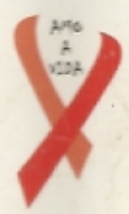




8.^a classe

DE ACORDO COM
O NOVO PROGRAMA



Heitor Langa / Neto João "Nick" Chuquela

Matemática

LIVRO DO ALUNO INCLUI AVALIAÇÕES FORMATIVAS



Autores:
Nelson Langa
Nuno João "Nook" Chissale

Editora:
Plural Editores

© Copyright PORTO EDITORA, LDA.



MOÇAMBIQUE
Av. 24 de Julho, 414
Maputo
Telef.: 21 48 68 28
Fax: 21 48 68 29
E-mail: plural@pluraeditores.co.mz

2009

INLD: 5785/RUNLD/2008

ISBN 978-972-0-09050-8

Execução gráfica: Bloco Gráfico, Lda. • R. da Restauração, 387 4050-506 PORTO • PORTUGAL

8

8.^a classe

Heitor Langa
Neto João "Nick" Chuquela

Matemática

plural
editores
GRUPO EDITORIAL

Sím



APRESENTAÇÃO

Durante o percurso escolar, a Matemática é uma disciplina sempre presente no quotidiano, não só por causa do estudo desta disciplina em particular, mas também porque o recurso aos seus conceitos é notório em outras disciplinas, além de se apresentar como instrumento para a resolução de vários problemas do dia-a-dia. Por causa da sua importância na formação, é indispensável o seu estudo regular, estudo este que deve ser continuado e permanente, tanto na escola como em casa, para se poder desenvolver a compreensão e o gosto pela Matemática como factores de garantia para o sucesso na aprendizagem desta disciplina.

Foi com este propósito que ao conceber este livro do aluno se incluíram variados tipos de exercícios de aplicação, que uns serão resolvidos na aula, com auxílio do professor e outros fora da sala de aulas, como trabalho individual!

No fim do livro estão apresentadas as soluções dos exercícios constantes do livro, às quais somente deve recorrer depois de todo o esforço para a resolução de um certo problema, que passa pela discussão com colegas e revisão dos exemplos nele apresentados, pois é no processo de resolver problemas que se aprende Matemática e não no de copiar soluções já elaboradas.

Os testes de avaliação formativa inseridos no fim de cada capítulo servem para o aluno verificar se adquiriu os conhecimentos e desenvolveu capacidades básicas necessárias para a compreensão de conteúdos posteriores ligados à Matemática e a outras disciplinas com ela relacionadas.

É nosso desejo que este livro corresponda às expectativas no tocante à aprendizagem da Matemática, permitindo ao aluno o estudo da disciplina de uma forma cada vez mais autónoma e entusiasmante.

Os autores

www.pluraeditores.com

09050.10



9 789720 090508

ISBN 978-972-0-09050-8

ISBN 978-972-0-09050-8

ÍNDICE

I

NÚMEROS RACIONAIS

1. CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS

- 8 1. Conjunto dos números naturais (\mathbb{N})
- 10 2. Introdução de números inteiros
- 14 3. Operações em \mathbb{Z}

2. CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS

- 29 1. Revisão das frações
- 40 2. Número racional negativo
- 42 3. Operações em \mathbb{Q}
- 50 4. Potenciação
- 56 5. Raiz quadrada em \mathbb{Q}
- 58 6. Expressões numéricas envolvendo todas as operações
- 59 7. Resolução de problemas
- 60 **Avaliação formativa**

II

EQUAÇÕES LINEARES

1. NOÇÃO DE VARIÁVEL

- 65 1. Noção de equação
- 67 2. Equações equivalentes
- 73 3. Equações lineares a uma incógnita
- 75 4. Classificações de equações
- 76 5. Equações literais
- 77 6. Problemas do primeiro grau a uma incógnita
- 79 **Avaliação formativa**

III

PROPORCIONALIDADE E FUNÇÕES LINEARES

1. COORDENADAS CARTESIANAS

- 84 1. Quadrantes

2. PROPORCIONALIDADE

- 85 1. Proporcionalidade directa
- 86 2. Proporcionalidade inversa

3. FUNÇÕES LINEARES

- 90 1. Noção de correspondência
- 92 2. Conceito de função



Na mem
Pátria be
Moçamb
O sol de

Coro
Moçar
pedra
mãe Je
ó pátri

Por, unido
colhe os
cresce o
e vai lavr

Flores be
p-los me
nós jurar
mentum



- 94 3. Variável dependente e variável independente
- 94 4. Modos de definir uma aplicação
- 99 5. Classificação de aplicações
- 100 6. Função linear
- 107 **Avaliação formativa**

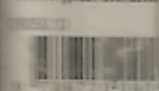
SISTEMAS DE DUAS EQUAÇÕES LINEARES A DUAS INCÓGNITAS

- 1. EQUAÇÃO DO PRIMEIRO GRAU A DUAS INCÓGNITAS**
- 111 1. Interpretação gráfica de uma equação linear a duas incógnitas
- 2. SISTEMA DE DUAS EQUAÇÕES LINEARES A DUAS INCÓGNITAS**
- 114 1. Sistemas equivalentes
- 3. RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES A DUAS INCÓGNITAS**
- 117 1. Método de substituição
- 120 2. Método de redução ou adição ordenada
- 122 3. Método misto
- 4. CLASSIFICAÇÃO DE SISTEMAS DE DUAS EQUAÇÕES LINEARES A DUAS INCÓGNITAS**
- 125 4. CLASSIFICAÇÃO DE SISTEMAS
- 126 5. RESOLUÇÃO GRÁFICA DE SISTEMAS DE DUAS EQUAÇÕES LINEARES A DUAS INCÓGNITAS
- 128 6. RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS CONDUCENTES A SISTEMAS DE DUAS EQUAÇÕES LINEARES A DUAS INCÓGNITAS
- 131 **Avaliação formativa**



CIRCUNFERÊNCIA E CÍRCULO

- 1. CIRCUNFERÊNCIA E CÍRCULO. SEUS ELEMENTOS**
- 134 1. Noção de circunferência e círculo
- 134 2. Centro, raio, comprimento do raio
- 135 3. Corda, diâmetro, arco e semicircunferência
- 136 4. Posições da recta em relação ao círculo
- 2. ÂNGULOS NA CIRCUNFERÊNCIA**
- 137 1. Ângulo ao centro e ângulo inscrito
- 139 2. Ângulo inscrito sobre um diâmetro
- 141 3. Ângulos com vértice na circunferência ou em pontos interiores e exteriores
- 3. CÁLCULOS NA CIRCUNFERÊNCIA E CÍRCULO**
- 145 1. Perímetro da circunferência
- 146 2. Comprimento de um arco
- 147 3. Área do círculo
- 149 4. Área de um sector circular
- 150 5. Área de uma coroa circular
- 151 **Avaliação formativa**





CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS E TEOREMA DE PITÁGORAS

- 1. REVISÃO**
 - 154 1. Ângulos verticalmente opostos
 - 155 2. Ângulos formados por rectas paralelas intersectadas por uma secante
 - 156 3. Triângulos: elementos de um triângulo
 - 157 4. Ângulos internos e externos de um triângulo
 - 159 5. Classificação de triângulos
- 2. CONGRUÊNCIA DE FIGURAS GEOMÉTRICAS**
 - 160 1. Noção de congruência
- 3. CRITÉRIOS DE CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS**
 - 161 1. Critério Lado-Ângulo-Lado (LAL)
 - 161 2. Critério Lado-Lado-Lado (LLL)
 - 162 3. Critério Ângulo-Lado-Ângulo (ALA)
- 4. APLICAÇÃO DA CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS**
 - 164 1. Noção de semelhança
 - 165 2. Casos de semelhança
 - 166 3. Cálculo de um lado desconhecido
 - 166 4. Cálculo de distâncias no terreno usando dois triângulos semelhantes
- 5. INTRODUÇÃO AO TEOREMA DE PITÁGORAS**
- 6. DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS**
- 7. APLICAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS**
 - 173 1. Cálculo de distâncias entre dois pontos no plano cartesiano
 - 174 2. Comprimento de um lado no triângulo rectângulo
- 176 **Avaliação formativa**
- 178 **Exercícios de revisão**
- 181 **Soluções**
- 191 **Anexo: Tábua de raízes quadradas**

Sím



Na mem
Pátria be
Moçamb
O sol de

Coro
Moçan
pedra
milh.3e
ó pátri

Povo unido
colhe os
cresce o
e vai lavr

Flores br
pelos mo
nós jurar
nenhum

www.pluraledite

09050.10



9 789720 09050

ISBN 978-972-0-09050-8



I NÚMEROS RACIONAIS

1.

CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS

2.

CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS

1

CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS

1. Conjunto de números naturais (IN)

O número de elementos de um conjunto, os números que se usa para contar, por exemplo, o número de pessoas numa sala, chamam-se **números naturais**:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots\}$$

Os números naturais podem ser representados por pontos numa recta onde o valor de um certo ponto é igual à distância do ponto à origem:



A distância entre dois pontos que representam números consecutivos é sempre a mesma. Esta distância pode ter qualquer medida, mas é conveniente uma distância de 1 cm ou 0,5 cm.

EXEMPLO:

Construa uma recta graduada de zero a 5, tomando como unidade 2 cm.



n.º 1

Construa uma recta graduada de 0 a 21, tomando como unidade 0,5 cm.

Construa uma recta graduada de 0 a 14. Escolha uma unidade de modo que a recta caiba no seu caderno.

Resolução de problemas

Pode-se considerar o valor de um ponto como igual à distância da origem (zero) a esse ponto. Para calcular a soma de dois valores, basta adicionar as distâncias.

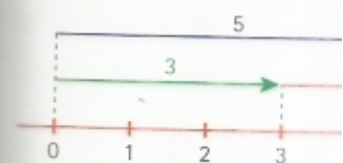
EXEMPLO:

Um camião sai de um armazém com mercadorias. Percorre uma distância de 3 km e descarrega parte das mercadorias e continua ainda até à próxima loja que fica a 2 km de distância da primeira.

Qual foi a distância total percorrida pelo camião?

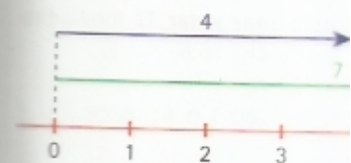
$$3 \text{ km} + 2 \text{ km} = 5 \text{ km}$$

Pode-se resolver através duma



Para calcular a diferença, subtrai o comprimento que sobra.

Exemplo: $7 - 3 =$

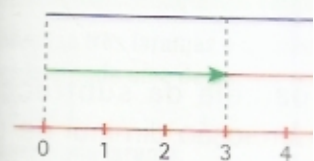


Exercício n.º 2

1. Determine graficamente:

a) $5 + 2 =$

2. Quais as operações representadas?



3. Um vagão transporta 1800 tijolos. Quantos tijolos deverá descarregar?

4. Calcule as seguintes somas:

$$\begin{array}{r} 2684 \\ 1325 \\ 486 \\ + 1629 \\ \hline \end{array}$$

a) Que relação encontra entre

b) Que propriedade da adição

c) O processo aqui aplicado, b

5. Efectue as seguintes adições:

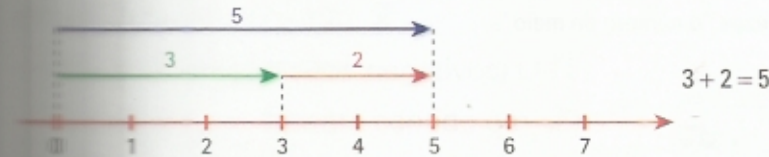
$$\begin{array}{r} \text{a) } 2353 \\ 125 \\ 1271 \\ + 43 \\ \hline \end{array}$$

c) Compare a soma da operação

d) Que propriedade da adição f

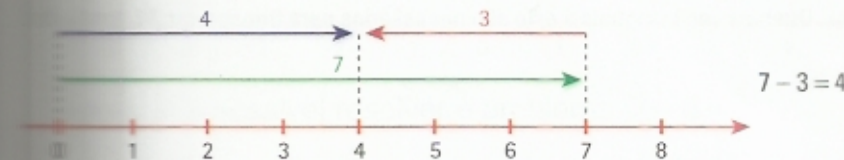
$3\text{ km} + 2\text{ km} = 5\text{ km}$

Podem-se resolver através duma recta graduada ou numérica.



Para calcular a diferença, subtraímos a segunda "distância" da primeira e lê-se o comprimento que sobra.

Exemplo: $7 - 3 =$



Exercício n.º 2

1. Determine graficamente:

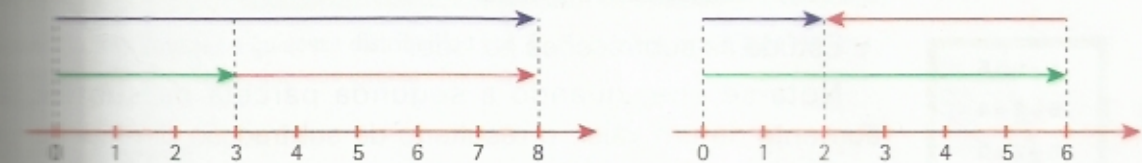
a) $5 + 2 =$

b) $7 - 2 =$

c) $3 + 2 + 5 =$

d) $8 - 7 =$

2. Quais as operações representadas nas seguintes rectas numéricas?



3. Um vagão transporta 1800 tijolos. Descarrega 480 tijolos numa estação e, depois, 525 noutra estação. Quantos tijolos deverá descarregar numa terceira estação para ficar com o vagão vazio?

4. Calcule as seguintes somas:

$$\begin{array}{r} 2584 \\ 1325 \\ 486 \\ + 1629 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1629 \\ 486 \\ 2684 \\ + 1325 \\ \hline \end{array}$$

a) Que relação encontra entre os dois resultados?

b) Que propriedade da adição foi aplicada?

c) O processo aqui aplicado, baseado na propriedade _____ adição, constitui a **PROVA REAL**.

5. Efectue as seguintes adições:

$$\begin{array}{r} 2353 \\ 125 \\ 1271 \\ + 43 \\ \hline \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} 2353 \\ + 125 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1271 \\ + 43 \\ \hline \end{array}$$

Some os resultados obtidos nestas duas adições da alínea b).

$$\underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

a) Compare a soma da operação a) com o resultado final de b). Que relação encontra entre ambas?

b) Que propriedade da adição foi aplicada?

6. Um carpinteiro ganha 100,00 Mt por hora. Em Novembro trabalhou 120 horas e recebeu 500,00 Mt de abono de família. Quanto recebeu nesse mês?
7. A soma de três números consecutivos é três vezes "o número do meio". Complete as seguintes expressões.
 - a) $15 + 16 + 17 = (16 - 1) + 16 + (16 + 1) = 3 \times \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$
 - b) $37 + 38 + 39 = (38 - 1) + 38 + (38 + 1) = \underline{\hspace{2cm}} \times 38 = \underline{\hspace{2cm}}$
 - c) $134 + 135 + 136 = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$
8. 1425 garrafas estão arrumadas em sete caixas: numa caixa grande que contém 525 garrafas e em seis caixas mais pequenas, todas iguais. Quantas garrafas contém cada uma das caixas mais pequenas?
9. Um vagão pode transportar três toneladas. Quantos vagões iguais a este são necessários para transportar 17 toneladas de cimento?
10. Efectue as seguintes divisões:
 - a) $287\ 040 \overline{) 832}$
 - b) $159\ 258 \overline{) 254}$

2. Introdução de números inteiros

2.1. Noção de número negativo

$$5 - 0 = 5$$

$$5 - 1 = 4$$

$$5 - 2 = 3$$

$$5 - 3 = 2$$

$$5 - 4 = 1$$

$$5 - 5 = 0$$

$$5 - 6 = ?$$

Estude as subtracções ao lado.

Nota-se que, quando a segunda parcela da subtracção aumenta de um valor, o resultado da subtracção diminui de um valor.

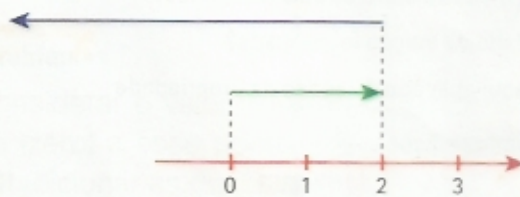
Qual será o resultado de $5 - 6 = ?$

Sabemos que o zero é o primeiro algarismo estudado até agora.

Vejamos o seguinte exemplo:

- Qual será o resultado de $2 - 5$?

Tente resolver com ajuda da recta numérica.



Vê-se que o resultado "está fora" da recta.

Para resolver este problema, será preciso ampliar o conjunto \mathbb{N} , incluindo também os números inteiros negativos. O conjunto resultante será o dos números inteiros e chamar-se-á conjunto \mathbb{Z} .

Assim o co
meiros posi
esta incluso n

$\mathbb{Z} = \{\text{núme}$

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \ (\mathbb{N} \setminus$

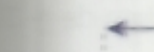
$\mathbb{Z} = \{\dots, -$

Não é prec
um número n

É fácil "com



Agora, já é



EXEMPLO

Centesse três lar
lança a cada um

$10 - 4 = 6$

Historia uma laran

2.2. Recta grad

Se sobre u
e se se marc

esquerda os
recta gradua



Por tal mo
direita" e "ne
que se fixa un

Num eixo,

Ao ponto

Ao ponto

Estes núm

A abscissa c

A abscissa c

O ponto C

Assim o conjunto \mathbb{Z} terá como elementos todos os números inteiros positivos e negativos, e o zero. Portanto, o conjunto \mathbb{N} está incluído no conjunto \mathbb{Z} .

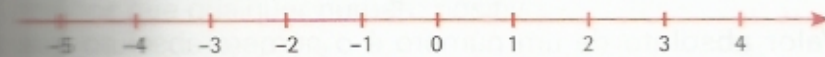
$$\mathbb{Z} = \{\text{números inteiros negativos}\} \cup \mathbb{N};$$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \text{ (lê-se: } \mathbb{N} \text{ está contido em } \mathbb{Z}\text{)}$$

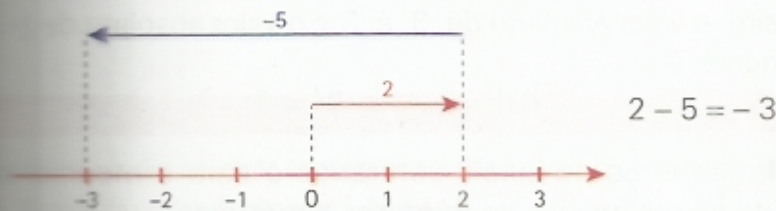
$$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, \dots\}$$

Não é preciso pôr sinal + antes dos números positivos. Quando um número não tem sinal associado significa que é positivo.

É fácil "completar" a recta incluindo os números inteiros negativos.



Agora, já é possível resolver o problema $2 - 5 =$.



$$2 - 5 = -3$$

EXEMPLO:

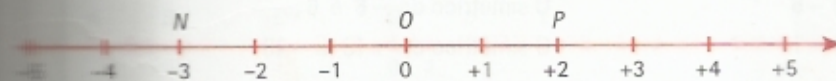
Quisesses três laranjas e quisesses distribuí-las por 4 pessoas de modo a caber uma laranja a cada uma delas, quantas laranjas faltarão?

$$3 - 4 = -1$$

Faltarão uma laranja.

3.2 Recta graduada

Se sobre uma recta fixar-se um ponto O para assinalar o zero e se se marcar para a direita os números positivos e para a esquerda os negativos, teremos uma recta que se chamará **recta graduada**.



Por tal motivo, chama-se sentido positivo ao "do zero para a direita" e "negativo" ao outro. E a recta, como qualquer outra em que se fixa um sentido toma o nome de **eixo** ou **recta orientada**.

Num eixo, a qualquer ponto corresponde sempre um número.

• Ao ponto P corresponde o número $(+2)$.

• Ao ponto N corresponde o número (-3) .

Estes números designam-se as **abscissas** desses pontos.

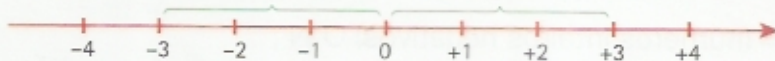
• A abscissa de P é $(+2)$;

• A abscissa de N é (-3) .

• O ponto O , cuja abscissa é zero, é a **origem** das abscissas.

2.3. Valor absoluto

São dados os números 3 e -3 na recta graduada.



A distância do 3 ao zero é de 3 unidades, mas a distância do -3 ao zero também é de 3 unidades, mas no sentido oposto.

- O **valor absoluto** de um número define-se como a distância deste número ao zero na recta graduada, ou
- **Valor absoluto** de um número é o número absoluto que se obtém, retirando o sinal ao número.

Assim, o valor absoluto de 3 é 3, o valor absoluto de -3 é igualmente 3:

$$|3| = 3; \quad |-3| = 3$$

Dois números de sinais contrários e com o mesmo valor absoluto são chamados de **números simétricos**.

Por exemplo, 3 e -3 são simétricos;
-107 e 107 são simétricos.

EXEMPLOS

1. Determine:

a) $|6| = 6$

b) $|-6| = 6$

c) $|0| = 0$

$$|3-5| = |-2| = 2 \quad |6-1| = |5| = 5$$

2. Determine o simétrico de:

a) -6 O simétrico de -6 é 6.

b) +13 O simétrico de +13 é -13.

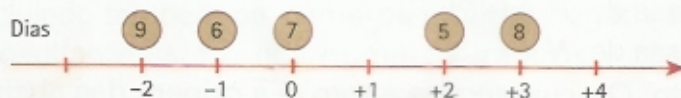
Dias	Temperatura em °C
5	+2
6	-1
7	0
8	+3
9	-2

Observe a tabela ao lado que representa as temperaturas mínimas ocorridas em Durban durante cinco dias seguidos do mês de Julho.

Qual foi o dia mais frio? Dia 9

Qual foi o dia menos frio? Dia 8

Colocando estes valores numa recta teremos:



Verifica-se que os números inteiros crescem da esquerda para a direita e pode-se concluir o seguinte:

- 1 - Dados dois números positivos, é maior o que tiver maior valor absoluto:

$$|+3| = 3 \quad |+2| = 2 \quad 3 > 2 \text{ então } +3 > +2$$

- 2 - Dados dois números negativos, é maior o que tiver menor valor absoluto:

$$|-2| = 2 \quad |-1| = 1 \quad 1 < 2 \text{ então } -1 > -2$$

- 3 - O número zero é maior que qualquer número negativo e menor que qualquer número positivo.

$$0 > -2 \quad 0 < +3$$

- 4 - Todo o número positivo é maior que qualquer número negativo.

$$+3 > -25 \quad +1 > -3$$

Exercício n.º 3

1. Considere um eixo orientado e em que se escolhe o ponto O para a origem das abcissas. Tomando para unidade 1 cm:

- Marque os pontos de abcissas (-3) e $(+4)$.
- Assinale a vermelho a região do eixo onde se situam os pontos com abcissas superiores a $(+4)$.
- Assinale a azul a região do eixo onde se situam os pontos com abcissas inferiores a (-3) .
- Assinale todos os pontos cujas abcissas são números inteiros compreendidos entre (-3) e $(+4)$.

2. Diga quais das afirmações são verdadeiras e quais são falsas:

- $(-4) > (-3)$
- $(+4) > (+3)$
- $(-2) > (+2)$

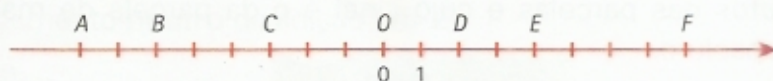
3. Disponha por ordem crescente os elementos do conjunto:

$\{(-1), (+2), 0, (-3), (+5), (-7), (+10)\}$

4. Coloque um dos sinais $>$ ou $<$ entre os números de forma a obter afirmações verdadeiras:

- $(-3) \underline{\hspace{1cm}} (-7)$
- $(+2) \underline{\hspace{1cm}} (+5)$
- $(-5) \underline{\hspace{1cm}} (+50)$
- $0 \underline{\hspace{1cm}} (-3)$
- $(-3) \underline{\hspace{1cm}} 0$
- $(+3) \underline{\hspace{1cm}} 0$

5. A figura representa um eixo de origem O , no qual se marcaram vários pontos. Determine as abcissas dos pontos A , B , C , D e E .



6. Complete:

Número	Simétrico	Valor absoluto
	+3	
+4		
	-20	
		5

7. Determine:

- $|7|$
- $|-7|$
- $|-35|$
- $|4|$

8. Que relação existe entre os valores absolutos dos números 37 e -37 ?

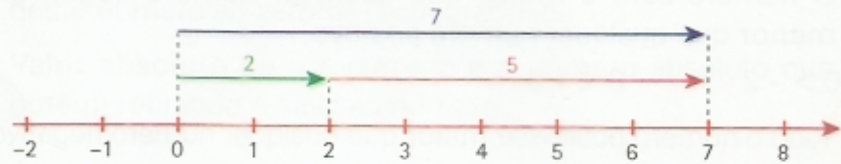
3. Operações em \mathbb{Z}

3.1. Adição

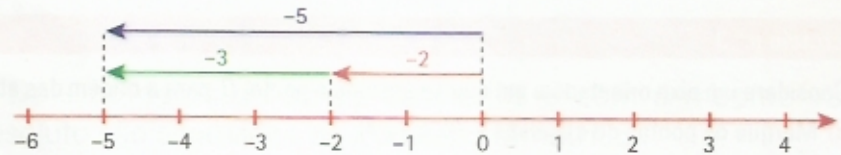
Para calcular a soma de dois números inteiros, usando o eixo das abscissas, deve observar a expressão e dar-lhe um sentido: sinal (+) sentido para a direita e sinal (-) sentido para a esquerda.

EXEMPLOS:

a) $(+2) + (+5) = 7$

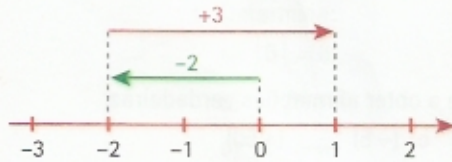


$(-2) + (-3) = -5$

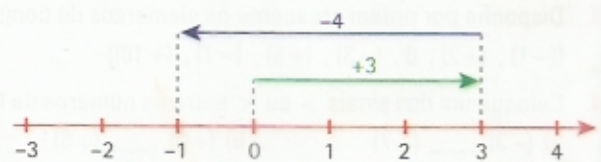


- A soma de dois números inteiros com mesmo sinal é um terceiro número inteiro do mesmo sinal e cujo valor absoluto é a soma dos valores absolutos das parcelas.

b) $(-2) + (+3) = +1$



$(+3) + (-4) = -1$

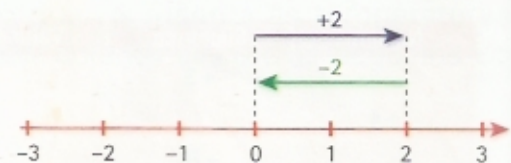


- A soma de dois números inteiros de sinais contrários é um terceiro número cujo valor absoluto é a diferença dos valores absolutos das parcelas e cujo sinal é o da parcela de maior valor absoluto.

c) $(-1) + (+1) = 0$



$(+2) + (-2) = 0$



- A soma de dois números simétricos é zero.

d) $(-2) + (-3) = -5$

$(+2) + (+2) = +4$

$(-3) + (+3) = 0$

$0 + 0 = 0$

$(-4) + (-3) = -7$

$(+1) + (+5) = +6$

$(+4) + (-4) = 0$

Exercício n.º 4

1. Complete as seguintes igualdades:

a) $(+14) + (-27) =$

b) $(-16) + (-53) =$

c) $(-144) + (+111) =$

d) $(-63) + (-59) =$

e) $(+1718) + (-647) =$

f) $(-1001) + (-999) =$

2. Complete as igualdades:

a) $(+4) + \underline{\quad} = (+5)$

b) $(+4) + \underline{\quad} = (+3)$

c) $\underline{\quad} + (-5) = -8$

d) $\underline{\quad} + (-5) = +8$

3. Calcule a soma $b + c$ em cada um dos seguintes casos:

a) $b = (-5)$ e $c = (+13)$

b) $b = (+18)$ e $c = (-74)$

c) $b = (+14)$ e $c = (+71)$

d) $b = (+18)$ e $c = (-18)$

e) $b = (+14)$ e $c = 0$

f) $b = (-4)$ e $c = (-11)$

4. Calcule usando a recta graduada.

a) $(-3) + (+8) =$

b) $(-4) + (+4) =$

c) $(-5) + (-2) =$

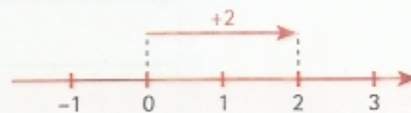
d) $(-7) + (+10) =$

e) $(-5) + (-6) =$

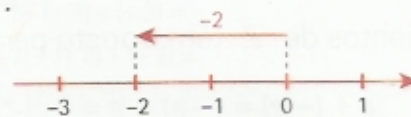
3.2 Propriedades da adição em \mathbb{Z}

EXEMPLOS:

a) $0 + (+2) = 2$



b) $(-2) + 0 = -2$



• Verifica-se facilmente que

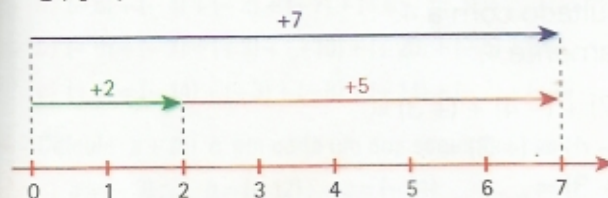
$0 + (+2) = +2$ e $(-2) + 0 = -2$

• A soma de zero com qualquer número ou a soma de qualquer número com zero é igual a esse número. Zero é elemento neutro da adição em \mathbb{Z} .

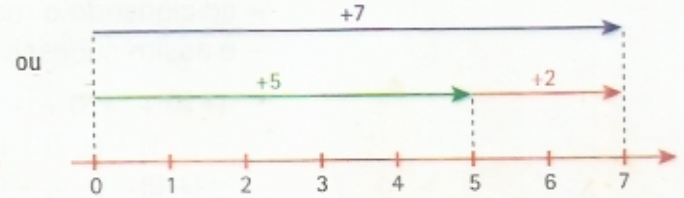
$$a + 0 = 0 + a = a$$

c) Para adicionar 2 e 5, podemos seguir dois caminhos diferentes:

$2 + 5 = 7$



$5 + 2 = 7$

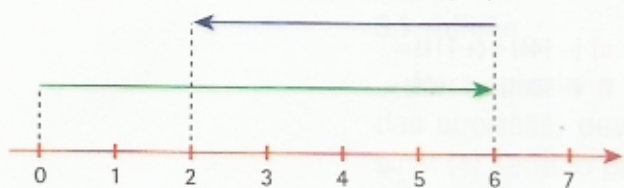


Portanto, podem-se alterar a ordem das parcelas numa adição:

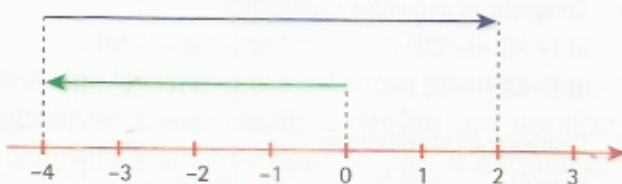
$2 + 5 = 5 + 2 = 7$

d) A soma de 6 e -4 pode ser calculada de duas maneiras:

$$6 + (-4) =$$



$$(-4) + 6 =$$



Resumindo tem: $6 + (-4) = (-4) + 6 = 2$

• A adição em \mathbb{Z} é comutativa.

$$a + b = b + a$$

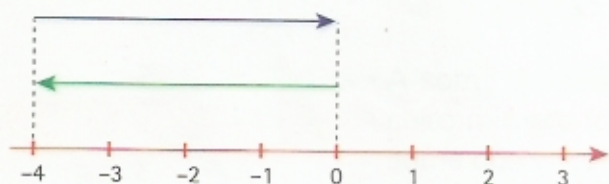
e) $[(+3) + (-2)] + (+7) = (+1) + (+7) = +8$

$(+3) + [(-2) + (+7)] = (+3) + (+5) = +8$

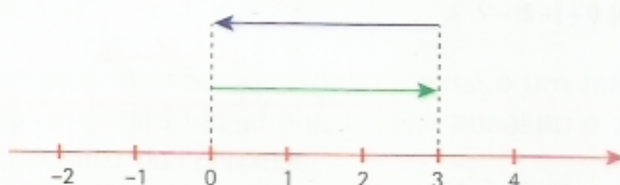
• A adição em \mathbb{Z} é associativa.

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

f) $(-4) + (+4) =$



$(+3) + (-3) =$



• Todos os elementos de \mathbb{Z} têm oposto para a adição.

$$a + (-a) = (-a) + a = 0$$

3.3. Adição sucessiva

Seja a expressão

$$(+4) + (-3) + (+7) + (-4) + (+3) =$$

Representa a soma de vários números inteiros que, por definição, se obtém da seguinte forma:

- adicionando a 1.ª parcela com a 2.ª
- adicionando o resultado com a 3.ª
- adicionando o resultado com a 4.ª
- e assim sucessivamente...

$$\begin{aligned} & (+4) + (-3) + (+7) + (-4) + (+3) = \\ & = (+1) + (+7) + (-4) + (+3) = \\ & = (+8) + (-4) + (+3) = \\ & = (+4) + (+3) = \\ & = (+7) \end{aligned}$$

Poderia proceder-se de forma mais cómoda, aplicando as propriedades comutativa generalizadas:

$$\begin{aligned} & (+4) + (-3) + (+7) + (-4) + (+3) = \\ & = (+4) + (-4) + (-3) + (+3) + (+7) = \\ & = 0 + 0 + (+7) \\ & = (+7) \end{aligned}$$

Outro exemplo:

$$\begin{aligned} & (+114) + (-72) + (-16) + (+72) + (-52) + (+16) = \\ & = (+114) + (-72) + (+72) + (-16) + (+16) + (-52) = \\ & = (+114) + 0 + 0 + (-52) = \\ & = (+114) + (-52) = \\ & = (+62) \end{aligned}$$

Por vezes, há vantagem em associar, por um lado, os números positivos e, por outro, os negativos.

$$\begin{aligned} & (+4) + (-16) + (-7) + (-5) + (+18) + (+15) + (-21) = \\ & = (+4) + (+18) + (+15) + (-16) + (-7) + (-5) + (-21) = \\ & = (+37) + (-49) = \\ & = (-12) \end{aligned}$$

Exercício n.º 5

1. Efectue as seguintes adições:

a) $(-5) + (+4) + (-3) + (+9) + (+3) =$

b) $(+15) + (+1) + (-8) + (-15) + (-1) =$

c) $(-10) + (-3) + (+3) + (+8) + (+2) =$

d) $(+7) + (-1) + (-8) + (-3) + (+5) =$

e) $(-27) + (+13) + (+17) + (-3) + (-4) =$

f) $(-12) + (+15) + (-18) + (-8) + (+19) =$

2. A seguinte tabela representa o movimento de entradas e saídas de passageiros num autocarro durante o seu trajecto.

	À partida	1.ª paragem	2.ª paragem	3.ª paragem	4.ª paragem	Terminal
Entradas	32	8	12	5	4	0
Saídas	0	5	10	7	12	?

- a) Escreva uma expressão que traduza o movimento de entradas e saídas de passageiros.
 b) Quantos passageiros saíram no terminal?
3. Utilize as propriedades comutativa e associativa para efectuar rapidamente as seguintes adições:
- a) $(-6) + (-4) + (-3) + (+7) + (+5) + (+3) =$
 b) $(+6) + (-7) + (+3) + (-10) + (+20) + (-5) + 0 =$
 c) $(+7) + (-14) + (-3) + (-8) + (+14) + (-7) + (+8) =$
4. Calcule $a + b + c$ em cada um dos seguintes casos:
- a) $a = (-3)$; $b = (+12)$; $c = (-31)$
 b) $a = (+4)$; $b = (+16)$; $c = (+23)$
 c) $a = (-11)$; $b = (-17)$; $c = (-35)$

5. Complete o quadro seguinte:

a	b	c	$a + b$	$b + c$	$(a + b) + c$	$a + (b + c)$
(-10)	$(+14)$	(-7)				
$(+2)$	(-9)	$(+14)$				
$(+8)$	(-9)	(-12)				

6. Efectue, procurando os processos mais rápidos.

a) $(-9) + (+15) + (+9) + (-15) =$

c) $(+1) + (-7) + (+3) + (-4) + (+5) =$

e) $(-12) + (-19) + (+15) + (-4) + (+7) + (-4) =$

b) $(-4) + (+3) + (+2) + (-3) + (+4) =$

d) $(-9) + (+15) + (+8) + (-13) + (-11) =$

f) $(-6) + (-7) + (-8) + (-9) + (-10) =$

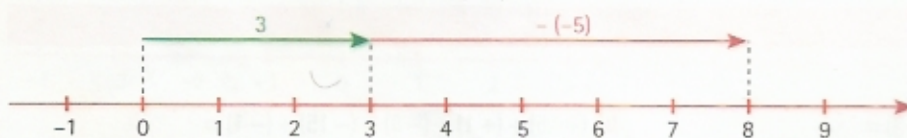
3.4. Subtração em \mathbb{Z}

EXEMPLO:

Determine graficamente $3 - (-5)$.Como representar " $-(-5)$ " na recta graduada?

Primeiro tem-se uma subtração " $-$ " o que implica que a seta é negativa (virada para a esquerda), mas depois tem-se um número negativo " -5 " o que implica outra vez uma seta negativa. Mas, como a seta inicial já era negativa, o " -5 " faz com que a seta mude de sentido mais uma vez, e assim será positiva (para a direita).

$$3 - (-5) = 8$$



Na figura pode-se constatar que

$$3 - (-5) = 3 + 5 = 8$$

Determine $(-6) - (-9)$.Pode-se escrever (-6) sem parêntesis e " $-(-9)$ " como $+9$. Então, tem-se:

$$(-6) - (-9) = -6 + 9 = +3$$

Em resumo, tem-se para quaisquer números inteiros a e b .

$$a + (-b) = a - b$$

$$(-a) + (-b) = -a - b$$

$$a - (-b) = a + b$$

$$(-a) - (-b) = -a + b$$

Exercício n.º 6

1. Resolva as seguintes operações (utilize a recta graduada, quando for necessário).

a) $4 + 0 =$

b) $-6 + 0 =$

c) $3 + (-5) =$

d) $3 - 5 =$

e) $(-5) + 3 =$

f) $(-1) + (-3) =$

g) $2 - (-6) =$

h) $-8 - (-3) =$

2. Resolva as seguintes operações

a) $239 + 0 =$

b) $-18 + 0 =$

c) $7 + (-7) =$

d) $4 + (-8) =$

e) $(-5) + 10 =$

f) $(-14) + 4 =$

g) $(-2) + (-5) =$

h) $(-7) + (-7) =$

i) $8 - (-2) =$

j) $-(-4) =$

l) $(-9) - (-8) =$

m) $(-11) - (-14) =$

13. A Marta tem 20,00 Mt e vai gastar 10,00 Mt. Calcule quanto vai restar, depois das compras.
14. O Carlos deve 30,00 Mt ao irmão e este perdoou-lhe 15,00 Mt. Quanto tem o Carlos a pagar ao irmão?
15. Complete o quadro:

a	b	c	$a - b$	$(a + b) - c$	$a - (b + c)$
(-3)	$(+4)$	(-7)	(-7)		
$(+6)$	(-5)	(-3)			
$(+8)$	(-2)	$(+4)$			$(+6)$
(-6)	(-3)	(-5)			

16. Calcule:
- a) O número que, adicionado com (-14) , é igual ao simétrico de $(+23)$.
- b) O número cuja soma com (-16) é igual à diferença entre (-8) e $(+24)$.

1.5. Adição algébrica e simplificação da escrita

Pretende-se calcular $14 - 3 + 2 - 5 - 6$.

Figuram adições e subtrações sucessivas de números inteiros. Chama-se, a uma expressão deste tipo, uma **adição algébrica**.

Como calcular o seu valor?

Recordando que as propriedades da adição permitem adicionar por qualquer ordem, juntam-se os números positivos entre si e os negativos entre si:

$$\begin{aligned} 14 + 2 + (-3) + (-5) + (-6) &= 14 + 2 - 3 - 5 - 6 \\ &= 16 - 14 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Pode-se, também, fazer tudo de imediato:

$$\begin{aligned} 14 - 3 + 2 - 5 - 6 &= 11 + 2 - 5 - 6 \\ &= 13 - 5 - 6 \\ &= 8 - 6 \\ &= 2 \end{aligned}$$

EXEMPLO:

$$(+7) + (-3) - (-4) - (+1) + (-2)$$

Há sinais de adição e subtração, mas pode-se convertê-los todos em sinais de adição.

$$(+7) + (-3) + (+4) + (-1) + (-2)$$

Agora já todos os sinais operacionais são de adição.

Podes aceitar a ideia de os não escrever, desde que fique assente que a operação que liga dois quaisquer dos números é sempre uma adição.

E a supressão dos sinais operacionais torna desnecessários os parêntesis:

$$+7 - 3 + 4 - 1 - 2$$

A expressão aparece muito simplificada.

Pode-se ainda convencionar não escrever o sinal posicional da 1.ª parcela sempre que ela seja positiva.

$$7 - 3 + 4 - 1 - 2$$

O valor da expressão calcula-se, agora, facilmente:

$$\begin{aligned} 7 - 3 + 4 - 1 - 2 &= \\ = 7 + 4 - 3 - 1 - 2 & \\ = 11 - 6 & \\ = 5 & \end{aligned}$$

Outro exemplo:

$$\begin{aligned} (-4) + (-8) - (-9) + (+12) - (+1) &= \\ = (-4) + (-8) + (+9) + (+12) + (-1) & \\ = -4 - 8 + 9 + 12 - 1 & \end{aligned}$$

Esta é a forma simplificada ou abreviada. Se comparar com a forma inicial, verifica-se que dois sinais consecutivos (um operacional e outro posicional) acabam por dar origem a um só.

$$\begin{array}{ccccccc} -4 & + & (-8) & - & (-9) & + & (+12) & - & (+1) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ -4 & - & 8 & + & 9 & + & 12 & - & 1 \end{array}$$

- Dois sinais contrários dão origem a um só sinal $-$.
- Dois sinais iguais dão origem a um só sinal $+$.

3.5.1. Uso de parêntesis

EXEMPLO:

$$5 + (-1 + 3 - 4)$$

O uso de parêntesis a envolver a adição algébrica $-1 + 3 - 4$ equivale a considerá-la efectuada. Mas a propriedade associativa da adição permite escrever:

$$5 + (-1 + 3 - 4) = 5 - 1 + 3 - 4$$

Diz-se, nestas condições, que se desembaraçou de parêntesis.

Repare que, neste caso em que ele estava precedido do sinal $+$, bastou suprimi-lo bem como ao sinal que o precedia.

$$4 - (2 + 7 - 5)$$

O parêntesis está precedido do sinal $-$.

Recordando a propriedade relativa a subtrair uma soma de um número pode-se escrever:

$$\begin{aligned} 4 - (2 + 7 - 5) &= 4 - (+2) - (+7) - (-5) \\ &= 4 - 2 - 7 + 5 \end{aligned}$$

Neste caso, para desembaraçar a expressão do parêntesis, não bastou suprimi-lo e ao sinal que o precedia; houve necessidade de trocar os sinais do seu interior: $+$ por $-$ e $-$ por $+$.

Outros exemplos:

a) $(4 + 3 - 5) - (2 + 3 - 4)$

Quando um parêntesis não está precedido de sinal nenhum é como se estivesse, na realidade, precedido do sinal $+$.

$$(4 + 3 - 5) - (2 + 3 - 4) = 4 + 3 - 5 - 2 - 3 + 4$$

$$\begin{aligned} \text{iii)} \quad & 5 - [3 - (4 + 3) + (1 - 6)] = \\ & = 5 - (3 - 4 - 3 + 1 - 6) = \\ & = 5 - 3 + 4 + 3 - 1 + 6 \\ \text{iv)} \quad & 3 + [(2 + 3) - (-2 + 7 - 1)] = \\ & = 3 + (2 + 3 + 2 - 7 + 1) = \\ & = 3 + 2 + 3 + 2 - 7 + 1 \end{aligned}$$

Exercício n.º 7

1. Calcule:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \quad 7 + 13 - 21 + 4 = & \text{b)} \quad 3 - 4 + 8 - 4 = & \text{c)} \quad 12 + 13 - 7 - 4 = \\ \text{d)} \quad 33 - 17 - 10 - 15 = & \text{e)} \quad 114 - 89 + 12 - 19 = & \text{f)} \quad 5 - 10 + 25 - 20 = \end{array}$$

2. Efectue:

$$\text{a)} \quad 10\,000 - 7991 - 1979 = \quad \text{b)} \quad 5 - 4 + 3 - 7 = \quad \text{c)} \quad -24 + 32 - 17 - 6 + 11 = \quad \text{d)} \quad 7 - (-2) - 4 =$$

3. Desembarace de parêntesis e calcule.

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \quad 5 + (3 + 4) = & \text{b)} \quad 3 - (-4 + 1) = & \text{c)} \quad -(2 - 4 + 7) + (10 - 6) = & \text{d)} \quad (4 - 5) - (1 - 3 + 7) = \\ \text{e)} \quad 4 + [3 - (-4 + 6)] = & \text{f)} \quad (1 - 4) - [4 - (3 - 9)] = & \text{g)} \quad 7 - [3 - (5 - 6) + 3] = & \text{h)} \quad -3 - [-2 - (-4 + 7) - 8] = \\ \text{i)} \quad 0 - [-2 - (-1 - 3) + (-15 + 5)] = & & \text{j)} \quad 6 - [3 - (-2 - 3) - (7 - 12)] = \end{array}$$

4. Calcule:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad |-3 + 2 - 5| - |4 - 6 + 7| = & \text{b)} \quad |1 - 2| - |3 - 5| = \\ \text{c)} \quad 3 - |-2| + 5 + |-7| = & \text{d)} \quad |3 - (8 - 4)| - 5 - (-2 + 7) = \end{array}$$

5. A Maria, num jogo de computador, em cinco jogos ganhou 10 pontos, perdeu 15, ganhou 8, perdeu 5 e ganhou 2. Quantos pontos a Maria teve no fim dos 5 jogos?

6. O Francisco esteve a jogar no computador e a contagem era em pontos.

Em dez jogos aconteceu o seguinte: perdeu 5 pontos, ganhou 18, perdeu 12, ganhou 7, ganhou 18, perdeu 2, perdeu 5, perdeu 7, ganhou 25 e ganhou 32.

Qual foi a pontuação final do Francisco?

7. O Eduardo tinha 15,00 Mt no bolso e comprou 7,00 Mt de rebuçados. Pediu dez meticais à sua mãe para ir ao cinema. Pagou o bilhete com 12,00 Mt.

Com quanto dinheiro ficou?

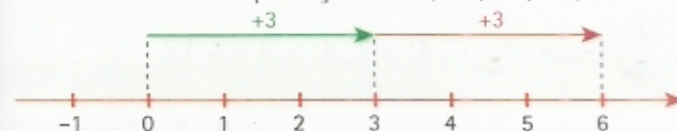
3.6. Multiplicação em \mathbb{Z}

Recorda que:

$$3 \times 4 = 4 + 4 + 4$$

$$1 \times 4 = 4$$

$$0 \times 4 = 0$$

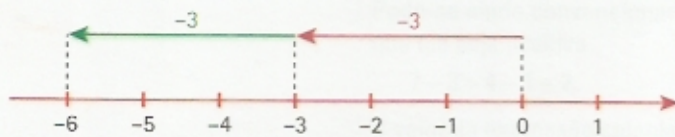
a) Considere a multiplicação de $(+2) \times (+3)$ 

$$2 \times 3 = 3 + 3 = 6$$

$$2 \times 3 = 6$$

Adicionamos três unidades duas vezes no sentido positivo.

b) $(+2) \times (-3) =$



Significa 2 vezes no sentido negativo, então

$$(+2) \times (-3) = (-3) + (-3) = -6$$

$$2 \times (-3) = -6$$

c) $(-2) \times (-3) =$

O "(-2)" significa sentido negativo e "-3" também diz para mudar o sentido, logo será 2 vezes no sentido positivo:

$$(-2) \times (-3) = (+3) + (+3) = +6$$

$$(-2) \times (-3) = +6$$

×	+	-
+	+	-
-	-	+

Para facilitar a determinação do sinal do produto, apresenta-se a tabela, ao lado, que explica a **Regra dos sinais**.

No caso de um produto de vários factores, multiplica-se o primeiro pelo segundo, o resultado pelo terceiro, assim sucessivamente:

$$(-3) \times 5 \times (-2) = (-15) \times (-2) = 30$$

$$(-2) \times (-4) \times 2 \times (-1) = 8 \times 2 \times (-1) = 16 \times (-1) = -16$$

Conclui-se facilmente que o produto:

- será **positivo** se o número de factores negativos for **par**
- será **negativo** se o número de factores negativos for **ímpar**

3.7. Propriedades da multiplicação em \mathbb{Z}

É evidente que qualquer número multiplicado por um é igual a si próprio:

$$1 \times 7 = 7 \quad \text{e} \quad 1 \times (-10) = -10$$

O número 1 é o elemento neutro da multiplicação:

$$1 \times a = a \quad a \in \mathbb{Z}$$

Verifique que

$$3 \times 5 = 5 \times 3$$

$$\left. \begin{array}{l} 3 \times 5 = 5 + 5 + 5 = 15 \\ 5 \times 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15 \end{array} \right\} \Rightarrow 3 \times 5 = 5 \times 3 = 15$$

$$\left. \begin{array}{l} 3 \times (-4) = -12 \\ (-4) \times 3 = -12 \end{array} \right\} \Rightarrow 3 \times (-4) = (-4) \times 3 = -12$$

Os exemplos dados mostram a **propriedade comutativa da multiplicação**

$$a \times b = b \times a \quad a, b \in \mathbb{Z}$$

O produto sucessivo de 2, 3 e 4 pode-se obter de duas maneiras:

$$\left. \begin{array}{l} \text{a)} 2 \times 3 \times 4 = (2 \times 3) \times 4 = \\ \quad = 6 \times 4 = 24 \\ \text{b)} 2 \times 3 \times 4 = 2 \times (3 \times 4) = \\ \quad = 2 \times 12 = 24 \end{array} \right\} \Rightarrow (2 \times 3) \times 4 = 2 \times (3 \times 4)$$

O produto sucessivo de 2, -4 e -5 pode-se também obter de duas maneiras:

$$\left. \begin{array}{l} \text{a)} 2 \times (-4) \times (-5) = [2 \times (-4)] \times (-5) = \\ \quad = (-8) \times (-5) = 40 \\ \text{b)} 2 \times (-4) \times (-5) = 2 \times [(-4) \times (-5)] = \\ \quad = 2 \times 20 = 40 \end{array} \right\} \Rightarrow [2 \times (-4)] \times (-5) = \\ = 2 \times [(-4) \times (-5)]$$

Esta é a **propriedade associativa** da multiplicação:

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c) \quad a, b, c \in \mathbb{Z}$$

Considere a expressão $2 \times (3 + 5)$. Ela pode ser resolvida de duas maneiras:

$$\begin{array}{l} \text{a)} 2 \times (3 + 5) = 2 \times 8 = 16 \\ \text{b)} 2 \times (3 + 5) = 2 \times 3 + 2 \times 5 = 6 + 10 = 16 \end{array}$$

A expressão $(-3) \times (-4 + 6)$ também pode ser resolvida de duas maneiras:

$$\begin{array}{l} \text{a)} (-3) \times (-4 + 6) = (-3) \times 2 = -6 \\ \text{b)} (-3) \times (-4 + 6) = (-3) \times (-4) + (-3) \times 6 = 12 - 18 = -6 \end{array}$$

Os cálculos **b)** são exemplos da **propriedade distributiva**.

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c \quad a, b, c \in \mathbb{Z}$$

Repare que **NÃO** se pode fazer assim:

$$2(3 + 5) = 2 \times 3 + 5 = 6 + 5 = 11$$

EXEMPLOS:

1. Determine $5 \times (6 - 4)$.

Pode-se resolver de duas maneiras:

$$\begin{array}{l} \text{a)} 5 \times (6 - 4) = 5 \times 2 = 10 \\ \text{b)} 5 \times (6 - 4) = 5 \times 6 - 5 \times 4 = 30 - 20 = 10 \end{array}$$

$$2. (-3) \times [(-10) + 3 - (-5)] =$$

$$a) (-3) \times [(-10) + 3 - (-5)] = (-3) \times (-10 + 3 + 5) = (-3) \times (-2) = 6$$

$$b) (-3) \times [(-10) + 3 - (-5)] =$$

$$= (-3) \times (-10) + (-3) \times 3 - (-3) \times (-5) =$$

$$= 30 - 9 - 15 = 30 - 24 = 6$$

Vejamos como pôr em evidência o factor comum (que é (-2)) em:

$$(-2) \times (-4) + (-2) \times (-3) =$$

A propriedade distributiva da multiplicação em relação a adição aplicada da direita para a esquerda permite por em evidência um factor comum numa expressão. Assim:

$$(-2) \times (-4) + (-2) \times (-3) = (-2) \times [(-4) + (-3)]$$

Outro exemplo:

$$5 \times (-3) - (-7) \times (-3) = (-3) \times [5 - (-7)]$$

Exercício n.º 8

1. Calcule as seguintes expressões, aplicando as duas maneiras possíveis e comparando os resultados:

a) $4 \times (5 + 8)$

b) $6 \times (8 - 3)$

c) $x \times (y + z)$

2. Determine:

a) $(-2) \times (-5) =$

b) $(-3) \times (-10) =$

c) $(-12) \times 100 =$

d) $200 \times (-10) =$

e) $(-500) \times (-5) =$

f) $(-10) \times 15 =$

g) $(-15) \times 1000 =$

h) $(-150) \times (-100) =$

i) $(-100) \times 100 =$

j) $800 \times (-70) =$

k) $3 \times (-4) =$

l) $6 \times (-2) =$

3. Calcule:

a) $3 \times (5 - 2) =$

b) $(-1) \times (3 + 4) =$

c) $3 \times (5 - 8) =$

d) $(6 - 9) \times 4 =$

e) $(7 - 7) \times 11 =$

f) $3 \times (4 - 7) =$

g) $(-3) \times (4 - 7) =$

h) $(-6) \times (-2 + 4) =$

i) $2 \times (-3 + 7 - 6) =$

j) $(-4) \times 5 \times (-2) =$

k) $-(-3) \times 6 =$

l) $(-2) \times (-2) \times (-2) =$

4. Efectue as multiplicações:

a) $(-2) \times (-3) \times 1 \times (-2) \times (-3) =$

b) $9 \times (-2) \times (-5) \times 2 \times 5 =$

c) $7 \times 0 \times (-8) \times (-4) =$

d) $4 - 2 \times (1 - 7) =$

e) $(-6) \times (4 + 3 - 2) - 4 \times (-2) =$

f) $(-7) \times (5 - 13 + 8) - 1 =$

5. Qual é o sinal de um produto com:

a) 2 factores negativos e 11 positivos?

b) 3 factores negativos e 11 positivos?

c) 3 factores negativos e 12 positivos?

d) 2 factores negativos e 12 positivos?

6. Um certo dia, um comerciante fez os seguintes negócios:

Vendeu 107 refrescos a 10,00 Mt cada, comprou 60 kg de carne a 80,00 Mt/kg, vendeu 16 pacotes de bolachas a 12,00 Mt cada, vendeu 23 kg de carne a 100,00 Mt/kg e pagou o salário de 2850,00 Mt ao seu assistente. Vendeu ainda, numa encomenda especial, mais 7 pacotes de bolachas e 31 kg de carne.

Com quanto dinheiro ficou no fim do dia, se no início tinha 8800,00 Mt?

18. Divisão em \mathbb{Z}

A divisão é a operação inversa da multiplicação, como tal, as regras dos sinais são as mesmas.

EXEMPLOS:

$$(-12) : (-3) = +4$$

$$(+12) : (+3) = +4$$

$$(-12) : (+3) = -4$$

$$(+12) : (-3) = -4$$

Exercício n.º 9

1. Calcule:

a) $(-18) : (-6) =$

b) $(-16) : (+2) =$

c) $(-8) : (-8) =$

d) $(-5) : 1 =$

e) $(-9) : (-3) =$

f) $(-64) : (-32) =$

g) $(-50) : (-1) =$

h) $(-500) : 500 =$

2. Efectue:

a) $(-100) : (-10) \times (-1) =$

b) $(-200) : (-10) : 20 =$

c) $(-500) \times (-100) : (-20) =$

d) $(-16) : (-16) \times (-16) =$

e) $(-150) : (-10) : (-3) =$

f) $(-1) + (-3) : (-1) \times 4 =$

g) $[(-5) + (-3) \times (-2)] : [(-2) - (-3)] =$

19. Potência em \mathbb{Z}

Para simplificar a escrita de um produto de factores iguais usam-se potências.

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4$$

3^4 é uma potência; 3 é a base e 4 é o expoente.

Potência	Leitura
2^5	dois à quinta ou dois elevado a cinco
5^3	cinco ao cubo ou cinco elevado a três
3^2	três ao quadrado ou três elevado a dois
5^{11}	cinco elevado a onze

No cálculo do valor numérico de uma expressão com potências, em primeiro lugar calcula-se o valor da potência.

$$3 + 2^2 \times 5 = 3 + 4 \times 5 = 3 + 20 = 23$$

EXEMPLOS:

1. Escreva, sem o uso de potências:

a) $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$

b) $5^2 = 5 \times 5 = 25$

c) $(-5)^2 = (-5) \times (-5) = +25$

d) $(-10)^3 = (-10) \times (-10) \times (-10) = -1000$

- Se o expoente for par, a potência é positiva.
- Se o expoente for ímpar, a potência tem o sinal da base.

2. Escreva como potência ou produto de potências.

a) $5 \times 5 \times 5 = 5^3$

b) $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$

c) $(-3) \times (-3) \times (-3) = (-3)^3$

d) $4 \times 4 \times 4 \times (-5) \times (-5) = 4^3 \times (-5)^2$

e) $10 \times 10 \times 10 = 10^3$

f) $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^5$

$$10^3 \text{ expoente é } 3$$

$$10^3 = \underbrace{1000}_{3 \text{ zeros}}$$

$$10^5 = \underbrace{100\ 000}_{5 \text{ zeros}}$$

- Uma potência de 10 é igual a um número composto pelo algarismo um seguido de tantos zeros quantos o expoente da potência.

Exercício n.º 10

1. Calcule:

a) $-5^2 =$

b) $(-5)^2 =$

c) $(-6)^2 =$

d) $-(-8)^2 =$

e) $-5^1 =$

2. Calcule o valor numérico das seguintes expressões:

a) $2 + (-3)^2 =$

b) $(-2)^2 + (-3)^2 =$

c) $-1 - (-1)^3 =$

3. Calcule e simplifique.

a) $2 + 3^2 : 3 + 1 =$

b) $(-2)^2 + (-1)^2 - (-3)^2 \times (-1) =$

c) $(-50) : (-5)^2 + (-3) \times (-2) =$

4. Determine as cinco primeiras potências de:

a) -2

b) $+2$

c) 0

d) -1

e) 1

3.9.1. Regras das operações com potências

► Multiplicação de potências com a mesma base

$$2^5 \times 2^3 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^8$$

$$(-2)^2 \times (-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = (-2)^5$$

$$a^b \times a^c = a^{b+c}$$

- Para multiplicar potências com a mesma base, dá-se a mesma base e adicionam-se os expoentes.

▶ Divisão de potências com a mesma base

$$2^5 : 2^3 = \frac{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{2} \times 2 \times 2}{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{2}} = 2 \times 2 = 2^2$$

$$(-4)^4 : (-4)^2 = \frac{\cancel{(-4)} \times \cancel{(-4)} \times (-4) \times (-4)}{\cancel{(-4)} \times \cancel{(-4)}} = (-4)^2$$

- Para dividir potências com a mesma base dá-se a mesma base e subtraem-se os expoentes.

$$a^b : a^c = a^{b-c}$$

▶ Multiplicação de potências com o mesmo expoente

$$6^3 \times 4^3 = (6 \times 4) \times (6 \times 4) \times (6 \times 4) = (6 \times 4)^3 = 24^3$$

$$\begin{aligned} (-2)^3 \times (+3)^3 &= [(-2) \times 3] \times [(-2) \times 3] \times [(-2) \times 3] = \\ &= [(-2) \times 3]^3 = (-6)^3 \end{aligned}$$

- Para multiplicar potências com o mesmo expoente, multiplicam-se as bases e dá-se o mesmo expoente.

$$a^c \times b^c = (a \times b)^c$$

▶ Divisão de potências com o mesmo expoente

$$\begin{aligned} 6^5 : 3^5 &= \frac{6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6}{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3} = \left(\frac{6}{3}\right) \times \left(\frac{6}{3}\right) \times \left(\frac{6}{3}\right) \times \left(\frac{6}{3}\right) \times \left(\frac{6}{3}\right) = \\ &= \left(\frac{6}{3}\right)^5 = 2^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (-4)^3 : 2^3 &= \frac{(-4) \times (-4) \times (-4)}{2 \times 2 \times 2} = \left[\frac{(-4)}{2}\right] \times \left[\frac{(-4)}{2}\right] \times \left[\frac{(-4)}{2}\right] = \\ &= \left[\frac{(-4)}{2}\right]^3 = (-2)^3 \end{aligned}$$

- Para dividir potências com o mesmo expoente dividem-se as bases e dá-se o mesmo expoente.

$$a^c : b^c = (a : b)^c$$

▶ Potência de potência

$$\begin{aligned} (3^2)^4 &= (3 \times 3) \times (3 \times 3) \times (3 \times 3) \times (3 \times 3) = \\ &= 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [(-2)^2]^3 &= [(-2) \times (-2)] \times [(-2) \times (-2)] \times [(-2) \times (-2)] = \\ &= (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = (-2)^6 \end{aligned}$$

- Uma potência de potência é igual a uma potência com a mesma base e cujo expoente é o produto dos expoentes.

$$(a^p)^q = a^{p \times q}$$

► Potência de expoente nulo

Aplicando a propriedade da divisão de potências com a mesma base:

$$5^3 : 5^3 = 5^{3-3} = 5^0$$

Aplicando a propriedade da divisão de potências com o mesmo expoente:

$$5^3 : 5^3 = \frac{\cancel{5} \times \cancel{5} \times \cancel{5}}{\cancel{5} \times \cancel{5} \times \cancel{5}} = 1$$

Então

$$5^0 = 1$$

- Uma potência de expoente nulo e base não nula é igual a 1.

EXEMPLOS

1. Escreva sob a forma de potência:

a) $3^4 \times 3^5 = 3^9$

b) $5^6 : 5^5 = 5^1 = 5$

c) $(-2)^5 \times (-2)^7 = (-2)^{12}$

d) $2^3 \times 3^3 = 6^3$

e) $(-6)^3 : 2^3 = (-3)^3$

2. Calcule:

a) $(2^2)^4 = 4^4 = 256$

b) $(2^2)^3 = 2^6 = 64$

3. Escreva como potência de base -2 ou 2 e expoente em \mathbb{N} :

a) $16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$

b) $(-2) = (-2)^1$

c) $32 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$

Exercício n.º 11

1. Efectue e simplifique.

a) $4^3 \times 4^6 : 4^7 =$

b) $4^6 : (4^3 : 4^2) =$

c) $(-8)^6 : (+2)^6 : (-4)^4 =$

d) $4^6 : 4^3 : 4^2 =$

e) $4^6 \times (4^3 : 4^2) =$

f) $15^3 : 3^3 \times 5 =$

g) $3^7 \times (-4)^7 : [(-12)^5 \times (-12)] =$

h) $32^6 : 8^6 : [(-4)^3 \times (-4)^2] =$

2. Efectue as operações seguintes, apresentando o resultado sob a forma de uma potência e indique o respectivo sinal.

a) $(-6)^3 \times (-6)^7 \times (-6)^4 =$

b) $7^3 \times 7^6 \times 7^{10} =$

c) $7^3 \times 7^6 \times 7^9 =$

d) $(-6)^3 \times (-6)^7 \times (-6)^3 =$

e) $(-6) \times (-6)^7 \times (-6)^4 =$

f) $(-7)^5 \times (-7)^3 : (-7)^7 =$

g) $(-3)^4 \times 4^4 : (-6)^4 =$

h) $(4^2)^3 =$

i) $[(-4)^2]^3 =$

j) $[(-4)^3]^3 =$

k) $[(+4)^3]^5 =$

3. Calcule o valor de cada expressão.

a) $3^5 \times 3^2 : 3^6 =$

b) $5^8 : 5^7 \times 5^4 =$

c) $(5 - 2^2) \times 3^2 - 2^3 =$

d) $7^9 : 7^4 \times 6^5 =$

e) $2^4 \times 2^8 \times 2^1 =$

f) $\frac{(5 - 3)^2 \times 4^2 \times 4}{2^4 \times 2^0} =$

g) $9 - 2 \times [4 - 2 \times (3 - 2)^2] =$

h) $9 - 2 \times (4 - 2 \times (2 - 3)^2) =$

i) $4 - (7 + 2) : 3 \times 5 =$

j) $(6^3 \times 2^3) : (-4)^3 : (-3) =$

k) $(3 - 2^3) : 1 - (-2)^2 =$

l) $3 - [2 : (1 - 3)]^3 =$

m) $2 + [64 : (2 - 10)]^2 =$

1. Revisão das fracções

A Carla tem três barras iguais de chocolate que quer dividir equitativamente por cinco amigos. Como deve fazer?

Pede ajuda à Matemática e começa por escrever

$$3 : 5 = \dots$$

Mas repare que a operação não é possível em \mathbb{N} ... Porquê? Fica a saber que não pode dar **barras inteiras** aos seus amigos.

Decide, então, a partir cada barra em cinco partes iguais e entregar a cada um dos cinco amigos, uma dessas partes de cada barra.

Que porção de chocolate recebeu cada um?

Uma quinta parte da primeira barra,
uma quinta parte da segunda barra,
e uma quinta parte da terceira barra.

Ao todo **três quintas partes**.

Quer dizer:

Da divisão das três barras pelos cinco amigos resultou, por cada um, **três quintas partes** das barras de chocolate.

É natural escrever: $3 : 5 = 3$ quintas partes

ou, como é mais usual, $3 : 5 = \frac{3}{5}$ (lê-se três quintos)

Por sua vez, o irmão da Carla tem dez barras que quer dividir, também pelos mesmos cinco amigos.

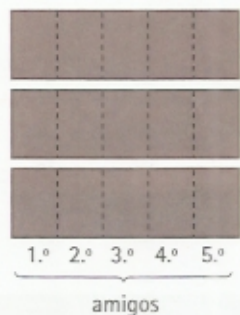
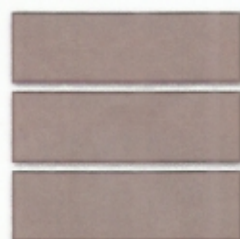
Escreva: $10 : 5 = \frac{10}{5}$

Mas repare, que não necessita de fragmentar as barras porque cabem **duas** a cada um: $\frac{10}{5} = 2$

Num caso e no outro foi possível a divisão das barras pelos cinco amigos

$$3 : 5 = \frac{3}{5} \quad 10 : 5 = \frac{10}{5}$$

Simplesmente, no 2.º caso não houve necessidade de fraccionar as barras, contrariamente ao que aconteceu no 1.º caso.



Esquecendo os chocolates para pensar apenas nos números, diz-se:

- o quociente $\frac{10}{5}$ de 10 por 5 é um **número inteiro**
- o quociente $\frac{3}{5}$ de 3 por 5 não é um **número inteiro**.

Chama-se **número fraccionário**.

O número inteiro $\frac{10}{5}$ e o número fraccionário $\frac{3}{5}$ aparecem, entretanto, representados por expressões semelhantes. São expressões do tipo $\frac{a}{b}$ em que a e b são inteiros.

A estas expressões chamam-se **fracções**.

$$3 : 5 = \frac{3}{5} \quad 10 : 5 = \frac{10}{5} \quad \text{Em geral, } a : b = \frac{a}{b}$$

- Uma fracção representa um quociente exacto, ou como se diz também uma razão.

Na fracção

- $a \rightarrow$ é o numerador ou o 1.º termo
- $b \rightarrow$ é o denominador ou o 2.º termo
- o traço de fracção corresponde ao sinal : (divisão)

As fracções representam razões. Todos os números que podem designar-se por uma fracção chamam-se **números racionais** (do latim *ratio*, que se lê rácio e significa razão).

Como já se viu, esses números podem ser:

- inteiros, como é o caso de $\frac{10}{5}$;
- fraccionários, como é o caso de $\frac{3}{5}$.

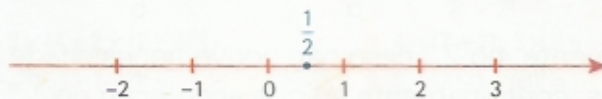
Por isso:

$$\{\text{Números Racionais}\} = \{\text{Números inteiros}\} \cup \{\text{Números fraccionários}\}$$

1.1. Representação de fracções na recta graduada

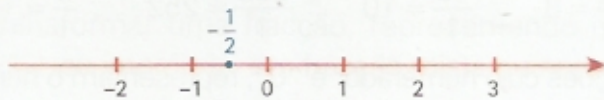
Na recta graduada que já fizeste no conjunto \mathbb{Z} , as fracções ainda não foram introduzidas. Somente se marcaram os números inteiros.

Agora vais marcar o número $\frac{1}{2} = 0,5$ na recta. Onde deve ficar?



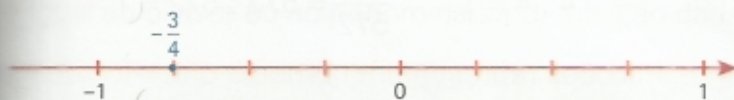
Agora vamos marcar $-\frac{1}{2} = -0,5$ na recta. Onde deve ficar?

Como $-\frac{1}{2}$ é o simétrico de $\frac{1}{2}$, deve ficar à mesma distância de zero, mas do lado esquerdo.



Exemplo: Marcar $-\frac{3}{4} = -0,75$ na recta.

Fica entre -1 e 0 . Divide-se esta parte em quatro partes iguais e marca-se o ponto.



1.2 Tipos de fracções

O quociente exacto da divisão 3 por 4 não é um número inteiro: portanto, o número representado pela fracção $\frac{3}{4}$. Porquê?

O quociente exacto da divisão $3 : 4$ terá de ser um número que colocado no lugar de \square , verifique a seguinte igualdade:

$$3 = 4 \times \square$$

Como $4 \times 0 = 0 < 3$ e $4 \times 1 = 4 > 3$, esse quociente terá de ser maior que zero e menor que um.

Entre zero e um não existe nenhum número inteiro, logo, o quociente não é inteiro.

Mas, o quociente existe: se se quiser dividir 3 barras de chocolate por 4 pessoas, divide-se cada barra em quartos, obtendo 12 quartos. Cada pessoa recebe 3 quartos das barras de chocolate.

Portanto, o quociente exacto existe e é $\frac{3}{4}$.

Cada fracção representa um número: o quociente exacto da divisão cujo dividendo é o numerador da fracção e o divisor é o denominador da fracção.

Certas fracções representam números inteiros:

$$\frac{12}{4} = 12 : 4 = 3$$

$$\frac{12}{4} = 3$$

$$\frac{20}{5} = 20 : 5 = 4$$

$$\frac{20}{5} = 4$$

– Uma fracção representa um número inteiro, sempre que o numerador é múltiplo do denominador.



– Qualquer fracção com denominador 1, representa o número inteiro que constitui o seu numerador.

Assim todos números inteiros podem ser representados por fracções:

$$\frac{3}{1} = 3 \quad \frac{10}{1} = 10 \quad \frac{252}{1} = 252 \quad \frac{1}{1} = 1$$

– As fracções cujo numerador é "0", representam o número zero:

$$\frac{0}{5} = 0 : 5 = 0 \quad \frac{0}{325} = 0 : 325 = 0.$$

– As fracções cujo numerador é igual ao denominador, representam o número 1

$$\frac{4}{4} = 4 : 4 = 1 \quad \frac{572}{572} = 572 : 572 = 1$$

– Certas fracções representam números que não são inteiros

$$\frac{3}{4}, \frac{7}{3}, \frac{25}{16}, \frac{250}{7}$$

- Chamam-se **números fraccionários**, os números representados por fracções que não são números inteiros.

Como cada fracção representa o quociente exacto entre o numerador e o denominador, facilmente se conclui que:

- se o numerador for menor que o denominador, a fracção representa um número menor que 1;
- se o numerador for maior que o denominador, a fracção representa um número maior que 1.

- Chama-se **fracções próprias**, as fracções que representam números menores que 1

EXEMPLO:

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{7}$$

- Chamam-se **fracções impróprias**, as fracções que representam números maiores que 1.

EXEMPLO:

$$\frac{4}{3}, \frac{7}{5}, \frac{9}{3}$$

As fracções impróprias podem ser representadas por números mistos:

EXEMPLO:

Considere a fracção $\frac{87}{7}$ (a unidade é $\frac{7}{7}$).

Quantas unidades, $\frac{7}{7}$, há em $\frac{37}{7}$? Há 5 e sobram $\frac{2}{7}$.

$$\text{Logo, } \frac{37}{7} = 5 \times \frac{7}{7} + \frac{2}{7} = 5 \times 1 + \frac{2}{7} = 5 + \frac{2}{7}$$

$$\frac{37}{7} = 5 + \frac{2}{7} \quad \left\{ \begin{array}{l} 5 \text{ representa a parte inteira} \\ \frac{2}{7} \text{ representa a parte fraccionária} \end{array} \right.$$

Costuma escrever-se, abreviadamente, $\frac{37}{7} = 5 \frac{2}{7}$ } número misto ou fracção mista

Como transformar uma fracção, representando um número maior que 1, ou imprópria, em fracção mista ou número misto?

Regra prática

Divide-se o numerador pelo denominador. A parte inteira do número misto é o quociente da divisão; a parte fraccionária é uma fracção cujo numerador é o resto da divisão e cujo denominador é igual ao divisor ou ao denominador da fracção dada.

EXEMPLO:

$$\frac{59}{6} = 9 + \frac{5}{6} = 9 \frac{5}{6}$$

$$\begin{array}{r} 59 \text{ } | \text{ } 6 \\ \underline{54} \text{ } \\ 5 \text{ } 9 \end{array}$$

Veja a figura ao lado.

Que porção representa a parte colorida, relativamente ao rectângulo todo? Diremos que é $\frac{4}{5}$.



Mas se contarmos os quadrados existentes, verificaremos que são 10, dos quais 8 estão coloridos. Pode-se dar outra resposta, $\frac{8}{10}$. Ou seja, $\frac{4}{5} = \frac{8}{10}$.

Repare que as fracções $\frac{4}{5}$ e $\frac{8}{10}$ são diferentes! Com efeito, os termos da primeira são 4 e 5, enquanto que os termos da segunda são 8 e 10.

Ao escrever-se $\frac{4}{5} = \frac{8}{10}$, tal significa que os números representados por $\frac{4}{5}$ e $\frac{8}{10}$ são iguais.

Portanto, $\frac{4}{5} = \frac{8}{10}$, trata-se de uma igualdade de números e não das fracções que os representam.

As fracções são diferentes, mas pelo facto de representarem números iguais diz-se que são **fracções equivalentes**.

Será difícil imaginar um modo de transformar $\frac{4}{5}$ em $\frac{8}{10}$?

Facilmente se conclui que bastará multiplicar pelo mesmo número (2) ambos os termos da fracção $\frac{4}{5}$.

$$\frac{4}{5} = \frac{4 \times 2}{5 \times 2} = \frac{8}{10}$$

E como passar de $\frac{8}{10}$ para $\frac{4}{5}$?

$$\frac{8}{10} = \frac{8 : 2}{10 : 2} = \frac{4}{5}$$

Diz-se que se simplificou a fracção $\frac{8}{10}$, o que corresponde a determinar uma outra fracção equivalente, mas cujos termos são menores que os da fracção dada.

Simplifique: $\frac{24}{252}$.

$$\frac{24}{252} = \frac{24 : 2}{252 : 2} = \frac{12 : 2}{126 : 2} = \frac{6 : 3}{63 : 3} = \frac{2}{21}$$

A fracção $\frac{2}{21}$ é já irredutível; não se pode simplificar mais!

Para transformar uma fracção numa outra equivalente que seja irredutível, basta dividir ambos os termos da fracção dada pelo seu máximo divisor comum (m.d.c.)

$$\text{m.d.c.}(24, 252) = 12 \quad \frac{24}{252} = \frac{24 : 12}{252 : 12} = \frac{2}{21}$$

- Se multiplicar ou dividir ambos termos de uma fracção por um mesmo número, diferente de zero, obtém-se uma fracção equivalente à dada.

EXEMPLOS:

1. Escreva três fracções equivalentes a $\frac{2}{5}$.

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \times 2}{5 \times 2} = \frac{4}{10}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \times 3}{5 \times 3} = \frac{6}{15}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = \frac{6}{15} = \frac{8}{20}$$

2. Escreva duas fracções que representem o número 8.

$$8 = \frac{16}{2}$$

$$8 = \frac{8}{1}$$

3. Torne irredutível:

a) $\frac{78}{48} = \frac{78 : 6}{48 : 6} = \frac{13}{8}$

$$\text{m.d.c.}(78, 48) = 6$$

b) $\frac{120}{450} = \frac{120 : 30}{450 : 30} = \frac{4}{15}$

$$\text{m.d.c.}(120, 450) = 30$$

1.3. Comparação de fracções

Dadas várias fracções, é sempre possível encontrar fracções equivalentes a essas, com o mesmo denominador.

Como?

Por exemplo, sejam $\frac{5}{3}$, $\frac{4}{6}$ e $\frac{5}{7}$.

– Determina-se o mínimo múltiplo comum (m.m.c.) dos denominadores. $m.m.c. (3, 6, 7) = 42$

– Divide-se esse m.m.c. por cada um dos denominadores

$$42 : 3 = 14 \quad 42 : 6 = 7 \quad 42 : 7 = 6$$

(dada a definição do m.m.c., esses quocientes são sempre números inteiros).

– Coloca-se cada quociente encontrado sob a fracção correspondente:

$$\frac{5}{3} \quad \frac{4}{6} \quad \frac{5}{7}$$

(14) (7) (6)

– Multiplicam-se ambos termos de cada fracção pelo quociente correspondente:

$$\frac{5 \times 14}{3 \times 14} = \frac{70}{42} \quad \frac{4 \times 7}{6 \times 7} = \frac{28}{42} \quad \frac{5 \times 6}{7 \times 6} = \frac{30}{42}$$

Obtiveram-se três fracções equivalentes de cada fracção original, todas com o mesmo denominador.

$$\frac{5}{3} = \frac{70}{42} \quad \frac{4}{6} = \frac{28}{42} \quad \frac{5}{7} = \frac{30}{42}$$

Este processo pode aplicar-se sempre, quaisquer que sejam as fracções dadas.

Dadas várias fracções, é sempre possível, sem efectuar o quociente, comparar os valores dos números que elas representam, isto é, saber qual delas é maior ou menor e saber colocá-las por ordem crescente ou decrescente do seu valor.

Para tal, reduzem-se as fracções dadas ao mesmo denominador.

A ordem dos números representados pelas fracções resultantes, é a ordem dos números inteiros que são os seus numeradores.

EXEMPLOS

1. Dadas as fracções $\frac{3}{5}$ e $\frac{7}{9}$, qual delas representa o número maior?
m.m.c. (5, 9) = 45

$$\frac{3}{5} = \frac{27}{45} \quad \frac{7}{9} = \frac{35}{45}$$

(9) (5)

$$35 > 27, \text{ logo } \frac{7}{9} > \frac{3}{5}$$

2. Colocar por ordem crescente as fracções $\frac{2}{3}$, $\frac{25}{11}$ e $\frac{7}{6}$.
m.m.c. (3, 11, 6) = 66

$$\frac{2}{3} = \frac{44}{66} \quad \frac{25}{11} = \frac{150}{66} \quad \frac{7}{6} = \frac{77}{66}$$

(22) (6) (11)

$$44 < 77 < 150, \text{ logo } \frac{2}{3} < \frac{7}{6} < \frac{25}{11}$$

II

EQUAÇÕES LINEARES

1.
NOÇÃO DE VARIÁVEL

2.
EQUAÇÕES

1

NOÇÃO DE VARIÁVEL



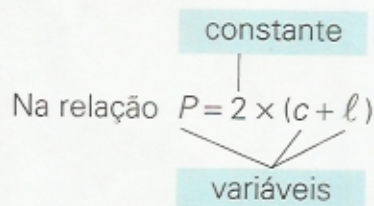
Considere o rectângulo

O seu perímetro é $P = 2 \times (c + \ell)$

Relativamente ao rectângulo dado, preencha a tabela:

c	ℓ	P
2 cm	3 cm	
	5 cm	16 cm
6 cm		20 cm

O perímetro P , o comprimento c e a largura ℓ , podem mudar de valor e, por isso, se dizem variáveis. Porém, 2 nunca se altera e, por isso, se diz constante.



EXEMPLOS

1. Na tabela

a)

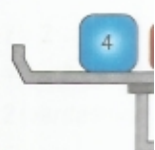
Expressão	Constantes	Variáveis
$R = \frac{V}{I}$	1	R, V, I
$e = vt$	1	e, v, t
$Q = 0,24 ri^2t$	0,24	Q, r, i, t
$3xy^2$	3	x, y
$8x^2yz - \frac{3}{2}y^2$	$8, \frac{3}{2}$	x, y, z

b)

x	1	2	3	-1	-3	$\frac{1}{2}$
$2x$	2	4	6	-2	-6	1
x^2	1	4	9	1	9	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{3}x^2$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$	9	$-\frac{1}{3}$	-9	$\frac{1}{24}$

1. Noção de equa

Numa balança t
No prato da es
de peso e o outro
nar o peso deste
prato da direita ter



Como a balança

representa o "peso

Pode-se escolhe
mais utilizadas são

A igualdade 4
 $4 + 3 = 7$, donde

Se substituirmo
plo 5, viria:

$4 + 5 = 7$, dond

Definição: char
(incógnitas) que só
incógnitas.

Definição: char
aos valores que, qu
equação numa igua

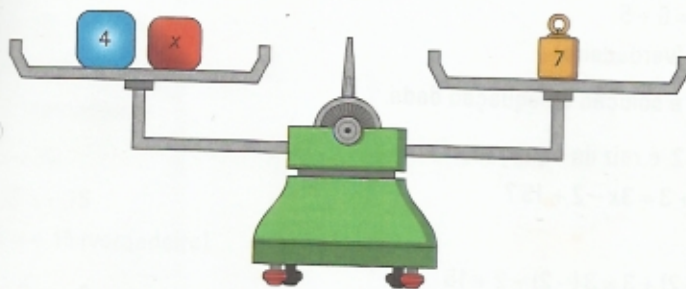
As expressões
mam-se membros

A que está à es
situa à direita, segu

1.1. Noção de equação

Numa balança temos a seguinte situação:

No prato da esquerda estão dois pacotes, um deles de 4 kg de peso e o outro de peso desconhecido x . Queremos determinar o peso deste pacote. A balança fica em equilíbrio quando o prato da direita tem um peso de 7 kg.



Como a balança está em equilíbrio, pode-se escrever:

$$4 + x = 7, \text{ onde } x \text{ (variável)}$$

representa o "peso" desconhecido, chamado **incógnita**.

Pode-se escolher qualquer letra como incógnita (variável). As mais utilizadas são x , y , z .

A igualdade $4 + x = 7$, só é verdadeira para $x = 3$ pois $4 + 3 = 7$, donde $7 = 7$.

Se substituirmos x por um valor diferente de 3, por exemplo 5, viria:

$$4 + 5 = 7, \text{ donde } 9 = 7, \text{ o que é uma igualdade falsa.}$$

Definição: chama-se equação a uma igualdade com variáveis (incógnitas) que só é verdadeira para certos valores atribuídos às incógnitas.

Definição: chamam-se raízes ou soluções de uma equação aos valores que, quando atribuídos às incógnitas, transformam a equação numa igualdade numérica verdadeira.

As expressões separadas pelo sinal de igualdade, $=$, chamam-se **membros da equação**.

A que está à esquerda diz-se primeiro membro e a que se situa à direita, segundo membro.

As parcelas que figuram em cada membro de uma equação, dizem-se termos da equação.

Os termos que possuem a mesma variável ou que não possuem nenhuma variável, dizem-se semelhantes.

Os termos que possuem variável dizem-se dependentes e os que não possuem variável, independentes.

EXEMPLOS

1. Verifique se:

a) $x = 1$ é solução da equação

$$2x + 3 = x - 1 + 5?$$

Resolução

$$2 \times 1 + 3 = 1 - 1 + 5$$

$$2 + 3 = 0 + 5$$

$$5 = 5 \text{ (verdadeira)}$$

$x = 1$ é solução da equação dada.

b) $x = -2$ é raiz da equação

$$-2x + 3 = 3x - 2 + 15?$$

Resolução

$$-2(-2) + 3 = 3(-2) - 2 + 15$$

$$4 + 3 = -6 - 2 + 15$$

$$7 = -8 + 15$$

$$7 = 7 \text{ (Verdadeira)}$$

$x = -2$ é solução da equação dada.

c) $x = -\frac{1}{2}$ é raiz da equação

$$x - \frac{3}{4} = (x - 1)^2 - \frac{1}{2}?$$

Resolução

$$-\frac{1}{2} - \frac{3}{4} = \left(-\frac{1}{2} - 1\right)^2 - \frac{1}{2}$$

$$-\frac{2}{4} - \frac{3}{4} = \left(-\frac{1}{2} - \frac{2}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$$

$$-\frac{5}{4} = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$$

$$-\frac{5}{4} = \frac{9}{4} - \frac{1}{2}$$

$$-\frac{5}{4} = \frac{9}{4} - \frac{2}{4}$$

$$-\frac{5}{4} = \frac{7}{4} \text{ (falsa)}$$

$x = -\frac{1}{2}$ não é raiz da equação dada.

2. Considere a equação $5x +$

a) o primeiro membro;

c) os termos dependentes;

e) os termos do primeiro m

Resolução

a) $5x + 2$ b) $3x + 8$ c) 5

2. Equações equivalentes

EXEMPLOS

Verifique que $x = -5$ é raiz de

a) $x + 7 = 2$

Resolução

a) $x + 7 = 2$

$$-5 + 7 = 2$$

$$2 = 2 \text{ (verdadeira)}$$

b) $3x = -15$

$$3(-5) = -15$$

$$-15 = -15 \text{ (verdadeira)}$$

c) $0,5 + \frac{x}{2} = -2$

$$0,5 + \frac{-5}{2} = -2$$

$$0,5 - 2,5 = -2$$

$$-2 = -2 \text{ (verdadeira)}$$

As equações:

$$x + 7 = 2; \quad 3x = -15$$

têm a mesma solução.

$$x + 7 = 2 \iff 3x = -15$$

"a equação $x + 7 = 2$

$$x + 7 = 2 \iff 0,5 + \frac{x}{2} = -2$$

$$3x = -15 \iff 0,5 + \frac{x}{2} = -2$$

EXEMPLOS

Verifique se $x = 8$ é solução de

a) $6x = 48$

b) $-x - 5 = -13$

c) $2x = -\frac{1}{4}$

ro de uma equação,
vel ou que não pos-
tes.

e dependentes e os

11. Considere a equação $5x + 2 = 3x + 8$ e indique:

- a) o primeiro membro;
- b) o segundo membro;
- c) os termos dependentes;
- d) os termos independentes;
- e) os termos do primeiro membro;
- f) os termos do segundo membro.

Resolução

- a) $5x + 2$
- b) $3x + 8$
- c) $5x$ e $3x$
- d) 2 e 8
- e) $5x$ e 2
- f) $3x$ e 8

2 Equações equivalentes

EXEMPLOS

Verifique que $x = -5$ é raiz de cada uma das equações

a) $x + 7 = 2$

b) $3x = -15$

c) $0,5 + \frac{x}{2} = -2$

Resolução

a) $x + 7 = 2$

$$-5 + 7 = 2$$

$$2 = 2 \text{ (verdadeira)}$$

b) $3x = -15$

$$3(-5) = -15$$

$$-15 = -15 \text{ (verdadeira)}$$

c) $0,5 + \frac{x}{2} = -2$

$$0,5 + \frac{-5}{2} = -2$$

$$0,5 - 2,5 = -2$$

$$-2 = -2 \text{ (verdadeira)}$$

As equações:

$$x + 7 = 2; \quad 3x = -15; \quad 0,5 + \frac{x}{2} = -2,$$

têm a mesma solução. Então se dizem **equivalentes** e escreve-se:

$$x + 7 = 2 \Leftrightarrow 3x = -15, \text{ que se lê:}$$

"a equação $x + 7 = 2$ é equivalente à equação $3x = -15$ ".

$$x + 7 = 2 \Leftrightarrow 0,5 + \frac{x}{2} = -2$$

$$3x = -15 \Leftrightarrow 0,5 + \frac{x}{2} = -2.$$

EXEMPLOS

Verifique se $x = 8$ é solução das equações:

a) $6x = 48$

b) $-x - 5 = -13$

c) $2x = -\frac{1}{4}$

Resolução

a) $6x = 48$

$$6 \times 8 = 48$$

$$48 = 48 \text{ (verdadeira)}$$

b) $-x - 5 = -13$

$$-8 - 5 = -13$$

$$-13 = -13 \text{ (verdadeira)}$$

c) $2x = -\frac{1}{4}$

$$2 \times 8 = -\frac{1}{4}$$

$$16 = -\frac{1}{4} \text{ (falsa)}$$

As equações:

$$6x = 48; \quad -x - 5 = -13; \quad 2x = -\frac{1}{4},$$

não têm todas a mesma solução. Por isso, não são equações equivalentes.

EXEMPLOS

Verifique se $x = -7$ e $x = 7$ são soluções das equações:

a) $x - 7 = 0$

b) $x^2 - 49 = 0$

Resolução

a) $x - 7 = 0$

• Para $x = -7$, vem:

$$-7 - 7 = 0$$

$$-14 = 0 \text{ (falsa)}$$

• Para $x = 7$, vem:

$$7 - 7 = 0$$

$$0 = 0 \text{ (verdadeira)}$$

b) $x^2 - 49 = 0$

• Para $x = -7$ tem-se:

$$(-7)^2 - 49 = 0$$

$$49 - 49 = 0$$

$$0 = 0 \text{ (verdadeira)}$$

• Para $x = 7$, tem-se:

$$7^2 - 49 = 0$$

$$49 - 49 = 0$$

$$0 = 0 \text{ (verdadeira)}$$

As equações $x - 7 = 0$ e $x^2 - 49 = 0$ têm uma raiz comum, $x = 7$.

$x = -7$ é apenas solução da equação $x^2 - 49 = 0$. Por isso, as duas equações não possuem as mesmas soluções e portanto, não são equivalentes.

Definição: Equações com as mesmas soluções e sem também soluções.

2.1. Princípios de e

EXEMPLOS

A figura mostra uma balança

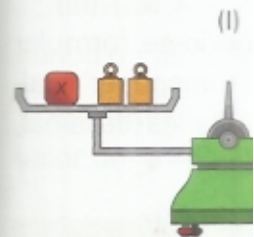
a) Observe as transições para (II).



$$x + 2 = 6$$

$$4 + 2 = 6$$

b) Repare agora, na transição de (I) para (III).



$$x + 2 = 6$$

$$4 + 2 = 6$$

Das observações:

(I) $x + 2 = 6$

(II) $x + 2 + 1 = 6 + 1$

(III) $x + 2 - 2 = 6 - 2$

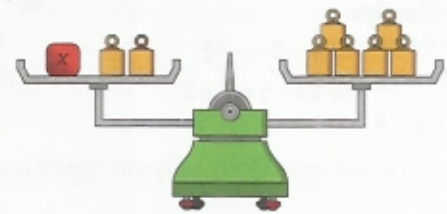
sendo portanto, e

Definição: Equações dizem-se **equivalentes** se admitem as mesmas soluções, isto é, todas as soluções de uma delas são também soluções das outras.

2.1. Princípios de equivalência

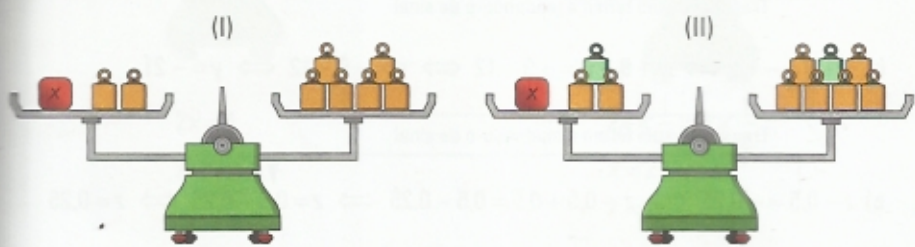
EXEMPLOS

A figura mostra uma balança em equilíbrio.



$$x + 2 = 6$$
$$4 + 2 = 6$$

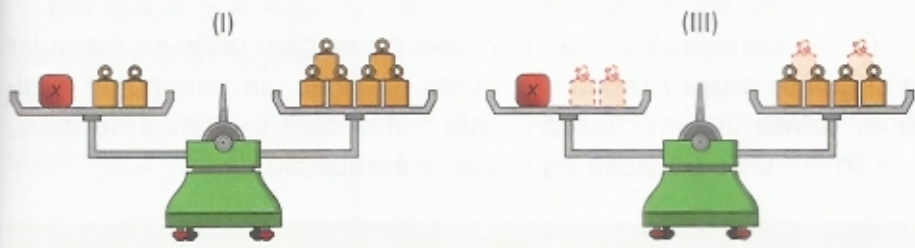
a) Observe as transformações verificadas nos pratos da balança ao passar de (I) para (II).



$$x + 2 = 6$$
$$4 + 2 = 6$$

$$x + 2 + 1 = 6 + 1$$
$$x + 3 = 7$$
$$4 + 3 = 7$$

b) Repare agora, nas transformações verificadas nos pratos da balança ao passar de (I) para (III).



$$x + 2 = 6$$
$$4 + 2 = 6$$

$$x + 2 - 2 = 6 - 2$$
$$x + 0 = 4$$
$$4 + 0 = 4$$

Das observações feitas pode-se concluir que as equações em
(I) $x + 2 = 6$
(II) $x + 2 + 1 = 6 + 1$
(III) $x + 2 - 2 = 6 - 2$, têm todas a mesma solução, $x = 4$, sendo portanto, equivalentes.

De um modo geral,

$$x + 2 = 6 \Leftrightarrow x + 2 + a = 6 + a, \text{ qualquer que seja o valor de } a.$$

1.º princípio de equivalência (Princípio de adição): Adicionando a ambos os membros de uma equação o mesmo número, obtém-se uma equação equivalente à equação dada.

EXEMPLOS

Resolva as seguintes equações:

- a) $x - 7 = 10$
- b) $y + 9 = -12$
- c) $z - 0,5 = -0,25$
- d) $2x - 5 = x + 3$
- e) $0,4 + 11y = 10y + 1,4$

Resolução

Adicionando aos dois membros o mesmo número

a) $x - 7 = 10 \Leftrightarrow x - 7 + 7 = 10 + 7 \Leftrightarrow x = 10 + 7 \Leftrightarrow x = 17$
Transpondo um termo e mudando-o de sinal

b) $y + 9 = -12 \Leftrightarrow y + 9 - 9 = -9 - 12 \Leftrightarrow y = -9 - 12 \Leftrightarrow y = -21$
Transpondo um termo e mudando-o de sinal

c) $z - 0,5 = -0,25 \Leftrightarrow z - 0,5 + 0,5 = 0,5 - 0,25 \Leftrightarrow z = 0,5 - 0,25 \Leftrightarrow z = 0,25$

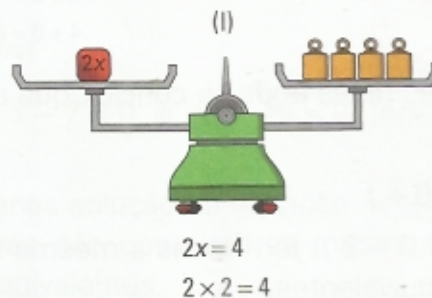
d) $2x - 5 = x + 3 \Leftrightarrow 2x - x = 5 + 3 \Leftrightarrow x = 8$
Termos com incógnitas independentes Redução dos termos semelhantes

e) $0,4 + 11y = 10y + 1,4 \Leftrightarrow 11y - 10y = 1,4 - 0,4 \Leftrightarrow y = 1$
Termos com incógnitas independentes Redução dos termos semelhantes

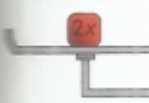
Como consequência do princípio de adição, pode-se formular a seguinte **regra prática**: se, numa equação, se transpuser qualquer termo de um membro para outro com mudança de sinal, obtém-se uma equação equivalente à equação dada.

EXEMPLOS

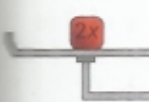
Observe novamente uma balança em equilíbrio



a) Observe para (II).



b) Repare a de (I) pa



Das obs

(I) $2x =$

(II) $(2x)$

(III) $(2x)$

sendo port

De um valor de a

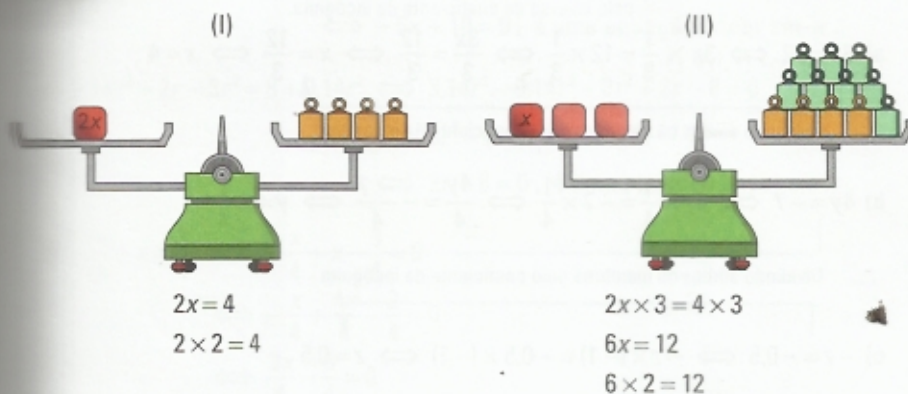
2.º prin multiplican número dif equação da

EXEMPLOS

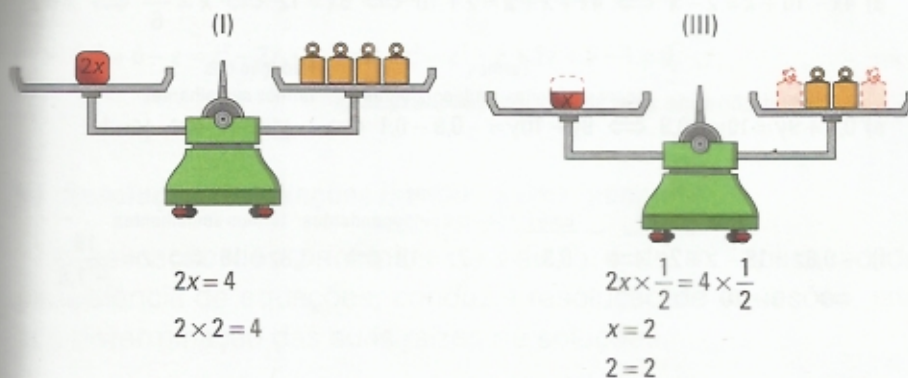
Resolva as seq

- a) $3x = 12$
- c) $-z = -0$
- e) $0,1 + 9y =$

- a) Observe as transformações verificadas nos pratos da balança ao passar de (I) para (II).



- b) Repare agora, nas transformações verificadas nos pratos da balança ao passar de (I) para (III).



Das observações feitas pode-se concluir que as equações em

(I) $2x = 4$

(II) $(2x) \times 3 = 4 \times 3$

(III) $(2x) \times \frac{1}{2} = 4 \times \frac{1}{2}$, têm todas a mesma solução, $x = 2$, sendo portanto, equivalentes.

De um modo geral, $(2x) \times a = 4 \times a$, qualquer que seja o valor de $a \neq 0$.

2.º princípio de equivalência (princípio de multiplicação): multiplicando ambos os membros de uma equação pelo mesmo número diferente de zero, obtém-se uma equação equivalente à equação dada.

EXEMPLOS

Resolva as seguintes equações.

a) $3x = 12$

b) $4y = -7$

c) $-z = -0,5$

d) $4x - 10 + x = 2 - x$

e) $0,1 + 9y = 10y - 0,9$

f) $-0,8z = 18 - z + 2z$

Resolução

Multiplicando os dois membros
pelo inverso do coeficiente da incógnita.

$$\text{a) } 3x = 12 \Leftrightarrow 3x \times \frac{1}{3} = 12 \times \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{3x}{3} = \frac{12}{3} \Leftrightarrow x = \frac{12}{3} \Leftrightarrow x = 4$$

Dividindo ambos os membros pelo coeficiente da incógnita

$$\text{b) } 4y = -7 \Leftrightarrow 4y \times \frac{1}{4} = -7 \times \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{4y}{4} = -\frac{7}{4} \Leftrightarrow y = -\frac{7}{4}$$

Dividindo ambos os membros pelo coeficiente da incógnita

$$\text{c) } -z = -0,5 \Leftrightarrow -z \times (-1) = -0,5 \times (-1) \Leftrightarrow z = 0,5$$

Termos com incógnitas independentes Redução dos termos semelhantes

$$\text{d) } 4x - 10 + x = 2 - x \Leftrightarrow 4x + x + x = 2 + 10 \Leftrightarrow 6x = 12 \Leftrightarrow x = \frac{12}{6} \Leftrightarrow x = 2$$

Termos com incógnitas independentes Redução dos termos semelhantes

$$\text{e) } 0,1 + 9y = 10y - 0,9 \Leftrightarrow 9y - 10y = -0,9 - 0,1 \Leftrightarrow -y = -1 \Leftrightarrow y = 1$$

Termos com incógnitas independentes Redução dos termos semelhantes

$$\text{f) } -0,8z = 18 - z + 2z \Leftrightarrow -0,8z + z - 2z = 18 \Leftrightarrow -1,8z = 18 \Leftrightarrow z = \frac{18}{-1,8} \Leftrightarrow z = -10$$

3. Equações lineares a uma incógnita

Os princípios de equivalência de equações permite reduzi-las a uma forma característica, chamada forma geral, típica ou canônica das equações.

Definição: chama-se equação linear ou equação do primeiro grau a uma incógnita x , a toda a equação que, pela aplicação dos princípios de equivalência pode ser reduzida à forma $ax + b = 0$, com $a \neq 0$, chamada forma canônica, típica ou geral das equações lineares a uma incógnita x .

EXEMPLOS

Das seguintes equações, indique as lineares a uma incógnita:

$$\text{a) } -4x + 1 - 3x = 2x$$

$$\text{b) } x^2 - x + 3 = 4x - 7 + x^2$$

$$\text{c) } 3,14r^2 + 2r - 3r^2 = 8 + 0,14r^2$$

$$\text{d) } -\frac{x}{4} + x = \frac{3}{4}$$

$$\text{e) } 2z^2 + 6 - z = z^2 - 2z + 1$$

Resolução

$$\text{a) } -4x + 1 - 3x = 2x \Leftrightarrow -4x - 3x - 2x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow -7x - 2x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow -9x + 1 = 0, \text{ é uma equação linear em } x.$$

$$\text{b) } x^2 - x + 3 =$$

$$\text{c) } 3,14r^2 + 2r$$

$$\text{d) } -\frac{x}{4} + x = \frac{3}{4}$$

$$\text{e) } 2z^2 + 6 - z$$

3.1. Resolução

A aplicação dos princípios de equivalência é, à determinação

De um método para resolver equações lineares a uma incógnita

- 1.º – Deslocar os termos independentes para o lado direito da equação.
- 2.º – Deslocar os termos semelhantes para o lado esquerdo da equação.
- 3.º – Juntar os termos semelhantes.
- 4.º – Efetuar as operações.
- 5.º – Obter o valor da incógnita.

EXEMPLOS

Resolva as seguintes equações:

$$\text{a) } 6x - x = 5$$

$$\text{c) } 4(x - 2) = 1$$

$$\text{e) } \frac{x - 1}{3} - \frac{10}{3}$$

$$\text{g) } \frac{2y}{5} - \frac{1}{5} = \frac{4}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } x^2 - x + 3 &= 4x - 7 + x^2 \Leftrightarrow x^2 - x^2 - x - 4x + 3 + 7 = 0 \\ &\Leftrightarrow -x - 4x + 10 = 0 \\ &\Leftrightarrow -5x + 10 = 0, \text{ é uma equação linear em } x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 3,14r^2 + 2r - 3r^2 &= 8 + 0,14r^2 \Leftrightarrow 3,14r^2 - 0,14r^2 - 3r^2 + 2r - 8 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3r^2 - 3r^2 + 2r - 8 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2r - 8 = 0, \text{ é uma equação linear em } r. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } -\frac{x}{4} + x &= \frac{3}{4} \Leftrightarrow -\frac{x}{4} + x - \frac{3}{4} = 0 \\ &\Leftrightarrow -\frac{x}{4} + \frac{4x}{4} - \frac{3}{4} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{3x}{4} - \frac{3}{4} = 0 \\ &\Leftrightarrow 3x - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow x - 1 = 0, \text{ é uma equação linear em } x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } 2z^2 + 6 - z &= z^2 - 2z + 1 \Leftrightarrow 2z^2 - z^2 - z + 2z + 6 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow z^2 + z + 5 = 0, \text{ não é uma equação linear.} \end{aligned}$$

3.1. Resolução de equações lineares a uma incógnita

A aplicação dos princípios de adição e de multiplicação de equivalência de equações, conduz à resolução de equações, isto é, à determinação das suas raízes ou soluções.

De um modo geral, qualquer equação linear pode ser resolvida pelo seguinte processo:

- 1.º – Desembaraçar de parêntesis.
- 2.º – Desembaraçar de denominadores.
- 3.º – Juntar os termos com incógnitas num dos membros e os que não têm incógnita no outro membro, utilizando o princípio de adição.
- 4.º – Efectuar os cálculos para simplificar as expressões em cada membro.
- 5.º – Obter o valor da incógnita utilizando o princípio da multiplicação.

EXEMPLOS

Resolva as seguintes equações.

a) $6x - x = 5$

b) $2x - 3 + x = x - 4x + 7$

c) $4(x - 2) - 7(x - 3) = 5 - x$

d) $\frac{7x}{3} - 4 = x - \frac{2}{3}$

e) $\frac{x-1}{3} - \frac{10-x}{2} = \frac{x-4}{3} - 1$

f) $\frac{2(z-1)}{5} + \frac{3z}{2} = \frac{z}{10}$

g) $\frac{2y}{5} - \frac{1}{5} \left(\frac{4y}{3} - 4 \right) = y + \frac{7}{5}$

Resolução

$$a) 6x - x = 5 \Leftrightarrow 5x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{5} \Leftrightarrow x = 1$$

$$b) 2x - 3 + x = x - 4x + 7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x + x - x + 4x = 7 + 3$$

$$\Leftrightarrow 3x - x + 4x = 10$$

$$\Leftrightarrow 2x + 4x = 10$$

$$\Leftrightarrow 6x = 10$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{10}{6}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$$

$$c) 4(x - 2) - 7(x - 3) = 5 - x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x - 8 - 7x + 21 = 5 - x$$

$$\Leftrightarrow 4x - 7x + x = 5 + 8 - 21$$

$$\Leftrightarrow -3x + x = 13 - 21$$

$$\Leftrightarrow -2x = -8$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-8}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = 4$$

$$d) \frac{7x}{3} - 4 = x - \frac{2}{3} \Leftrightarrow 7x - 12 = 3x - 2$$

$$(1) \quad (3) \quad (3) \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow 7x - 3x = -2 + 12$$

$$\Leftrightarrow 4x = 10$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{10}{4} \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$$

$$e) \frac{x-1}{3} - \frac{10-x}{2} = \frac{x-4}{3} - 1 \Leftrightarrow$$

$$(2) \quad (3) \quad (2) \quad (6)$$

$$\Leftrightarrow 2(x-1) - 3(10-x) = 2(x-4) - 6$$

$$\Leftrightarrow 2x - 2 - 30 + 3x = 2x - 8 - 6$$

$$\Leftrightarrow 2x + 3x - 2x = -8 - 6 + 2 + 30$$

$$\Leftrightarrow 5x - 2x = -14 + 2 + 30$$

$$\Leftrightarrow 3x = -12 + 30$$

$$\Leftrightarrow 3x = 18$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{18}{3} \Leftrightarrow x = 6$$

m.m.c. (3, 2) = 6

$$f) \frac{2(z-1)}{5} + \frac{3z}{2} = \frac{z}{10} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2z-2}{5} + \frac{3z}{2} = \frac{z}{10} \Leftrightarrow$$

$$(2) \quad (5) \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow 2(2z-2) + 15z = z$$

$$\Leftrightarrow 4z - 4 + 15z = z$$

$$\Leftrightarrow 4z + 15z - z = 4$$

$$\Leftrightarrow 19z - z = 4$$

$$\Leftrightarrow 18z = 4$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{4}{18} \Leftrightarrow z = \frac{2}{9}$$

m.m.c. (5, 2, 10) = 10

$$g) \frac{2y}{5} - \frac{1}{5} \left(\frac{4}{3} \right) \Leftrightarrow \frac{2y}{5} - \frac{4}{15} \Leftrightarrow 6y - 4 \Leftrightarrow 6y \Leftrightarrow 2y - 1 \Leftrightarrow -13y \Leftrightarrow y = \dots$$

4. Classifica

Atendend
res a uma i
impossíveis
terminadas.

EXEMPLOS

Resolva e classifi

a) $2(3y - 4) = 1$

Resolução

a) $2(3y - 4) = 1$

Observe que nã
é o elemento a
não tem soluçã

Definição:

solução.

O conjunto
vazio, \emptyset ou

b) $5z - 2 = 5(z - 1)$

Qualquer valor
número é zero.

A equação $5z = 5(z - 1)$
uma equação p

Definição:

quando tem u

$$\begin{aligned}
 \text{g)} \quad \frac{2y}{5} - \frac{1}{5} \left(\frac{4y}{3} - 4 \right) &= y + \frac{7}{5} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \frac{2y}{5} - \frac{4y}{15} + \frac{4}{5} &= y + \frac{7}{5} & \left. \begin{array}{l} \text{m.m.c. (5, 2, 10) = 10} \\ \text{(3)} \quad \text{(1)} \quad \text{(3)} \quad \text{(15)} \quad \text{(3)} \end{array} \right\} \\
 \Leftrightarrow 6y - 4y + 12 &= 15y + 21 \\
 \Leftrightarrow 6y - 4y - 15y &= 21 - 12 \\
 \Leftrightarrow 2y - 15y &= 9 \\
 \Leftrightarrow -13y &= 9 \\
 \Leftrightarrow y = \frac{9}{-13} &\Leftrightarrow y = -\frac{9}{13}
 \end{aligned}$$

4 Classificação de equações

Atendendo à existência ou não de solução, as equações lineares a uma incógnita podem ser classificadas em equações impossíveis, possíveis e determinadas ou possíveis e indeterminadas.

EXEMPLOS

Resolva e classifique cada uma das seguintes equações:

$$\text{a) } 2(3y - 4) = 6y + 1 \qquad \text{b) } 5z - 2 = 5(z + 1) - 7 \qquad \text{c) } 2x - 5x = 3 + x$$

Resolução

$$\text{a) } 2(3y - 4) = 6y + 1 \Leftrightarrow 6y - 8 = 6y + 1 \Leftrightarrow 6y - 6y = 8 + 1 \Leftrightarrow 0y = 9$$

Observe que não há nenhum número y que multiplicado por zero seja igual a 9 (zero é o elemento absorvente da multiplicação). Por isso, a equação $2(3y - 4) = 6y + 1$ não tem solução; é uma equação impossível.

Definição: uma equação diz-se impossível quando não tem solução.

O conjunto-solução de uma equação impossível é o conjunto vazio, \emptyset ou $\{\}$.

$$\begin{aligned}
 \text{b) } 5z - 2 = 5(z + 1) - 7 &\Leftrightarrow 5z - 2 = 5z + 5 - 7 \Leftrightarrow 5z - 5z = 5 - 7 + 2 \\
 &\Leftrightarrow 0z = -2 + 2 \Leftrightarrow 0z = 0
 \end{aligned}$$

Qualquer valor de z é solução da equação pois, o produto de zero por qualquer número é zero.

A equação $5z - 2 = 5(z + 1) - 7$ tem um número infinito de soluções, ou seja, é uma equação possível e indeterminada.

Definição: uma equação diz-se possível e indeterminada quando tem uma infinidade de soluções.

$$c) 2x - 5x = 3 + x \Leftrightarrow 2x - 5x - x = 3 \Leftrightarrow -3x - x = 3 \Leftrightarrow -4x = 3$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{-4} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{4}$$

A solução da equação dada é possível e determinada (única).

A equação $2x - 5x = 3 + x$ é possível e determinada.

Definição: uma equação diz-se possível e determinada se tem um número finito de soluções.

Exercício n.º 1

1. Verifique se:

a) $x = 1$ é raiz da equação $2x + 1 = 3$

b) $x = -1$ é solução da equação $-x + 2 = 2x + 3$

c) $x = 3$ é solução da equação $x + 2 + 2x = x - 3x - 13$

d) $x = \frac{3}{4}$ é raiz da equação $4x + 1 = 8x - 2$

e) $x = 0$ é raiz da equação $(x - 1)^2 + (x - 1)(x + 1) = 4$

2. Verifique se os pares de equações seguintes são equivalentes e justifique a resposta.

a) $3x + 1 = \frac{x - 3}{2}$ e $2x + 1 = -1$

b) $2x + 3 = 2x + 1$ e $2x + 3 = 2\left(x + \frac{3}{2}\right)$

c) $x + 1 = \frac{x}{2} + 3$ e $x + 2 = 6$

3. Resolva as seguintes equações.

a) $2x = 12$

b) $x - 1 = 4$

c) $3x + 3 = x - 2$

d) $2x - 1 = x + 3 - 4x$

e) $\frac{x}{2} - 1 = \frac{x}{3} + 2x + 4$

f) $\frac{x}{2} - \frac{x - 1}{3} = x + \frac{1}{2}$

g) $\frac{x - 2}{3} + \frac{x}{6} = x - \frac{x + 2}{3} + 1$

h) $\frac{2x - 1}{3} - 2 = 6x - \frac{x - 2}{3}$

i) $\frac{2x}{5} - \frac{1}{6}\left(\frac{4x}{3} - 4\right) = x + \frac{7}{5}$

j) $x + 3\left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}$

l) $\frac{3}{2}\left(x - \frac{1}{3}\right) - 5\left(\frac{x}{3} - \frac{2}{5}\right) = \frac{1}{4}$

m) $-20 + 7x = 4(x - 5) + 3x$

n) $\frac{3x}{4} + \frac{1}{2} = \frac{6x - 1}{8}$

o) $1,2y - 0,4 - y + y^2 = 0,2y + y^2$

5. Equações literais

Uma equação literal é uma equação que contém mais do que uma variável. Por exemplo $3x + 2y = 20$; $P = 2\pi r$ e $A = \frac{B + b}{2} \times h$, são equações literais porque têm duas ou mais variáveis.

Resolver uma equação literal em ordem a uma variável significa considerar, na resolução, essa letra como a incógnita.

EXEMPLOS

1. Resolva em ordem a x a equação $3x + 2y = 20$.

Resolução

$$3x + 2y = 20 \Leftrightarrow 3x = 20 - 2y \Leftrightarrow x = \frac{20 - 2y}{3}$$

2. Resolva

Resolução

$$P = 2\pi r$$

3. Resolva

Resolução

$$A = \frac{B + b}{2}$$

Exercício

1. Resolva

2. Resolva

a) em c

3. Resolva

4. Resolva

a) em c

6. Probl

Para
siderada

1. De

2. Fo

3. Re

4. An

5. Fo

ca

EXEMPL

1. Qual é c

Resoluçã

Seja x

$$x + 10 =$$

Respos

2. A soma

Quais s

Resoluçã

Sejam

$$x + (x +$$

Respos

Resolva em ordem a r a equação $P = 2\pi r$.

Resolução

$$P = 2\pi r \Leftrightarrow 2\pi r = P \Leftrightarrow r = \frac{P}{2\pi}$$

Resolva em ordem a b a equação $A = \frac{B+b}{2} \times h$.

Resolução

$$A = \frac{B+b}{2} \times h \Leftrightarrow 2A = (B+b)h \Leftrightarrow \frac{2A}{h} = B+b \Leftrightarrow \frac{2A}{h} - B = b \Leftrightarrow b = \frac{2A - Bh}{h}$$

Exercício n.º 2

1. Resolva a equação $e = vt$
2. Resolva em ordem a a a equação $\frac{a-b}{3} = a + \frac{b}{2}$
 - a) em ordem a v .
 - b) em ordem a t .
3. Resolva a equação $Q = mc(t - t_0)$ em ordem a t .
4. Resolva a equação $\frac{C}{5} = \frac{F-32}{9}$
 - a) em ordem a C .
 - b) em ordem a F .

6. Problemas do primeiro grau a uma incógnita

Para resolver um problema usando equações podem ser consideradas as seguintes fases:

1. Definição por escrito do significado da variável (incógnita).
2. Formação da equação que traduz o problema.
3. Resolução da equação.
4. Análise da solução em relação à definição da incógnita.
5. Formulação da resposta em harmonia com a questão colocada no problema.

EXEMPLOS

1. Qual é o número que adicionado a 10 unidades é igual a 22?

Resolução

Seja x o número.

$$x + 10 = 22 \Leftrightarrow x = 22 - 10 \Leftrightarrow x = 12$$

Resposta: O número é 12.

2. A soma de dois números inteiros consecutivos é 35. Quais são esses números?

Resolução

Sejam x e $x+1$ os números.

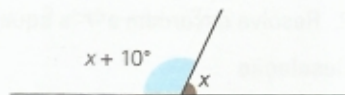
$$x + (x+1) = 35 \Leftrightarrow x + x + 1 = 35 \Leftrightarrow 2x + 1 = 35 \Leftrightarrow 2x = 35 - 1$$

$$\Leftrightarrow 2x = 34 \Leftrightarrow x = \frac{34}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 17$$

Resposta: Os números são 17 e 18.

3. Determine a medida do ângulo x , de acordo com a figura.

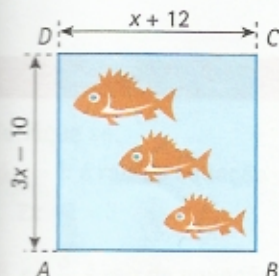


Resolução

$$x + 10^\circ + x = 180^\circ \Leftrightarrow x + x = 180^\circ - 10^\circ$$

$$\Leftrightarrow 2x = 170^\circ \Leftrightarrow x = \frac{170^\circ}{2} \Leftrightarrow x = 85^\circ$$

Resposta: O ângulo x mede 85° .



4. Calcule o valor numérico do perímetro do quadrado $[ABCD]$, dado na figura (considere as medidas em centímetros).

Resolução

$$3x - 10 = x + 12 \Leftrightarrow 3x - x = 12 + 10$$

$$\Leftrightarrow 2x = 22$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{22}{2} \Leftrightarrow x = 11$$

o lado do quadrado mede $\ell = 3 \times 11 - 10 = 11 + 12 = 23$

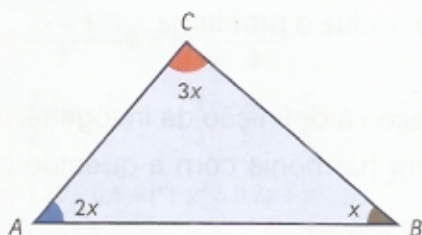
O perímetro é $P = 4\ell$

$$P = 4 \times 23 = 92$$

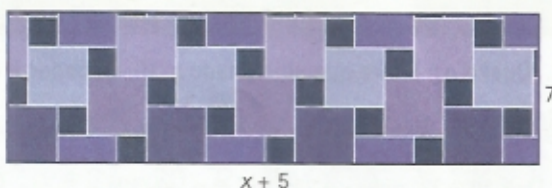
O perímetro é de 92 cm.

Exercício n.º 3

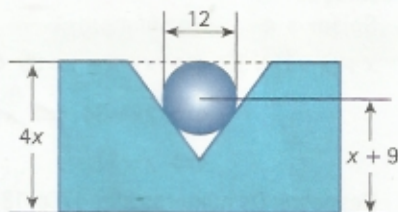
- Qual é o número que acumulado ao seu triplo é igual a 48?
- Calcule três números pares consecutivos cuja soma é 24.
- Determine a medida dos ângulos internos do triângulo da figura.



- Um retângulo tem a área de 98 cm^2 e os lados têm as medidas indicadas na figura. Determine o valor de x e a medida do comprimento.



- Três tractoristas lavraram num dia 8,4 hectares de terra. O primeiro lavrou 0,8 hectares a mais do que o segundo e o segundo lavrou 0,5 hectares a mais do que o terceiro. Quantos hectares lavrou cada um?
- Num triângulo de vértices A , B e C , o $\sphericalangle ABC$ é o dobro do $\sphericalangle BAC$ e o ângulo de vértice em C é o triplo do ângulo de vértice em A . Calcule a medida de cada um desses ângulos.
- Observe a figura ao lado e determine o valor de x .



1. Dos n

a) $2y$

b) $\frac{7}{2}$

2. Resol

a) $5(-$

b) $8x$

c) $2x$

d) $\frac{y}{2}$

3. Resol

$C = C$

4. A figu

centí

a) De

b) Ca

1. Dos números -3 , $\frac{1}{4}$ e $0,6$, verifique qual deles é solução de:

a) $2y + \frac{1}{10} = -\frac{11}{10}$

b) $\frac{7}{2} - \frac{x}{2} = 5$

2. Resolva as seguintes equações:

a) $5(x - 3) = 9(x - 1) - 26$

b) $8x - 2 = -(-3x - 5x)$

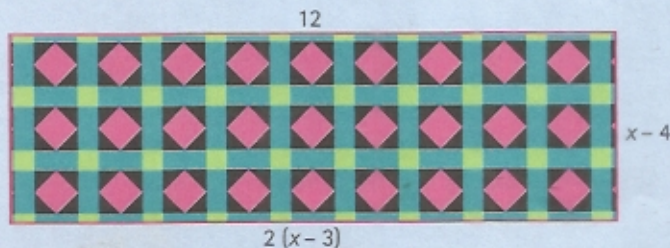
c) $2x - \left(7 + \frac{5 - 2x}{2}\right) = 2x - 11$

d) $\frac{y - 1}{3} - \frac{y - 1}{4} = -\frac{1 - y}{12}$

3. Resolva a equação

$C = C_0(1 + at)$ em ordem a t .

4. A figura representa um rectângulo (as medidas dos lados são em centímetros)



a) Determine x .

b) Calcule o perímetro do rectângulo.

III

PROPORCIONALIDADE E FUNÇÕES LINEARES

1.
COORDENADAS CARTESIANAS

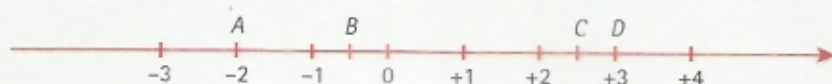
2.
PROPORCIONALIDADE

3.
FUNÇÕES LINEARES

1

COORDENADAS CARTESIANAS

Numa recta, a cada ponto corresponde a um número e a cada número corresponde um ponto na recta. Por exemplo:



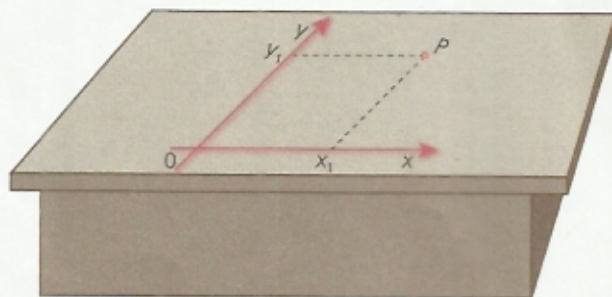
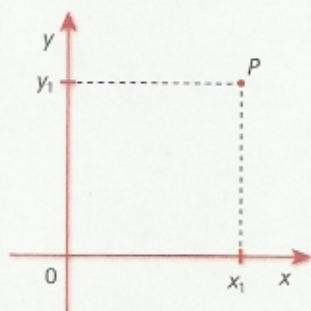
$$A \curvearrowright -2 \quad B \curvearrowright -\frac{1}{2} \quad C \curvearrowright \frac{5}{2} \quad D \curvearrowright +3$$

Se um ponto não se situa numa recta mas num plano, o plano de um tampo da mesa, por exemplo, ao ponto corresponderá não um único número, mas um par de números. Essa correspondência será feita do seguinte modo:

Primeiro fixa-se uma recta x no plano, que deve ser orientada e graduada. Esta recta será chamada **eixo x** ou **eixo das abcissas**.

Seja agora y a recta graduada e orientada perpendicular ao eixo x , que passa pelo ponto de coordenadas zero (origem).

Sobre o eixo y fixa-se um sistema de coordenadas de tal modo que o ponto zero (origem) de y coincida com o ponto zero de x . A recta y será chamada **eixo y** ou **eixo das ordenadas**.

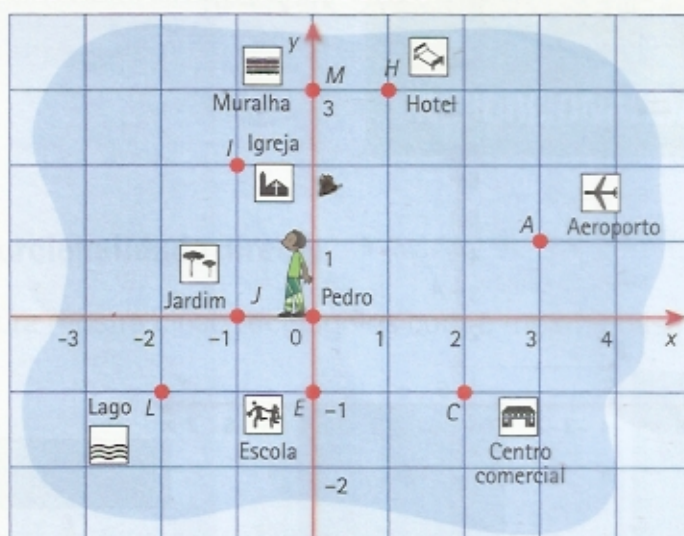


Pode-se, agora, representar o ponto P do plano da mesa por um par de números da seguinte maneira: a coordenada x_1 ou **abscissa do ponto P** é a coordenada, no eixo x , do pé da perpendicular a este eixo, que passa por P e a coordenada y_1 , ou **ordenada de P** é a coordenada, no eixo y , do pé da perpendicular a este eixo, que passa por P . A representação do ponto P será $P(x_1, y_1)$.

A um conjunto de rectas orientadas assim definido, chama-se **sistema cartesiano ortogonal**.

EXEMPLO:

1. A figura mostra diferentes locais de uma cidade.



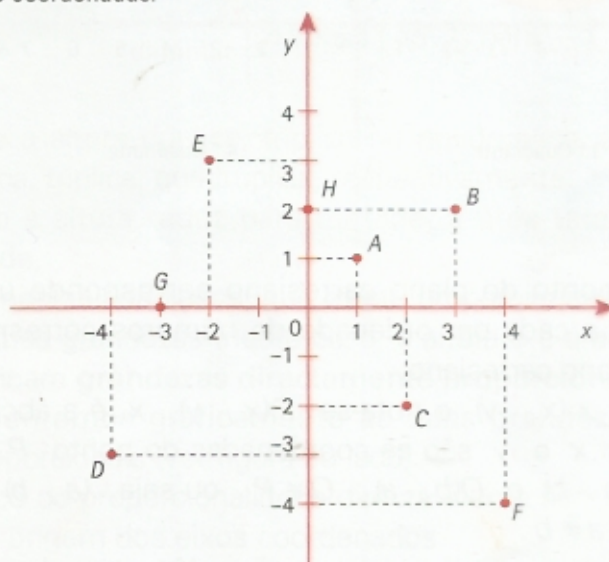
Indique as coordenadas de cada local, bem como as da localização do Pedro.

Resolução

1. Muralha: $M \rightarrow (0, 3)$ Hotel: $H \rightarrow (1, 3)$
 Igreja: $I \rightarrow (-1, 2)$ Aeroporto: $A \rightarrow (3, 1)$
 Pedro: $D \rightarrow (0, 0)$ Jardim: $J \rightarrow (-1, 0)$
 Lago: $L \rightarrow (-2, -1)$ Escola: $E \rightarrow (0, -1)$
 Centro comercial: $C \rightarrow (2, -1)$

Observe que o hotel: $H \rightarrow (1, 3)$ e o Aeroporto: $A \rightarrow (3, 1)$, bem como o jardim: $J \rightarrow (-1, 0)$ e a escola: $E \rightarrow (0, -1)$ não se localizam no mesmo sítio. Por isso, $(1, 3) \neq (3, 1)$ e $(-1, 0) \neq (0, -1)$

2. Escreva as coordenadas correspondentes a cada um dos pontos representados no sistema de coordenadas.



Resolução

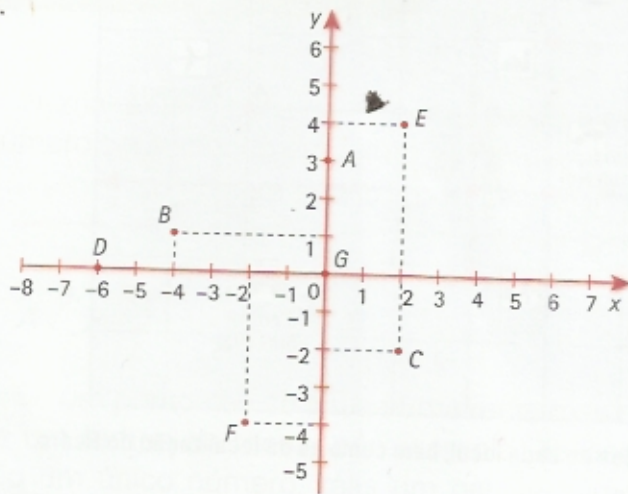
2. $A \rightarrow (1, 1)$; $B \rightarrow (3, 2)$; $C \rightarrow (2, -2)$; $D \rightarrow (-4, -3)$; $E \rightarrow (-2, 3)$;
 $F \rightarrow (4, -4)$; $G \rightarrow (-3, 0)$; $H \rightarrow (0, 2)$

3. Marque, num sistema cartesiano ortogonal, os pontos.

- $A \curvearrowright (0, 3)$; $B \curvearrowright (-4, 1)$; $C \curvearrowright (2, -2)$;
 $D \curvearrowright (-6, 0)$; $E \curvearrowright (2, 4)$; $F \curvearrowright (-2, -4)$;
 $G \curvearrowright (0, 0)$

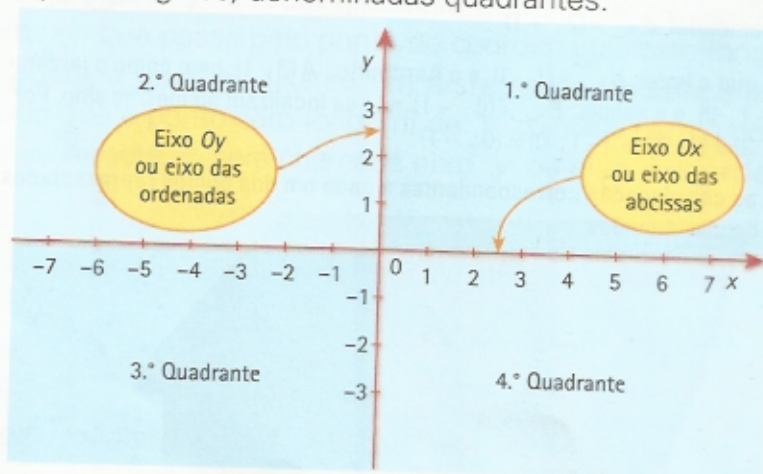
Resolução

3.



1. Quadrantes

O eixo das abscissas e o eixo das ordenadas dividem o plano em quatro regiões, denominadas quadrantes.



A cada ponto do plano cartesiano corresponde um par de números e a cada par ordenado de números corresponde um ponto no plano cartesiano.

Se $P \curvearrowright (x, y)$ e nota-se $P(x, y)$, x é a abscissa, y a ordenada e x e y são as coordenadas do ponto P . Observe que se $P(a, b)$ e $Q(b, a)$, $Q \neq P$, ou seja, $(a, b) \neq (b, a)$, desde que $a \neq b$.

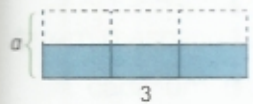
Os pontos que pertencem aos eixos têm uma das coordenadas nula. Os pontos do eixo das abscissas têm ordenada nula; os pontos do eixo das ordenadas têm abscissa nula.

1. Proporcionali

A figura mostra



Se a altura, a , aumentar... $\left\{ \begin{array}{l} 2 \text{ ve} \\ 3 \text{ ve} \\ 4 \text{ ve} \\ n \text{ v} \end{array} \right.$



Quando a altura
bém duplica, tripli
Quando a altura
para metade.

Diz-se, nestas
entre as duas gra
se denominam gr

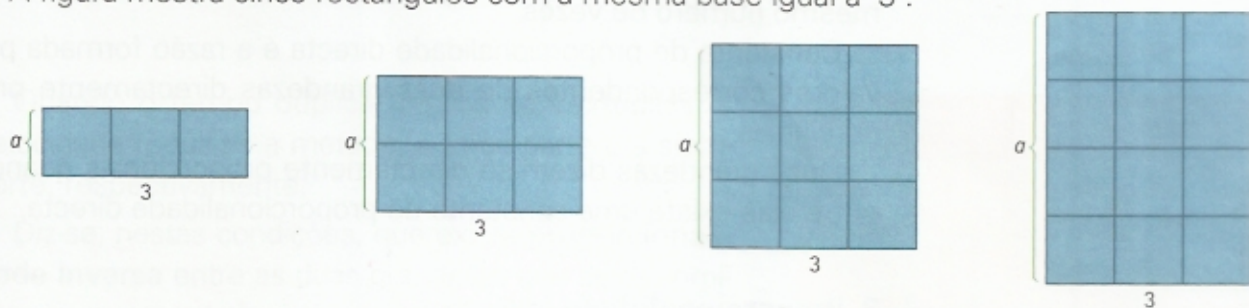
Representem
mente proporcion

O gráfico da pr
origem na origem

Observe que
tes por exprimere

1. Proporcionalidade directa

A figura mostra cinco rectângulos com a mesma base igual a 3.



Se a altura, a , aumentar... $\left\{ \begin{array}{l} 2 \text{ vezes (de 1 para 2)} \\ 3 \text{ vezes (de 1 para 3)} \\ 4 \text{ vezes (de 1 para 4)} \\ n \text{ vezes (de 1 para } n) \end{array} \right\}$ a área, A , também aumenta $\left\{ \begin{array}{l} 2 \text{ vezes (de 3 para 6)} \\ 3 \text{ vezes (de 3 para 9)} \\ 4 \text{ vezes (de 3 para 12)} \\ n \text{ vezes (de 3 para } 3n) \end{array} \right.$

Altura a	Área $A = b \times a$
1	3
2	6
3	9
4	12
...	...
n	$3n$

Se a altura, a , diminuir $\left\{ \begin{array}{l} 2 \text{ vezes (de 1 para } 0,5) \\ n \text{ vezes (de 1 para } \frac{1}{n}) \end{array} \right\}$ a área, A , também diminui $\left\{ \begin{array}{l} 2 \text{ vezes (de 3 para } 1,5) \\ n \text{ vezes (de 3 para } \frac{1}{n}) \end{array} \right.$

Quando a altura duplica, triplica ou quadruplica, a área também duplica, triplica, quadruplica, respectivamente.

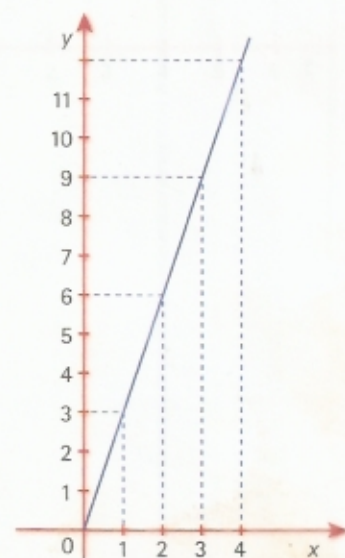
Quando a altura reduz para metade, a área também reduz para metade.

Diz-se, nestas condições, que existe proporcionalidade directa entre as duas grandezas (neste caso, a altura e a área), as quais se denominam **grandezas directamente proporcionais**.

Representemos graficamente as duas grandezas directamente proporcionais (ver figura ao lado).

O gráfico da proporcionalidade directa é uma semi-recta, com origem na origem dos eixos coordenados.

Observe que $\frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{9}{3} = \frac{12}{4} = \dots = 3$, são razões constantes por exprimirem o valor do comprimento da base (fixo).



Também são constantes as razões $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12} = \dots = \frac{1}{3}$ por exprimirem o inverso do comprimento da base.

A cada uma das razões dá-se o nome de **constante de proporcionalidade directa**.

Conclusão:

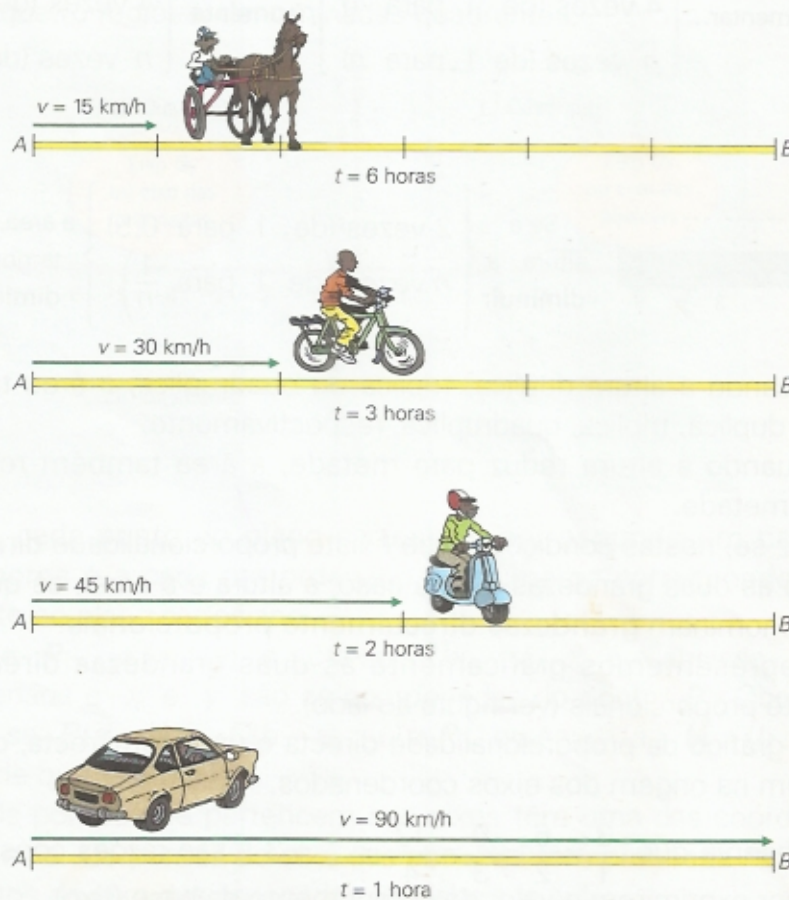
Entre duas grandezas há proporcionalidade directa quando, aumentando ou diminuindo o valor de uma delas certo número de vezes, o valor da outra aumenta ou diminui, também, o mesmo número de vezes.

Constante de proporcionalidade directa é a razão formada por valores correspondentes de duas grandezas directamente proporcionais.

Dois grandezas dizem-se directamente proporcionais quando entre elas existe uma constante de proporcionalidade directa.

2. Proporcionalidade inversa

A figura representa quatro veículos que percorreram o mesmo espaço, a velocidades (v) e em tempos (t) diferentes.



Se o temp
aumentar

Se o temp
diminuir

Quando
velocidade
parte, resp

Diz-se, r
dade inver
nam invers

Represent
inversamen

A propo
curva chan

Observe
des pelos 1

$9 \times 1 = 4$
tarem o es

A cada
constante

Conclus:

Entre d
aumentan
de vezes,
também, c

Dois g
quando en

Constan
correspon

Dois g
quando en

$$\text{Se o tempo aumentar } \left\{ \begin{array}{l} 2 \text{ vezes (de 1 para 2)} \\ 3 \text{ vezes (de 1 para 3)} \\ 6 \text{ vezes (de 1 para 6)} \\ n \text{ vezes (de 1 para } n) \end{array} \right\} \text{ a velocidade diminui } \left\{ \begin{array}{l} 2 \text{ vezes (de 90 para 45)} \\ 3 \text{ vezes (de 90 para 30)} \\ 6 \text{ vezes (de 90 para 15)} \\ n \text{ vezes (de 90 para } \frac{90}{n}) \end{array} \right.$$

$$\text{Se o tempo diminuir } \left\{ \begin{array}{l} 2 \text{ vezes (de 1 para 0,5)} \\ n \text{ vezes (de 1 para } \frac{1}{n}) \end{array} \right\} \text{ a velocidade aumenta } \left\{ \begin{array}{l} 2 \text{ vezes (de 90 para 180)} \\ n \text{ vezes (de 90 para } 90n) \end{array} \right.$$

Quando o tempo duplica, triplica ou sextuplica, a velocidade reduz-se a metade, à terça parte e à sexta parte, respectivamente.

Diz-se, nestas condições, que existe **proporcionalidade inversa** entre as duas grandezas que se denominam inversamente proporcionais.

Representemos graficamente as duas grandezas inversamente proporcionais.

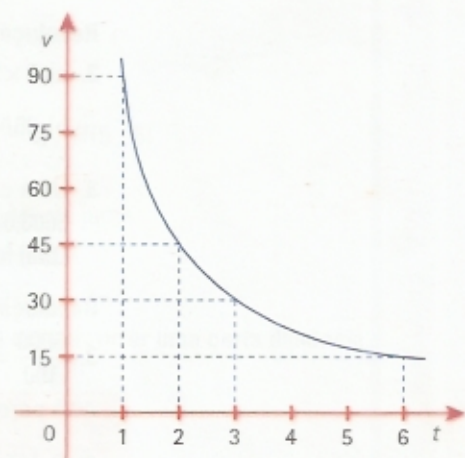
Tempo t	Velocidade v
1	90
2	45
3	30
6	15
...	...
n	$\frac{90}{n}$

A proporcionalidade inversa é expressa por uma curva chamada **hipérbole**.

Observe que são iguais os produtos das velocidades pelos tempos correspondentes.

$9 \times 1 = 45 \times 2 = 30 \times 3 = 15 \times 6 = 90$, por representarem o espaço total percorrido.

A cada um dos produtos assim obtidos chama-se **constante de proporcionalidade inversa**.



Conclusão:

Entre duas grandezas há proporcionalidade inversa quando, aumentando ou diminuindo o valor de uma delas certo número de vezes, o valor da outra diminui ou aumenta, respectivamente, também, o mesmo número de vezes.

Dois grandezas denominam-se inversamente proporcionais quando entre elas existe proporcionalidade inversa.

Constante de proporcionalidade inversa é o produto de valores correspondentes de duas grandezas inversamente proporcionais.

Dois grandezas denominam-se inversamente proporcionais quando entre elas existe proporcionalidade inversa.

EXEMPLO:

1. As grandezas referidas na tabela são directamente proporcionais.

Número de CD	2	5	b	7
Custo em meticals	150	a	750	525

- a) Calcule a constante de proporcionalidade.
b) Determine os valores de a e b .

Resolução

$$1. a) \frac{2}{150} = \frac{7}{525} = \frac{1}{75} \text{ ou } \frac{150}{2} = \frac{525}{7} = 75$$

$$b) \frac{a}{5} = \frac{150}{2} \Leftrightarrow a = \frac{150}{2} \times 5 \Leftrightarrow a = 375$$

$$\frac{b}{750} = \frac{7}{525} \Leftrightarrow b = \frac{7}{525} \times 750 \Leftrightarrow b = 10$$

2. Na tabela seguinte estão representadas duas grandezas inversamente proporcionais.

A	9	45	b	3
B	20	a	36	60

Determine:

- a) a constante de proporcionalidade;
b) os valores de a e b .

Resolução

$$2. a) 9 \times 20 = 3 \times 60 = 180$$

$$b) 36b = 180 \Leftrightarrow b = \frac{180}{36} \Leftrightarrow b = 5 \Leftrightarrow 45a = 180 \Leftrightarrow a = \frac{180}{45} \Leftrightarrow a = 4$$

3. Uma casa comercial comprou uma mercadoria por 5000,00 Mt e vendeu-a por 5600,00 Mt.
Qual foi a percentagem de lucro sobre o preço de compra?

Resolução

$$3. \frac{5000}{100} = \frac{600}{x} \Leftrightarrow 5000x = 600 \times 100 \Leftrightarrow x = 600 \times \frac{100}{5000} \Leftrightarrow x = 12$$

A percentagem de lucro foi de 12%.

4. O João fez oito chamadas telefónicas, de custo fixo, por 144,00 Mt.
Quanto gastaria se fizesse 17 chamadas?

Resolução

$$4. \frac{8}{144} = \frac{17}{x} \Leftrightarrow 8x = 144 \times 17 \Leftrightarrow x = 144 \times \frac{17}{8} \Leftrightarrow x = 306$$

Gastaria 306,00 Mt.

5. O senhor Ananias faz tapetes de sisal. Trabalhando três horas por dia, demora quatro semanas a fazer um tapete. Mas a próxima encomenda é daqui a três semanas.
Quantas horas por dia deverá trabalhar para entregar o tapete dentro do prazo?

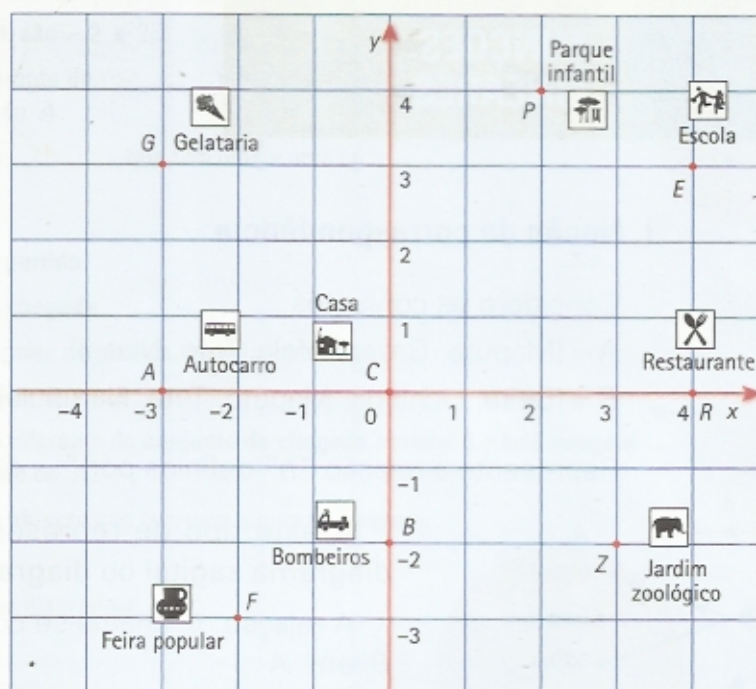
Resolução

$$5. 3x = 3 \times 4 \Leftrightarrow x = \frac{3 \times 4}{3} \Leftrightarrow x = 4$$

Deverá trabalhar 4 horas por dia.

Exercício n.º 1

1. O Paulo tem 6 anos. Os lugares que lhe são familiares estão assinalados na figura.



Indique as coordenadas dos pontos correspondentes.

2. Num sistema cartesiano ortogonal, represente os pontos.
 $A(3, 0)$; $B(0, 3)$; $C(-3, 0)$; $D(0, -3)$; $E(4, -2)$; $F(-4, 2)$; $G(-5, -6)$; $H(5, 6)$.
3. A Luísa depositou 600,00 Mt num banco e ao fim de um ano obteve 24,00 Mt de juros. Quanto obteria de juros se tivesse depositado 800,00 Mt?
4. O quadro representa as velocidades de um automóvel e os tempos gastos em percorrer uma certa distância.

Velocidade (km/h)	45	30	90	20
Tempo (h)	4	6	2	9

- a) Determine se há proporcionalidade entre as velocidades e os tempos respectivos.
- b) É directa ou inversa a proporcionalidade anterior?
- c) Qual é a constante de proporcionalidade?
- d) Se a velocidade do automóvel for 60 km/h, quantas horas levará a percorrer o citado caminho?
5. No transporte de cachos de bananas, com o peso total de 250 kg, houve uma quebra (apodreceram) de 2,5%. Quantos quilos de bananas se puderam vender, ainda, em boas condições?
6. Para se encher um depósito, tem de se utilizar 40 vezes um balde de 15 litros. Se o balde fosse de 20 litros, quantas vezes seria necessário utilizá-lo?

3

FUNÇÕES LINEARES

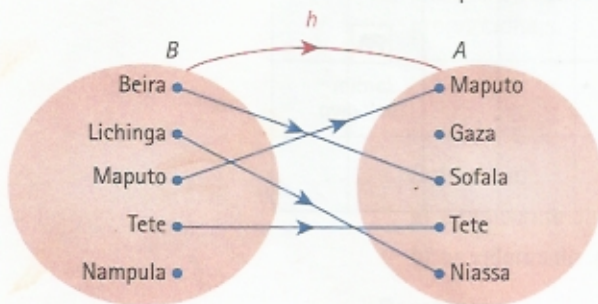
1. Noção de correspondência

Considere os conjuntos

$A = \{\text{Maputo, Gaza, Sofala, Tete, Niassa}\}$

$B = \{\text{Beira, Lichinga, Maputo, Tete, Nampula}\}$

Represente a relação " h " definida por "... é capital de ..."



A este tipo de representação chama-se **diagrama sagital** ou **diagrama de setas**.

A relação h chama-se correspondência de B em A .

B é o conjunto de partida.

A é o conjunto de chegada.

Os elementos de B que estão em correspondência com algum elemento do conjunto A chamam-se **objectos**, e o conjunto dos objectos é o **domínio**, geralmente representado pela letra D .

Tem-se, então, $D_h = \{\text{Beira, Lichinga, Maputo, Tete}\}$, onde D_h designa o domínio da relação h .

Os elementos de A que estão em correspondência com algum de B chamam-se **imagens** e o conjunto das imagens é o **contradomínio**.

Tem-se, então:

$CD_h = \{\text{Maputo, Sofala, Tete, Niassa}\}$

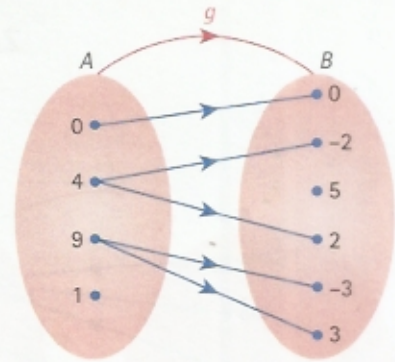
onde CD_h , designa o contradomínio da relação h , que também se pode representar por D'_h .

EXEMPLO:

1. Considere a correspondência seguinte e preencha os espaços em branco, utilizando as expressões:

- conjunto de partida;
- domínio;
- objecto(s);
- conjunto de chegada;
- contradomínio;
- imagem(ns).

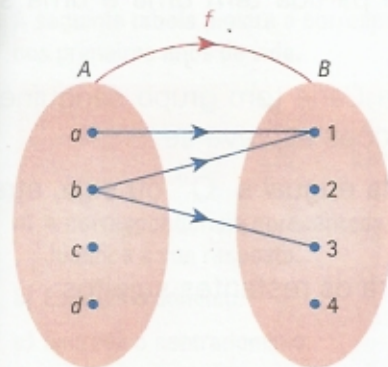
- a) A é o _____.
- b) B é o _____.
- c) 1 pertence ao _____ mas não é _____.
- d) As _____ de 4 são -2 e 2 .
- e) O _____ é diferente do _____ porque 5 não é _____ de nenhum elemento de A .
- f) O zero (0) é o único _____ que tem uma e uma só _____.



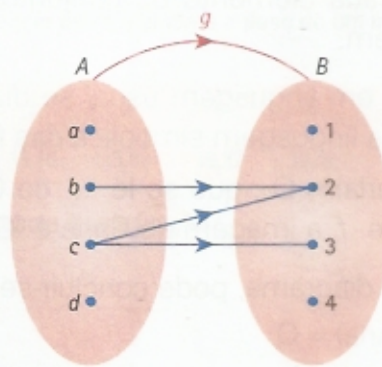
Resolução

1. a) A é o **conjunto de partida**.
- b) B é o **conjunto de chegada**.
- c) 1 pertence ao **conjunto de partida** mas não é **objecto**.
- d) As **imagens** de 4 são 2 e -2 .
- e) O **contradomínio** é diferente do **conjunto de chegada** porque 5 não é **imagem** de nenhum elemento de A .
- f) O zero (0) é o único **objecto** que tem uma e uma só **imagem**.

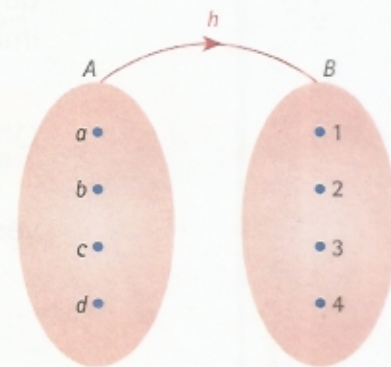
2. Complete os seguintes diagramas.



$D_f = \{a, b, c\}$
 $CD_f = \{1, 2, 3\}$



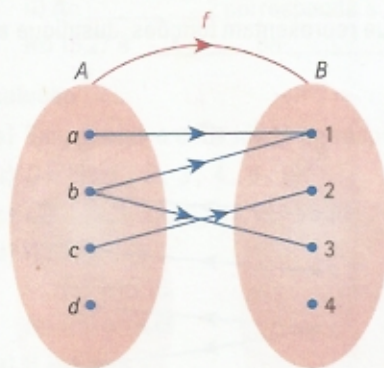
$D_g = A$
 $D'_g = \{2, 3\}$



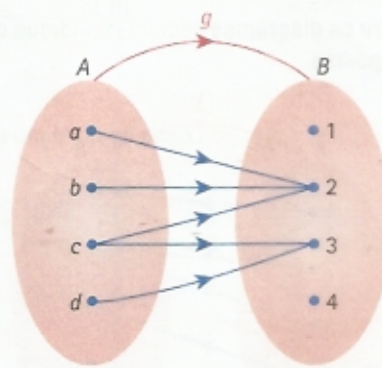
$D_h = \{c\}$
 $D'_h = B$

Resolução

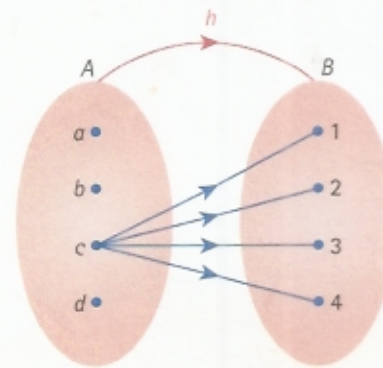
2. a)



b)



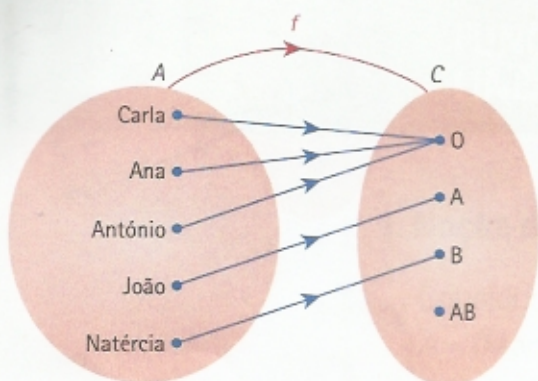
c)



(Esta é uma das soluções. Encontre as outras soluções. Compare com as dos seus colegas).

2. Conceito de função

Seja f a correspondência "... tem grupo sanguíneo..."



$A = \{\text{Carla, Ana, António, João, Natércia}\}$ é o conjunto de partida.

$C = \{O, A, B, AB\}$ é o conjunto de chegada.

$D_f = \{\text{Carla, Ana, António, João, Natércia}\} = A$

$D'_f = \{O, A, B\} \neq C$

Em f todos os elementos do conjunto de partida são objectos (todas as pessoas têm um grupo sanguíneo) e todos têm apenas uma única imagem (cada pessoa tem um só grupo sanguíneo).

A correspondências que, como esta, todos os elementos do conjunto de partida têm apenas uma única imagem chamam-se **funções** ou **aplicações**.

Definição: função ou aplicação é uma correspondência em que cada elemento do conjunto de partida tem uma e uma só imagem.

Se em linguagem usual se diz "a Carla tem grupo sanguíneo O", na linguagem simbólica das funções escreve-se:

$(\text{Carla})^* = O$, que se lê " f de Carla é igual a O" ou seja, através de f a imagem de Carla é O.

Do diagrama, pode concluir-se para os restantes sujeitos:

$$f(\text{Ana}) = O$$

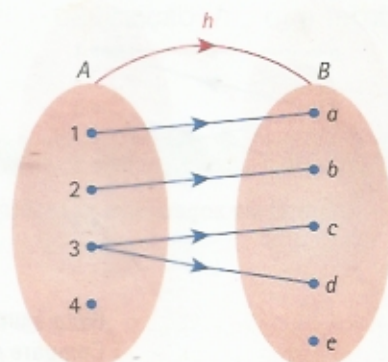
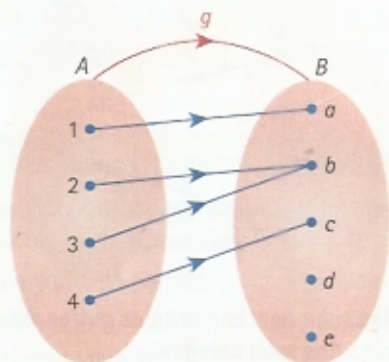
$$f(\text{António}) = A$$

$$f(\text{João}) = B$$

$$f(\text{Natércia}) = B$$

EXEMPLO:

1. Entre os diagramas seguintes, indique os que representam funções. Justifique as respostas.



Resoluçã

1. A corre
imager
A corre
único e
A corre
corres
imager
A corre
corres

2. A segu
nos pri

Idad

- a) A cr
Jus

- b) Esc

- c) Esc

- d) Des

- i) f

- ii) f

- iii)

- e) Con

- i) 2

- ii) A

- iii)

Resoluçã

2. a) Sim

- b) $D =$

- c) CD

- d) i) f

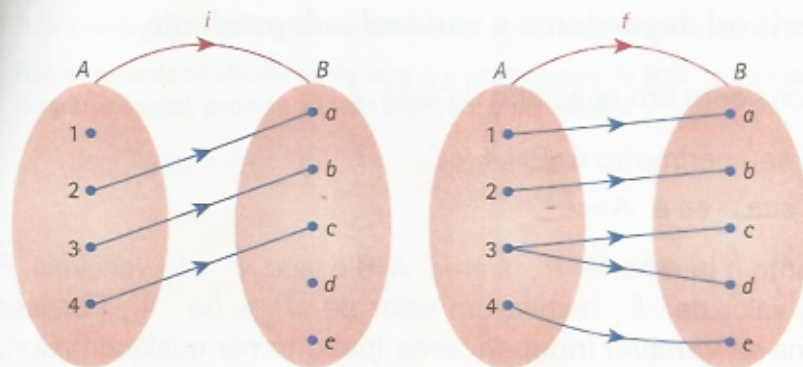
- ii) f

- iii)

- e) i) in

- ii) c

- iii)

**Resolução**

1. A correspondência f não é função, porque há pelo menos um objecto com duas imagens.

A correspondência g é função, porque a todo o elemento de A corresponde um único elemento de B .

A correspondência h não é função, porque nem todo o elemento de A tem correspondência em B , e há pelo menos um elemento de A com mais que uma imagem.

A correspondência i não é função porque nem todos os elementos de A têm correspondência em B .

2. A seguinte tabela mostra a correspondência entre a idade e o peso de um menino nos primeiros anos de vida.

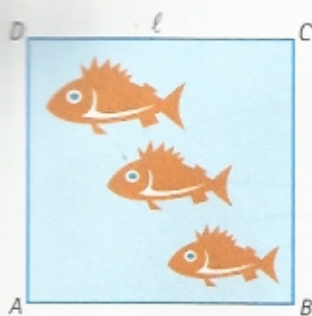
Idade (em anos)	0	1	2	3	4	5	6
Peso (kg)	3,25	9,60	13,10	15,50	16,27	18,48	21,10

- a) A correspondência apresentada na tabela é uma função?
Justifica a sua resposta.
- b) Escreva o domínio.
- c) Escreva o contradomínio.
- d) Designando por f a correspondência dada, complete:
- $f(1) = \dots$
 - $f(2) = \dots$
 - $f(5) = \dots$
- e) Complete as frases com as palavras "imagem" ou "objecto"
- 21,10 é _____.
 - Ao _____ 2 corresponde a _____ 13,10.
 - 16,27 é _____ do _____ 4.

Resolução

2. a) Sim, porque a cada idade corresponde um e um só peso.
- b) $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- c) $CD = \{3,25; 9,60; 13,10; 15,50; 16,27; 18,48; 21,10\}$
- d) i) $f(1) = 9,60$
ii) $f(2) = 13,10$
iii) $f(5) = 18,48$
- e) i) imagem
ii) objecto; imagem
iii) imagem; objecto

3. Variável dependente e variável independente



Considere um quadrado de lado l .

O seu perímetro é $P = 4 \times l$.

A sua área é $A = l^2$

Tanto o perímetro P , a área A e o lado l são variáveis. Para cada valor de l resulta um valor de P e de A . Por isso, l chama-se **variável independente** (pode tomar qualquer valor), A e P são **variáveis dependentes** (dependem do valor que l tomar) e escreve-se:

$$P(l) = 4 \times l \text{ e } A(l) = l^2.$$

Para $l = 1 \text{ cm}$, vem:

$$P(1) = 4 \times 1 \text{ cm} = 4 \text{ cm}$$

$$A(1) = 1^2 \text{ cm}^2 = 1 \text{ cm}^2$$

Para $l = 5 \text{ cm}$, tem-se:

$$P(5) = 4 \times 5 \text{ cm} = 20 \text{ cm}$$

$$A(5) = 5^2 \text{ cm}^2 = 25 \text{ cm}^2.$$

4. Modos de definir uma aplicação

Para se definir uma aplicação (função) deve-se indicar o domínio, o conjunto de chegada e exprimir-se explicitamente a correspondência entre os elementos dos dois conjuntos. Portanto, em qualquer forma de representação de uma aplicação deve-se ter sempre em atenção estas características.

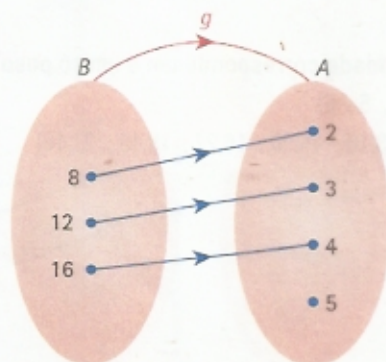
Em geral, as funções representam-se pelo diagrama sagital, por tabelas ou graficamente.

EXEMPLO:

Seja $A = \{2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{8, 12, 16, 20\}$ e g a correspondência de B em A definida por "... é o perímetro do quadrado de lado igual a ...".

g é uma função, porque cada perímetro corresponde a um e um só quadrado.

a) Representação da aplicação pelo diagrama sagital.



b) Representação da aplicação por tabelas.

Representando os objectos pela letra x e as imagens pela letra y , em vez do diagrama sagital, pode-se traduzir a função g por tabelas.

x	8	12	16
y	2	3	4

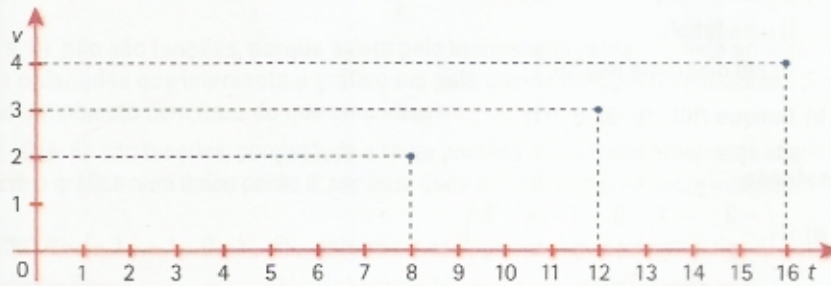
ou

x	y
8	2
12	3
16	4

ou ainda

$($	8	12	16	$)$	← objectos
$($	2	3	4	$)$	← imagens

c) Representação gráfica da aplicação.



EXEMPLO:

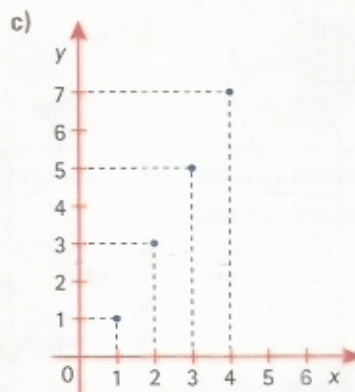
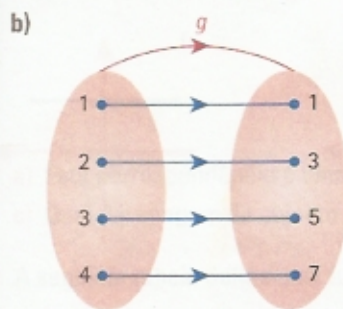
1. Dada a aplicação g definida pela tabela

1	2	3	4
1	3	5	7

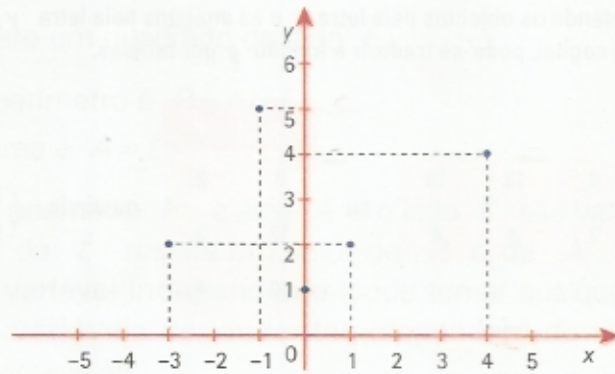
- Indique o domínio e o contradomínio.
- Represente a aplicação por um diagrama sagital.
- Represente graficamente a aplicação dada.

Resolução

1. a) $D_g = \{1, 2, 3, 4\}$; $D'_g = \{1, 3, 5, 7\}$



2. Observe o gráfico que define a função f .



- a) Defina a função f através de:
 i) uma tabela;
 ii) um diagrama sagital;
 b) Indique $f(0)$, $f(-3)$ e $f(1)$.

Resolução

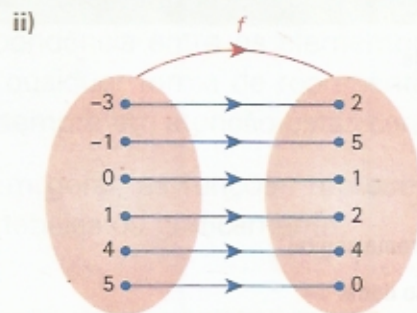
2. a) i) $\begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

ou

x	-3	-1	0	1	4	5
y	2	5	1	2	4	0

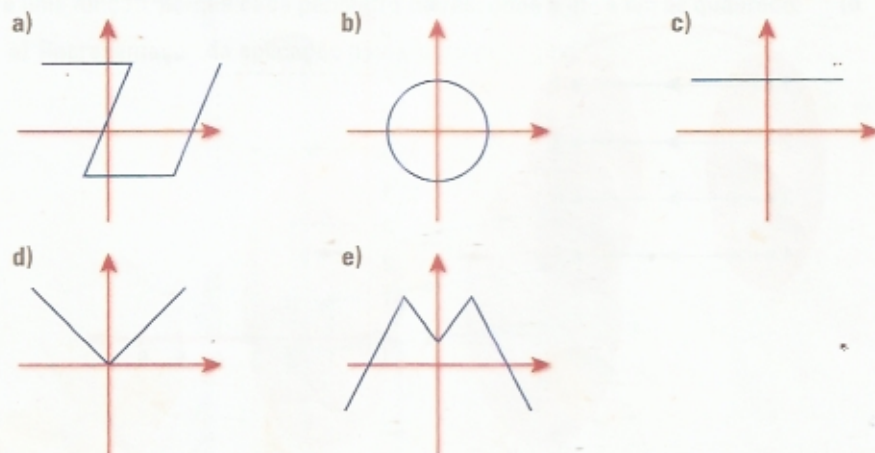
ou

x	y
-3	2
-1	5
0	1
1	2
4	4
5	0



b) $f(0) = 1$ $f(-3) = 2$ $f(1) = 2$

3. Quais dos seguintes gráficos representam funções? Justifique as respostas.



Resolução

3. a)

d)

a) e b) das ord...
 isso um...
 c); d) e...
 secta o...

4. Dado A

a) $f(x) =$

Resolução

4. a) $f(-3) =$
 $f(-1) =$
 $f(0) =$
 $f(1) =$
 $f(2) =$

Exercício

1. Consid

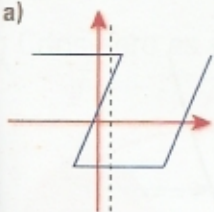
a) Esta...
 c) Qua...

2. A segu

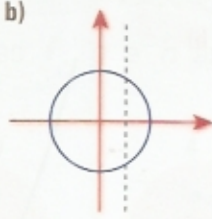
a) Indi...
 c) Indi...
 e) Rep...

Resolução

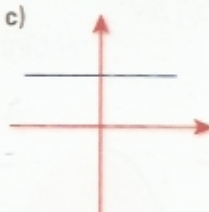
3. a)



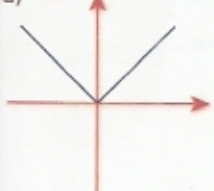
b)



c)



d)



e)



a) e b) não são funções, porque existe pelo menos uma recta paralela ao eixo das ordenadas que intersecta o gráfico em pelo menos dois pontos, existindo, por isso um objecto com mais do que uma imagem.

c); d) e e) são funções, porque toda a recta paralela ao eixo das ordenadas intersecta o gráfico num único ponto e, por isso, cada objecto tem uma única imagem.

4. Dado $A = \{-3, -1, 0, 1, 2\}$, determine as imagens dos elementos de A para:

a) $f(x) = 5x - 3$;

b) $g(x) = 2x + 1$;

c) $h(x) = x^2$

Resolução

4. a) $f(-3) = -18$

b) $g(-3) = -5$

c) $h(-3) = 9$

$f(-1) = -8$

$g(-1) = -1$

$h(-1) = 1$

$f(0) = -3$

$g(0) = 1$

$h(0) = 0$

$f(1) = 2$

$g(1) = 3$

$h(1) = 1$

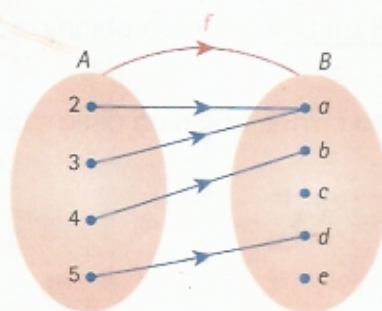
$f(2) = 7$

$g(2) = 5$

$h(2) = 4$

Exercício n.º 2

1. Considere o seguinte diagrama sagital.



a) Esta correspondência é uma função? Porquê?

b) Indique o domínio, o conjunto de chegada e o contradomínio.

c) Qual é a imagem do objecto 2?

d) Qual é o objecto que tem imagem b?

2. A seguinte tabela define uma função g :

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & -5 & 6 \\ -2 & 3 & -4 & 5 & -6 \end{pmatrix}$$

a) Indique o domínio e o contradomínio.

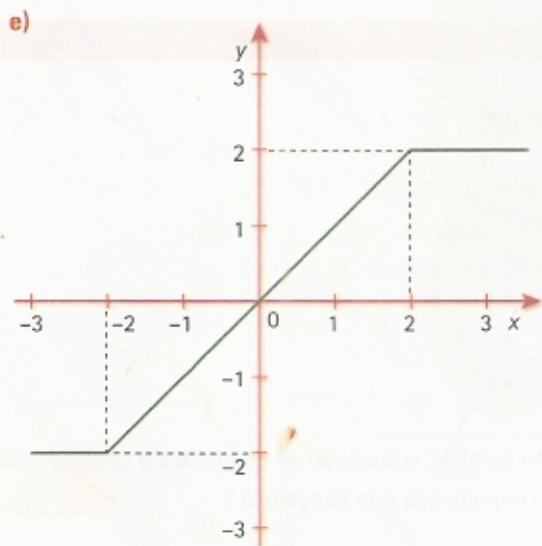
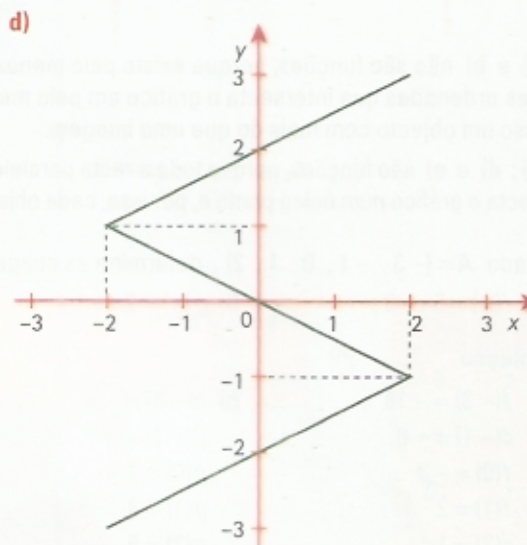
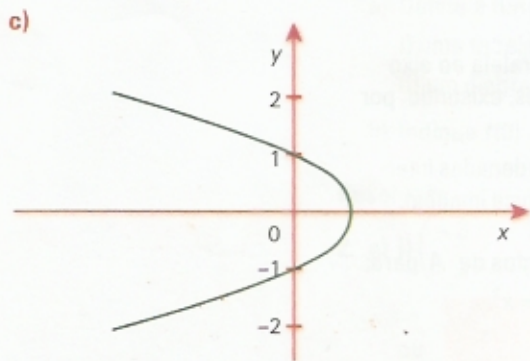
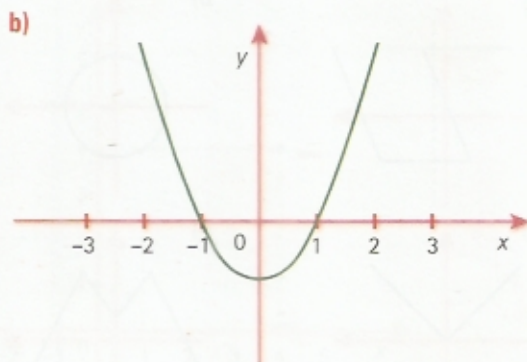
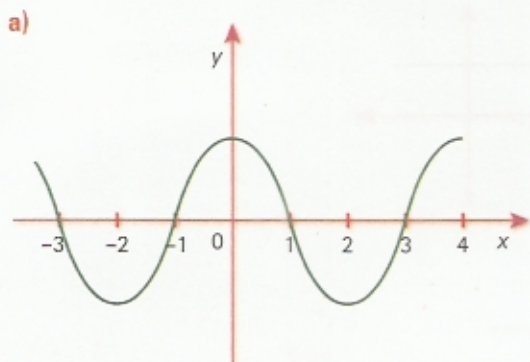
b) Qual é a imagem de 4? E de -3?

c) Indique $g(2)$ e $g(-5)$.

d) Represente a função num diagrama sagital.

e) Represente a função graficamente.

3. Quais dos seguintes gráficos representam funções y de x ?

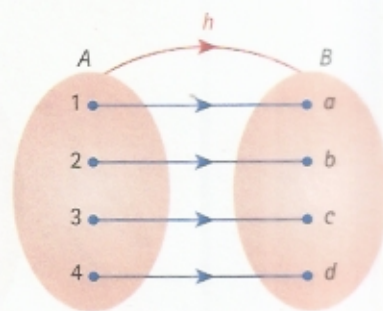
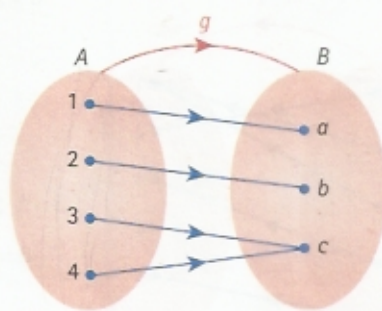
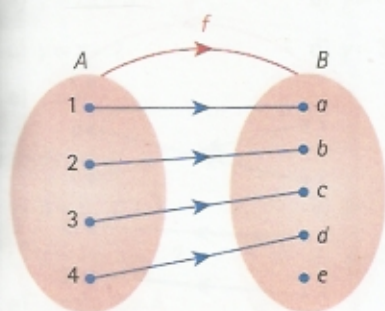


4. Dado o conjunto $A = \{-3, -2, 4, 6\}$, determine as imagens dos elementos de A para:

- a) $f(x) = x^2 - 2x + 1$
- b) $g(x) = \frac{1}{2}x - 2$
- c) $h(x) = -x + 3$

5. Classificação de aplicações: *Injectivas, sobrejectivas e Bijectivas*

Considere as aplicações f , g e h assim definidas:



- Função f :

$$D_f = \{1, 2, 3, 4\} = A$$

$CD_f = \{a, b, c, d\} \neq B$, onde B é o conjunto de chegada.

Na função f , objectos diferentes têm imagens diferentes. Porém, o contradomínio é diferente do conjunto de chegada.

Uma função em que objectos diferentes têm imagens diferentes diz-se **injectiva**.

- Função g :

$$D_g = \{1, 2, 3, 4\} = A$$

$CD_g = \{a, b, c\} = C$, onde C é o conjunto de chegada.

Na função g , objectos diferentes não têm imagens diferentes ($f(3) = f(4) = c$).

No entanto, o contradomínio coincide com o conjunto de chegada.

Uma função em que o contradomínio coincide com o conjunto de chegada diz-se **sobrejectiva**.

- Função h :

$$D_h = \{1, 2, 3, 4\} = A$$

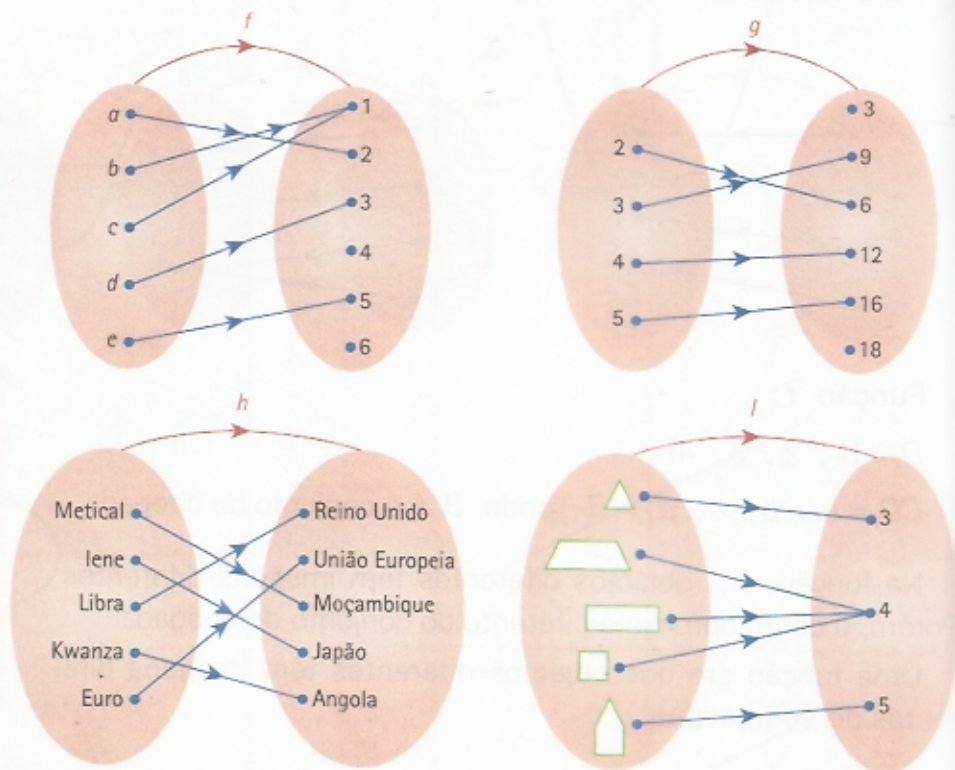
$CD_h = \{a, b, c, d\} = D$, onde D é o conjunto de chegada.

Na função h , objectos diferentes têm imagens diferentes e, portanto, a função h é injectiva, e o contradomínio coincide com o conjunto de chegada, sendo por isso, também sobrejectiva.

Uma função simultaneamente injectiva e sobrejectiva diz-se **bijectiva**.

EXEMPLOS:

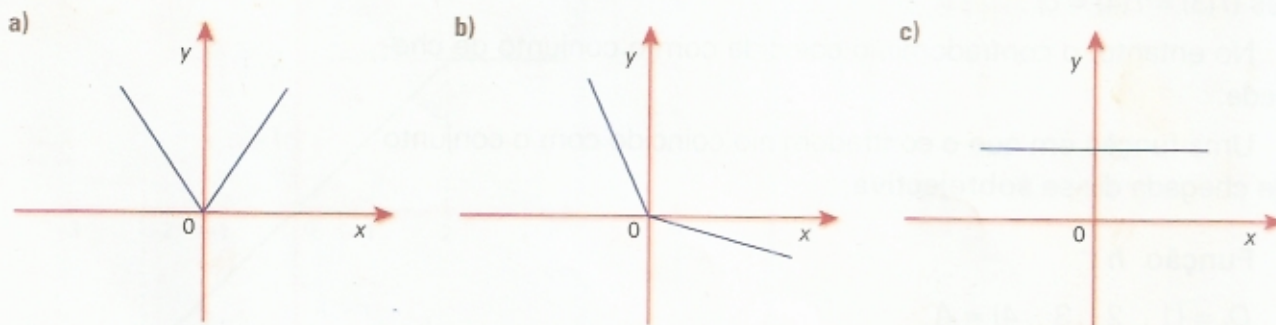
1. Classifique as seguintes funções.



Resolução

1. f não é nem injectiva, nem sobrejectiva; g é injectiva;
 h é bijectiva; l é sobrejectiva.

2. Dos seguintes gráficos, indique justificando, os que representam funções injectivas.



Resolução

2. Somente o gráfico b) representa uma função injectiva, porque qualquer recta paralela ao eixo das abcissas intersecta o gráfico num único ponto.

6. Função linear

Chama-se função linear a toda a função da forma $y = ax + b$, com números a e b quaisquer.

EXEMPLOS:

1. Indique os valores de a e de b nas funções.

a) $y = 2x + 3$

b) $y = -\frac{1}{2}x + 6$

c) $y = x - 2$

d) $y = 3x$

e) $y = 4$

Resolução

a) $a = 2; b = 3$

b) $a = -\frac{1}{2}; b = 6$

c) $a = 1; b = -2$

d) $a = 3; b = 0$

e) $a = 0; b = 4$

6.1. Gráfico de uma função linear

As funções lineares podem ser representadas graficamente do seguinte modo:

- 1.º) Estabelece-se um quadro de valores, isto é, atribuem-se a x alguns valores e determinam-se os valores correspondentes de y ;
- 2.º) Cada par de valores (x, y) assim obtidos, resulta num ponto que se marca no sistema cartesiano ortogonal.
- 3.º) Unindo esses pontos obtém-se uma recta que é a imagem gráfica da função linear.

EXEMPLOS:

No mesmo sistema cartesiano ortogonal, esboce o gráfico dos seguintes pares de funções:

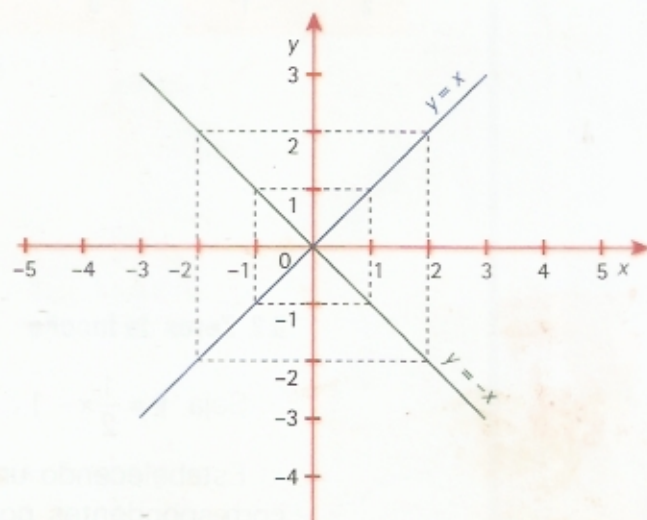
1. $y = x$ e $y = -x$
2. $y = 2x$ e $y = -2x$
3. $y = 2x + 3$ e $y = 2x - 3$
4. $y = -2x + 3$ e $y = -2x - 3$

Resolução

1.

x	$y = x$
-2	-2
-1	-1
0	0
1	1
2	2

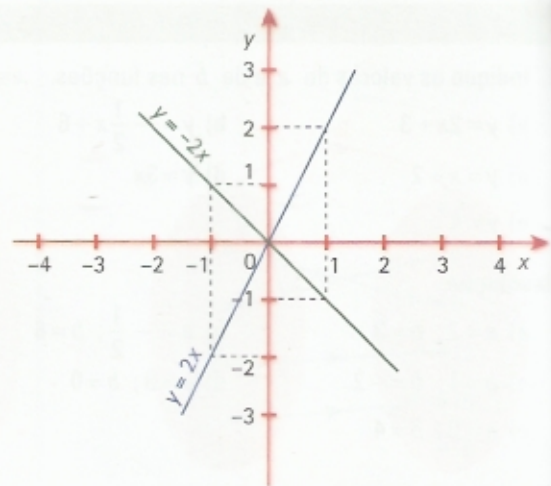
x	$y = -x$
-2	2
-1	1
0	0
1	-1
2	-2



2.

x	y=2x
-1	-2
0	0
1	2

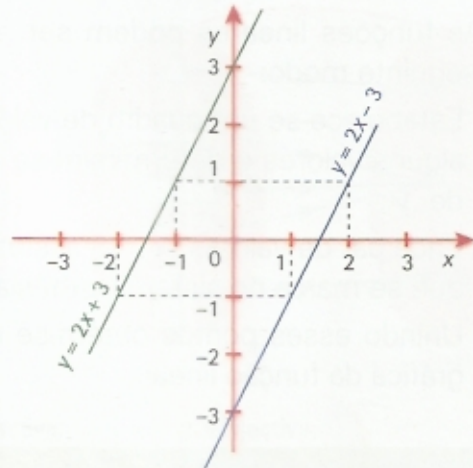
x	y=-2x
-1	2
0	0
1	-2



3.

x	y=2x+3
-2	-1
-1	1
0	3

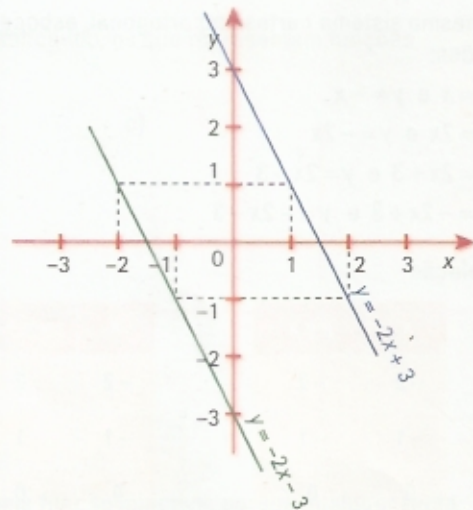
x	y=2x-3
0	-3
1	-1
2	1



4.

x	y=-2x+3
0	3
1	1
2	-1

x	y=-2x-3
-2	1
-1	-1
0	-3



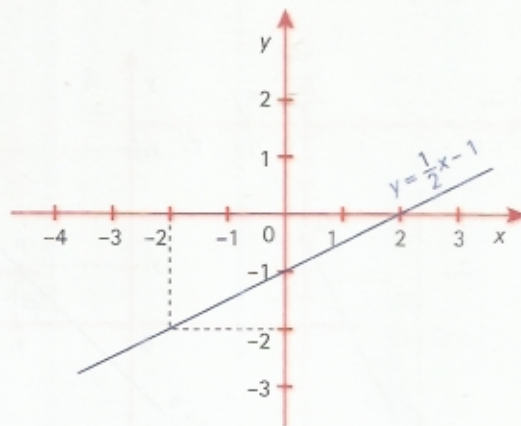
6.2. Zeros da função

Seja $y = \frac{1}{2}x - 1$.

Estabelecendo um quadro de valores e marcando os pontos correspondentes no sistema cartesiano ortogonal (bastam dois

pontos, pois a função linear é representada graficamente por uma recta), vem:

x	$y = \frac{1}{2}x - 1$
-2	-2
0	-1



O ponto onde a recta corta o eixo das abcissas (onde será, portanto, $y=0$) chama-se zero da função.

Vê-se, pois que, neste caso, o zero da função $y = \frac{1}{2}x - 1$ é $x=2$.

Em geral sendo $y = ax + b$, o zero da função obtém-se fazendo $y=0$, donde

$$y=0 \Leftrightarrow ax + b = 0$$

$$\Leftrightarrow ax = -b$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}, \text{ zero da função linear (para } a \neq 0\text{).}$$

EXEMPLOS:

Determine os zeros das funções:

a) $y=2x$

b) $y=3x-1$

c) $y=-\frac{1}{2}x-3$

d) $y=-3x$

Resolução

a) $y=0 \Leftrightarrow 2x=0$

$$\Leftrightarrow x=0$$

b) $y=0 \Leftrightarrow 3x-1=0$

$$\Leftrightarrow 3x=1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

c) $y=0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x-3=0$

$$\Leftrightarrow -x-6=0$$

$$\Leftrightarrow -x=6$$

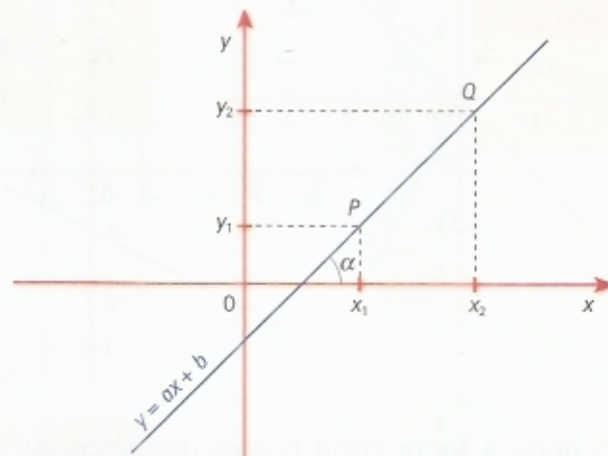
$$\Leftrightarrow x=-6$$

d) $y=0 \Leftrightarrow -3x=0$

$$\Leftrightarrow x=0$$

6.3. Significado geométrico das constantes a e b

Seja $y = ax + b$ uma função linear.



- Ao ângulo α que a recta faz com a parte positiva do eixo das abcissas, chama-se **inclinação da recta**.
- Para $x = 0$, tem-se $y = 0x + b \Leftrightarrow y = b$; b é o valor que a função toma quando $x = 0$ (x está na origem). Por essa razão, chama-se **ordenada na origem** e corresponde ao ponto onde a recta "corta" o eixo das ordenadas.
- Sendo $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$ pontos da recta, tem-se:

$$y_1 = ax_1 + b; \quad y_2 = ax_2 + b$$

Subtraindo as duas equações, membro a membro tem-se:

$$ax_2 + b - (ax_1 + b) = y_2 - y_1$$

$$ax_2 + b - ax_1 - b = y_2 - y_1$$

$$ax_2 - ax_1 = y_2 - y_1$$

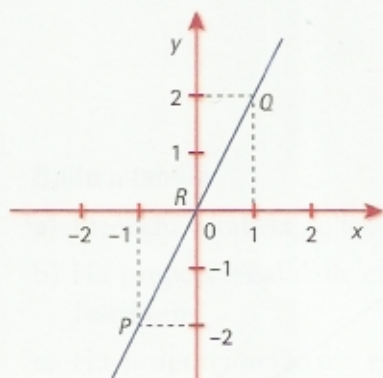
$$a(x_2 - x_1) = y_2 - y_1$$

$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, chama-se **declive** ou **coeficiente angular** da recta e mede a inclinação da recta.

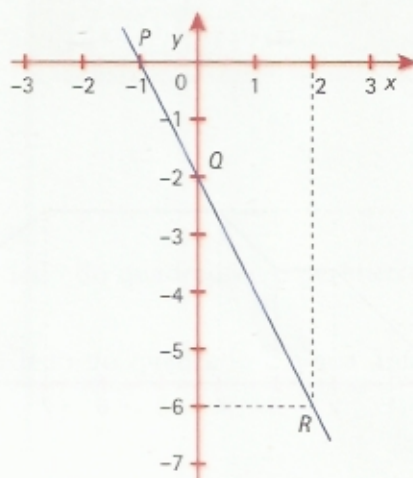
EXEMPLOS:

Determine a expressão analítica de cada uma das funções representadas nos gráficos.

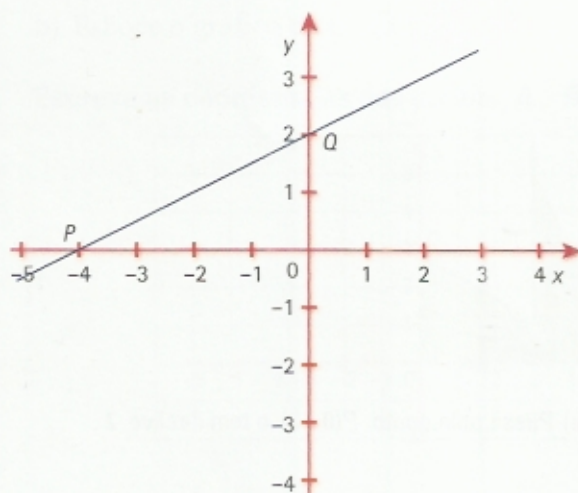
1.



2.



3.



Resolução

1. $P(-1, -2); Q(0, 0); R(1, 2)$

$$b=0; \quad a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}; \quad a = \frac{2 - 0}{1 - 0} = 2; \quad y = 2x.$$

2. $P(-1, 0); Q(0, -2); R(2, -6)$

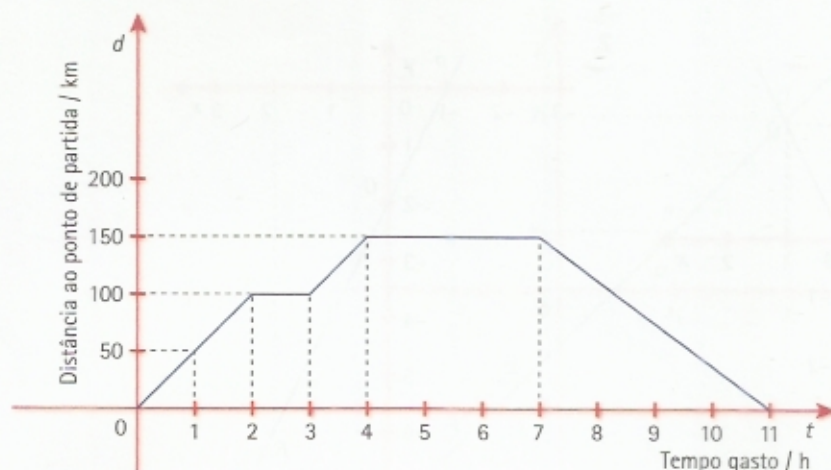
$$b=-2; \quad a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}; \quad a = \frac{-2 - 0}{0 - (-1)} = \frac{-2}{1} = -2; \quad y = -2x - 2.$$

3. $P(-4, 0); Q(0, 2)$

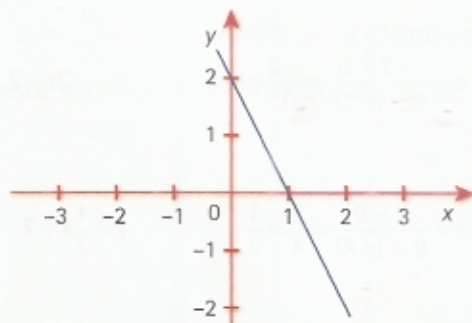
$$b=2; \quad a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}; \quad a = \frac{2 - 0}{0 - (-4)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}; \quad y = \frac{1}{2}x + 2.$$

Exercício n.º 3

1. O professor de Matemática organizou uma visita de estudo. A relação entre o tempo da viagem e a distância ao ponto de partida está representado no gráfico.



- a) Que distância tinham percorrido ao fim de 1 hora?
 b) De quanto tempo foi a primeira paragem?
 c) Quanto tempo demorou a viagem de regresso?
 d) O gráfico representa uma função injectiva?
2. Dada a função $g(x) = 5x - 3$
- a) Determine a imagem de -3 e de 2 .
 b) Determine x tal que $g(x) = -3$.
 c) Esboce o gráfico da função.
3. Escreva a expressão analítica das seguintes rectas:
- a) Tem declive -1 e ordenada na origem 1 .
 b) Passa pelo ponto $P(0, 3)$ e tem declive 2 .
4. No mesmo referencial represente o gráfico das funções
 $y = x$; $y = 2x$; $y = 5x$
- a) Qual das rectas tem maior constante de proporcionalidade? E maior inclinação?
 b) Relacione o valor da constante de proporcionalidade com a inclinação da recta.
5. Encontre a expressão analítica da função.



1. Dada a tabela

- a) Preencha a tabela ao lado.
- b) Há proporcionalidade entre o lado do quadrado e o perímetro? Justifique.
- c) Há proporcionalidade entre o lado do quadrado e a sua área? Justifique.

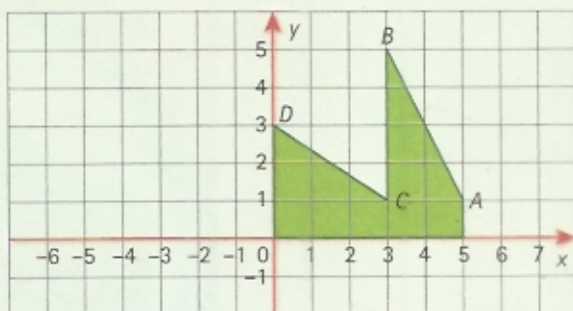
Lado do quadrado (l)	Perímetro do quadrado (p)	Área do quadrado (A)
1		
2		
2,5		
3		
4		
5		

2. Considere a função $g(x) = \frac{x}{3} + 2$.

- a) Complete a tabela ao lado.
- b) Esboce o gráfico da função.

x	y
1	
	-3
-4	
	6
15	
	-8
-21	

3. Escreva as coordenadas dos pontos A, B, C e D.



4. Para determinados fios eléctricos com a mesma espessura, a lei que relaciona a resistência eléctrica R (em ohm) com a área S da secção do fio (em mm^2) é $R \times S = 0,4$.

- a) De que tipo de proporcionalidade se trata?
- b) Qual a resistência de um fio com $0,1 \text{ mm}^2$ de secção?
- c) Qual deverá ser a área de secção de um fio para a sua resistência ser 16 ohm?
- d) Esboce o gráfico da função R tomando S para variável independente.

5. O senhor Manuel comprou um automóvel por 163 800,00 Mt no qual estavam incluídos 17% de IVA (Imposto sobre o Valor Acrescentado).

Quanto pagou de IVA?

IV SISTEMAS DE DUAS EQUAÇÕES LINEARES A DUAS INCÓGNITAS

1.
EQUAÇÃO DO PRIMEIRO GRAU A DUAS INCÓGNITAS

2.
SISTEMA DE DUAS EQUAÇÕES LINEARES A DUAS
INCÓGNITAS

3.
RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

4.
CLASSIFICAÇÃO DE SISTEMAS

5.
RESOLUÇÃO GRÁFICA DE SISTEMAS DE DUAS
EQUAÇÕES LINEARES COM DUAS INCÓGNITAS

6.
RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS CONDUCENTES
A SISTEMAS DE DUAS EQUAÇÕES LINEARES
COM DUAS INCÓGNITAS

1

EQUAÇÃO DO PRIMEIRO GRAU A DUAS INCÓGNITAS

Na fábrica "Laranjata", as latas de sumo devem ser embaladas em caixas de 54 ou de 21 unidades.

Na sexta-feira havia 906 latas para embalar.

Quantas caixas de cada tipo têm de ser utilizadas para embalar a totalidade das caixas?



Vamos traduzir o problema para a linguagem matemática:

Assinalando por:

- x – o número de caixas de 54 latas
- y – o número de caixas de 21 latas

obtém-se a equação $54x + 21y = 906$ em que:

- $54x$ representa o número de latas embaladas em caixas de 54
- $21y$ representa o número de latas embaladas em caixas de 21
- $54x + 21y$ representa o número total de latas.

A equação obtida, $54x + 21y = 906$, é uma equação linear (do 1.º grau) a duas incógnitas.

Para dar resposta ao problema, temos de resolver a equação. Para isso, procuremos primeiro o valor de y em função de x .

$$54x + 21y = 906 \Leftrightarrow 21y = 906 - 54x$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{906 - 54x}{21}$$

(Observe que x e y devem ser números naturais. Porquê?)

Va
tabel
An
soluç
(2
duas
caixa
de 5

Ve
soluç
Pa
do tip

1. Int
inc

Co
Pa
junto
uma

2x
gráfic

Re

Q
soluç

D
repre

Vamos organizar algumas hipóteses numa tabela e tirar conclusões:

Analisando a tabela, verifica-se que há várias soluções para o problema:

(2, 38); (9, 20); ...; (16, 2); ... isto é, duas caixas de 54 latas e 38 de 21 latas; nove caixas de 54 latas e 20 de 21 latas; 16 caixas de 54 latas e duas de 21 latas, etc.

x	$y = \frac{906 - 54x}{21}$	Solução
1	≈ 40,6	Não serv
2	38	(2, 38)
3	≈ 35,4	Não serv
...		
9	20	(9, 20)
...		
16	2	(16, 2)
...		

Verifica-se, então, que a equação tem uma infinidade de soluções.

Para a equação dada, pode dizer-se que todas as soluções são do tipo $(x, \frac{906 - 54x}{21})$, com x e $\frac{906 - 54x}{21}$, números naturais.

1. Interpretação gráfica de uma equação linear a duas incógnitas

Considere a equação $2x + y = 3$.

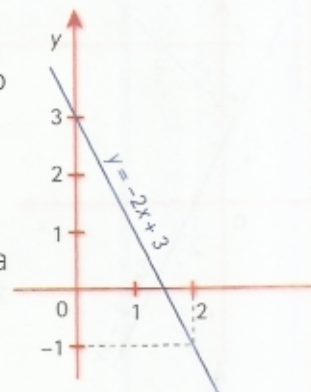
Para resolver a equação dada, ou seja, determinar o seu conjunto-solução, começa-se por resolver a equação em ordem a uma das variáveis, por exemplo, y .

$2x + y = 3 \Leftrightarrow y = -2x + 3$, uma função linear em x , cujo gráfico é uma recta.

Representando graficamente a função obtida tem-se:

Qualquer ponto $(x, -2x + 3)$, da recta, corresponde a uma solução da equação.

x	$y = -2x + 3$
-1	5
0	3
$\frac{1}{2}$	2
1,7	-0,4



De um modo geral, toda a equação linear a duas incógnitas é representada graficamente por uma recta.

s. Porquê?)

EXEMPLOS

1. É dada a equação $6x = 3 - 4y$.

a) Quais dos elementos do conjunto

$$A = \left\{ (0, 0); (1, 2); \left(0, \frac{3}{4}\right); \left(-1, -\frac{9}{4}\right) \right\}$$

são solução da equação?

b) Represente num sistema cartesiano ortogonal as soluções da equação.

2. Dadas as equações $x + y = 5$ e $x - y = 1$

a) Represente, as soluções das equações.

b) Pela leitura do gráfico, indique o ponto $P(x, y)$ que é solução das duas equações.

Resolução

1. a) • $(0, 0)$

$$6 \times 0 = 3 - 4 \times 0$$

$0 = 3$ (falso). Então, $(0, 0)$ não é solução da equação.

• $(1, 2)$

$$6 \times 1 = 3 - 4 \times 2$$

$$6 = 3 - 8$$

$6 = -5$ (falso). Então, $(1, 2)$ não é solução da equação.

• $\left(0, \frac{3}{4}\right)$

$$6 \times 0 = 3 - 4 \times \frac{3}{4}$$

$$0 = 3 - 3$$

$0 = 0$ (Verdadeiro). Então, $\left(0, \frac{3}{4}\right)$ é solução da equação.

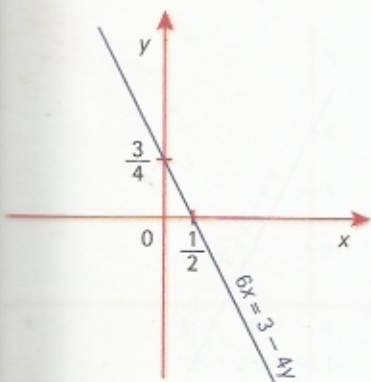
• $\left(-1, \frac{9}{4}\right)$

$$6(-1) = 3 - 4\left(-\frac{9}{4}\right)$$

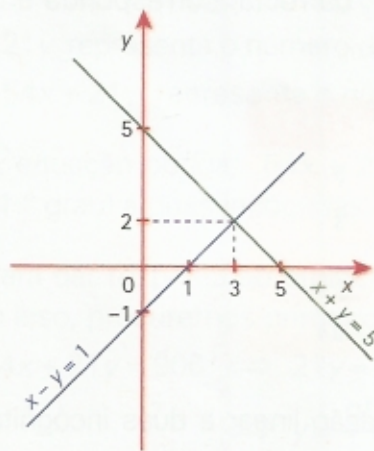
$$-6 = 3 - 9$$

$-6 = -6$ (Verdadeiro). Então, $\left(-1, \frac{9}{4}\right)$ é solução da equação.

b) $6x = 3 - 4y \iff y = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{4}$. (ver gráfico ao lado.)



2. a)



b) $P(3, 2)$

x Consid
Dois liv



x Quant
Seja

Então,
solução d
res $(x_0,$
duas equ

$$\begin{cases} x + y \\ y = x \end{cases}$$

Repre
siano ort

A solu

x Ao co
se trans
mesmos
duas eq

A for
lineares

$$\begin{cases} a_1x + \\ a_2x + \end{cases}$$

onde a

Cham
a duas i
satisfaz

SISTEMA DE DUAS EQUAÇÕES LINEARES A DUAS INCÓGNITAS

2

x Considere o problema:

Dois livros pesam 5 kg e um deles pesa mais 1 kg que o outro.



x Quanto pesa cada livro?

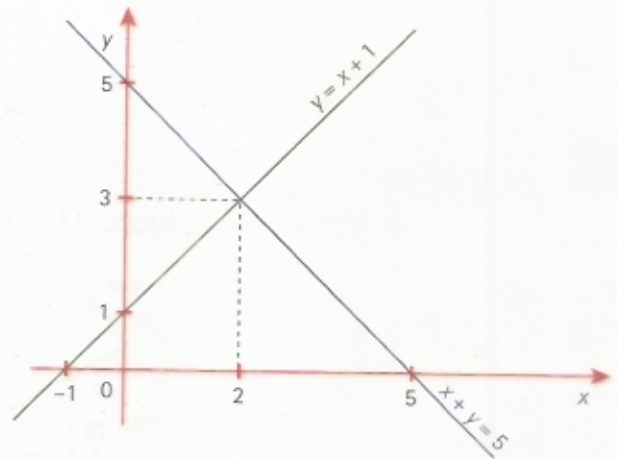
Seja x – o peso de um dos livros

y – o peso do outro livro

Então, $x + y = 5$ e $y = x + 1$: constitui solução do problema o par ordenado de valores (x_0, y_0) que verifica simultaneamente as duas equações e escreve-se

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ y = x + 1 \end{cases}$$

Representando no mesmo sistema cartesiano ortogonal as duas equações tem-se:



A solução das duas equações é o ponto $P(2; 3)$

x Ao conjunto de duas equações lineares a duas incógnitas, que se transformam em igualdades numéricas verdadeiras para os mesmos valores atribuídos às incógnitas, chama-se **sistema de duas equações lineares a duas incógnitas**.

A forma típica, canónica ou geral, de um sistema de equações lineares a duas incógnitas é

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

onde $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ são números quaisquer.

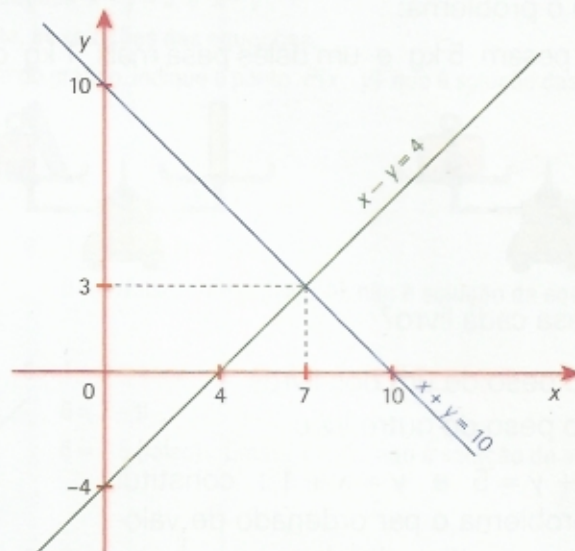
Chama-se solução de um sistema de duas equações lineares a duas incógnitas x e y a todo o par ordenado (x, y) que satisfaz simultaneamente cada uma das equações do sistema.

1. Sistemas equivalentes

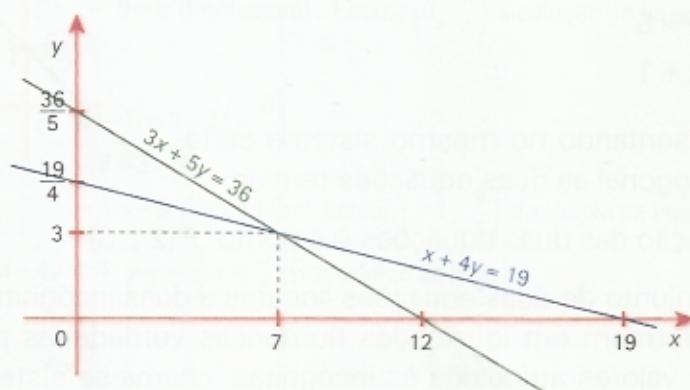
Sejam os sistemas de equações

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 4 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 3x + 5y = 36 \\ x + 4y = 19 \end{cases}$$

Representando graficamente as equações dos sistemas vem:



Solução: (7, 3)



Solução: (7, 3)

Os dois sistemas de equações admitem a mesma solução (7, 3). Diz-se, então, que os dois sistemas de equações são **equivalentes** e escreve-se

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 5y = 36 \\ x + 4y = 19 \end{cases}$$

Dois sistemas de equações lineares dizem-se equivalentes se admitem a mesma solução.

EXEMPLOS:

1. Dado o sistema de equações

$$\begin{cases} 3x - y = -4 \\ 3x - 2y = -11 \end{cases}$$

qual dos pares ordenados (x, y) seguintes é solução do sistema?

- a) (1, 6) b) (1, 7) c) (2, 10)

Resolução

$$1. a) \begin{cases} 3 \times 1 - 6 = -4 \\ 3 \times 1 - 6 \times 2 = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 = -4 \text{ (falsa)} \\ -9 = -11 \text{ (falsa)} \end{cases}$$

O par ordenado (1, 6) não é solução do sistema.

$$b) \begin{cases} 3 \times 1 - 7 = -4 \\ 3 \times 1 - 2 \times 7 = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 = -4 \text{ (verdadeira)} \\ -11 = -11 \text{ (verdadeira)} \end{cases}$$

O par ordenado (1, 7) é solução do sistema.

$$c) \begin{cases} 3 \times 2 - 10 = -4 \\ 3 \times 2 - 2 \times 10 = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 = -4 \text{ (verdadeira)} \\ -14 = -11 \text{ (falsa)} \end{cases}$$

O par ordenado (2, 10) não é solução do sistema.

2. Determine o valor de m , de modo que o sistema

$$\begin{cases} x - my = 6 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

admita (2, 1) como solução.

Resolução

$$2. \begin{cases} 2 - m \times 1 = 6 \\ 2 - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - m = 6 \\ 1 = 1 \text{ (verdadeira)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 - 6 \\ 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -4 \\ 1 = 1 \end{cases}$$

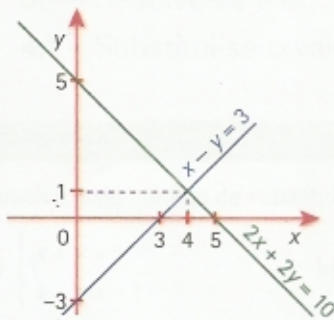
Solução: $m = -4$

3. Averigüe, graficamente, se os seguintes sistemas de equações são ou não equivalentes.

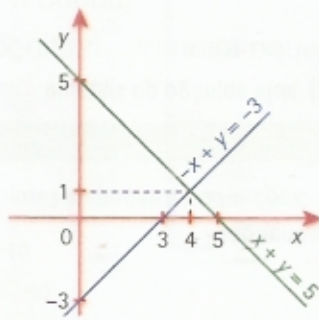
$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + 2y = 10 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} -x + y = -3 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

Resolução

3.



Solução: (4, 1)



Solução: (4, 1)

$$\text{Então, } \begin{cases} x - y = 3 \\ 3x + 2y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = -3 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

4. Escreva na forma canônica os sistemas.

$$\text{a) } \begin{cases} 2(x-3) = 3(y-1) \\ x-3y = 4+x \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} \frac{x+1}{2} - \frac{y}{3} = -(x+1) \\ y = x+1 \end{cases}$$

Resolução

$$4. \text{ a) } \begin{cases} 2(x-3) = 3(y-1) \\ x-3y = 4+x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-6 = 3y-3 \\ x-x-3y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y = 6-3 \\ -3y = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y = 3 \\ -3y = 4 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \frac{x+1}{2} - \frac{y}{3} = -(x+1) \\ y = x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x+1) - 2y = -6(x+1) \\ -x+y = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+3-2y = -6x-6 \\ -x+y = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+6x-2y = -6-3 \\ -x+y = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9x-2y = -9 \\ -x+y = 1 \end{cases}$$

Exercício n.º 1

1. Dos seguintes pares ordenados, quais são solução da equação?

$$2x + 3y = 14$$

a) (1, 4)

b) (0, 4)

c) $(6, \frac{2}{3})$

2. Considere o sistema $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ -3x - y = -3 \end{cases}$

Verifique se o par ordenado:

a) (2, -3) é solução do sistema;

b) (-3, 7) é solução do sistema.

3. Determine o valor de m para que (1, -1) seja solução do sistema

$$\begin{cases} x - 3y = 4 \\ 5x + my = 20 \end{cases}$$

4. Reduza à forma canônica os sistemas de equações

a) $\begin{cases} 2x + 3y - 4 = x + 2y - 5 \\ x - y + 2x + 3y - 4 + 6 = x - 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 3 \\ y - \frac{x-2}{3} = 0 \end{cases}$

Na resolução de sistemas de equações lineares, isto é, na determinação dos pares de valores que tornam as equações do sistema em igualdades numéricas verdadeiras, o primeiro passo é reduzir o sistema à forma canónica típica ou geral dos sistemas de duas equações lineares a duas incógnitas, ou seja, à forma:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

1. Método de substituição

O método de substituição baseia-se no seguinte princípio de equivalência de sistemas de equações:

Princípio de substituição:

Resolvendo uma das equações em ordem a uma das incógnitas e substituindo o valor dessa incógnita na outra equação, obtém-se um sistema equivalente ao sistema dado.

Do princípio de substituição resulta que, para resolver um sistema de equações pelo método de substituição:

- 1.º – Resolve-se uma das equações em ordem a uma das incógnitas.
- 2.º – Substitui-se o valor encontrado na outra equação.
- 3.º – Resolve-se a equação assim obtida.
- 4.º – Substitui-se o valor da incógnita na primeira equação.

EXEMPLO:

Resolva, pelo método de substituição, os seguintes sistemas de equações:

a) $\begin{cases} x + y = 9 \\ x - y = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ 4x - 7y = -10 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3(y - 2) = \frac{1}{2}y + x \\ y - 2x = 2y + x \end{cases}$

d) $\begin{cases} 1 - \frac{x - y}{3} = \frac{1}{2} \\ 2 - \frac{x - y}{3} = 2 - \frac{1 - x}{2} \end{cases}$

Resolução

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \begin{cases} x+y=9 \\ x-y=-1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x=9-y \\ 9-y-y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=9-y \\ 9-2y=-1 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x=9-y \\ -2y=-1-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=9-y \\ -2y=-10 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x=9-y \\ y=\frac{-10}{-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=9-y \\ y=5 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x=9-5 \\ y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=5 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Solução: (4, 5).

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \begin{cases} 2x+4y=10 \\ 4x-7y=-10 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x=10-4y \\ 4x-7y=-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{10-4y}{2} \\ 4x-7y=-10 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x=5-2y \\ 4(5-2y)-7y=-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5-2y \\ 20-8y-7y=-10 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x=5-2y \\ -8y-7y=-10-20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5-2y \\ -15y=-30 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x=5-2y \\ y=\frac{-30}{-15} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5-2 \times 2 \\ y=2 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x=5-4 \\ y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Solução: (1, 2).

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \begin{cases} 3(y-2)=\frac{1}{2}y+x \\ y-2x=2y+x \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3y-6=\frac{1}{2}y+x \\ -2x-x+y-2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(3y-6)=y+2x \\ -3x-y=0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 6y-12=y+2x \\ -y=3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+6y-y=12 \\ y=-3x \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} -2x+5y=12 \\ y=-3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+5(-3x)=12 \\ y=-3x \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} -2x-15x=12 \\ y=-3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -17x=12 \\ y=-3x \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{12}{-17} \\ y=-3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{12}{17} \\ y=-3\left(-\frac{12}{17}\right) \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{12}{17} \\ y=\frac{36}{17} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Solução: $\left(-\frac{12}{17}, \frac{36}{17}\right)$.

$$\begin{aligned}
 \text{d)} \quad \begin{cases} 1 - \frac{x-y}{3} = \frac{1}{2} \\ 2 - \frac{x-y}{3} = 2 - \frac{1-x}{2} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 6 - 2(x-y) = 3 \\ 12 - 2(x-y) = 12 - 3(1-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 - 2x + 2y = 3 \\ 12 - 2x + 2y = 12 - 3 + 3x \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 2y = 3 - 6 \\ -2x - 3x + 2y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 2y = -3 \\ -5x + 2y = -3 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} -2x = -3 - 2y \\ -5x + 2y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-3 - 2y}{-2} \\ -5x + 2y = -3 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3 + 2y}{2} \\ -5\left(\frac{3 + 2y}{2}\right) + 2y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3 + 2y}{2} \\ \frac{-15 - 10y}{2} + 2y = -3 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3 + 2y}{2} \\ -15 - 10y + 4y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3 + 2y}{2} \\ -10y + 4y = 15 - 6 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3 + 2y}{2} \\ -6y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3 + 2y}{2} \\ y = -\frac{9}{6} \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3 + 2y}{2} \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3 + 2\left(-\frac{3}{2}\right)}{2} \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3 - 3}{2} \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{0}{2} \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Solução: $\left(0, -\frac{3}{2}\right)$.

Exercício n.º 2

Resolva pelo método de substituição os sistemas de equações.

1.
$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 + 4y \\ 1 + y = 2x \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} 1 + 2(x - y) = -1 \\ x + 2y - 3 = 2 \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = x \\ \frac{x}{4} - \frac{y}{6} = \frac{y}{3} - 2 \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{3} + 1 \\ \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = x - 5 \end{cases}$$

5.
$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} + \frac{y+4}{3} = \frac{x+2}{2} + \frac{1}{2} \\ \frac{y-1}{3} + \frac{x+2}{2} = \frac{1}{2} + \frac{11}{6} \end{cases}$$

2. Método de redução ou adição ordenada

O método de redução baseia-se no seguinte princípio de equivalência de sistemas de equações:

Princípio de adição: substituindo uma das equações pela sua soma com a outra equação, obtém-se um sistema equivalente ao sistema dado.

Para resolver um sistema de equações pelo método de redução, faz-se com que uma das incógnitas tenha coeficientes simétricos e depois, adicionando-se as duas equações membro a membro, elimina-se a incógnita em causa.

EXEMPLO:

Resolva, pelo método de redução, os seguintes sistemas de equações:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + y = 8 \\ 4x - 3y = 6 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + 3y = 4 \\ 2x - 8y = -6 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + 3y - 4 = 2x - y + 2 \\ 2x + 3(x - 2y) = x + 8 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} 4x - 5y = 23 \\ 4x + 3y = 7 \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} 5x + 3y = 5 \\ -8x + 5y = -8 \end{cases}$$

Resolução

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + y = 8 \\ 4x - 3y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x - 2y = -16 \\ 4x - 3y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} + \\ \hline -5y = -10 \Leftrightarrow y = \frac{-10}{-5} \\ \Leftrightarrow y = 2 \end{array}$$

Calculado o valor de y pode-se proceder do mesmo modo para calcular x .

$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ 4x - 3y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 3y = 24 \\ 4x - 3y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} + \\ \hline 10x = 30 \Leftrightarrow x = \frac{30}{10} \\ \Leftrightarrow x = 3 \end{array}$$

Solução: (3, 2).

$$\text{b) } \begin{cases} x + 3y = 4 \\ 2x - 8y = -6 \end{cases}$$

$$\text{1.}^\circ \begin{cases} x + 3y = 4 \\ 2x - 8y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 6y = -8 \\ 2x - 8y = -6 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} + \\ \hline -14y = -14 \Leftrightarrow y = \frac{-14}{-14} \\ \Leftrightarrow y = 1 \end{array}$$

$$2.^\circ \begin{cases} x+3y=4 \\ 2x-8y=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x+24y=32 \\ 6x-24y=-18 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} + \\ \hline 14x=14 \Leftrightarrow x=\frac{14}{14} \\ \Leftrightarrow x=1 \end{array}$$

Solução: $(1, 1)$.

$$c) \begin{cases} x+3y-4=2x-y+2 \\ 2x+3(x-2y)=x+8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2x+3y+y=4+2 \\ 2x+3x-6y=x+8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x+4y=6 \\ 5x-x-6y=8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x+4y=6 \\ 4x-6y=8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x+4y=6 \\ 2x-3y=4 \end{cases}$$

$$1.^\circ \begin{cases} -x+4y=6 \\ 2x-3y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+8y=12 \\ 2x-3y=4 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} + \\ \hline 5y=16 \Leftrightarrow y=\frac{16}{5} \end{array}$$

$$2.^\circ \begin{cases} -x+4y=6 \\ 2x-3y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x+12y=18 \\ 8x-12y=16 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} + \\ \hline 5x=34 \Leftrightarrow x=\frac{34}{5} \end{array}$$

Solução: $(\frac{34}{5}, \frac{16}{5})$.

$$d) \begin{cases} 4x-5y=23 \\ 4x+3y=7 \end{cases}$$

$$1.^\circ \begin{cases} 4x-5y=23 \\ 4x+3y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x+5y=-23 \\ 4x+3y=7 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} + \\ \hline 8y=-16 \Leftrightarrow y=\frac{-16}{8} \\ \Leftrightarrow y=-2 \end{array}$$

$$2.^\circ \begin{cases} 4x-5y=23 \\ 4x+3y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x-15y=69 \\ 20x+15y=35 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} + \\ \hline 32x=104 \Leftrightarrow x=\frac{104}{32} \\ \Leftrightarrow x=\frac{13}{4} \end{array}$$

Solução: $(\frac{13}{4}, -2)$.

$$e) \begin{cases} 5x + 3y = 5 \\ -8x + 5y = -8 \end{cases}$$

$$1.^\circ \begin{cases} 5x + 3y = 5 \\ -8x + 5y = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 40x + 24y = 40 \\ -40x + 25y = -40 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} + \\ \hline 49y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{0}{49} \\ \Leftrightarrow y = 0 \end{array}$$

$$2.^\circ \begin{cases} 5x + 3y = 5 \\ -8x + 5y = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25x + 15y = 25 \\ 24x - 15y = 24 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} + \\ \hline 49x = 49 \Leftrightarrow x = \frac{49}{49} \\ \Leftrightarrow x = 1 \end{array}$$

Solução: (1, 0).

Exercício n.º 3

Resolva os seguintes sistemas de equações pelo método de redução.

$$1. \begin{cases} x + 2y = 7 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} -2x + 3y = -7 \\ x + y = -4 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \frac{x}{2} + y = 3 \\ 1 - \frac{x-y}{2} = 1 - (x+3) \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 2x + 3y = \frac{y}{2} + 102 \\ 3\left(\frac{y}{4} - x\right) - \frac{7y}{4} = -3 \end{cases}$$

3. Método misto

O método misto consiste na aplicação simultânea dos métodos de redução e de substituição na resolução de um mesmo sistema de equações lineares.

Calcula-se, pelo método de redução, o valor de uma das incógnitas e substituindo-se o valor encontrado numa das equações, calcula-se o valor da outra incógnita.

EXEMPLO:

Resolva, pelo método misto, os seguintes sistemas de equações.

$$a) \begin{cases} x + 6y = 32 \\ 3x - 6y = -24 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 1 - \frac{x-1}{2} = y \\ x - (y+1) = 7 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 1 - \frac{x-y}{2} = 0 \\ x - (1-y) = 9 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{4} = \frac{x}{2} - 2 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{5} = \frac{y}{4} - 3 \end{cases}$$

Resolução

$$a) \begin{cases} x + 6y = 32 \\ 3x - 6y = -24 \end{cases}$$

$$1.^\circ \begin{cases} x + 6y = 32 \\ 3x - 6y = -24 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} + \\ \hline 4x = 8 \Leftrightarrow x = \frac{8}{4} \\ \Leftrightarrow x = 2 \end{array}$$

$$2.^\circ 2 + 6y = 32 \Leftrightarrow 6y = 32 - 2$$

$$\Leftrightarrow 6y = 30$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{30}{6}$$

$$\Leftrightarrow y = 5$$

Solução: (2, 5).

$$b) \begin{cases} 1 - \frac{x-1}{2} = y \\ x - (y+1) = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x + 1 = 2y \\ x - y - 1 = 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x - 2y = -3 \\ x - y = 8 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} + \\ \hline -3y = 5 \\ y = -\frac{5}{3} \end{array}$$

$$x - \left(-\frac{5}{3} + 1\right) = 7 \Leftrightarrow x + \frac{2}{3} = 7$$

$$\Leftrightarrow x = 7 - \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{19}{3}$$

Solução: $\left(\frac{19}{3}, -\frac{5}{3}\right)$.

$$c) \begin{cases} 1 - \frac{x-y}{2} = 0 \\ x - (1-y) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - (x-y) = 0 \\ x - 1 + y = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x + y = 0 \\ x + y = 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = -2 \\ x + y = 10 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} + \\ \hline 2y = 8 \Leftrightarrow y = \frac{8}{2} \\ \Leftrightarrow y = 4 \end{array}$$

$$x - (1 - 4) = 9 \Leftrightarrow x - (-3) = 9$$

$$\Leftrightarrow x + 3 = 9$$

$$\Leftrightarrow x = 6$$

Solução: (6, 4).



5

RESOLUÇÃO GRÁFICA DE SISTEMAS DE DUAS EQUAÇÕES LINEARES COM DUAS INCÓGNITAS

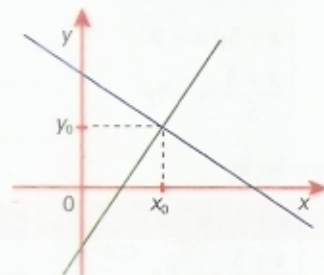
Para resolver graficamente o sistema de equações

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

começa-se por resolver as duas equações em ordem a y :

$$\begin{cases} y = -\frac{a_1}{b_1}x + \frac{c_1}{b_1} \\ y = -\frac{a_2}{b_2}x + \frac{c_2}{b_2} \end{cases}$$

e faz-se a representação gráfica das duas funções lineares.



As coordenadas (x_0, y_0) , do ponto de intersecção das duas rectas é a solução procurada.

EXEMPLOS:

Resolva graficamente e classifique os sistemas:

1. $\begin{cases} 4x + 2y = 0 \\ 3x + 3y = 6 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2y = 6 - 2x \end{cases}$

3. $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 4 \end{cases}$

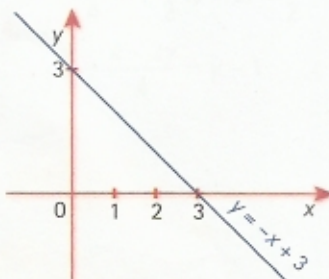
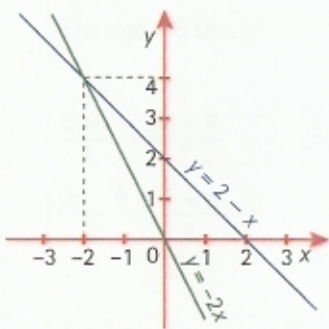
Resolução

1. $\begin{cases} 4x + 2y = 0 \\ 3x + 3y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ y = 2 - x \end{cases}$

As duas rectas têm um único ponto comum $(-2, 4)$ que é solução do sistema. Um sistema é possível e determinado se as rectas correspondentes às equações do sistema se intersectam num único ponto.

2. $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2y = 6 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 3 \\ y = 3 - x \end{cases}$

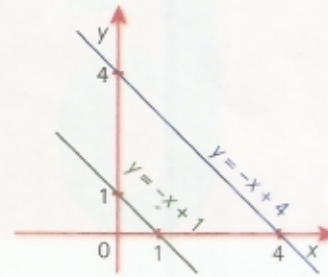
As duas rectas são coincidentes (têm todos os pontos em comum), por isso, o sistema tem um número infinito de soluções (é indeterminado). Um sistema é possível e indeterminado se as rectas correspondentes às equações do sistema são coincidentes.



$$\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x+1 \\ y=-x+4 \end{cases}$$

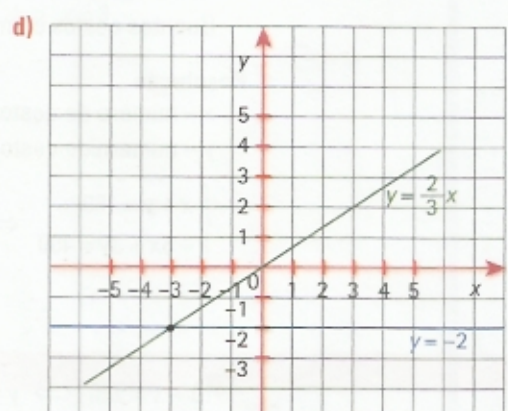
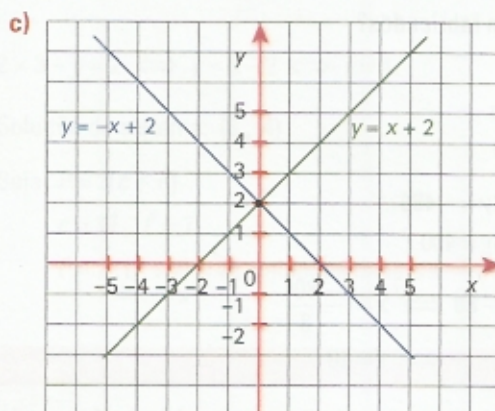
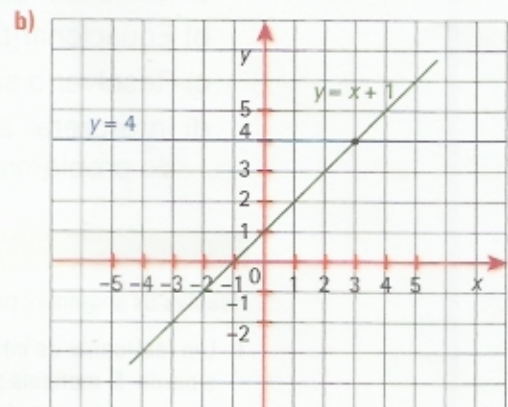
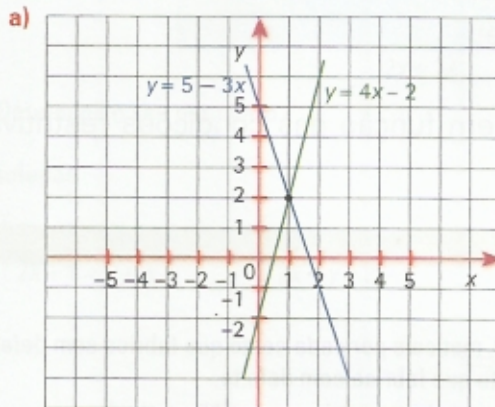
As duas rectas são paralelas (não têm nenhum ponto em comum), por isso, o sistema não tem solução (é impossível).

Um sistema é impossível se as rectas correspondentes às equações do sistema são paralelas.



Exercício n.º 5

1. Para cada uma das situações:



- i) indique a solução do sistema;
ii) escreva o sistema na forma canónica e resolva-o analiticamente.

2. Resolva os sistemas

a)
$$\begin{cases} -\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = -3 \\ x - \frac{y}{3} = 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x - \frac{y+1}{2} = 1 \\ \frac{x-1}{3} - (y-1) = 2 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} \frac{x-3}{3} - \frac{y-2}{2} = 1 \\ \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} \frac{x}{5} - \frac{y-1}{3} = \frac{2}{5} \\ x + y + 1 = -4 \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} 2x - \frac{2}{3} \left(\frac{y-2}{2} \right) = 7 \\ \frac{x-2}{3} - \frac{y-3}{2} + 1 = 0 \end{cases}$$

6

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS CONDUCENTES A SISTEMAS DE DUAS EQUAÇÕES LINEARES COM DUAS INCÓGNITAS

Na resolução de problemas conducentes a sistemas de equações é conveniente considerar as seguintes fases:

- Identificar as incógnitas;
- Equacionar o problema;
- Resolver o sistema;
- Interpretar a solução em função das condições restritivas do problema.

EXEMPLOS:

Resolva os seguintes problemas.

- Um fabricante de cestos ganha 3 meticais por cada cesto que fabrica sem defeito e perde 5 meticais por cada cesto que fabrica com defeito. Numa semana fabricou 160 cestos e obteve um lucro de 400 meticais. Quantos cestos com defeito foram fabricados?

Resolução

x – número de cestos com defeito
 y – número de cestos sem defeito

$$\begin{cases} x + y = 160 \\ -5x + 3y = 400 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x - 3y = -480 \\ -5x + 3y = 400 \end{cases}$$

$$-8x = -80 \Leftrightarrow x = \frac{-80}{-8}$$
$$\Leftrightarrow x = 10$$

$$10 + y = 160 \Leftrightarrow y = 160 - 10$$
$$\Leftrightarrow y = 150$$

O sistema tem solução (10, 150), ou seja, foram fabricados 10 cestos com defeito.

- Uma esquadra da polícia de uma cidade tem oito veículos – carros e motorizadas. O número total de rodas de carros e de motorizadas é 40. Quantos carros é que a esquadra da polícia tem?

Resolução

x – número de carros
 y – número de motorizadas

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 4x + 2y = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 2y = -16 \\ 4x + 2y = 40 \end{cases}$$

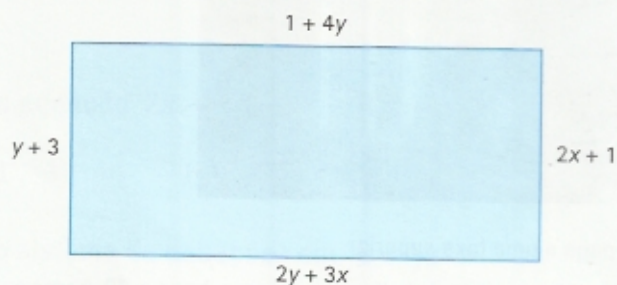
$$2x = 24 \Leftrightarrow x = \frac{24}{2}$$
$$\Leftrightarrow x = 12$$

$$12 + y = 8 \Leftrightarrow y = 8 - 12 \Leftrightarrow y = -4$$

Solução do sistema: $(12, -4)$

Como y é o número de motorizadas e o valor encontrado no sistema foi $y = -4 < 0$, o problema não tem solução.

3. A figura representa um rectângulo.



Determine o seu perímetro.

Resolução

$$\begin{cases} 2y + 3x = 1 + 4y \\ 2x + 1 = y + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y - 4y = 1 \\ 2x - y = 3 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ -4x + 2y = -4 \end{cases}$$

$$-x = -3 \Leftrightarrow x = 3$$

$$2 \times 3 - y = 2 \Leftrightarrow y = 6 - 2 \Leftrightarrow y = 4$$

Solução do sistema: $(3, 4)$.

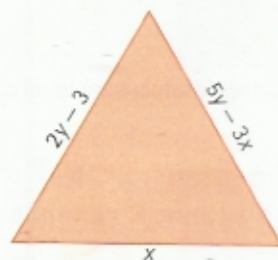
Seja $P = 2(c + \ell)$

$$c = 17, \ell = 7$$

$$P = 2(17 + 7) = 48 \text{ unidades lineares.}$$

Exercício n.º 6

- Um cavalo e um burro caminhavam juntos, carregando cada um cargas bastante pesadas. Lamentava-se o cavalo seu pesado fardo, ao que o interrompeu o burro:
 - De que te queixas? Se eu tomasse um dos teus sacos, a minha carga passaria a ser o dobro da tua. Por outro lado, se eu te desse um saco, a tua carga igualaria a minha.
 Quantos sacos levavam o cavalo e o burro?
- A figura representa um triângulo equilátero. Determine a medida dos lados do triângulo.



3. A Ana e o Alexandre trabalham em *part-time* num café-restaurante.



Depois das 22 horas cada hora de trabalho é paga a uma taxa superior.

A semana passada a Ana recebeu 234,00 Mt por 30 horas de trabalho com o preço-base e 12 horas a uma taxa superior.

O Alexandre recebeu 355,00 Mt por 50 horas a preço-base e 15 horas à taxa mais elevada.

Quanto recebeu a Ana por hora de trabalho depois das 22 horas?

4. O professor Malaquias fez um teste com 12 questões, estabelecendo que atribuiu 4 valores por cada questão resolvida correctamente e descontava 3 valores por cada questão não resolvida correctamente.

Quantas questões respondeu correctamente o Rui, sabendo que obteve 13 valores?

5. Comprei laranjas a 2,00 Mt e tangerinas a 1,00 Mt, tendo gasto 50,00 Mt.



Se cada laranja custasse menos 1,00 Mt teria gasto 30,00 Mt.

Quantas laranjas e quantas tangerinas comprei?

6. Há 5 anos, o João tinha o quádruplo da idade do seu filho Luís. Daqui a 5 anos, a idade do Luís será $\frac{3}{7}$ da idade que o seu pai terá.

a) Qual é a idade actual de cada um?

b) Daqui a quantos anos é que a soma das idades dos dois será igual a 94 anos?

1. Dada a equação $2x - y = 5$, qual dos pares ordenados (x, y) é solução da equação?

- a) $(-1, 3)$ b) $(1, 6)$ c) $(\frac{1}{2}, -5)$ d) $(-10, -25)$

2. Dado o sistema de equações em x e y :

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 6x + 3y = 2m \end{cases}$$

determine o valor de m para que $(3, -2)$ seja solução.

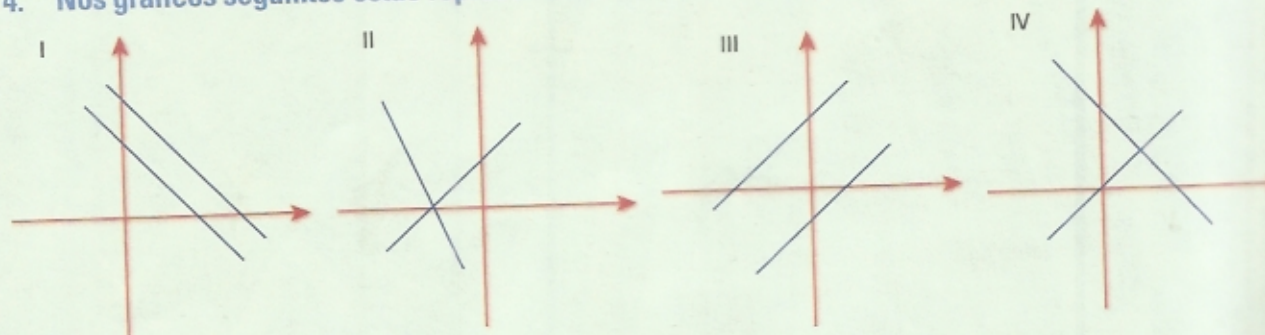
3. Resolva os sistemas:

a)
$$\begin{cases} x - y = 5 \\ y - x = -10 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 3x = 6 \\ \frac{x}{4} - \frac{y}{3} = x + 2 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x - 5y = 10 \\ 2x = 10(2 + y) \end{cases}$$

4. Nos gráficos seguintes estão representados sistemas de equações.



Quais são:

a) Possíveis;

b) Impossíveis;

c) Indeterminados.

5. Num armazém rectangular o dobro do comprimento é igual ao triplo da largura. Se o armazém tivesse mais 3 metros de largura e menos 3 metros de comprimento, seria quadrado.

Determine as dimensões do armazém.

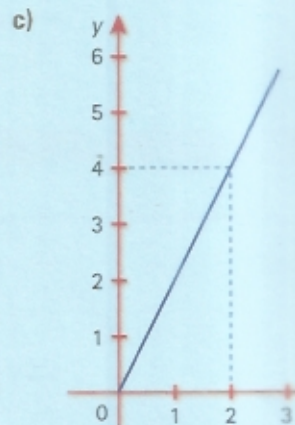
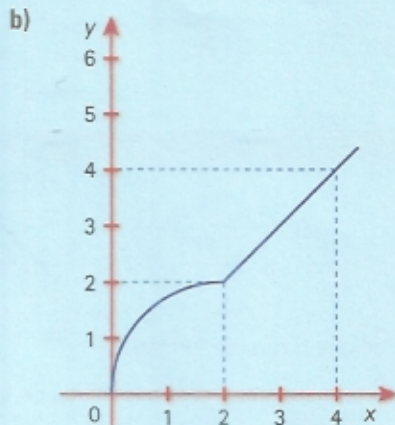
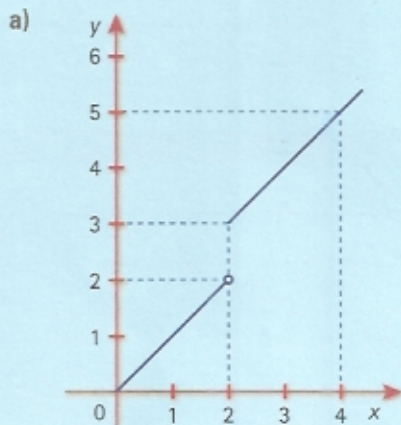
V CIRCUNFERÊNCIA E CÍRCULO

1. CIRCUNFERÊNCIA E CÍRCULO. SEUS ELEMENTOS
2. ÂNGULOS NA CIRCUNFERÊNCIA
3. CÁLCULOS NA CIRCUNFERÊNCIA E CÍRCULO

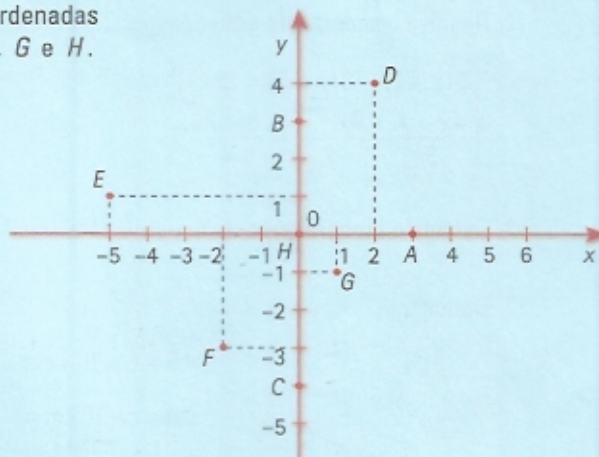
EXERCÍCIOS DE REVISÃO

1. Resolva os seguintes exercícios usando a recta graduada.
 - a) $8 - 3$
 - b) $4 - 6$
 - c) $-4 - 2$
2. Efectue os seguintes cálculos.
 - a) $(9 + 5) \times (12 - 9)$
 - b) $5 \times 4^2 - 6 \times 2 + (-2)^3$
 - c) $15^2 + 42 \times (-1) - (3 + 3)^2$
3. Numa escavação arqueológica feita em Junho de 1980, descobriu-se uma enxada de pedra que tinha a idade de 2300 anos.
Em que ano foi feita a enxada?
4. Considere a equação $2a - 3 = a + 3 - 4a$ e indique:
 - a) a incógnita;
 - b) o 1.º membro;
 - c) o 2.º membro;
 - d) os termos do 1.º membro;
 - e) os termos do 2.º membro;
 - f) os termos independentes;
 - g) a solução da equação.
5. Considere a equação $2(x + 1) = x + 9$
 - a) Sem a resolver, diga, justificando, se 6 é raiz da equação.
 - b) Resolva a equação dada.
6. Resolva as equações.
 - a) $12x + 5 - x = 7x - 4$
 - b) $\frac{3 - x}{3} - \frac{2(x - 1)}{4} = \frac{1}{12} - \frac{4(x - 1)}{6}$

7. Dos seguintes gráficos, indique os que podem representar uma relação de proporcionalidade directa e determine a constante de proporcionalidade.



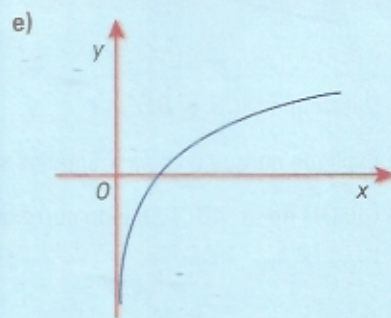
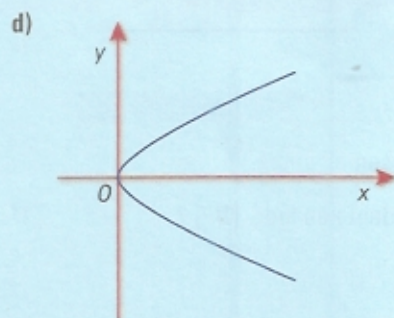
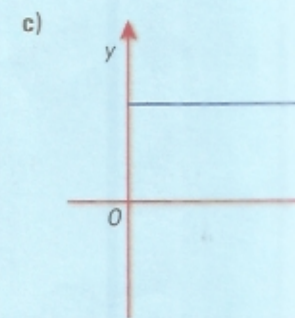
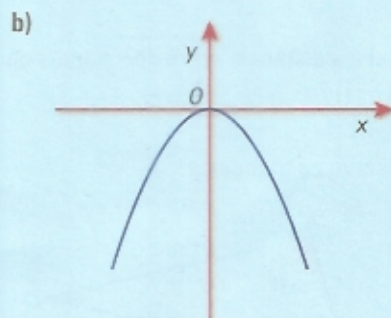
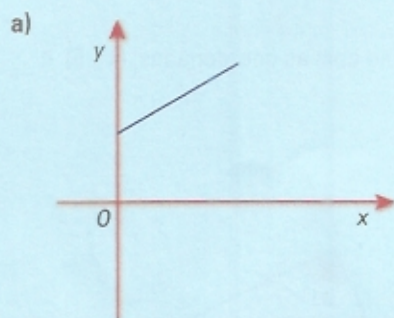
8. Observe a figura. Indique as coordenadas dos pontos A, B, C, D, E, F, G e H.



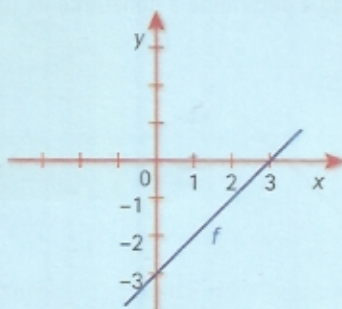
9. Considere os diagramas.

- Quais dos gráficos dados não representam funções?
- Indique os gráficos que representam funções injectivas.

10. Determine os números a e b da função $f(x) = ax + b$, sabendo que $f(2) = -9$ e $f(1) = -2$.



11. Considere o gráfico da função linear f .



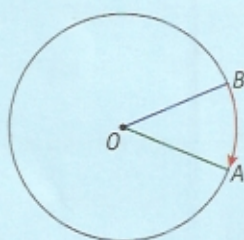
- Indique o zero da função.
- Determine a expressão analítica da função.

12. Resolva o sistema de equações.

$$\begin{cases} 5(x+2) - 3(y-5) = 29 \\ \frac{4x-1}{3} - \frac{3y-1}{2} = \frac{5-2x}{4} \end{cases}$$

13. Calcule o comprimento de um arco para $r=3$ m e $\alpha=135^\circ$.

14. Dados



$$\widehat{AB} = l = 10,4 \text{ cm}$$

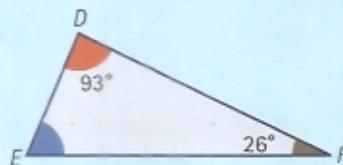
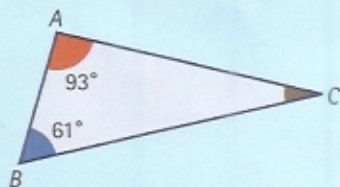
$$\widehat{DA} = r = 10 \text{ cm}$$

Qual é a medida do $\sphericalangle AOB$?

15. Calcule o perímetro e a área de um círculo de raio 4 cm.

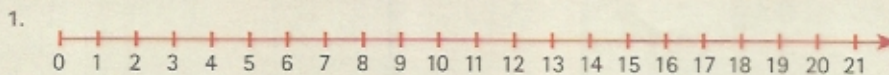
16. Qual é a distância entre dois pontos no plano com as coordenadas $(4, 5)$ e $(2, -1)$?

17. Observe os triângulos:

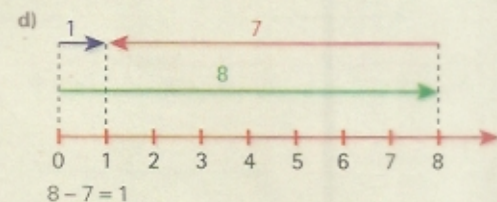
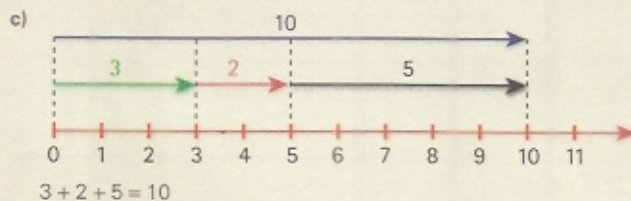
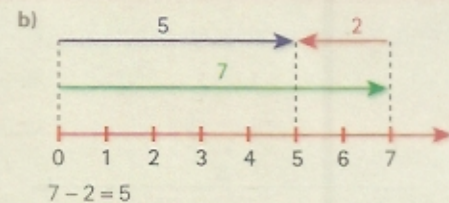
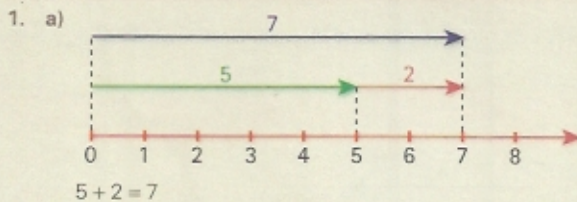


- Determine $\hat{A}CB$ e $\hat{D}EF$.
- Explique porque os dois triângulos são semelhantes.
- Qual é, no $\triangle ABC$, o lado correspondente ao lado $[DF]$?

Exercício n.º 1



Exercício n.º 2



2. a) $3 + 5 = 8$ b) $6 - 4 = 2$

3. $1800 - 480 - 525 = 1320 - 525 = 795$
Deverá descarregar 795 tijolos.

4.	2684	1629	
	1325	486	
	486	2684	
	+ 1629	+ 1325	
	6124	6124	

- a) São iguais.
b) Comutativa.
c) ...comutativa da ...

5. a) 3792 b) 2478 1314 $2478 + 1314 = 3792$
c) São iguais. d) Associativa.

6. $100,00 \text{ Mt} \times 120 + 500,00 \text{ Mt} = 12\,000,00 \text{ Mt} + 500,00 \text{ Mt} = 12\,500,00 \text{ Mt}$

7. a) $3 \times 16 = 48$ b) 3×38 c) $(135 - 1) + 135 + (135 + 1) = 3 \times 135 = 405$

8. $(1425 - 525) : 6 = 150$ Cada caixa contém 150 garrafas.

9. $17 : 3 = 5,67$ São necessários 6 vagões.

10. a)

287040		832
- 2496		345

03744		
- 3328		

04160		
- 4160		

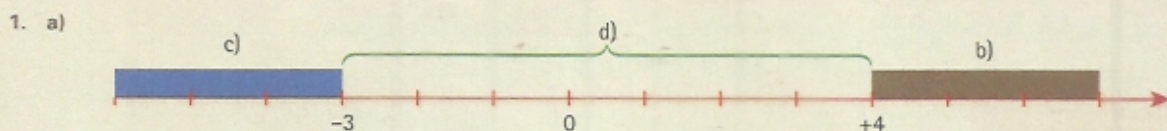
0000		

b)

159258		254
0685		627

1778		
000		

Exercício n.º 3



2. a) F b) V c) F 3. $\{(-7), (-3), (-1), 0, (+2), (+5), (+10)\}$
4. a) > b) < c) < d) > e) < f) >

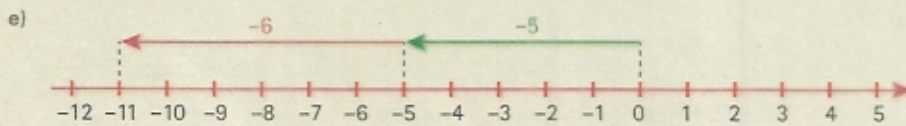
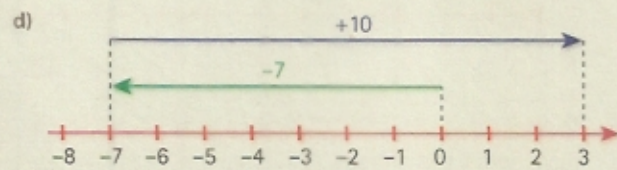
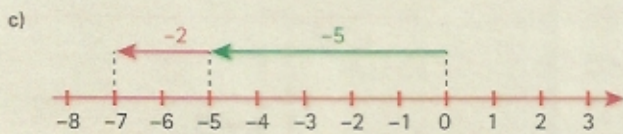
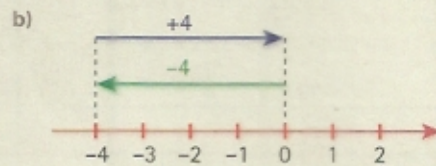
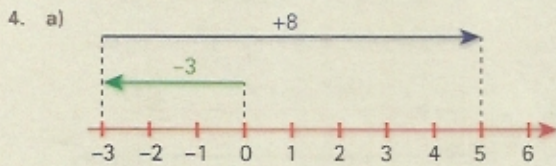
5. $A = -8$; $B = -6$, $C = -3$, $D = +2$, $E = +4$; $F = +8$
 7. a) 7 b) 7 c) 35 d) 4
 8. São iguais.

Número	Simétrica	Valor absoluto
-3	+3	3
+4	-4	4
+20	-20	20
-5 ou +5	+5 ou -5	5

Exercício n.º 4

pág. 15

1. a) -13 b) -69 c) -33 d) -122 e) +1071 f) -2000
 2. a) +1 b) -1 c) -3 d) +13
 3. a) 8 b) -56 c) 85 d) 0 e) 14 f) -15



Exercício n.º 5

págs. 17/18

1. a) +8 b) -8 c) 0 d) 0 e) -4 f) -4
 2. a) $(+32) + (+8) + (-5) + (+12) + (-10) + (+5) + (-7) + (+4) + (-12) + 0 =$ b) 27
 3. a) +2 b) +7 c) -3
 4. a) -22 b) +43 c) -63

5.

$a+b$	$b+c$	$(a+b)+c$	$a+(b+c)$
4	7	-3	-3
-7	5	-2	-2
-1	-13	-14	-14

6. a) 0 b) 2 c) -2 d) -10 e) -17 f) -40

Exercício n.º 6

págs. 18/19

1. a) 4 b) -6 c) -2 d) -2 e) -2 f) -4 g) 8 h) -5
 2. a) 239 b) -18 c) 0 d) -8 e) +5 f) -10 g) -7 h) -14
 i) 10 j) 4 l) -1 m) +3

3. 10,00 Mt 4. (-15): tem de pagar 15,00 Mt.

5.

$a-b$	$(a+b)-c$	$a-(b+c)$
	6	0
11	4	14
10	2	
-3	-4	2

6. a) -9 b) -16

Exercício n.º 7

- | | | | | | |
|-------------|-------|--------------|-------|----------------------|--------|
| 1. a) 3 | b) 3 | c) 14 | d) -9 | e) 18 | f) 0 |
| 2. a) 30 | b) -3 | c) -4 | d) 5 | | |
| 3. a) 12 | b) 6 | c) -1 | d) -6 | e) 5 | f) -13 |
| g) 0 | h) 10 | i) 8 | j) -7 | | |
| 4. a) 1 | b) -1 | c) 13 | d) -9 | | |
| 5. 0 pontos | | 6. 69 pontos | | 7. Ficou com 6,00 Mt | |

Exercício n.º 8

- | | | | | | |
|------------|-----------|--------------|------------|------------|---------|
| 1. a) 52 | b) 30 | c) $xy + xz$ | | | |
| 2. a) 10 | b) 30 | c) -1200 | d) -2000 | e) 2500 | f) -150 |
| g) -15 000 | h) 15 000 | c) -10 000 | j) -56 000 | k) -12 | l) -12 |
| 3. a) 9 | b) -7 | c) -9 | d) -12 | e) 0 | f) -9 |
| g) 9 | h) -12 | i) -4 | j) 40 | k) 18 | l) -8 |
| 4. a) 36 | b) 900 | c) 0 | d) 16 | e) -22 | f) -1 |
| 5. a) + | b) - | c) - | d) + | 6. 7896 Mt | |

Exercício n.º 9

- | | | | | | | | |
|-----------|-------|----------|--------|-------|------|-------|-------|
| 1. a) 3 | b) -8 | c) 1 | d) -5 | e) 3 | f) 2 | g) 50 | h) -1 |
| 2. a) -10 | b) 1 | c) -2500 | d) -16 | e) -5 | f) 1 | g) 1 | |

Exercício n.º 10

- | | | | | | |
|--------------------------|--------------------|------------------|---------|-------|------|
| 1. a) -25 | b) 25 | c) 36 | d) -64 | e) -5 | |
| 2. a) 11 | b) 13 | c) 0 | 3. a) 6 | b) 14 | e) 4 |
| 4. a) -2; 4; -8; 16; -32 | b) 2; 4; 8; 16; 32 | c) 0; 0; 0; 0; 0 | | | |
| d) -1; 1; -1; 1; -1 | e) 1; 1; 1; 1; 1 | | | | |

Exercício n.º 11

- | | | | | | | | |
|----------------------|-----------------|----------------|-------------------|--------------------|----------------|-------------|-------------|
| 1. a) $4^2 = 16$ | b) $4^5 = 1024$ | c) $4^2 = 16$ | d) 4 | e) $4^2 = 16$ | f) $5^4 = 625$ | g) -12 | h) -4 |
| 2. a) $(-6)^{14}; +$ | b) $7^{19}; +$ | c) $7^{18}; +$ | d) $(-6)^{13}; -$ | e) $(-6)^{12}; +$ | f) $-7; -$ | g) $2^4; +$ | h) $4^6; +$ |
| i) $(-4)^6; +$ | j) $(-4)^9; -$ | k) $4^{15}; +$ | | | | | |
| 3. a) 3 | b) $5^5 = 3125$ | c) 1 | d) 42^5 | e) $2^{13} = 8192$ | f) 16 | g) 5 | h) -3 |
| i) -11 | j) $(-3)^2 = 9$ | k) -9 | l) 4 | m) 66 | | | |

Exercício n.º 12

- | | | | | | | | |
|--|---|------------------------------------|---------------------------------|-------------------|-------------------|-------------------|--------|
| 1. $\frac{8}{2}$ e $\frac{9}{1}$ | 2. $\frac{17}{3} = 5\frac{2}{3}$ | $\frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$ | 3. $\frac{15}{3}; \frac{21}{3}$ | | | | |
| 4. a) 20 | b) 4 | c) 15 | d) 8 | e) 10 | f) 40 | g) 7 | h) 100 |
| 5. a) $\frac{3}{4}$ | b) $\frac{3}{5}$ | c) $\frac{4}{15}$ | d) $\frac{6}{25}$ | e) $\frac{13}{8}$ | f) $\frac{4}{15}$ | g) $\frac{11}{7}$ | |
| 6. a) $\frac{1}{5} = \frac{2}{10} = \frac{3}{15} = \frac{4}{20} = \frac{5}{25} = \frac{6}{30}$ | b) $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \frac{10}{15} = \frac{12}{18}$ | | | | | | |
| 7. a) $\frac{5}{7} < \frac{3}{4}$ | b) $\frac{3}{4} < \frac{13}{6} < 2\frac{2}{3}$ | c) $\frac{17}{42} > \frac{19}{48}$ | | | | | |
| 8. $\frac{21}{7}; \frac{30}{11}; \frac{8}{5}; \frac{2}{3}; \frac{7}{15}$ | | | | | | | |

Por exemplo:

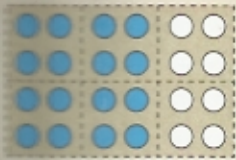


Fig. 1

a) Sáb.

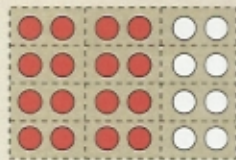


Fig. 2

b) $\frac{2}{3}$

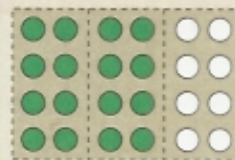


Fig. 3

c) $\frac{6}{9}; \frac{10}{15}; \frac{12}{18}$

Exercício n.º 13

pág. 40

- | | | | | | |
|--------------------------------------|-------------------|------------------------------------|--------------------|------------------------------------|-------------|
| a) 0,3) | b) 0,1 | c) 0,4 | d) 0,428... | | |
| e) 250,323 ; $\frac{250\,323}{1000}$ | | f) 0,5721 ; $\frac{5721}{10\,000}$ | | g) 55,003 ; $\frac{55\,003}{1000}$ | |
| h) $\frac{7}{10}$ | i) $\frac{9}{10}$ | j) $\frac{8}{25}$ | k) $\frac{3}{500}$ | l) $\frac{4}{125}$ | |
| m) 0,5 | n) 0,(6) | o) 1 | p) 1,(3) | q) 2,(6) | r) 0,25 |
| s) 0,4 | t) 0,75 | u) 1,25 | v) 1,5 | w) 1,75 | x) 0,428... |
| y) 1,285... | z) 0,(1) | aa) 0,(4) | ab) 0,(8) | ac) 1,(2) | ad) 0,125 |
| ae) 0,25 | af) 0,375 | ag) 0,5 | ah) 0,625 | ai) 0,75 | aj) 0,(003) |

Exercício n.º 14

pág. 42

1. $|+3|=3$; $|-2|=2$; $|0|=0$; $|-4|=4$; $|-2\frac{1}{2}|=2\frac{1}{2}$
 2. $-6\frac{1}{2}$; -6 ; 0 ; 3 ; 7 3. -4 ; 0 ; -1 ; $-2,2$; $-2\frac{1}{2}$; -3

Exercício n.º 15

pág. 44

- | | | | | | |
|--------------------|--------------------|-------------------|--------------------|-------------------|--------------------|
| a) $-\frac{1}{10}$ | b) $-\frac{3}{2}$ | c) $-\frac{1}{2}$ | d) $-\frac{11}{4}$ | e) $\frac{3}{2}$ | |
| f) $-1,75$ | g) $-1,7$ | h) 5,82 | | | |
| i) $-\frac{3}{4}$ | j) 0 | k) 0,9 | l) $-3,6$ | | |
| m) $\frac{2}{7}$ | n) $\frac{7}{2}$ | o) $\frac{1}{10}$ | p) $\frac{11}{5}$ | q) 3,1 | |
| r) 1 | s) 2,2 | t) 6,85 | | | |
| u) $\frac{2}{15}$ | v) $\frac{11}{12}$ | w) -9 | x) $\frac{13}{3}$ | y) $\frac{35}{4}$ | z) $\frac{97}{80}$ |
| aa) 3,47 m | ab) 2,51 m | | | | |

Exercício n.º 16

pág. 46

- | | | | | | |
|--------------------|---|--------------------|--------------------|-------------------|--|
| a) $-\frac{3}{7}$ | b) $\frac{8}{5}$ | c) $-\frac{7}{45}$ | d) $-\frac{8}{27}$ | e) $-\frac{9}{5}$ | |
| f) -6 | g) -4 | h) -8 | | | |
| i) $\frac{14}{45}$ | j) $-\frac{4}{9}$ | k) $\frac{10}{3}$ | l) $\frac{7}{5}$ | | |
| m) comutativa | n) elemento absorvente | o) associativa | p) elemento neutro | | |
| q) elemento oposto | r) distributiva em relação à adição algébrica | | | | |
| s) -2 | t) $\frac{9}{2}$ | u) $\frac{1}{4}$ | v) $\frac{1}{4}$ | | |
7. A Sr.ª Eugénia teve de pagar 142,50 Mt.

Exercício n.º 17

pág. 48

- | | | | | | |
|--------------------|----------|-------------------|--------|-------------------|------------------|
| a) -2 | b) -3 | c) 5 | d) 4 | e) 6 | f) 0 |
| g) -6 | h) -12 | i) $\frac{1}{12}$ | j) 3 | k) $-\frac{2}{3}$ | l) $\frac{5}{8}$ |
| m) -22 | n) 0,4 | o) -7 | p) 0,1 | | |
| q) -4 ; não goza | | 3. a) V | b) F | | |

4. a) $\frac{17}{2}$ b) $\frac{55}{12}$ c) -1 d) $\frac{1}{2}$ e) $-\frac{10}{7}$ f) $-\frac{6}{7}$
 5. a) $\frac{1}{6}$ b) 200,00 Mt c) 400,00 Mt 6. 8000 espectadores
 7. a) 17 vagões b) 12 toneladas 8. a) 9,75 m b) 56,55 Mt

Exercício n.º 18

pág. 49

1. a) $-\frac{9}{4}$ b) $-\frac{3}{2}$ c) -1 d) -3 e) 0
 f) $\frac{6}{5}$ g) $\frac{19}{8}$ h) $-\frac{50}{9}$ i) $\frac{11}{6}$ j) $\frac{8}{3}$
 k) 1125 l) 12,4 m) $15\frac{1}{2}$ n) $-\frac{11}{3}$ o) $1\frac{3}{5}$
 p) $\frac{6}{5}$ q) $1\frac{1}{2}$ r) $-\frac{5}{17}$ s) $2\frac{1}{4}$
2. a) $(58\ 000 \times 6) + (17\ 000 \times 12,5) + (33 \times 100 \times 5) = 577\ 000,00$ Mt b) $\frac{1}{4} 577\ 000,00$ Mt = 144 250 Mt
 c) Chega, porque $\frac{1}{8}$ de 577 000,00 Mt são 72 125,00 Mt. d) Cada um recebeu, aproximadamente, 4703,80 Mt
 $(\frac{3}{8} \times 577\ 000,00) : 46 = 4703,80$ Mt

Exercício n.º 19

pág. 50

1. a) 25 b) 16 c) 64 d) -32 e) $\frac{81}{16}$ f) -0,001
 2. a) -4 b) -8 c) -1,2 d) $\frac{3}{8}$ e) 72 f) $-\frac{8}{9}$
 3. a) $\frac{16}{9}$ b) -32 c) $\frac{15}{2}$ d) 0

Exercício n.º 20

págs. 53/54

1. Por exemplo:
 a) 3^2 b) 3^4 c) 10^2 d) 10^{-2} e) 3^{-1} f) 10^{-3}
 g) $(\frac{2}{5})^2$ h) 18^2 i) -5^{-2} j) $(-2)^0$
2. a) 10^{-4} b) 1 c) -5^{-4} d) -1 e) $\frac{2}{3}$ f) -36
 g) 36 h) $-(\frac{2}{3})^6$
3. a) 1 b) $-\frac{4}{5}$ c) 32 d) 6 e) 25 f) $\frac{131}{192}$

Exercício n.º 21

pág. 56

1. a) 10^3 b) 10^5 c) 10^7 d) 10^{-1} e) 10^{-6} f) 10^{12}
 2. a) 10 000 b) 0,03 c) 12 500 d) 0,35 e) 0,01 f) 10^{-12}
 3. a) e f)
 4. a) $3,21 \times 10^2$ b) $3,3 \times 10^3$ c) $6,6 \times 10^3$ d) $5,318 \times 10^4$ e) $3,15 \times 10^5$ f) $3,2 \times 10^7$
 g) 3×10^{-2} h) $3,2 \times 10^{-4}$ i) 5×10^{-6}
 5. a) $2,8 \times 10^8$ b) $6,6 \times 10^7$ c) $2,14 \times 10^9$

Exercício n.º 22

pág. 58

1. a) 9 b) 12 c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{5}$ 2. a) 1 b) 10 c) 0,1 d) $\frac{1}{100}$
 3. a) 2 b) 1,1 c) 1,7776 4. a) 9 b) 9,628 c) 4,637
 5. a) 9,055 b) 3,715 c) 2,7258

Exercício n.º 23

págs. 58/59

- | | | | | |
|-----------------------|---------------------|--------------------|--------------------|-------------------|
| 1. a) $\frac{1}{10}$ | b) $\frac{24}{31}$ | c) $\frac{1}{37}$ | | |
| 2. a) $\frac{1}{6}$ | b) 30 | c) 400 | d) $\frac{7}{10}$ | e) 200 |
| f) 0,0002 | g) 53 | h) 6000 | | |
| 3. a) 15 | b) $\frac{13}{45}$ | c) $\frac{38}{15}$ | d) $-\frac{74}{5}$ | |
| 4. a) 1 | b) -16 | c) -1 | d) $-\frac{7}{4}$ | e) $\frac{3}{16}$ |
| 5. a) $-\frac{11}{9}$ | b) $-\frac{11}{4}$ | c) $-\frac{25}{4}$ | d) -11 | e) $\frac{5}{9}$ |
| f) 1 | g) $\frac{113}{25}$ | h) $-\frac{5}{12}$ | | |
| 6. a) 0,5 | b) 0,4 | c) $\frac{1}{10}$ | d) 0,01 | |
| 7. a) 8,620 | b) 1,4457 | c) 4,572 | d) 2,4617 | |

Exercício n.º 24

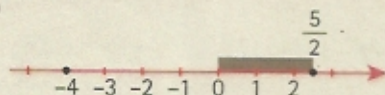
pág. 59

- | | | |
|--------------|--------------|---------------|
| 1. 122,50 Mt | 2. a) 41,6 l | b) 1478,88 Mt |
| 3. 62,67 Mt | 4. 44,721 m | |

Avaliação formativa

págs. 60/61

1. a) e b)



- | | | | | | |
|--------------------------|--|--------------------|-----------|-------------------|-------------------|
| 2. a) +20; +10; +5; -25 | b) 20+20+10+5-25 | c) 30 | | | |
| 3. 3; 4; 3; 1; -1; 0; -2 | | | | | |
| 4. a) F | b) F | c) V | d) F | e) V | f) V |
| 5. a) +1500 | b) +1600 | c) -400 | | | |
| 6. a) $-\frac{23}{6}$ | b) $-\frac{3}{2}$ | | | | |
| 7. a) 5 | b) $-\frac{5}{2}$ | c) $\frac{65}{24}$ | d) -6,225 | | |
| 8. a) 8 | b) $-\frac{6}{5}$ e -30. Não, a divisão não tem propriedade associativa. | c) $\frac{13}{4}$ | | | |
| d) -3 | e) $-\frac{1}{6}$ | f) $-\frac{1}{8}$ | | | |
| 9. a) 38 700 Mt | b) 6450,00 Mt | c) $\frac{13}{4}$ | d) -3 | e) $-\frac{1}{6}$ | f) $-\frac{1}{8}$ |

Exercício n.º 1

pág. 76

- | | | | | |
|---------------------|----------------------|---------------------|-----------------------|-----------------------|
| 1. a) É raiz. | b) Não é solução. | c) Não é solução. | d) É raiz. | e) Não é raiz. |
| 2. a) Equivalentes | b) Não equivalentes. | c) Equivalentes. | | |
| 3. a) $x=6$ | b) $x=5$ | c) $x=-\frac{5}{2}$ | d) $x=\frac{4}{5}$ | e) $x=-\frac{30}{11}$ |
| f) $x=-\frac{1}{5}$ | g) $x=-6$ | h) $x=-\frac{3}{5}$ | i) $x=-\frac{33}{37}$ | j) $x=\frac{11}{16}$ |
| l) $x=\frac{15}{2}$ | m) indeterminada | n) impossível | o) impossível | |

Exercício n.º 2

pág. 77

- | | | | | | |
|-----------------------|--------------------|----------------------|---|-----------------------------|-------------------------|
| 1. a) $v=\frac{e}{t}$ | b) $t=\frac{e}{v}$ | 2. $a=-\frac{5b}{4}$ | 3. $t=\frac{Q+mct_0}{mc}$ ou $t=\frac{Q}{mc}+t_0$ | 4. a) $C=\frac{5}{9}(F-32)$ | b) $F=\frac{9C+160}{5}$ |
|-----------------------|--------------------|----------------------|---|-----------------------------|-------------------------|

Exercício n.º 3

pág. 78

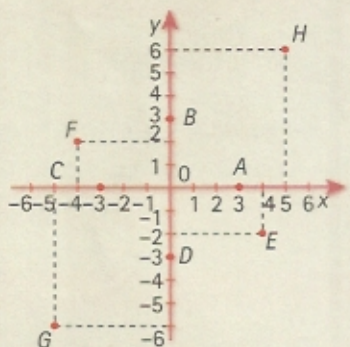
- | | | | |
|--|---|-------------------|--------------------|
| 1. 12 | 2. 6, 8 e 10 | 3. 30°, 60° e 90° | 4. $x=9$ cm, 14 cm |
| 5. O primeiro lavrou 3,5 ha, o segundo 2,7 ha e o terceiro 2,2 ha. | 6. $\sphericalangle BAC=30^\circ$; $\sphericalangle ABC=60^\circ$; $\sphericalangle BCA=90^\circ$ | 7. 5 | |

Avaliação formativa

1. a) Nenhum b) -3 2. a) $x=5$ b) impossível c) $x=-\frac{3}{2}$ d) indeterminada
 3. $t = \frac{C - C_0}{\alpha C_0}$ 4. a) $x=9$ b) $P=34$ cm

Exercício n.º 1

1. $E(4, 3)$ $P(2, 4)$ $G(-3, 3)$
 $A(-3, 0)$ $C(0, 0)$ $F(-2, -3)$
 $B(0, -2)$ $Z(3, -2)$ $R(4, 0)$



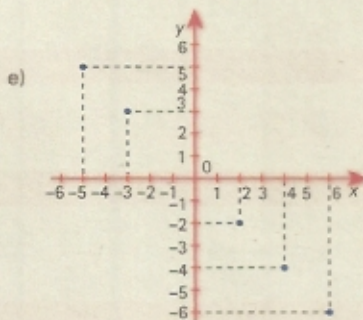
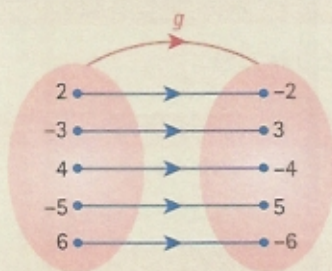
3. $\frac{600}{24} = \frac{800}{x} \Leftrightarrow 600x = 800 \times 24 \Leftrightarrow x = 800 \times \frac{24}{600} \Leftrightarrow x = 32$

Os juros seriam de 32,00 Mt.

4. a) Há proporcionalidade.
 b) Inversa
 c) 180 km
 d) 3 horas
 5. 243,75 kg
 6. 30 vezes

Exercício n.º 2

1. a) Sim, porque todos os elementos de A têm uma única correspondência em B.
 b) Domínio: $D_f = \{2, 3, 4, 5\}$ Contradomínio: $CD_f = \{a, b, d\}$ Conjunto de chegada: B
 c) É a. d) É 4.
 2. a) Domínio: $\{2, -3, 4, -5, 6\}$ Contradomínio: $\{-2, 3, -4, 5, -6\}$
 b) -4 e 3
 c) $g(2) = -2$ e $g(-5) = 5$
 d)

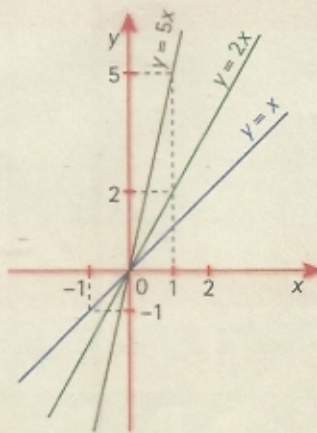
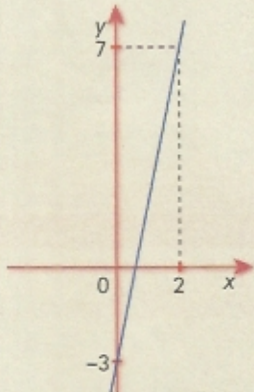


3. a), b) e e) são funções.
 c) e d) não são funções.

4. a) $f(-3) = 16$ b) $g(-3) = -\frac{7}{2}$
 $f(-2) = 9$; $g(-2) = -3$;
 $f(4) = 9$; $g(4) = 0$;
 $f(6) = 25$; $g(6) = 1$;
 c) $h(-3) = 6$; $h(-2) = 5$;
 $h(4) = -1$; $h(6) = -3$

Exercício n.º 3

1. a) 50 km b) 1 hora c) 4 horas d) não
 2. a) $g(-3) = -18$; $g(2) = 7$ 3. a) $y = -x + 1$ 4.
 b) $x = 0$ b) $x = 0$ b) $y = 2x + 3$
 c)



- a) A recta de equação $y = 5x$ tem maior constante de proporcionalidade e maior inclinação.
 b) Quanto maior é a constante de proporcionalidade maior é a inclinação.

5. $y = -2x + 2$

Avaliação-formativa

pág. 107

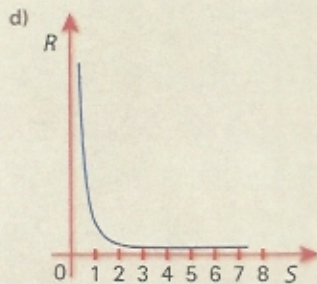
1. a)

I	1	2	2,5	3	4	5
P	4	8	10	12	16	20
A	1	4	6,25	9	16	25

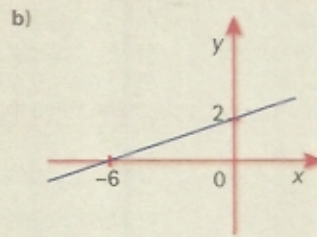
2. a)

x	1	-15	-4	12	15	-30	-2
y	$\frac{5}{3}$	-3	$\frac{2}{3}$	6	7	-8	$\frac{4}{3}$

3. A(5, 1); B(3, 5); C(3, 1); D(0, 3)

4. a) Inversa b) 4 ohm c) 0,025 mm²

5. 23 800,00 Mt

b) Sim, porque $\frac{4}{1} = \frac{8}{2} = \frac{10}{2,5} = \frac{12}{3} = \frac{16}{4} = \frac{20}{5} = 4$ c) Não, porque $\frac{4}{1} \neq \frac{8}{4}$ ou $4 \times 1 \neq 8 \times 4$ 

Exercício n.º 1

pág. 116

1. (1, 4) e $(6, \frac{2}{3})$

2. a) É solução. b) Não é solução.

3. $m = -15$ 4. a) $\begin{cases} x + y = -1 \\ 2x + 2y = -3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 3y = 18 \\ x - 3y = 2 \end{cases}$

Exercício n.º 2

pág. 119

1. (1, 1)

2. (1, 2)

3. (4, 6)

4. (3, 6)

5. (2, 2)

Exercício n.º 3

pág. 122

1. (1, 3)

2. (-1, -3)

3. (-18, 12)

4. $(-\frac{189}{11}, \frac{600}{11})$

Exercício n.º 4

pág. 124

1. $(-\frac{1}{2}, -\frac{2}{3})$ 2. $(-\frac{126}{5}, -\frac{54}{5})$ ou (-25,2; -10,8)

3. (2, 2)

4. (2, 3)

Exercício n.º 5

pág. 127

1. a) i) (1, 2)

b) i) (3, 4)

c) i) (0, 2)

d) i) (-3, -2)

ii) $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ -4x + y = -2 \end{cases}$ iii) $\begin{cases} -x + y = 1 \\ y = 4 \end{cases}$ iii) $\begin{cases} x + y = 2 \\ -x + y = 2 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ y = -2 \end{cases}$

2. a) (2, 6)

b) (1, -1)

c) $(\frac{6}{5}, -\frac{6}{5})$

d) (-3, -2)

e) $(\frac{17}{4}, \frac{13}{2})$

Exercício n.º 6

págs. 129/130

1. O cavalo levava cinco sacos e o burro sete. 2. O lado do triângulo mede 5 unidades lineares.

3. 7,00 Mt

4. Sete questões.

5. 20 laranjas e 10 tangerinas.

6. a) O João tem 30 anos e o Luís 10. b) Daqui a 27 anos.

Avaliação-formativa

pág. 131

1. $(-10, -25)$ 2. $m = 6$ 3. a) Impossível. b) $(2, -\frac{21}{2})$ c) Indeterminado.
 4. a) II e IV b) I e III c) Nenhum. 5. 18 m por 12 m.

Exercício n.º 1

pág. 136

1. a) Circunferência b) Corda c) Raio d) Arco e) Diâmetro f) Semicircunferência

Exercício n.º 2

pág. 144

1. São os pontos C , D e O .
 2. A recta tangente y é perpendicular ao diâmetro \overline{AB} . A tangente z também é perpendicular ao diâmetro \overline{AB} . Em consequência, as duas rectas y e z são paralelas.
 3. a) Corda e diâmetro, respectivamente b) Secante e tangente, respectivamente. 4. 90°
 5. a) 15° b) 30° 6. a) P é exterior b) O pertence à circunferência. c) R é interior

Exercício n.º 3

pág. 150

1. 3,18 dm 2. 62,8 cm 3. a) 90° b) 6 cm^2 c) 15,7 cm ($d = 5 \text{ cm}$)
 4. a) É um quadrado, porque:
 I – todos os seus vértices são inscritos em semicírculos (são de ângulos rectos) \Rightarrow é um paralelogramo rectangular.
 II – as duas diagonais são perpendiculares \Rightarrow é um losango
 III – um losango que é rectangular é um quadrado.
 b) $r = 3 \text{ cm}$ c) $A = \frac{d \times d}{2} = 18 \text{ cm}^2$
 5. a) 314 cm^2 b) 113 m^2 c) 50 dm^2
 6. 0,377 ha 7. $x = 29$; corda = 77; diâmetro = 78

Avaliação-formativa

pág. 151

1. a) Centro ...circunferência b) Raio c) Corda d) Tangente e) Perpendicular
 2. $P = 25,12 \text{ cm}$; $A = 50,24 \text{ cm}^2$ 3. $r = 25 \text{ cm}$ 4. $A = 9,42 \text{ cm}^2$ 5. $A = 50,2 \text{ cm}^2$ ($r = 4 \text{ cm}$)
 6. $\ell = \frac{\alpha}{360^\circ} \times 2 \pi r = 7,065 \text{ m}$ 7. a) $\hat{A} = \hat{B} = 60^\circ$ b) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
 8. $\widehat{AC} = 50^\circ$
 9. $\widehat{CDB} = 45^\circ$; $\widehat{AEB} = 90^\circ$

Exercício n.º 1

pág. 156

1. a) $\sphericalangle BEC$ b) i) 36° ii) 144° 2. a) $x = 42^\circ$ b) $x = 75^\circ$ 3. $\widehat{BAC} = 40$
 4. a) São paralelas, porque os ângulos assinalados têm a mesma amplitude.
 b) São, porque os ângulos assinalados têm a mesma amplitude.
 c) São, porque os ângulos assinalados são suplementares.
 5. $x = 52^\circ$

Exercício n.º 2

pág. 159

1. a) 35° b) 142° c) 50°
 2. a) Escaleno b) Obtusângulo c) $\overline{AB} = 5,5 \text{ cm}$; $\overline{BC} = 3,9 \text{ cm}$ e $\overline{AC} = 2,5 \text{ cm}$
 d) $\hat{A} = 40^\circ$; $\hat{B} = 25^\circ$; $\hat{C} = 115^\circ$
 3. $x = 56^\circ$; $y = 46^\circ$

Exercício n.º 4

págs. 168/169

1. A altura do elefante é de 2,12 m. 2. A distância entre as casas é de 62,5 m.
3. a) $x = 2,5$ b) $x = 12,6 \left(\frac{x}{21} = \frac{21}{35} \right)$ c) $x = 2,7 \left(\frac{x}{3,6} = \frac{3}{4} \right)$
4. a) São triângulos rectângulos semelhantes. b) A largura do rio é de 140 m.
5. São congruentes a) e c).
6. Há erro na medida $21 \cdot \frac{21}{14} = 1,5 \cdot \frac{24}{12} = \frac{16}{8} = 2$
7. Não são semelhantes, porque não se verifica nenhum critério de semelhança: $\hat{E} = \hat{B}$, mas $\frac{BC}{EF} \neq \frac{BA}{ED}$.

Exercício n.º 5

pág. 175

1. a) $x = 21$ cm b) $x = 26$ dm c) $x = 2,77$ m 2. A medida da diagonal será 12,7 cm.
3. $A = 62,4$ dm² ($h = 10,4$ dm) 4. $P = 300$ cm
5. Como $17,64 \neq 14,49$, pode-se concluir que o poste não está numa posição perpendicular ao plano do solo (use o teorema de Pitágoras).
6. a) 9,85 b) 7,21 7. $x = 12,6$; $\ell = x = 12,6$ cm; $c = 3x = 37,8$ cm

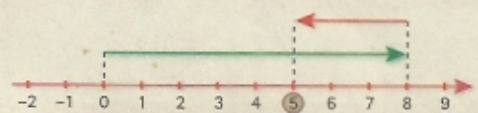
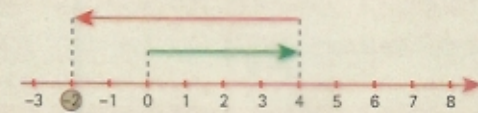
Avaliação-formativa

págs. 176/177

1. a) 52° b) 57° c) 160° d) 102°
2. $a = 65^\circ$; $b = 115^\circ$; $c = 65^\circ$; $d = 63^\circ$; $e = 52^\circ$; $f = 128^\circ$
3. a) Triângulo escaleno
Triângulo rectângulo b) Triângulo equilátero
Triângulo acutângulo c) Triângulo isósceles
Triângulo obtusângulo
4. a) 8 b) 1,41
5. $P = DE + EF + DF = 5,83 + 5,66 + 7,07 = 18,56$ 6. $A = 1000$ m² (equação $x^2 + (2x)^2 = 50^2$)
7. a) $x = 10,2$ m b) $x = 25$ dm
8. a) Não é, porque: $6^2 + 8^2 = 11^2$
 $100 = 121$ Falso b) É, porque: $5^2 + 12^2 = 13^2$
 $169 = 169$ Verdadeiro c) É, porque: $7^2 + 24^2 = 25^2$
 $625 = 625$ Verdadeiro

Exercícios de revisão

págs. 178/179/180

1. a)  b) 
2. a) 42 b) 60 c) 147
3. 320 a.C. ou -320.
4. a) a b) $2a - 3$ c) $a + 3 - 4a$ d) $2a; -3$ e) $a; 3; -4a$ f) $-3; 3$ g) $a = \frac{6}{5}$
5. a) $2(6 + 1) \neq 6 + 9$, logo 6 não é solução da equação. b) $x = 7$ 6. a) $x = -\frac{9}{4}$ b) $x = \frac{9}{2}$
7. Apenas c) $k = 2$ ou $k = \frac{1}{2}$
8. $A(3, 0)$; $B(0, 3)$; $C(0, -4)$; $D(2, 4)$; $E(-5, 1)$; $F(-2, -3)$; $G(1, -1)$; $H(0, 0)$ 9. a) Apenas d) b) Os gráficos a) e e)
10. $a = -7$; $b = 5$ 11. a) $x = 3$ b) $f(x) = x - 3$ 12. $\left(\frac{11}{8}, \frac{23}{24} \right)$ 13. 7,06 cm 14. $\hat{A}OB = 59,6^\circ$
15. $P = 25,12$ cm; $A = 50,24$ cm² 16. $d = \sqrt{40} = 6,32$ 17. a) $\hat{A}CB = 26^\circ$ b) $\hat{D}EP = 61^\circ$ c) [AC]

Tábua de raízes quadradas:
números 1,00 a 9,99

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	1,0000	1,0050	1,0100	1,0149	1,0198	1,0247	1,0296	1,0344	1,0392	1,0440
1,1	1,0488	1,0536	1,0583	1,0630	1,0677	1,0724	1,0770	1,0817	1,0863	1,0909
1,2	1,0954	1,1000	1,1045	1,1091	1,1136	1,1180	1,1225	1,1269	1,1314	1,1358
1,3	1,1402	1,1446	1,1489	1,1533	1,1576	1,1619	1,1662	1,1705	1,1747	1,1790
1,4	1,1832	1,1874	1,1916	1,1958	1,2000	1,2042	1,2083	1,2124	1,2166	1,2207
1,5	1,2247	1,2288	1,2329	1,2369	1,2410	1,2450	1,2490	1,2530	1,2570	1,2610
1,6	1,2649	1,2689	1,2728	1,2767	1,2806	1,2845	1,2884	1,2923	1,2961	1,3000
1,7	1,3038	1,3077	1,3115	1,3153	1,3191	1,3229	1,3266	1,3304	1,3342	1,3379
1,8	1,3416	1,3454	1,3491	1,3528	1,3565	1,3601	1,3638	1,3675	1,3711	1,3748
1,9	1,3784	1,3820	1,3856	1,3892	1,3928	1,3964	1,4000	1,4036	1,4071	1,4107
2,0	1,4142	1,4177	1,4213	1,4248	1,4283	1,4318	1,4353	1,4387	1,4422	1,4457
2,1	1,4491	1,4526	1,4560	1,4595	1,4629	1,4663	1,4697	1,4731	1,4765	1,4799
2,2	1,4832	1,4866	1,4900	1,4933	1,4967	1,5000	1,5033	1,5067	1,5100	1,5133
2,3	1,5166	1,5199	1,5232	1,5264	1,5297	1,5330	1,5362	1,5395	1,5427	1,5460
2,4	1,5492	1,5524	1,5556	1,5588	1,5620	1,5652	1,5684	1,5716	1,5748	1,5780
2,5	1,5811	1,5843	1,5875	1,5906	1,5937	1,5969	1,6000	1,6031	1,6062	1,6093
2,6	1,6125	1,6155	1,6186	1,6217	1,6248	1,6279	1,6310	1,6340	1,6371	1,6401
2,7	1,6432	1,6462	1,6492	1,6523	1,6553	1,6583	1,6613	1,6643	1,6673	1,6703
2,8	1,6733	1,6763	1,6793	1,6823	1,6852	1,6882	1,6912	1,6941	1,6971	1,7000
2,9	1,7029	1,7059	1,7088	1,7117	1,7146	1,7176	1,7205	1,7234	1,7263	1,7292
3,0	1,7321	1,7349	1,7378	1,7407	1,7436	1,7464	1,7493	1,7521	1,7550	1,7578
3,1	1,7607	1,7635	1,7664	1,7692	1,7720	1,7748	1,7776	1,7804	1,7833	1,7861
3,2	1,7889	1,7916	1,7944	1,7972	1,8000	1,8028	1,8055	1,8083	1,8111	1,8138
3,3	1,8166	1,8193	1,8221	1,8248	1,8276	1,8303	1,8330	1,8358	1,8385	1,8412
3,4	1,8439	1,8466	1,8493	1,8520	1,8547	1,8574	1,8601	1,8628	1,8655	1,8682
3,5	1,8708	1,8735	1,8762	1,8788	1,8815	1,8841	1,8868	1,8894	1,8921	1,8947
3,6	1,8974	1,9000	1,9026	1,9053	1,9079	1,9105	1,9131	1,9157	1,9183	1,9209
3,7	1,9235	1,9261	1,9287	1,9313	1,9339	1,9365	1,9391	1,9416	1,9442	1,9468
3,8	1,9494	1,9519	1,9545	1,9570	1,9596	1,9621	1,9647	1,9672	1,9698	1,9723
3,9	1,9748	1,9774	1,9799	1,9824	1,9849	1,9875	1,9900	1,9925	1,9950	1,9975
4,0	2,0000	2,0025	2,0050	2,0075	2,0100	2,0125	2,0149	2,0174	2,0199	2,0224
4,1	2,0248	2,0273	2,0298	2,0322	2,0347	2,0372	2,0396	2,0421	2,0445	2,0469
4,2	2,0494	2,0518	2,0543	2,0567	2,0591	2,0616	2,0640	2,0664	2,0688	2,0712
4,3	2,0736	2,0761	2,0785	2,0809	2,0833	2,0857	2,0881	2,0905	2,0928	2,0952
4,4	2,0976	2,1000	2,1024	2,1048	2,1071	2,1095	2,1119	2,1142	2,1166	2,1190
4,5	2,1213	2,1237	2,1260	2,1284	2,1307	2,1331	2,1354	2,1378	2,1401	2,1424
4,6	2,1448	2,1471	2,1494	2,1517	2,1541	2,1564	2,1587	2,1610	2,1633	2,1656
4,7	2,1679	2,1703	2,1726	2,1749	2,1772	2,1794	2,1817	2,1840	2,1863	2,1886
4,8	2,1909	2,1932	2,1954	2,1977	2,2000	2,2023	2,2045	2,2068	2,2091	2,2113
4,9	2,2136	2,2159	2,2181	2,2204	2,2226	2,2249	2,2271	2,2293	2,2316	2,2338
5,0	2,2361	2,2383	2,2405	2,2428	2,2450	2,2472	2,2494	2,2517	2,2539	2,2561
5,1	2,2583	2,2605	2,2627	2,2650	2,2672	2,2694	2,2716	2,2738	2,2760	2,2782
5,2	2,2804	2,2825	2,2847	2,2869	2,2891	2,2913	2,2935	2,2956	2,2978	2,3000
5,3	2,3022	2,3043	2,3065	2,3087	2,3108	2,3130	2,3152	2,3173	2,3195	2,3216
5,4	2,3238	2,3259	2,3281	2,3302	2,3324	2,3345	2,3367	2,3388	2,3409	2,3431

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,5	2,3452	2,3473	2,3495	2,3516	2,3537	2,3558	2,3580	2,3601	2,3622	2,3643
5,6	2,3664	2,3685	2,3707	2,3728	2,3749	2,3770	2,3791	2,3812	2,3833	2,3854
5,7	2,3875	2,3896	2,3917	2,3937	2,3958	2,3979	2,4000	2,4021	2,4042	2,4063
5,8	2,4083	2,4104	2,4125	2,4145	2,4166	2,4187	2,4207	2,4228	2,4249	2,4270
5,9	2,4290	2,4310	2,4331	2,4352	2,4372	2,4393	2,4413	2,4434	2,4454	2,4475
6,0	2,4495	2,4515	2,4536	2,4556	2,4576	2,4597	2,4617	2,4637	2,4658	2,4678
6,1	2,4698	2,4718	2,4739	2,4759	2,4779	2,4799	2,4819	2,4839	2,4860	2,4880
6,2	2,4900	2,4920	2,4940	2,4960	2,4980	2,5000	2,5020	2,5040	2,5060	2,5080
6,3	2,5100	2,5120	2,5140	2,5159	2,5179	2,5199	2,5219	2,5239	2,5259	2,5278
6,4	2,5298	2,5318	2,5338	2,5357	2,5377	2,5397	2,5417	2,5436	2,5456	2,5475
6,5	2,5495	2,5515	2,5534	2,5554	2,5573	2,5593	2,5612	2,5632	2,5652	2,5671
6,6	2,5690	2,5710	2,5729	2,5749	2,5768	2,5788	2,5807	2,5826	2,5846	2,5865
6,7	2,5884	2,5904	2,5923	2,5942	2,5962	2,5981	2,6000	2,6019	2,6038	2,6058
6,8	2,6077	2,6096	2,6115	2,6134	2,6153	2,6173	2,6192	2,6211	2,6230	2,6249
6,9	2,6268	2,6287	2,6306	2,6325	2,6344	2,6363	2,6382	2,6401	2,6420	2,6439
7,0	2,6458	2,6476	2,6495	2,6514	2,6533	2,6552	2,6571	2,6589	2,6608	2,6627
7,1	2,6646	2,6665	2,6683	2,6702	2,6721	2,6739	2,6758	2,6777	2,6796	2,6814
7,2	2,6833	2,6851	2,6870	2,6889	2,6907	2,6926	2,6944	2,6963	2,6981	2,7000
7,3	2,7019	2,7037	2,7055	2,7074	2,7092	2,7111	2,7129	2,7148	2,7166	2,7185
7,4	2,7203	2,7221	2,7240	2,7258	2,7276	2,7295	2,7313	2,7331	2,7350	2,7368
7,5	2,7386	2,7404	2,7423	2,7441	2,7459	2,7477	2,7495	2,7514	2,7532	2,7550
7,6	2,7568	2,7586	2,7604	2,7622	2,7641	2,7659	2,7677	2,7695	2,7713	2,7731
7,7	2,7749	2,7767	2,7785	2,7803	2,7821	2,7839	2,7857	2,7875	2,7893	2,7911
7,8	2,7928	2,7946	2,7964	2,7982	2,8000	2,8018	2,8036	2,8054	2,8071	2,8089
7,9	2,8107	2,8125	2,8142	2,8160	2,8178	2,8196	2,8213	2,8231	2,8249	2,8267
8,0	2,8284	2,8302	2,8320	2,8337	2,8355	2,8373	2,8390	2,8408	2,8425	2,8443
8,1	2,8460	2,8478	2,8496	2,8513	2,8531	2,8548	2,8566	2,8583	2,8601	2,8618
8,2	2,8636	2,8653	2,8671	2,8688	2,8705	2,8723	2,8740	2,8758	2,8775	2,8792
8,3	2,8810	2,8827	2,8844	2,8862	2,8879	2,8896	2,8914	2,8931	2,8948	2,8965
8,4	2,8983	2,9000	2,9017	2,9034	2,9052	2,9069	2,9086	2,9103	2,9120	2,9138
8,5	2,9155	2,9172	2,9189	2,9206	2,9223	2,9240	2,9257	2,9275	2,9292	2,9309
8,6	2,9326	2,9343	2,9360	2,9377	2,9394	2,9411	2,9428	2,9445	2,9462	2,9479
8,7	2,9496	2,9513	2,9530	2,9547	2,9563	2,9580	2,9597	2,9614	2,9631	2,9648
8,8	2,9665	2,9682	2,9698	2,9715	2,9732	2,9749	2,9766	2,9783	2,9799	2,9816
8,9	2,9833	2,9850	2,9866	2,9883	2,9900	2,9917	2,9933	2,9950	2,9967	2,9983
9,0	3,0000	3,0017	3,0033	3,0050	3,0067	3,0083	3,0100	3,0116	3,0133	3,0150
9,1	3,0166	3,0183	3,0199	3,0216	3,0232	3,0249	3,0265	3,0282	3,0299	3,0315
9,2	3,0332	3,0348	3,0364	3,0381	3,0397	3,0414	3,0430	3,0447	3,0463	3,0480
9,3	3,0496	3,0512	3,0529	3,0545	3,0561	3,0578	3,0594	3,0610	3,0627	3,0643
9,4	3,0659	3,0676	3,0692	3,0708	3,0725	3,0741	3,0757	3,0773	3,0790	3,0806
9,5	3,0822	3,0838	3,0854	3,0871	3,0887	3,0903	3,0919	3,0935	3,0952	3,0968
9,6	3,0984	3,1000	3,1016	3,1032	3,1048	3,1064	3,1081	3,1097	3,1113	3,1129
9,7	3,1145	3,1161	3,1177	3,1193	3,1209	3,1225	3,1241	3,1257	3,1273	3,1289
9,8	3,1305	3,1321	3,1337	3,1353	3,1369	3,1385	3,1401	3,1417	3,1432	3,1448
9,9	3,1464	3,1480	3,1496	3,1512	3,1528	3,1544	3,1559	3,1575	3,1591	3,1607

Tábua de raízes quadradas:
números 10,0 a 99,9

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	3,1623	3,1780	3,1937	3,2094	3,2249	3,2404	3,2558	3,2711	3,2863	3,3015	55	7,4162	7,4229	7,4297	7,4364	7,4431	7,4498	7,4565	7,4632	7,4699	7,4766
11	3,3166	3,3317	3,3466	3,3615	3,3764	3,3912	3,4059	3,4205	3,4351	3,4496	56	7,4833	7,4900	7,4967	7,5033	7,5100	7,5166	7,5233	7,5299	7,5366	7,5432
12	3,4641	3,4785	3,4928	3,5071	3,5214	3,5355	3,5496	3,5637	3,5777	3,5917	57	7,5498	7,5565	7,5631	7,5697	7,5763	7,5829	7,5895	7,5961	7,6026	7,6092
13	3,6056	3,6194	3,6332	3,6469	3,6606	3,6742	3,6878	3,7014	3,7148	3,7283	58	7,6158	7,6223	7,6289	7,6354	7,6420	7,6485	7,6551	7,6616	7,6681	7,6746
14	3,7417	3,7550	3,7683	3,7815	3,7947	3,8079	3,8210	3,8341	3,8471	3,8601	59	7,6811	7,6877	7,6942	7,7006	7,7071	7,7136	7,7201	7,7266	7,7330	7,7395
15	3,8730	3,8859	3,8987	3,9115	3,9243	3,9370	3,9497	3,9623	3,9749	3,9875	60	7,7460	7,7524	7,7589	7,7653	7,7717	7,7782	7,7846	7,7910	7,7974	7,8038
16	4,0000	4,0125	4,0249	4,0373	4,0497	4,0620	4,0743	4,0866	4,0988	4,1110	61	7,8102	7,8166	7,8230	7,8294	7,8358	7,8422	7,8486	7,8549	7,8613	7,8677
17	4,1231	4,1352	4,1473	4,1593	4,1713	4,1833	4,1952	4,2071	4,2190	4,2308	62	7,8740	7,8804	7,8867	7,8930	7,8994	7,9057	7,9120	7,9183	7,9246	7,9310
18	4,2426	4,2544	4,2661	4,2778	4,2895	4,3012	4,3128	4,3243	4,3359	4,3474	63	7,9373	7,9436	7,9498	7,9561	7,9624	7,9687	7,9750	7,9812	7,9875	7,9937
19	4,3589	4,3704	4,3818	4,3932	4,4045	4,4159	4,4272	4,4385	4,4497	4,4609	64	8,0000	8,0062	8,0125	8,0187	8,0250	8,0312	8,0374	8,0436	8,0498	8,0561
20	4,4721	4,4833	4,4944	4,5056	4,5166	4,5277	4,5387	4,5497	4,5607	4,5717	65	8,0623	8,0685	8,0747	8,0808	8,0870	8,0932	8,0994	8,1056	8,1117	8,1179
21	4,5826	4,5935	4,6043	4,6152	4,6260	4,6368	4,6477	4,6583	4,6690	4,6797	66	8,1240	8,1302	8,1363	8,1425	8,1486	8,1548	8,1609	8,1670	8,1731	8,1792
22	4,6904	4,7011	4,7117	4,7223	4,7329	4,7434	4,7539	4,7645	4,7749	4,7854	67	8,1854	8,1915	8,1976	8,2037	8,2098	8,2158	8,2219	8,2280	8,2341	8,2401
23	4,7971	4,8062	4,8166	4,8270	4,8374	4,8477	4,8580	4,8683	4,8785	4,8888	68	8,2462	8,2523	8,2583	8,2644	8,2704	8,2765	8,2825	8,2885	8,2946	8,3006
24	4,8990	4,9092	4,9193	4,9295	4,9396	4,9497	4,9598	4,9699	4,9800	4,9900	69	8,3066	8,3126	8,3187	8,3247	8,3307	8,3367	8,3427	8,3487	8,3546	8,3606
25	5,0000	5,0100	5,0200	5,0299	5,0398	5,0498	5,0596	5,0695	5,0794	5,0892	70	8,3666	8,3726	8,3785	8,3845	8,3905	8,3964	8,4024	8,4083	8,4143	8,4202
26	5,0990	5,1088	5,1186	5,1284	5,1381	5,1478	5,1575	5,1672	5,1769	5,1865	71	8,4261	8,4321	8,4380	8,4439	8,4499	8,4558	8,4617	8,4676	8,4735	8,4794
27	5,1962	5,2058	5,2154	5,2249	5,2345	5,2440	5,2536	5,2631	5,2726	5,2820	72	8,4853	8,4912	8,4971	8,5029	8,5088	8,5147	8,5206	8,5264	8,5323	8,5381
28	5,2915	5,3009	5,3104	5,3198	5,3292	5,3385	5,3479	5,3572	5,3666	5,3759	73	8,5440	8,5499	8,5557	8,5615	8,5674	8,5732	8,5790	8,5849	8,5907	8,5965
29	5,3852	5,3944	5,4037	5,4129	5,4222	5,4314	5,4406	5,4498	5,4589	5,4681	74	8,6023	8,6081	8,6139	8,6197	8,6255	8,6313	8,6371	8,6429	8,6487	8,6545
30	5,4772	5,4863	5,4955	5,5045	5,5136	5,5227	5,5317	5,5408	5,5498	5,5588	75	8,6603	8,6660	8,6718	8,6776	8,6833	8,6891	8,6948	8,7006	8,7063	8,7121
31	5,5678	5,5767	5,5857	5,5946	5,6036	5,6125	5,6214	5,6303	5,6391	5,6480	76	8,7178	8,7235	8,7293	8,7350	8,7407	8,7464	8,7521	8,7579	8,7636	8,7693
32	5,6569	5,6657	5,6745	5,6833	5,6921	5,7009	5,7096	5,7184	5,7271	5,7359	77	8,7750	8,7807	8,7864	8,7920	8,7977	8,8034	8,8091	8,8148	8,8204	8,8261
33	5,7446	5,7533	5,7619	5,7706	5,7793	5,7879	5,7966	5,8052	5,8138	5,8224	78	8,8318	8,8374	8,8431	8,8487	8,8544	8,8600	8,8657	8,8713	8,8769	8,8826
34	5,8310	5,8395	5,8481	5,8566	5,8652	5,8737	5,8822	5,8907	5,8992	5,9076	79	8,8882	8,8938	8,8994	8,9051	8,9107	8,9163	8,9219	8,9275	8,9331	8,9387
35	5,9161	5,9245	5,9330	5,9414	5,9498	5,9582	5,9666	5,9749	5,9833	5,9917	80	8,9443	8,9499	8,9554	8,9610	8,9666	8,9722	8,9778	8,9833	8,9889	8,9944
36	6,0000	6,0083	6,0166	6,0249	6,0332	6,0415	6,0498	6,0581	6,0663	6,0745	81	9,0000	9,0056	9,0111	9,0167	9,0222	9,0277	9,0333	9,0388	9,0443	9,0499
37	6,0828	6,0910	6,0992	6,1074	6,1156	6,1237	6,1319	6,1400	6,1482	6,1563	82	9,0554	9,0609	9,0664	9,0719	9,0774	9,0830	9,0885	9,0940	9,0995	9,1049
38	6,1644	6,1725	6,1806	6,1887	6,1968	6,2048	6,2129	6,2209	6,2290	6,2370	83	9,1104	9,1159	9,1214	9,1269	9,1324	9,1378	9,1433	9,1488	9,1542	9,1597
39	6,2450	6,2530	6,2610	6,2690	6,2769	6,2849	6,2929	6,3008	6,3087	6,3166	84	9,1652	9,1706	9,1761	9,1815	9,1869	9,1924	9,1978	9,2033	9,2087	9,2141
40	6,3246	6,3325	6,3403	6,3482	6,3561	6,3640	6,3718	6,3797	6,3875	6,3953	85	9,2195	9,2250	9,2304	9,2358	9,2412	9,2466	9,2520	9,2574	9,2628	9,2682
41	6,4031	6,4109	6,4187	6,4265	6,4343	6,4420	6,4498	6,4576	6,4653	6,4730	86	9,2736	9,2790	9,2844	9,2898	9,2952	9,3005	9,3059	9,3113	9,3167	9,3220
42	6,4807	6,4885	6,4962	6,5038	6,5115	6,5192	6,5269	6,5345	6,5422	6,5498	87	9,3274	9,3327	9,3381	9,3434	9,3488	9,3541	9,3595	9,3648	9,3702	9,3755
43	6,5574	6,5651	6,5727	6,5803	6,5879	6,5955	6,6030	6,6106	6,6182	6,6257	88	9,3808	9,3862	9,3915	9,3968	9,4021	9,4074	9,4128	9,4181	9,4234	9,4287
44	6,6332	6,6408	6,6483	6,6558	6,6633	6,6708	6,6783	6,6858	6,6933	6,7007	89	9,4340	9,4393	9,4446	9,4499	9,4552	9,4604	9,4657	9,4710	9,4763	9,4816
45	6,7082	6,7157	6,7231	6,7305	6,7380	6,7454	6,7528	6,7602	6,7676	6,7750	90	9,4868	9,4921	9,4974	9,5026	9,5079	9,5131	9,5184	9,5237	9,5289	9,5341
46	6,7823	6,7897	6,7971	6,8044	6,8118	6,8191	6,8264	6,8337	6,8411	6,8484	91	9,5394	9,5446	9,5499	9,5551	9,5603	9,5656	9,5708	9,5760	9,5812	9,5864
47	6,8557	6,8629	6,8702	6,8775	6,8848	6,8920	6,8993	6,9065	6,9138	6,9210	92	9,5917	9,5969	9,6021	9,6073	9,6125	9,6177	9,6229	9,6281	9,6333	9,6385
48	6,9282	6,9354	6,9426	6,9498	6,9570	6,9642	6,9714	6,9785	6,9857	6,9929	93	9,6437	9,6488	9,6540	9,6592	9,6644	9,6695	9,6747	9,6799	9,6850	9,6902
49	7,0000	7,0071	7,0143	7,0214	7,0285	7,0356	7,0427	7,0498	7,0569	7,0640	94	9,6954	9,7005	9,7057	9,7108	9,7160	9,7211	9,7263	9,7314	9,7365	9,7417
50	7,0711	7,0781	7,0852	7,0922	7,0993	7,1063	7,1134	7,1204	7,1274	7,1344	95	9,7468	9,7519	9,7570	9,7622	9,7673	9,7724	9,7775	9,7826	9,7877	9,7929
51	7,1414	7,1484	7,1554	7,1624	7,1694	7,1764	7,1833	7,1903	7,1972	7,2042	96	9,7980	9,8031	9,8082	9,8133	9,8184	9,8234	9,8285	9,8336	9,8387	9,8438
52	7,2111	7,2180	7,2250	7,2319	7,2388	7,2457	7,2526	7,2595	7,2664	7,2732	97	9,8489	9,8539	9,8590	9,8641	9,8691	9,8742	9,8793	9,8843	9,8894	9,8944
53	7,2801	7,2870	7,2938	7,3007	7,3075	7,3144	7,3212	7,3280	7,3348	7,3417	98	9,8995	9,9045	9,9096	9,9146	9,9197	9,9247	9,9298	9,9348	9,9398	9,9448
54	7,3485	7,3553	7,3621	7,3689	7,3756	7,3824	7,3892	7,3959	7,4027	7,4095	99	9,9499	9,9549	9,9599	9,9649	9,9700	9,9750	9,9800	9,9850	9,9900	9,9950

Símbolos da República de Moçambique

BANDEIRA



EMBLEMA



HINO NACIONAL

Pátria Amada

Na memória de África e do Mundo,
Pátria bela dos que ousaram lutar
Moçambique o teu nome é liberdade
O sol de Junho para sempre brilhará

Coro

Moçambique nossa terra generosa
pedra a pedra construindo o novo dia
milhões de braços, uma só força
ó pátria amada vamos vencer!

Povo unido do Rovuma ao Maputo
colhe os frutos do combate pela Paz
cresce o sonho endulando na Bandeira
e vai lavrando na certeza do amanhã

Flores brotando do chão do teu suor
pelos montes, pelos rios, pelo mar
nós juramos por ti, ó Moçambique:
nenhum tirano nos irá escravizar

