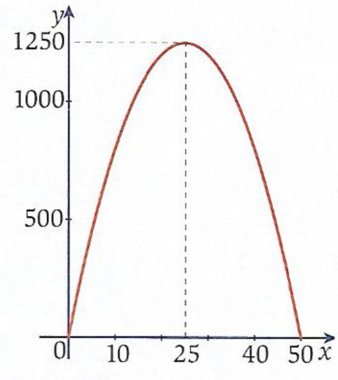
A área expressa em função de x será:

$$A(x)=x(100-2x) \Longleftrightarrow A(x)=-2x^2+100x$$

A área é, assim, traduzida por uma função quadrática com concavidade voltada para baixo, atingindo o máximo no vértice $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ da parábola correspondente.

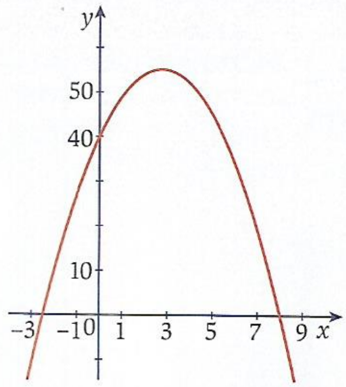
$$x_V=-\frac{b}{2a} \Longrightarrow x_V=-\frac{100}{2(-2)}=25$$

$$y_V=A(25)=100-2\times 25=50$$



Concluindo, a vedação terá um lado de 50 m e os outros dois de 25 m cada.

3. Após x semanas a contar do primeiro domingo, o fazendeiro terá $5+2x$ melancias ao preço de $8-x$ Mt cada uma. Portanto, o valor total, em Mt, resultante da venda destas melancias pode traduzir-se por: $f(x)=(5+2x)(8-x)$.



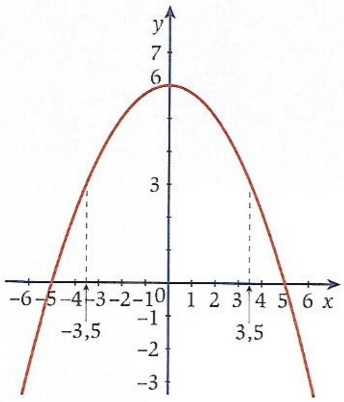
$f(x)=(5+2x)(8-x) \iff f(x)=-2x^2+11x+40$

O coeficiente do termo quadrático desta função é negativo e por isso atinge o máximo no vértice $V\left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$ da parábola.

$x=-\dfrac{b}{2a} \implies x=-\dfrac{11}{2(-2)}=2{,}75$

Como o fazendeiro só vende as suas melancias aos domingos, ou seja, quando x é um número inteiro, o que não acontece no vértice, deverá vender as suas melancias três semanas a contar deste domingo.

4. Para estudar este problema, imagine-se a representação gráfica de uma parábola, que satisfaça as condições descritas no enunciado.



Assim, considere-se que a altura máxima é atingida no ponto de intersecção com o eixo das ordenadas: $(0, 6)$.

Como a largura da base do túnel é de 10 m, os pontos de intersecção com o eixo das abcissas são $(5, 0)$ e $(-5, 0)$.

Atendendo ao facto de que se reserva, em cada um dos lados, metro e meio para passagem de peões, as faixas destinadas a veículos são de $(-3{,}5; 0)$ até à origem e da origem até $(3{,}5; 0)$. É nestes pontos que se poderão encontrar as zonas mais baixas das pistas destinadas a veículos.

A parábola considerada pode definir-se analiticamente por $y=ax^2+6$, $a \neq 0$.

Como $(5, 0)$ é ponto da parábola, segue que:

$0=a\times 5^2+6 \iff a=-\dfrac{6}{25}$.

Então, a parábola pode definir-se por $y=-\dfrac{6}{25}x^2+6$.

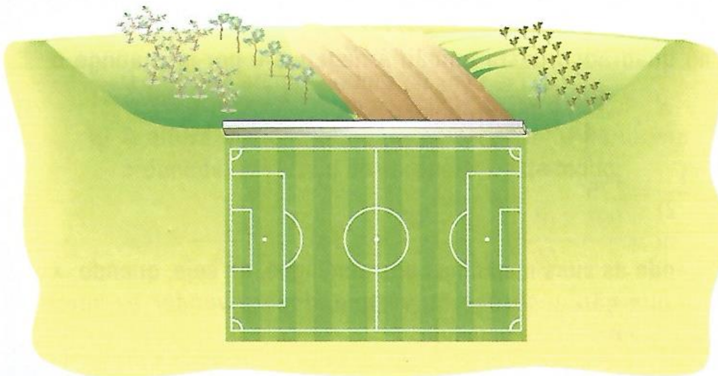
A altura que procuramos determinar é a ordenada do ponto da parábola cuja abcissa é $3{,}5$.

$y=-\dfrac{6}{25}\times(3{,}5)^2+6=3{,}06$

Concluindo, a altura mínima nas pistas do túnel destinadas a veículos é de $3{,}06$ m. Uma vez que é exigido que os veículos tenham, no máximo, menos 30 cm que esta altura, $3{,}06-0{,}3=2{,}76$ é a altura máxima permitida para os veículos poderem passar neste túnel.

Exercício n.º 7

1. Pretende-se construir um campo de futebol rectangular. Para cercá-lo, dispõe-se de 60 m de alambrado prefabricado e, por uma questão de economia, vai ser aproveitado o muro do quintal.



a) Determine a área do cercado em função de um dos lados.

b) Construa o gráfico da função determinada na questão anterior.

c) Calcule as dimensões desse terreno para que a área seja máxima.

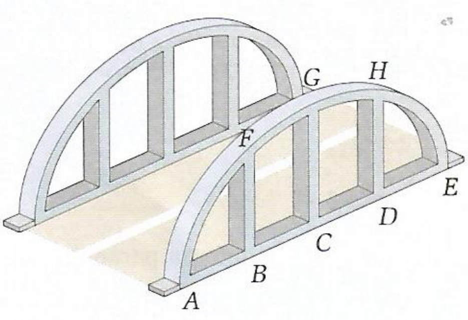
2. Um terreno de forma rectangular tem perímetro igual a 40 m.

a) Expresse a área desse terreno em função do comprimento de um dos lados.

b) Construa o gráfico dessa função.

c) Calcule as dimensões desse terreno para que a área seja máxima.

3. A figura abaixo ilustra uma ponte suspensa por estruturas metálicas em forma de arco de parábola.



Os pontos A, B, C, D e E estão no mesmo nível da estrada e a distância entre quaisquer dois consecutivos é 25 m. Sabendo que os elementos de sustentação são todos perpendiculares ao plano da estrada e que a altura do elemento central $[CG]$ é 20 m, determine a altura $\overline{DH}$.

4

AVALIAÇÃO FORMATIVA

1. Considere uma função quadrática definida por $f(x) = x^2 + 2x - 12$.
Determine $m \in \mathbb{R}$ de modo que $f(m - 1) = 3$.

2. O gráfico da função $f(x) = x^2 + kx + m$ é uma parábola cujo vértice é o ponto $V(-2\ ,\ -9)$. Determine o valor de $k - m$.

3. Considere a função $g(x) = -x^2 - 3x + 10$.
Represente graficamente a função e indique:

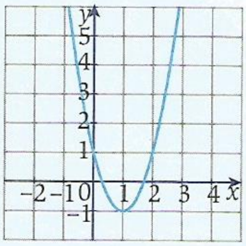
a) o domínio e o contradomínio;

b) os intervalos de monotonia;

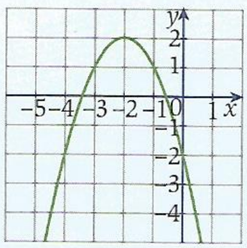
c) a variação de sinal.

4. Defina, por meio de uma expressão analítica, cada uma das funções cujas representações gráficas são:

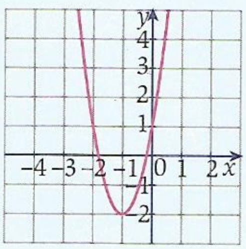
A



B



C



5. Sejam a e b duas funções definidas por:

$a(x) = 2\ (x - 3)^2$ $\qquad$ $b(x) = -\ (x + 1)^2 - 2$

a) Considere as parábolas que as representam graficamente e indique:

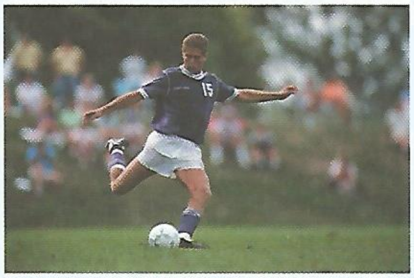
i) as coordenadas do vértice;

ii) as coordenadas dos pontos de intersecção com os eixos coordenados;

iii) o sentido da concavidade.

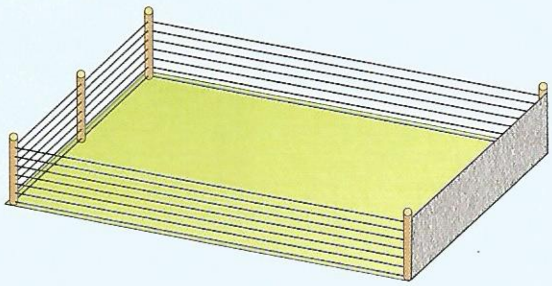
b) Represente graficamente as duas funções no mesmo sistema cartesiano ortogonal.

6. Um jogador de futebol chuta uma bola em direcção à baliza. A bola descreve uma trajectória em forma de parábola. A lei que descreve a altura atingida pela bola, em função do tempo t, em segundos, decorrido após o lançamento, é dada por $h(t) = -5t^2 + 14t$, em metros.



Calcule a altura máxima que a bola atinge neste remate.

7. Um fazendeiro quer construir um curral rectangular. Para cercá-lo, dispõe de 400 m de arame e de uma parede já existente. Sabendo que a cerca de arame terá 4 voltas, determine as dimensões desse curral para que a sua área seja máxima.



8. Uma loja de venda de material informático compra cartuchos de tinta para uma determinada impressora a 28,00 Mt a unidade e prevê que, se cada cartucho for vendido a x Mt, serão vendidos $200 - 2x$ cartuchos por mês.

a) Escreva uma expressão matemática que traduza o lucro mensal, em função do preço de venda x, de cada cartucho.

b) Para que o lucro seja máximo, determine qual deve ser o preço de venda x de cada cartucho.

c) Qual será o lucro máximo e quantos cartuchos serão vendidos mensalmente ao preço que maximiza esse lucro?

SÍNTESE

- Uma **função quadrática** pode definir-se analiticamente por uma expressão do tipo:

  $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a , b e c são números reais e $a \neq 0$.

- O gráfico de uma função quadrática é uma **parábola**.

- O **domínio** de uma função quadrática é $\mathbb{R}$.

- O **contradomínio** de uma função quadrática $f(x) = a(x-p)^2 + q$, $a \neq 0$, é:
  - $[q, +\infty[$ quando $a > 0$
  - $]-\infty, q]$ quando $a < 0$

- A **expressão analítica** de uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, pode representar-se na forma:

  $f(x) = a(x-p)^2 + q$ onde

  $p = -\dfrac{b}{2a}$ e $q = -\dfrac{\Delta}{4a}$

  da parábola de coordenadas $V(p, q)$.

- A representação gráfica de uma função quadrática $f(x) = a(x-p)^2 + q$, $a \neq 0$, é uma parábola que satisfaz o seguinte:
  - se $a > 0$, tem a concavidade voltada para cima, se $a < 0$, tem a concavidade voltada para baixo;
  - o vértice da parábola tem de coordenadas $V(p, q)$;
  - a recta $x = p$ é o eixo de simetria;
  - intersecta o eixo das abcissas nos pontos

    $P_1\left(p + \sqrt{-\dfrac{q}{a}}, 0\right)$ e $P_2\left(p - \sqrt{-\dfrac{q}{a}}, 0\right)$;
  - intersecta o eixo das ordenadas no ponto $Q(0, ap^2 + q)$.

- Os **extremos** correspondem à ordenada do vértice da parábola que representa a função quadrática. Se $a > 0$ a função admite mínimo; se $a < 0$ a função admite máximo.

- Os **extremantes** correspondem à abcissa do vértice da parábola que representa a função quadrática.

- No que respeita à **monotonia** de uma função quadrática $f(x) = a(x-p)^2 + q$, $a \neq 0$:
  - se $a > 0$, é decrescente para $x \leqslant p$ e crescente para $x \geqslant p$;
  - se $a < 0$, é decrescente para $x \geqslant p$ e crescente para $x \leqslant p$.

- No que respeita à **variação de sinal** de uma função quadrática $f(x) = a(x-p)^2 + q$, $a \neq 0$:
  - se $a > 0$,

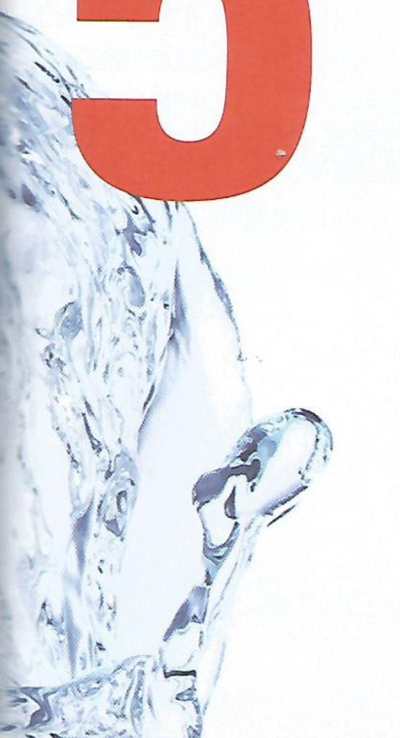
    é negativa em $\left]p - \sqrt{-\dfrac{q}{a}}, p + \sqrt{-\dfrac{q}{a}}\right[$

    e positiva em $\mathbb{R} \setminus \left[p - \sqrt{-\dfrac{q}{a}}, p + \sqrt{-\dfrac{q}{a}}\right]$
  - se $a < 0$,

    é negativa em $\mathbb{R} \setminus \left[p - \sqrt{-\dfrac{q}{a}}, p + \sqrt{-\dfrac{q}{a}}\right]$

    e positiva em: $\left]p - \sqrt{-\dfrac{q}{a}}, p + \sqrt{-\dfrac{q}{a}}\right[$.

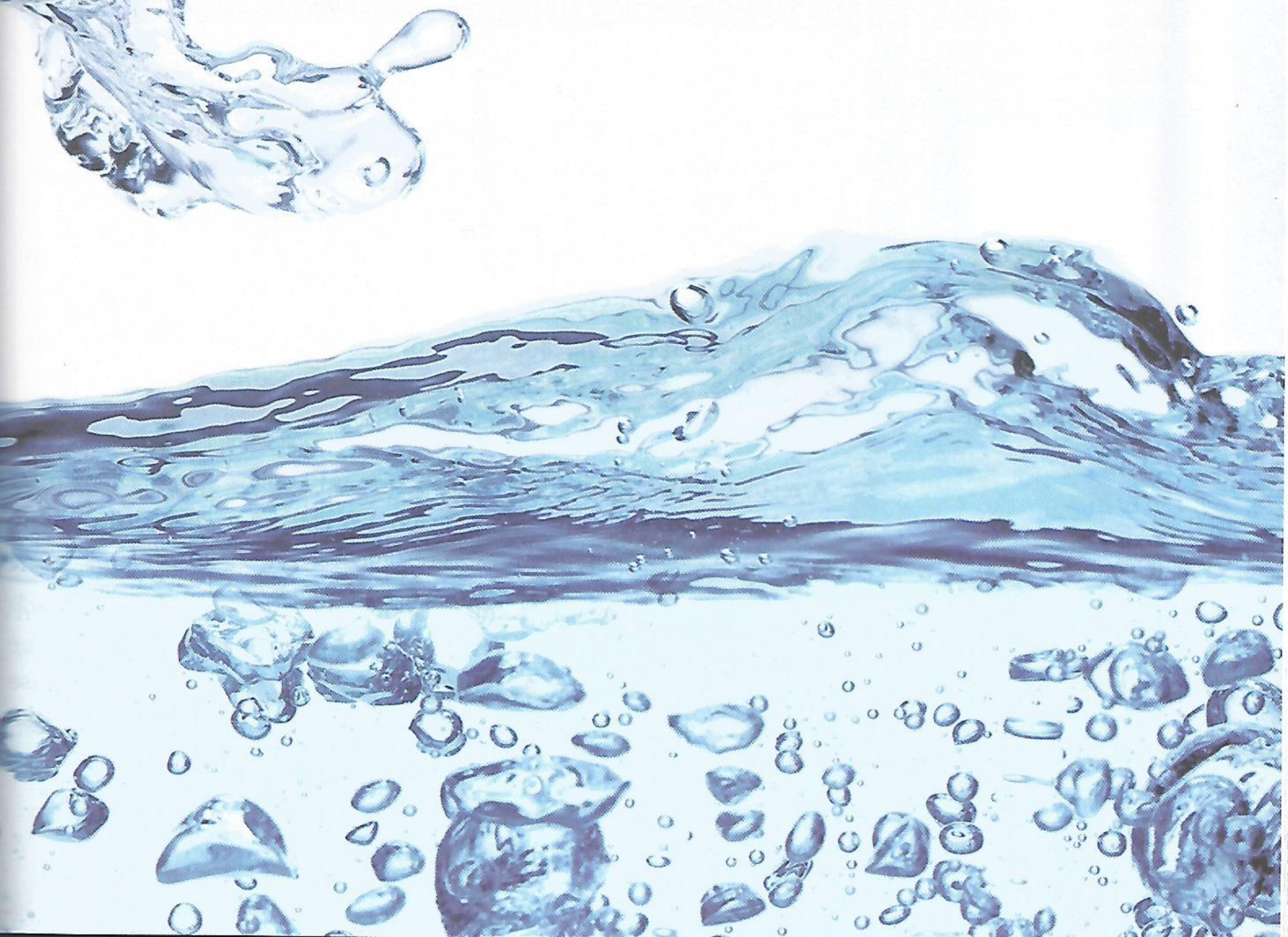
5 INEQUAÇÃO QUADRÁTICA



1\.
INEQUAÇÃO LINEAR

2\.
INEQUAÇÃO QUADRÁTICA

3\.
RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS



5 INEQUAÇÃO QUADRÁTICA

UM POUCO DE HISTÓRIA...

Diofanto de Alexandria foi um célebre matemático grego cuja data de nascimento é desconhecida, presumindo-se, por estudos científicos da época, ter vivido entre o século II a. C. e o princípio do século IV da nossa era.

Foi o autor da obra *Aritmética*, um tratado em treze livros os quais apenas se conhecem dez. Neste tratado, Diofanto fez uso de um original sistema de notações simbolizado por abreviaturas pouco adoptado pela generalidade dos matemáticos não influenciando sistemas posteriormente desenvolvidos.

Diofanto

1. Inequação linear

Na classe anterior, estudámos a resolução de inequações lineares.

As inequações que pelos princípios de equivalência se podem simplificar à forma canónica:

$$ax + b > 0\ ;\ ax + b \geqslant 0\ ;\ ax + b < 0 \text{ ou } ax + b \leqslant 0$$

em que a e b são números reais quaisquer, com $a \neq 0$, designam-se por inequações do 1.º grau ou inequações lineares.

A resolução de inequações lineares é fundamentada nos seguintes princípios de equivalência:

Princípio da adição

Adicionando ou subtraindo um mesmo número a ambos os membros de uma inequação, a desigualdade mantém-se.

Princípio da multiplicação

Dividindo ou multiplicando ambos os membros de uma inequação por um mesmo número positivo, a desigualdade mantém-se.

Dividindo ou multiplicando por um mesmo número negativo ambos os membros de uma inequação, a desigualdade inverte o sentido.

A resolução de uma inequação do 1.° grau baseia-se nos mesmos princípios da resolução de uma equação do 1.° grau, à excepção do último princípio que é o que diferencia estas resoluções.

De forma simplificada, pode dizer-se que uma inequação linear é resolvida da mesma forma que se resolve uma equação do 1.° grau, só que quando o coeficiente de x é negativo no final da resolução, multiplica-se ambos os membros da inequação por (-1) e inverte-se o sentido da desigualdade.

EXEMPLO:

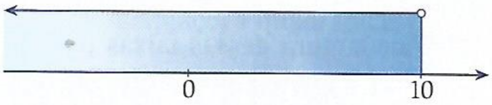
Resolva as inequações seguintes e represente a solução geometricamente no eixo real e sob a forma de intervalos.

a) $5x-8 < 3x+12$

b) $1-\frac{11}{2}t \geqslant \frac{7}{6}-2t$

Resolução

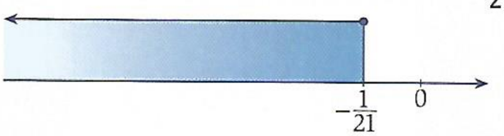
a) $5x-8 < 3x+12 \Leftrightarrow 5x-3x < 12+8 \Leftrightarrow 2x < 20 \Leftrightarrow x < \frac{20}{2} \Leftrightarrow x < 10$



Solução: $x \in \left]-\infty, 10\right[$

b) $1-\frac{11}{2}t \geqslant \frac{7}{6}-2t \Leftrightarrow 6-33t \geqslant 7-12t \Leftrightarrow 12t-33t \geqslant 7-6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -21t \geqslant 1 \Leftrightarrow 21t \leqslant -1 \Leftrightarrow t \leqslant -\frac{1}{21}$



Solução: $t \in \left]-\infty, -\frac{1}{21}\right]$

Exercício n.º 1

1. Resolva as seguintes inequações e apresente a solução sob a forma de intervalo.

a) $2x+1 > x+5$

b) $\frac{1+7x}{5} \geqslant x-\frac{2}{3}$

c) $\frac{2}{5}x-1 \geqslant \frac{1}{10}x+\frac{3}{8}x$

d) $\frac{x+1}{2}+\frac{3(2x-1)}{2} > \frac{x+3}{6}$

e) $4k-\frac{3(k+2)}{4} > \frac{1}{2}+2(1-3k)$

f) $\frac{3\left(5-\frac{1}{2}x\right)}{2}+\frac{4(3x-1)}{3} < \frac{7-x}{4}-2$

2. Determine os dois menores números inteiros que verificam a inequação $\frac{x}{3}-\frac{2}{3} \geqslant \frac{x-1}{6}$.

3. Considere a inequação linear $\frac{x}{3}-\frac{x+1}{2} \geqslant \frac{1-x}{4}$.

a) Verifique se 8 é solução da inequação.

b) Determine o conjunto de todos os números reais que satisfazem a inequação.

c) Indique:

i) o menor número inteiro que verifica a inequação.

ii) o maior número inteiro que não verifica a inequação.

2. Inequação quadrática

2.1. Conceito de inequação quadrática

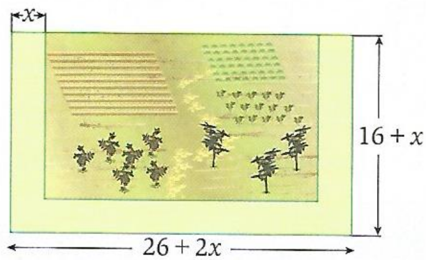
Consideremos o seguinte problema:

Um agricultor tem uma horta rectangular com 26 m de comprimento e 16 m de largura. Desejoso por aumentar a área da sua horta, acrescenta faixas da mesma largura a três dos seus lados, sendo duas dessas nos lados menores.

Qual deve ser a menor largura dessas faixas para que a área da horta não seja inferior a $740\ \text{m}^2$?

Resolução:

Seja x a largura das faixas a acrescentar ao terreno. A horta ficará com dimensões $(16 + x)$ por $(26 + 2x)$.



A área do terreno, depois de acrescentadas as faixas, pode ser traduzida por:

$$A(x) = (16 + x)\ (26 + 2x) \iff A(x) = 2x^2 + 58x + 416$$

Pretende-se que a área da horta não seja inferior a $740\ \text{m}^2$. A resolução deste problema consiste, portanto, na determinação do conjunto de valores de x tais que:

$$A(x) \geqslant 740 \iff 2x^2 + 58x + 416 \geqslant 740 \iff 2x^2 + 58x - 324 \geqslant 0$$

As inequações que pelos princípios de equivalência se podem reduzir a uma das seguintes formas canónicas:

$$ax^2 + bx + c > 0\ ;\ ax^2 + bx + c \geqslant 0\ ;$$

$$ax^2 + bx + c < 0 \text{ ou } ax^2 + bx + c \leqslant 0$$

onde a , b e c são números reais e $a \neq 0$, designam-se por inequações do 2.º grau ou inequações quadráticas.

EXEMPLO:

INEQUAÇÃO	a	b	c
$2x^2 - 3x > 0$	2	-3	0
$x^2 + 5x - 6 < 0$	1	5	-6
$7x^2 - 9 \geqslant 0$	7	0	-9
$10x^2 \leqslant 0$	10	0	0

2.2. Resolução de inequações quadráticas

Para encontrar o conjunto-solução de uma inequação do 2.° grau, aplicam-se os princípios de equivalência de inequações e analisa-se a variação de sinal da representação gráfica da função quadrática associada à inequação.

2.2.1. Resolução gráfica de uma inequação quadrática

A resolução gráfica de inequações quadráticas pode ser efectuada pelo seguinte procedimento:

1.° – Redução da inequação à forma canónica.

2.° – Representação gráfica da função $f(x) = ax^2 + bx + c$. Para tal, é útil a determinação dos zeros da função e a análise do coeficiente do termo quadrático.

3.° – Estudo do sinal da função quadrática por observação do seu gráfico.

4.° – Apresentação do conjunto-solução da inequação.

OBSERVAÇÃO:

Na representação gráfica de uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, deve-se ter em conta que:

- se $a > 0$, a parábola tem a concavidade voltada para cima;
- se $a < 0$, a parábola tem a concavidade voltada para baixo;
- se $\Delta > 0$, a função quadrática tem dois zeros reais e diferentes e o seu gráfico corta o eixo das abcissas nesses dois valores;
- se $\Delta = 0$, a função quadrática tem dois zeros reais iguais (zero real duplo) e o seu gráfico corta o eixo das abcissas num único ponto;
- se $\Delta < 0$, a função quadrática não terá zeros reais, consequentemente o gráfico da função não intersecta o eixo das abcissas.

EXEMPLOS:

1. Resolva graficamente as seguintes inequações quadráticas.

   a) $x^2 - 3x + 2 > 0$ b) $x^2 - 4x + 4 \leqslant 0$ c) $\dfrac{x^2 - 8}{3} > \dfrac{x^2 - 4}{2} - \dfrac{2}{3}x$

2. Sejam as funções $f(x) = 4x - 8$ e $g(x) = -3x^2 + 2x$.

   a) Represente as funções dadas no mesmo referencial cartesiano.

   b) Indique o conjunto de valores reais de x tais que:

   i) $f(x) = g(x)$ ii) $g(x) \leqslant 0$ iii) $f(x) > g(x)$ iv) $f(x) \times g(x) > 0$

Resolução

1.

a) $x^2 - 3x + 2 > 0$

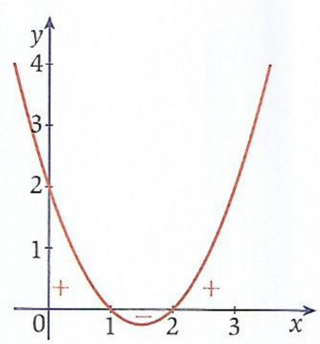
Zeros da função $f(x) = x^2 - 3x + 2$:

$$f(x) = 0 \iff x^2 - 3x + 2 = 0 \iff x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} \iff x = \frac{3 \pm 1}{2} \iff x = 1 \lor x = 2$$

O gráfico da função intersecta o eixo das abcissas nos pontos $P(2, 0)$ e $Q(1, 0)$.

O valor do coeficiente do termo quadrático a é positivo, portanto a parábola que representa graficamente a função tem concavidade voltada para cima.

Resulta, portanto, a representação gráfica ao lado.



A solução da inequação do 2.° grau é obtida a partir da análise do gráfico traçado.

Pretende-se estudar os valores de x para os quais $f(x) > 0$, ou seja, onde f admite valores positivos.

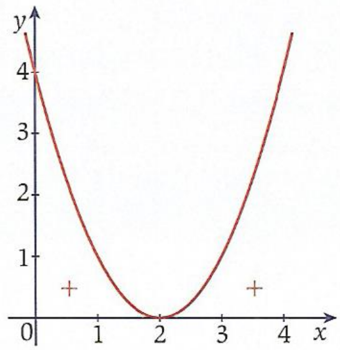
Assim, a solução da inequação $x^2 - 3x + 2 > 0$ é $x \in]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$.

b) $x^2 - 4x + 4 \leqslant 0$

Zeros da função $f(x) = x^2 - 4x + 4$:

$f(x) = 0 \Longleftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Longleftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Longleftrightarrow x - 2 = 0 \Longleftrightarrow x = 2$

Representação gráfica de $f(x) = x^2 - 4x + 4$, com $a > 0$:



Estudam-se os valores reais de x que verificam $f(x) \leqslant 0$, ou seja, para os quais a função $f(x) = x^2 - 4x + 4$ é não positiva (negativa ou nula).

Pela leitura do gráfico, conclui-se que $f(x) \leqslant 0 \Longleftrightarrow x = 2$.

Portanto, a solução para a inequação dada é $x \in \{2\}$.

c) $\dfrac{x^2 - 8}{3} > \dfrac{x^2 - 4}{2} - \dfrac{2}{3}x$

Observe que a inequação não está na forma canónica. É necessário, por isso, que primeiro se reduza à forma canónica. Assim:

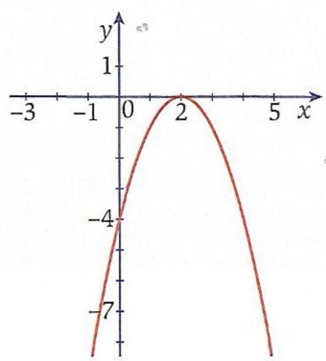
$$\begin{aligned}\frac{x^2 - 8}{3} > \frac{x^2 - 4}{2} - \frac{2}{3}x &\Longleftrightarrow 2(x^2 - 8) > 3(x^2 - 4) - 4x \\ &\Longleftrightarrow 2x^2 - 16 > 3x^2 - 12 - 4x \\ &\Longleftrightarrow -x^2 + 4x - 4 > 0\end{aligned}$$

Zeros da função $f(x) = -x^2 + 4x - 4$:

$f(x) = 0 \Longleftrightarrow -x^2 + 4x - 4 = 0 \Longleftrightarrow -(x-2)^2 = 0 \Longleftrightarrow x - 2 = 0 \Longleftrightarrow x = 2$

A parábola é tangente ao eixo das abcissas no ponto $P(2, 0)$.

Representação gráfica de $f(x) = x^2 - 4x + 4$, com $a < 0$:



Pela observação do gráfico, conclui-se que não existem valores reais x tais que $f(x) > 0$, portanto, o conjunto-solução da inequação é $x \in \emptyset$.

2.

a) Com vista à representação gráfica das funções dadas, é necessário determinar os pontos de intersecção dos gráficos das funções com os eixos coordenados e estudar as coordenadas do vértice da parábola $y = g(x)$.

- Pontos de intersecção das funções dadas com os eixos coordenados:

  $f(x) = 0 \iff 4x - 8 = 0 \iff x = 2$

  $f(0) = 4 \times 0 - 8 = -8$

  O gráfico de f contém os pontos $(2\,,\,0)$ e $(0\,,\,-8)$.

  $g(x) = 0 \iff -3x^2 + 2x = 0 \iff -x\,(3x - 2) = 0 \iff x = 0 \vee x = \dfrac{2}{3}$

  $g(0) = -3 \times 0^2 + 2 \times 0 = 0$

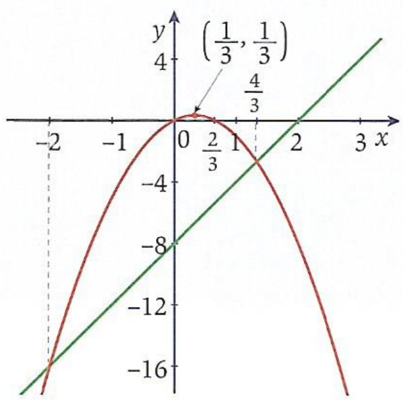
  O gráfico de g contém os pontos $(0\,,\,0)$ e $\left(0\,,\,\dfrac{2}{3}\right)$.

- Coordenadas do vértice da parábola que representa a função g:

  $x_v = -\dfrac{b}{2a} \implies x_v = -\dfrac{2}{2\,(-3)} = \dfrac{1}{3}\ ;\ y_v = -\dfrac{\Delta}{4a} \implies y_v = -\dfrac{4}{4\,(-3)} = \dfrac{1}{3}$

  O vértice de $y = g(x)$ é $\left(\dfrac{1}{3}\,,\,\dfrac{1}{3}\right)$.

  Constate-se ainda que a parábola tem a concavidade voltada para baixo $(a < 0)$.



b) **i)** $f(x) = g(x) \iff 4x - 8 = -3x^2 + 2x \iff 3x^2 + 2x - 8 = 0 \iff x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{3}$

$\iff x = \dfrac{-1 - 5}{3} \vee x = \dfrac{-1 + 5}{3} \iff x = -2 \vee x = \dfrac{4}{3}$

$x \in \left\{-2\,,\,\dfrac{4}{3}\right\}$

ii) Resolver a inequação $g(x) \leqslant 0$ significa encontrar os valores reais de x para os quais $g(x) = -3x^2 + 2x$ é não positiva. Pela observação do gráfico anterior:

$x \in \left]-\infty\,,\,0\right] \cup \left[\dfrac{2}{3}\,,\,+\infty\right[$

iii) Resolver a inequação $f(x) > g(x)$ significa encontrar os valores reais de x para os quais $f(x) = 4x - 8$ toma valores maiores do que os de $g(x) = -3x^2 + 2x$. Pela leitura do gráfico pode-se concluir que:

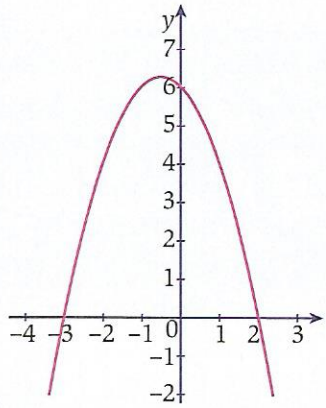
$f(x) > g(x) \iff x \in \left]-\infty\,,\,-2\right[\cup \left]\dfrac{4}{3}\,,\,+\infty\right[$

iv) O produto $f(x) \times g(x)$ toma valores positivos quando $f(x)$ e $g(x)$ têm o mesmo sinal. Pela leitura do gráfico pode-se concluir que o conjunto-solução da inequação é:

$x \in \left]-\infty\,,\,0\right[\cup \left]\dfrac{2}{3}\,,\,2\right[$.

Exercício n.º 2

1. Considere a seguinte representação gráfica de uma função quadrática:



Determine, sob a forma de intervalo, os valores de x para os quais:

a) a função é positiva;

b) a função é não positiva.

2. Resolva graficamente as seguintes inequações.

a) $3(x^2+3)-4(3+x^2)\leqslant x-6$

b) $3x(x-5)\leqslant 2x^2$

c) $\dfrac{2x-2}{4}\geqslant\dfrac{3x^2+5}{6}$

d) $\dfrac{3}{25}x^2+\dfrac{1}{5}x+3\geqslant 0$

3. Sejam as funções $f(x)=2-x$ e $g(x)=x^2-4x+4$.

a) Represente as funções dadas no mesmo referencial cartesiano.

b) Pela leitura do gráfico, indique o conjunto de valores reais de x tal que:

i) $f(x)=g(x)$

ii) $g(x)\leqslant 0$

iii) $f(x)<g(x)$

2.2.2. Resolução analítica de uma inequação quadrática

A resolução analítica de inequações quadráticas pode ser efectuada pelo seguinte procedimento:

1.° – Reduzir a inequação à forma canónica.

2.° – Resolver a equação quadrática correspondente: $ax^2+bx+c=0$;

3.° – Factorizar o trinómio quadrático ax^2+bx+c, tendo em conta que $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, onde x_1 e x_2 são as raízes do trinómio quadrático.

4.° – Construir uma tabela de variação de sinal do trinómio quadrático correspondente.

5.° – Atendendo ao que se estuda, apresentar o conjunto-solução.

EXEMPLO:

Resolva analiticamente as seguintes inequações quadráticas.

a) $x^2 - 7x + 12 > 0$ b) $-2x^2 + 5x - 2 \geqslant 0$

Resolução

a) Determinação das raízes da equação $x^2 - 7x + 12 = 0$:

$$x^2 - 7x + 12 = 0 \iff x = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \times 12}}{2} \iff x = 4 \vee x = 3.$$

A factorização do trinómio quadrático é: $x^2 - 7x + 12 = (x-3)(x-4)$.

Numa tabela, estuda-se o sinal de cada um dos factores $(x-3)$ e $(x-4)$ e ainda do produto $(x-3)(x-4)$, tendo em conta a regra dos sinais.

x	$]+\infty, 3[$	3	$]3, 4[$	4	$]4, +\infty[$
$x-3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x-3)(x-4)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Concluindo: $(x-3)(x-4) > 0 \iff x^2 - 7x + 12 > 0 \iff x < 3 \vee x > 4$

Solução: $x \in]-\infty, 3[\cup]4, +\infty[$

b) Resolvendo a equação quadrática associada à inequação vem:

$$-2x^2 + 5x - 2 = 0 \iff x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times (-2) \times (-2)}}{2 \times (-2)} \iff x = 2 \vee x = \frac{1}{2}$$

De onde resulta a factorização: $-2x^2 + 5x - 2 = -2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-2)$.

x	$\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$	$\frac{1}{2}$	$\left]\frac{1}{2}, 2\right[$	2	$]2, +\infty[$
$-2\left(x - \frac{1}{2}\right)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$-2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-2)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$$-2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-2) \geqslant 0 \iff -2x^2 + 5x - 2 \geqslant 0 \iff x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$$

> **OBSERVAÇÃO:**
>
> Se um polinómio $ax^2 + bx + c$ admite os zeros x_1 e x_2, então pode escrever-se na seguinte forma factorizada $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Exercício n.º 3

1. Resolva analiticamente as inequações seguintes.

a) $(x+1)(x-2) \leqslant (x+1)(2x-1)$ b) $\left(\frac{4x-5}{2} + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}x - 1\right) > 0$

2. Dada a equação $x^2 - 2(m+2)x + (m^2 + 2m - 3) = 0$, quadrática em x, determine os números $m \in \mathbb{R}$ de modo que a equação admita:

a) duas raízes reais diferentes e com o mesmo sinal;

b) duas raízes reais diferentes e de sinais contrários;

c) duas raízes reais diferentes, de sinais contrários, sendo a positiva a de maior valor absoluto.

3. Resolução de problemas

OBSERVAÇÃO:

Na resolução de problemas:

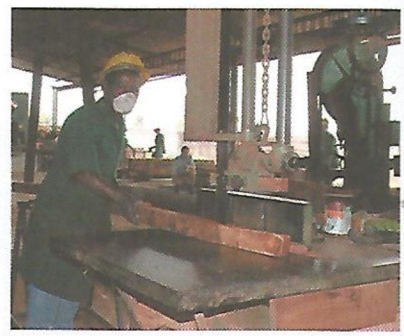
- defina, na primeira abordagem do problema, o significado das incógnitas a usar;
- se possível, traduza matematicamente o que se pretende;
- resolva as equações ou inequações envolvidas;
- no final da resolução, não se esqueça de verificar se as soluções encontradas se adequam ao contexto do problema e, então, apresente a resposta.

Um método comum para a resolução de problemas é a sua reformulação através de equações, utilizando os dados fornecidos e transformando-os em linguagem matemática.

Quando a resolução de um problema conduz ao estudo de uma função quadrática, diz-se que é um **problema do 2.º grau.**

Não existe uma resolução-padrão para os problemas matemáticos. Cada um deles apresenta uma resolução própria e a melhor maneira de se aprender a resolvê-los é exercitar.

EXEMPLOS:



1. O lucro mensal, em milhares de meticais, de uma empresa é dado por:

$$L(x) = -x^2 + 30x - 5\,,$$

sendo x a quantidade de um dado produto que foi vendida num mês.

a) Calcule o lucro mensal máximo possível.

b) Determine entre que valores deve variar a quantidade x, para que o lucro mensal seja, no mínimo, de 195 milhares de meticais.

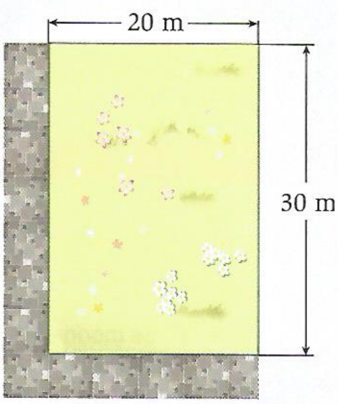
2. Uma empresa vende semanalmente 200 unidades de um produto ao preço unitário de 90,00 Mt. Observa-se que, para cada metical de desconto no preço de cada peça, são vendidas 10 peças a mais.

a) Expresse a facturação em função do desconto.

b) Calcule o valor do desconto por unidade, para que se tenha facturação máxima.

c) Sabe-se que, para ter um fundo de reserva, é necessário que a empresa tenha uma facturação acima de 20 000,00 Mt.

Determine para que valores de desconto por unidade a empresa terá condições, como resultado da venda do produto referido, para ter um fundo de reserva.



3. Um operário foi contratado para construir uma calçada em volta de dois lados de um terreno rectangular, como mostra a figura ao lado.

O terreno tem de dimensões 20 m por 30 m.

A calçada deve ter sempre a mesma largura.

Sabendo que o operário dispõe somente de 275 m^2 de ladrilhos para fazer a obra, quais podem ser as medidas da largura da calçada?

Resolução

1.

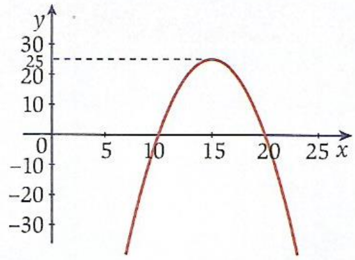
a) A função que traduz o lucro mensal é quadrática com concavidade voltada para baixo; por isso, atinge o seu valor máximo no vértice.

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} \implies y_v = -\frac{900-20}{-4} = 220$$

O lucro mensal máximo possível é de 220 000,00 Mt.

b) $L(x) \geqslant 195 \implies -x^2+30x-5 \geqslant 195 \iff -x^2+30x-200 \geqslant 0$

$-x^2+30x-200=0 \iff x=\dfrac{-30 \pm \sqrt{100}}{-2} \iff x=10 \vee x=20$



Pela análise do gráfico de $y=-x^2+30x-200$ representado ao lado, conclui-se que:

$-x^2+30x-200 \geqslant 0 \iff 10 \leqslant x \leqslant 20$

Portanto, para que o lucro mensal seja, no mínimo, de 195 milhares de meticais, a quantidade mensal vendida deve ser entre 10 e 20, inclusive.

2. a) Com o desconto de x meticais, o preço de cada peça será $90-x$ e a quantidade vendida $200+10x$. Portanto, o valor da facturação, em função do desconto, pode ser traduzido por:

$f(x)=(200+10x)(90-x) \iff f(x)=-10x^2+700x+18\,000$

b) A função que traduz a facturação atinge o máximo no vértice $V\left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$ da parábola que a define graficamente, pelo que:

$x_v=-\dfrac{b}{2a} \implies x_v=-\dfrac{700}{2(-10)}=35$

Assim, para que se tenha facturação máxima, o valor do desconto deve ser de 35,00 Mt por unidade.

c) $f(x)>20\,000 \implies -10x^2+700x+18\,000>20\,000 \iff -10x^2+700x-2000>0$

$-10x^2+700x-2000=0 \iff x=35 \pm 5\sqrt{41}$

Por observação do gráfico representado ao lado:

$-10x^2+700x-2000>0 \iff 35-5\sqrt{41}<x<35+5\sqrt{41}$

ou seja, $3<x<67$.

Assim, a empresa terá condições de ter um fundo de reserva se os valores de desconto x forem superiores a 3 Mt e inferiores a 67 Mt por unidade.

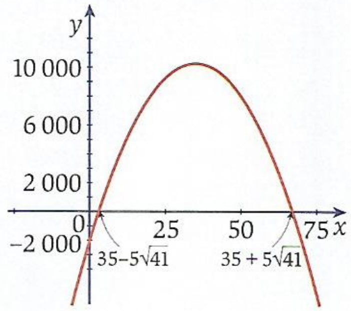
OBSERVAÇÃO:

$-10x^2+700x-2000=0$

$\iff x=\dfrac{-700 \pm \sqrt{410\,000}}{-20}$

$\iff x=\dfrac{-700 \pm 100\sqrt{41}}{-20}$

$\iff x=35 \pm 5\sqrt{41}$



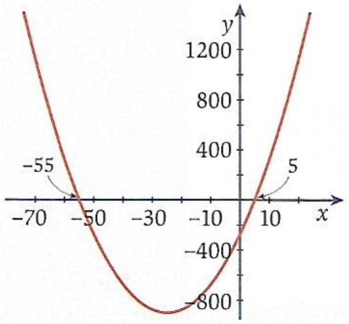
3. A área da calçada é $A(x)=(20+x)(30+x)-20\times 30 \iff A(x)=x^2+50x$.

Como o operário só dispõe de $275\ \text{m}^2$ de ladrilho, então:

$A(x) \leqslant 275 \iff x^2+50x \leqslant 275 \iff x^2+50x-275 \leqslant 0$

$x^2+50x-275=0 \iff x=-25 \pm \sqrt{900} \iff x=-55 \vee x=5$

Pela observação do gráfico seguinte, $x^2+50x-275 \leqslant 0 \iff -55 \leqslant x \leqslant 5$



Concluindo e uma vez que x representa um comprimento (e, portanto, não toma valores negativos): $x \in \,]0, 5]$.

Assim, a largura da calçada deve ser inferior ou igual a 5 m.

Exercício n.º 4

1. Um hotel, com 100 apartamentos individuais, foi alugado por uma empresa para a realização de um congresso. No contrato de arrendamento aparece a seguinte cláusula:
Cada hóspede pagará $800{,}00$ Mt mais $10{,}00$ Mt por apartamento que não for ocupado.

   a) Determine a quantia máxima, em Mt, possível de ser arrecadada pelo dono do hotel.

   b) Qual o número máximo de apartamentos não ocupados para que a quantia arrecadada pelo dono do hotel não seja inferior a $80\,000{,}00$ Mt?

2. Um fabricante de brinquedos pode produzir um determinado brinquedo a um custo de $10{,}00$ Mt por unidade. Estima-se que, se o preço de venda for x, o número de brinquedos vendidos por dia será de $45 - x$.

   a) Expresse o lucro diário em função de x.

   b) Se o preço de venda de cada brinquedo for de $30{,}00$ Mt, qual será o lucro diário?

   c) Determine qual deverá ser o preço de venda de cada brinquedo para se obter um lucro máximo.

   d) Esboce o gráfico do lucro em função de x.

   e) Determine o preço de venda a praticar para que o lucro não seja inferior a 200 Mt.

3. O Sr. Silva quer construir uma casa num terreno quadrado. A legislação do município só permite construir, nessa zona do parcelamento, em, no máximo, 20% da área do terreno.

x

Determine as medidas de um terreno para construir a casa desejada, de tal modo que o quintal tenha uma área de, pelo menos, $500\ \text{m}^2$.

5 AVALIAÇÃO FORMATIVA

1. Dadas as funções $f(x) = 2x - 6$ e $g(x) = -x^2 + 2$.

   a) Represente as funções dadas no mesmo sistema cartesiano ortogonal.

   b) Pela leitura do gráfico, determine $x \in \mathbb{R}$ tal que:

   i) $f(x) = 0$ ii) $g(x) = 0$

   iii) $f(x) < g(x)$ iv) $f(x) \times g(x) \geqslant 0$

2. Resolva graficamente as inequações seguintes.

   a) $x^2 - x - 6 \leqslant 0$

   b) $3(x^2 - 1) > 15(x + 1)$

   c) $-\frac{1}{5} + \frac{7}{5}x + \frac{4}{5}x^2 > x^2 + x$

3. Resolva analiticamente cada uma das inequações:

   a) $-7x - (3x + 1) \leqslant \frac{1}{2}x - 6$

   b) $3 - \frac{2x - 1}{4} + 5(x - 1) \leqslant 0$

   c) $4x^2 + (x + 1)^2 < 1$

   d) $\frac{x - 2}{2} - \frac{x^2 - 4}{3} \geqslant 0$

   e) $\frac{x^2}{4} + \frac{x}{12} + \frac{1}{4} \geqslant 0$

   f) $6(2x + 5) < x(x + 5)$

4. Considere a equação quadrática em x, $x^2 - (m^2 - 1)x = 0$. Determine o valor real de m de modo que a equação admita uma raiz nula e uma negativa.

5. Para cada $m \in \mathbb{R}$, considere definida uma função g, de domínio $\mathbb{R}$, pela seguinte expressão analítica:

$$g(x) = \frac{1}{2}x^2 - (2m + 3)x + 3m^2 + \frac{1}{2}m - 2 .$$

   Determine o conjunto de valores de m de forma que:

   a) o gráfico de g intersecte o eixo das abcissas num único ponto.

   b) admita dois zeros de sinais contrários.

   c) admita dois zeros diferentes sendo o de maior valor absoluto negativo.

6. Para delimitar uma área rectangular a ser utilizada como depósito, um engenheiro está a estudar as possíveis formas de a cercar utilizando uma extensa parede já existente. A empresa dispõe de material para construir apenas 120 m da vedação. Determine que valores pode admitir a largura do depósito para que a sua área seja superior a 1000 m^2.

7. Lança-se uma pedra de um ponto situado a uma altura de 6 m do solo. Durante o movimento da pedra, a altura a que esta se encontra é dada pela expressão $h(t) = -5t^2 + 29t + 6$, onde t representa, em segundos, o tempo passado após o lançamento.

   a) Indique ao fim de quanto tempo a pedra cai ao chão.

   b) Determine o intervalo de tempo em que a pedra está a uma altura superior àquela a que foi lançada.

   c) Determine qual a altura máxima atingida pela pedra.

   d) Indique qual o instante de tempo que a pedra começa a descer.

8. Durante uma experiência foi registada a variação da temperatura de um líquido, em graus Celsius, que evoluiu, nas primeiras 8 horas, segundo a função:

$$t(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3x + 7$$

onde x representa o tempo, em horas, decorridos após o início da experiência.

   a) Represente graficamente a variação de temperatura do líquido em função do tempo, durante toda a experiência.

   b) Indique as temperaturas a que se encontrava o líquido no início e no final da experiência.

   c) Determine em que momentos da experiência o líquido obteve uma temperatura superior a 10 °C.

9. Um estudo efectuado no âmbito de um projecto social concluiu que a população de uma determinada província crescerá, nos próximos anos, de acordo com a fórmula:

$$P(t) = 30\,000 + 2t + 15t^2$$

onde t representa o número de anos decorridos a partir do ano 2010.
Determine a partir de que ano se prevê que a população da província em causa ultrapasse os 50 000 habitantes.