MATEMÁTICA

9.ª Classe

Manual do Aluno

Diasala Jacinto André • Isabel do Nascimento

1.º Ciclo do Ensino Secundário - Reforma Curricular

ARVORE DO SABER

AO ALUNO

Este manual para a 9.ª classe está dividido em temas e estruturado de acordo com as finalidades do programa da disciplina. Nele vais encontrar explicações teóricas, onde te são dados exemplos e aplicações a situações reais.

A Matemática é uma ciência exacta e uma ferramenta que auxilia e desenvolve o raciocínio, a memorização e a concentração. Aprende-se percebendo e praticando, por isso, deves fazer os exercícios das actividades que te propomos em cada tema, e confirma os teus resultados com os das soluções.

Os Autores

$\sqrt{x} = \frac{x+a}{2\sqrt{a}}$

ÍNDICE

Tema A Estudo dos números e operações

Ao longo dos séculos, foram surgindo os números começando pelos naturais.

Havendo a necessidade de representar a diagonal de um quadrado os pitagóricos viram que, era necessária a criação de números irracionais.

A.1 NÚMEROS REAIS

A.1.1 DÍZIMAS E NÚMEROS IRRACIONAIS

Consideremos os números:

$\frac{2}{5} = 0{,}4$ $\quad\quad$ $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5} = 0{,}8$

$\frac{7}{3} = 2{,}33\ldots$ $\quad\quad$ $\frac{21}{57} = 0{,}36842\ldots$

As dízimas relativas às fracções $\frac{2}{5}$ e $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}}$ são **dízimas finitas**.

As dízimas relativas às fracções $\frac{7}{3}$ e $\frac{21}{57}$ são **dízimas infinitas**.

De um modo geral, podemos dizer que:

Um **número racional** é representável por uma dízima finita ou por uma infinita periódica.

Observemos agora os seguintes números 131131113...; $\sqrt{2}$; π e $\sqrt{8}$.

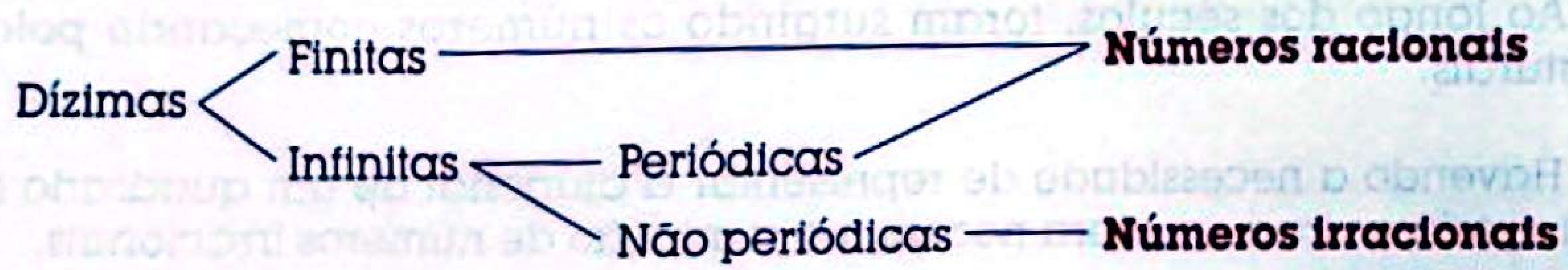
Esses números não podem ser representados por dízimas finitas, nem infinitas periódicas.

Essas dízimas chamam-se números irracionais.

As dízimas que representam os números irracionais são infinitas não periódicas.

Números irracionais são aqueles que podem ser representados por dízimas infinitas não periódicas.

Resumindo esquematicamente temos:



Observa como se representam alguns números na forma de dízima:

$$\frac{3}{5} = 0{,}6$$

- O quociente de 3 por 5 é exacto com resto zero. Logo, 0,6 é uma **dízima finita**.

$$\frac{5}{6} = 0{,}833\ (3)$$

- O quociente de 5 por 6 não é exacto (prolonga-se indefinidamente) e o algarismo 3 repete-se. Logo, 0,833... = 0,8(3) é uma **dízima infinita periódica**, de período 3.

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135...$$

$$\sqrt[3]{3} = 1{,}442249...$$

$$\pi = 3{,}14159265...$$

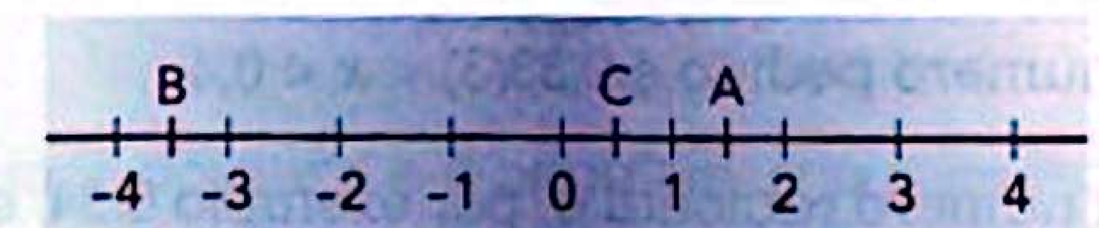
- Usando a calculadora, obténs **dízimas infinitas não periódicas**.

A.1.2 RECTA REAL

Ao conjunto formado pelos números racionais (Q) e irracionais (U), chama-se o conjunto dos números Reais e representa-se por R.

R = Q U (números irracionais)

A cada número real corresponde um ponto na recta real que se diz a sua abcissa.



Assim, $\mathbf{A} = \sqrt{2}$, $\mathbf{B} = -3{,}5$ e $\mathbf{C} = 0{,}5$.

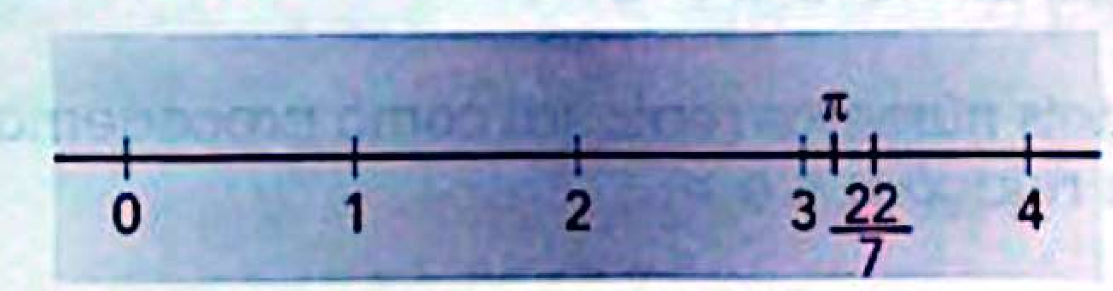
Exemplos:

1. Desenha a recta real e marca os pontos de abcissas:

$$\pi \text{ e } \frac{22}{7}$$

Resolução:

Desenhando na recta real, vem



$$\pi \approx 3{,}1415... \qquad \frac{22}{7} \approx 3{,}1428...$$

Mais importante do que marcar exactamente os números na recta é compará-los e colocá-los por ordem crescente.

2. Indica um número racional e um número irracional compreendido entre:

2.1 $\frac{3}{9}$ e $\frac{6}{15}$.

2.2 $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$.

Resolução:

2.1 $\frac{3}{9} = 0{,}33(3)$ e $\frac{6}{15} = 0{,}4$

Então, o número pedido é $0{,}33(3) < x < 0{,}4$

Logo, um número racional é, por exemplo 0,34, e um número irracional é, por exemplo $\frac{\sqrt{2}}{4}$ pois $\frac{\sqrt{2}}{4} = 0{,}353...$.

2.2 $\sqrt{2} \approx 1{,}414...$ e $\sqrt{3} \approx 1{,}732...$

$1{,}414... < x < 1{,}732...$

Logo, um número racional é, por exemplo, 1,5 e um número irracional $\sqrt{2} + 0{,}1$.

A.1.3 RELAÇÕES < e > EM R

Transitividade

Equivalência entre **a < b** e **b > a**

Para comparar dois números reais, tal como procedemos com dois racionais, recorremos às relações < e >.

De dois números reais é maior o que corresponde ao ponto situado mais à direita na recta real, tal como, acontecia só para números racionais.

Exemplo:

$$-\sqrt{7} < -\sqrt{6} < 1 < \sqrt{6} < \sqrt{7} < 7 < 7{,}5$$

Partindo destes exemplos, são imediatas as propriedades.

- Transitiva de relação menor que:

Se **a < b** e **b < c** então **a < c**

Se o ponto de abcissa **a** está à esquerda do de abcissa **b** e este à esquerda do de abcissa **c**, então o ponto de abcissa **a** está à esquerda do de abcissa **c**.

- Transitiva de relação maior que:

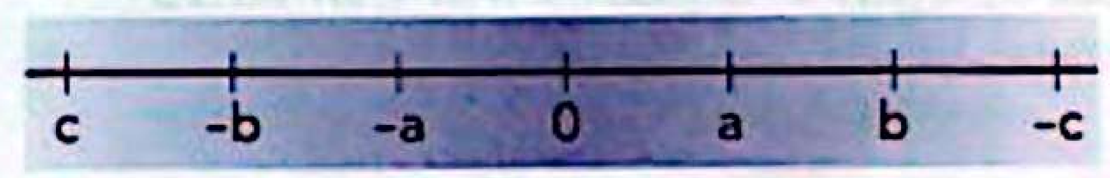
  Se **a > b** e **b > c** então **a > c**.

- Equivalência entre **a < b** e **b > a**:

  Afirmar que **a < b** é o mesmo que dizer que **b > a**.

Sendo **a**, **b** números positivos e **c** negativo, são números negativos **−a** e **−b** e **−c** é positivo.

Supondo que **a < b < −c**:



Repara por exemplo que:

$$\begin{array}{lll} a < b & \text{e} & -a > -b \\ c < -b & \text{e} & -c > b \\ c < 0 & \text{e} & -c > 0 \end{array}$$

Sendo um número menor que outro, o simétrico do primeiro é maior que o simétrico do segundo.

a < b é equivalente a **− a > − b**

Exemplos:

Problema 1: Mediram-se as alturas de três irmãos e registou-se que:

- O José é mais baixo que a Maria;
- A Maria é mais baixa que o Luís.

Que podes concluir sobre a medida da altura do José e do Luís?

Resolução:

Se usares as letras **a**, **b** e **c** para representar as alturas, em centímetros, do José, da Maria e do Luís, respectivamente, então tens que:

$$a < b \quad e \quad b < c \quad \text{então} \quad a < c$$

Concluis que, o José é mais baixo que o Luís.

Problema 2: A pasta da escola da Gabriela pesava 4,0 kg e a do seu irmão Pedro 3,8 kg. À saída de casa, o pai deu a cada um deles uma caixa de canetas coloridas com 350 g de peso, que cada um meteu na sua pasta.

- Qual era a pasta mais pesada?
- Qual é, agora, a pasta mais pesada?

Resolução:

A pasta mais pesada era a da Gabriela porque pesava 4,0 kg e a do Pedro 3,8 kg.

Agora, depois do pai ter dado uma caixa de canetas a ambos, a pasta da Gabriela continua a ser a mais pesada.

Vejamos:

$$4{,}0\text{ kg} > 3{,}8\text{ kg}$$

$$4{,}0\text{ kg} + 350\text{ g} > 3{,}8\text{ kg} + 350\text{ g}$$

Generalizando, conclui-se que:

- Se $a < b$ então $a + c < b + c$ e $a - c < b - c$
- Se $a \leq b$ então $a + c \leq b + c$ e $a - c \leq b - c$

Actividades

1. Completa com um dos símbolos: > , < ou =, de modo a obteres afirmações verdadeiras:

$\sqrt{26}$ ___ 5 $\qquad -\sqrt{26}$ ___ -5 $\qquad -7$ ___ $-\sqrt{49}$

$\frac{7}{5}$ ___ $\sqrt{2}$ $\qquad -\sqrt{61}$ ___ -3 $\qquad \frac{5}{4}$ ___ $\frac{4}{5}$

2. Coloca por ordem crescente os seguintes números:

2.1 $6; -\frac{5}{2}; \sqrt{80}; -\sqrt{20}; \sqrt{6}$

2.2 $\frac{4}{7}; 1; -\sqrt{9}; -4; \frac{6}{5}$

3. Desenha a recta real e marca os pontos de abcissas:

a) 2

b) $\sqrt{2}$

c) $\frac{22}{3}$

d) $-\sqrt{7}$

e) $\frac{7}{3}$

4. Indica um número racional e um número irracional compreendido entre:

4.1 $\sqrt{6}$ e $\sqrt{7}$

4.2 $\frac{5}{3}$ e $\frac{7}{4}$

4.3 $\frac{7}{3}$ e $\sqrt{8}$

5. Representa por uma dízima cada um dos números e classifica-a:

5.1 $-\frac{7}{5}$ **5.2** $\frac{1}{8}$ **5.3** $\sqrt{13}$ **5.4** $\sqrt{0,64}$

5.5 $\sqrt{3}$ **5.6** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **5.7** $\frac{32}{99}$ **5.8** $\frac{312}{100}$

6. Copia e completa o quadro:

a	b	c	a + b	b + c	a − c	b − c
1	8	4				
−1	8	−4				
−2	7	3				
−2	−2	−3				
4	4	−1				
0,3	1,7	−0,4				

7. Verdadeiro ou falso?

7.1 Todo o número racional pode ser representado por uma dízima finita ou dízima infinita periódica.

7.2 Todo o número racional é número fraccionário.

7.3 Todo o número irracional é número real.

7.4 Não há nenhum número que seja inteiro e fraccionário.

7.5 Se $a > b$ então $a + 3 > b + 3$.

7.6 Se $a > b$ então $a - 3 < b - 3$.

7.7 $-\frac{2}{3} - \frac{3}{4} < -1$

7.8 $3 + \sqrt{2} > 3$

A.1.4 CÁLCULOS EM R

As propriedades das operações em Q mantêm-se válidas em R.

Exemplos:

a) $7\pi - 4\pi = 3\pi$

b) $\left(\sqrt{5} + \frac{3}{2}\right)\left(\sqrt{5} - \frac{3}{2}\right) = 5 - \frac{9}{4} = \frac{11}{4}$

c) $\left(3 + \sqrt{6}\right)\left(3 - \sqrt{6}\right) = 9 - 6 = 3$

d) $\left(1 - \sqrt{3}\right)^2 = 1 - 2\sqrt{3} + 3 = 4 - 2\sqrt{3}$

Como podemos observar nalguns casos, operando com números irracionais obtemos números racionais.

A.1.5 INTERVALOS DE NÚMEROS REAIS

Seja o conjunto $\{x \in R : -1 < x < 3\}$ pensemos em todos os números reais compreendidos entre −1 e 3. São infinitos os números nesta situação.

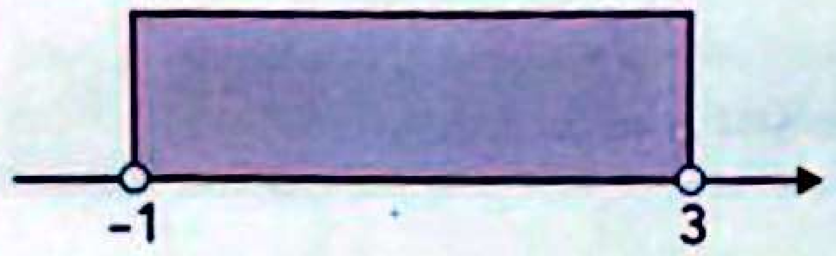
Não é possível representar em **extensão**, isto é, dentro de chavetas separados por vírgula, todos os números reais situados no conjunto.

Para estas situações foi necessário criar uma nova forma de representação de conjuntos, a que chamamos **intervalos de números reais** ou simplesmente **intervalos**.

Os intervalos de números reais estão ligados aos símbolos:

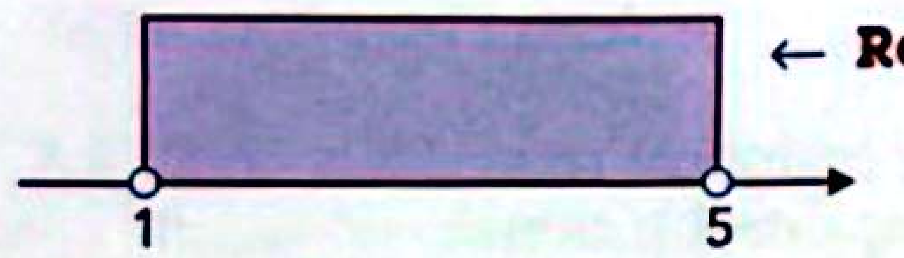
< menor do que
> maior do que
≤ menor ou igual do que
≥ maior ou igual do que

Geometricamente, representa-se o intervalo] – 1, 3 [, os extremos são –1 e 3, que não pertencem ao intervalo.



Outro exemplo:

Como representar o conjunto dos números naturais maiores ou iguais a 1 e menores ou iguais a 5?

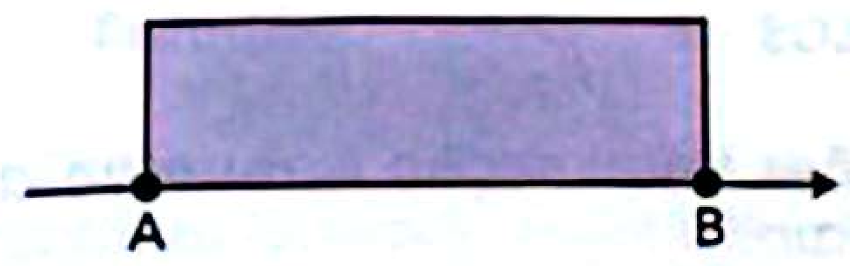
- {1, 2, 3, 4, 5} ← **Representação em extensão**
- $\{x \in N : 1 \leqslant x \leqslant 5\}$ ← **Representação em compreensão**
- [1 ; 5] ← **Representação em intervalo**
-  ← **Representação gráfica**

Dados dois números reais **a** e **b**, tais que, a < b, o conjunto dos números compreendidos entre **a** e **b** chama-se intervalo aberto de extremos **a** e **b** e representa-se por **] a ; b [**, sendo **a** – extremo inferior e **b** – extremo superior.

Juntando a **] a ; b [** os números **a** e **b** obtemos o intervalo fechado: **[a ; b]**.

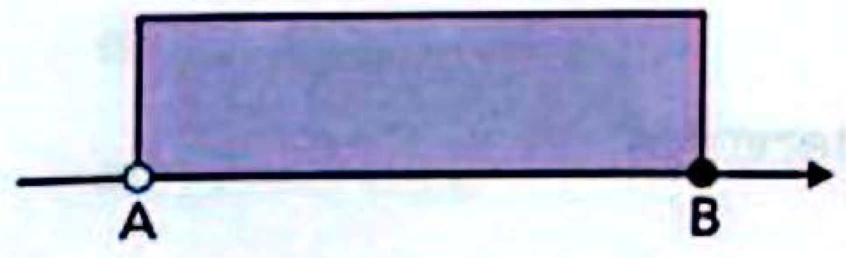
Sendo **A** e **B** dois pontos de abcissas a e b, tais que, a < b, podemos representar graficamente intervalos de extremos a e b:

] a ; b [– intervalo aberto, nem **a** nem **b** pertencem ao intervalo.



[a ; b] – intervalo fechado, **a** e **b** pertencem ao intervalo.

[a ; b [– intervalo fechado à esquerda e aberto à direita, **a** pertence ao intervalo mas **b** não pertence.



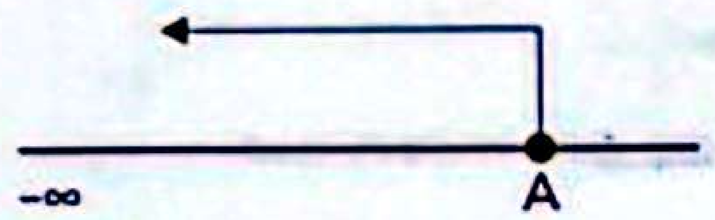
] a ; b] – intervalo aberto à esquerda e fechado à direita, **a** não pertence ao intervalo mas **b** pertence.

Consideremos ainda outros tipos de intervalos.

Sendo **A** o ponto da abcissa **a**:

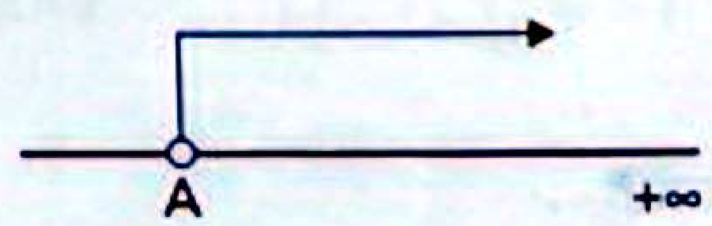
] – ∞; a [

números menores que **a**



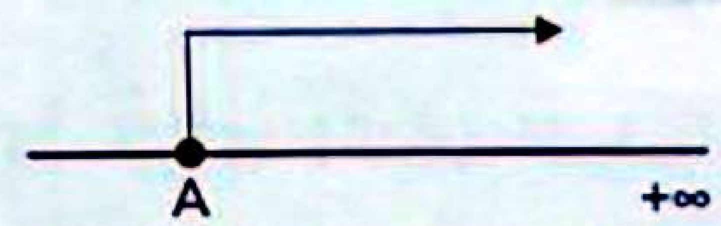
] – ∞; a]

números menores ou iguais a **a**



] a ; + ∞ [

números maiores que **a**



[a ; + ∞ [

números maiores ou iguais a **a**

O conjunto dos números reais costuma representar-se por:

R =] – ∞; + ∞[

«+∞» lê-se «mais infinito»; este símbolo significa que o intervalo é ilimitado à direita.

«–∞» lê-se «menos infinito»; este símbolo significa que o intervalo é ilimitado à esquerda.

A.1.6 INTERSECÇÃO E REUNIÃO DE INTERVALOS

Agora, vais aprender a fazer as operações intersecção e reunião de conjuntos, representados em forma de intervalo.

- **Intersecção**

Dados dois conjuntos, A e B, o conjunto intersecção de A com B, $A \cap B$, é o conjunto formado pelos elementos comuns A e B.

Exemplo:

Representa graficamente os seguintes intervalos:

a) $]-\infty;\ 2] \cap]-1;\ +\infty[$

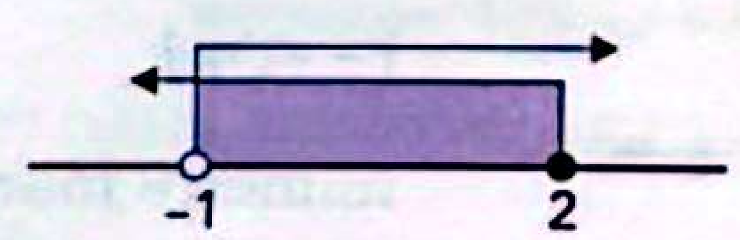
b) $]-\infty;\ -1] \cap]0;\ +\infty[$

c) $]-\infty;\ 2[\cap]-\infty;\ 3]$

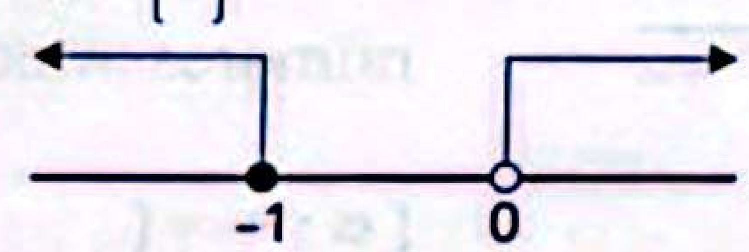
d) $[1;\ +\infty[\cap]3;\ +\infty[$

Resolução:

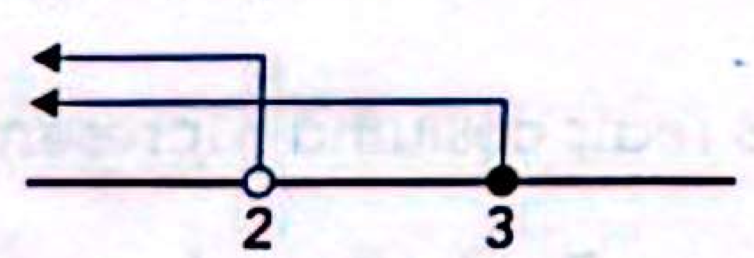
a) $]-\infty;\ 2] \cap]-1;\ +\infty[=]-1;\ 2]$



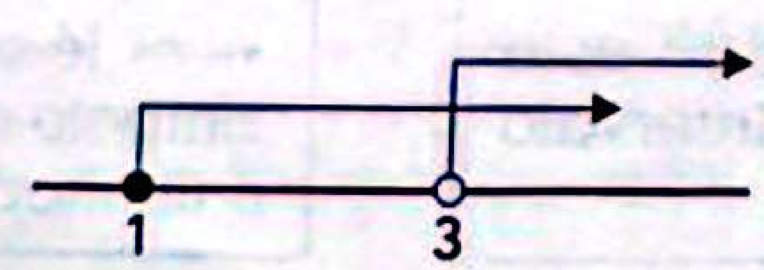
b) $]-\infty;\ -1] \cap]0;\ +\infty[= \{\ \}$



c) $]-\infty;\ 2[\cap]-\infty;\ 3] =]-\infty;\ 2[$



d) $[1;\ +\infty[\cap]3;\ +\infty[=]3;\ +\infty[$



- **Reunião**

Dados dois conjuntos, A e B, o conjunto reunião de A com B, $A \cup B$, é o conjunto formado pelos elementos que pertencem pelo menos a um destes conjuntos.

Exemplo:

Representa graficamente os seguintes intervalos:

a) $]2;\ 4] \cup]3;\ 6]$

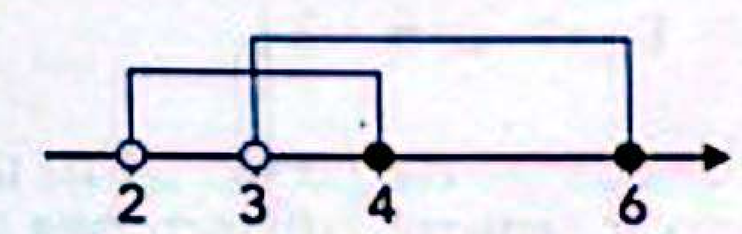
b) $]2;\ 3[\cup]2;\ 5[$

c) $]-1;\ 0[\cup [2;\ 3]$

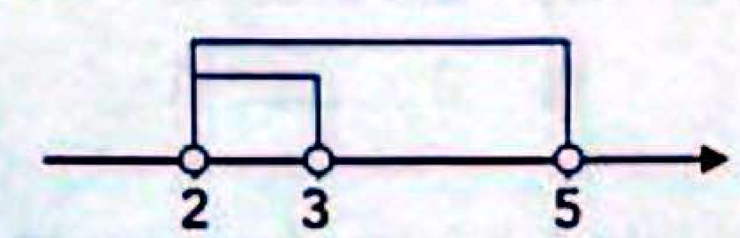
d) $]-\infty;\ 1] \cup]-\infty;\ 4]$

Resolução:

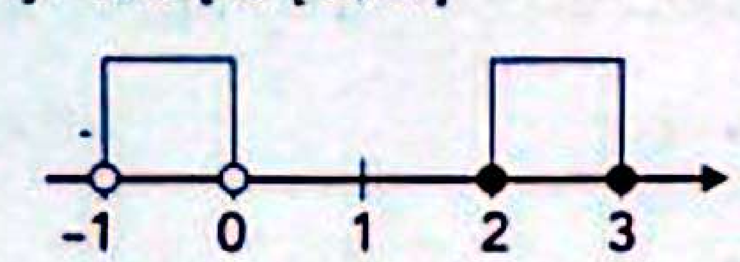
a) $]2;\ 4] \cup]3;\ 6] =]2,\ 6]$



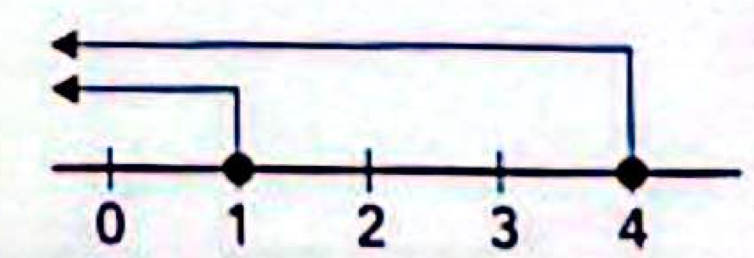
b) $]2;\ 3[\cup]2;\ 5[=]2;\ 5[$



c) $]-1;\ 0[\cup [2;\ 3] =]-1;\ 0[\cup [2;\ 3]$



d) $]-\infty;\ 1] \cup]-\infty;\ 4] =]-\infty;\ 4]$



Actividades

1. Para cada uma das condições, representa na recta real e escreve o intervalo de números reais.

1.1 $x \geq 1$

1.2 $x \geq \frac{1}{2}$

1.3 $2 < x < 3$

1.4 $2 \leq x < 5$

1.5 $x < 10$

1.6 $\{x \in R : x < -1\}$

1.7 $2 \leq x \leq 5$

1.8 $x < 1000$

2. Dados: $A = \{-2{,}5 ;\ 3\}$ e $B =]-2{,}5 ;\ 3]$

2.1 Com os símbolos «$\in$» (pertence) e «$\notin$» (não pertence), completa os espaços de modo a obteres afirmações verdadeiras:

a) 2,9 ____ B	**d)** 2,57 ____ B	**g)** 2,9 ____ A
b) 3 ____ B	**e)** −2,6 ____ B	**h)** 3 ____ A
c) −2,5 ____ B	**f)** −2,5 ____ A	**i)** −1 ____ A

2.2 Representa o conjunto A e B graficamente.

2.3 Qual das três representações em compreensão é a do conjunto A:

a) $\{x \in R : -2{,}5 \leq x \leq 3\}$

b) $\{x \in R : -2{,}5 < x < 3\}$

c) $\{x \in R : -2{,}5 < x \leq 3\}$

3. Represента, se possível por um intervalo de números reais:

3.1 $]-3 ;\ \sqrt{7}\,] \cap [-\sqrt{10} ;\ 5[$

3.2 $[-2 ;\ 1[\cap]1 ;\ 2]$

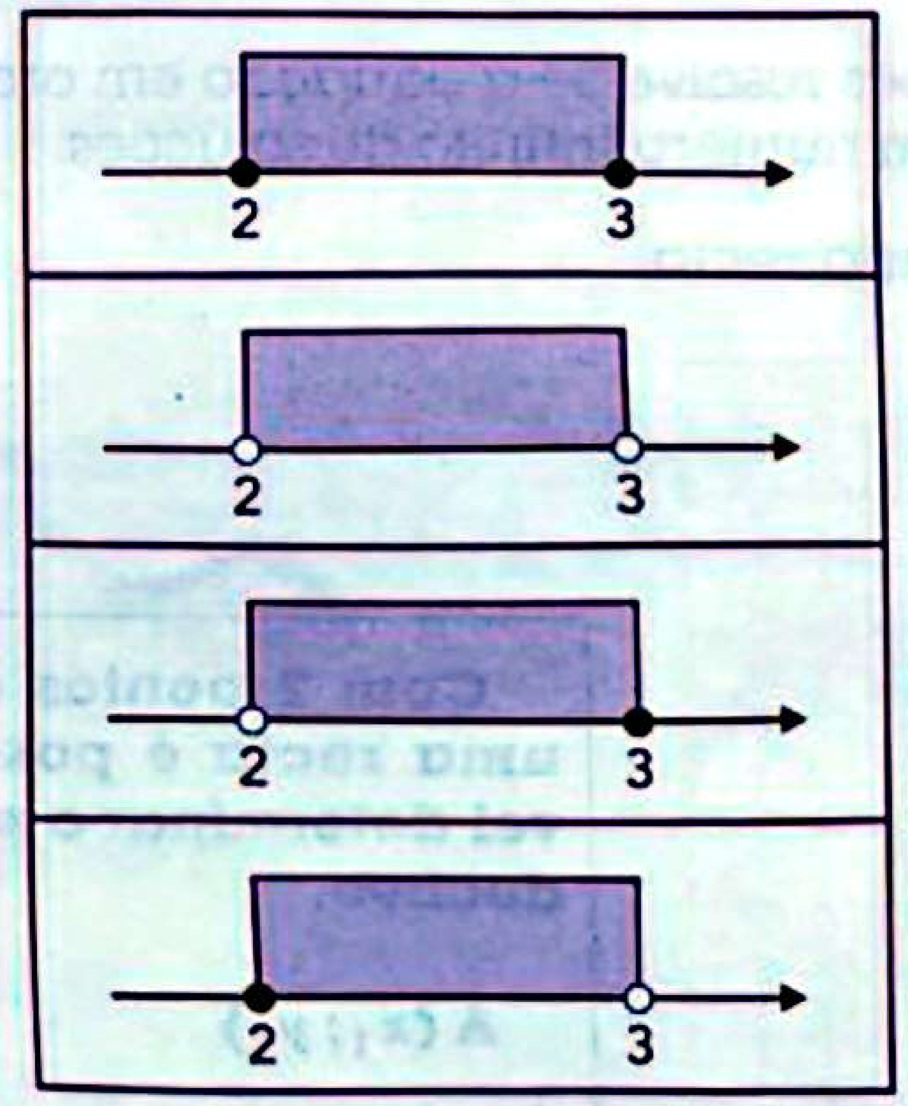
3.3 $]-\infty ;\ 2[\cap [-5 ;\ +\infty[$

3.4 $[-1 ; 8[\cup]-2 ; 3]$

3.5 $]-\infty ;\ 11] \cup]-\infty ;\ 4]$

3.6 $]-\infty ;\ \sqrt{2}\,[\cup]\sqrt{3} ;\ +\infty[$

4. Faz a correspondência entre as representações do mesmo conjunto:



$\{x \in R : 2 < x < 3\}$

$\{x \in R : 2 < x \leq 3\}$

$\{x \in R : 2 \leq x < 3\}$

$\{x \in R : 2 \leq x \leq 3\}$

A.2 EQUAÇÕES DO 1.º GRAU A DUAS INCÓGNITAS

A.2.1 RESOLUÇÃO E INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

Considera o problema:

A soma do triplo de um número com outro é 15. Quais são os números?

Representando um dos números por x e outro por y temos:

$$y + 3x = 15$$

Esta expressão é uma equação do primeiro grau a duas incógnitas.

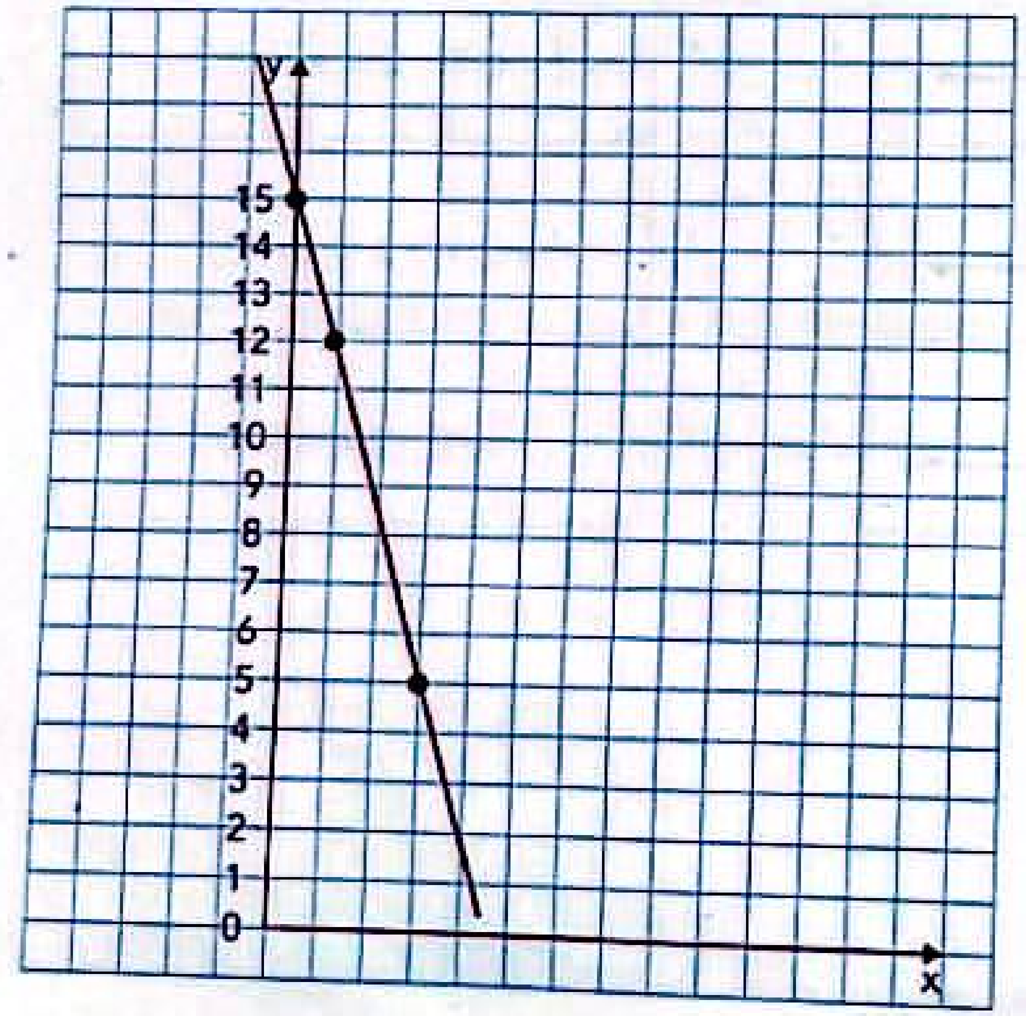
Definição:

Chama-se equação do 1.º grau a duas incógnitas a uma equação onde figuram apenas duas variáveis com expoente 1.

Resolver uma equação do 1.º grau a duas incógnitas é determinar os pares ordenados de números que transformam a equação numa igualdade numérica verdadeira.

Para facilitar a determinação de soluções resolve-se a equação em ordem a uma das incógnitas e encontraremos um número infinito de soluções.

A expressão $y = -3x + 15$ representa uma recta.



Com 2 pontos de uma recta é possível determinar o seu declive.

A $(x_1; y_1)$

B $(x_2; y_2)$

Declive $= \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

A equação $y + 3x = 15$ tem um número infinito de soluções:

$$(0 ; 15) ; (1 ; 12) ; (2 ; 9) , \ldots$$

Todos os pares ordenados que correspondem aos pontos da recta da equação $y + 3x = 15$ são soluções da equação.

Assim, a recta é a representação geométrica de todos os pares ordenados que são solução da equação dada.

Também existe uma infinidade de pares ordenados que não são soluções da equação.

Por exemplo, (0 ; 15) não é solução da equação, pois substituindo na equação por x e y respectivamente, temos:

$$5 \neq -3 \times 0 + 15$$

Exemplo:

Considera a equação:

$$x - 3y = 7$$

De entre os pares ordenados $(x ; y)$ de números, indique os que são solução da equação.

(1; −2), (7; 0), (8; −1), (4; 1)

Resolução:

(1; − 2)	(7; 0)	(8; − 1)	(4 ; 1)
$1 - 3x(-2) = 7$	$7 - 3 \times 0 = 7$	$8 - 3x(-1) = 7$	$4 - 3(1) = 7$
$1 + 6 = 7$	$7 - 0 = 7$	$8 + 3 = 7$	$4 - 3 = 7$
$7 = 7$	$7 = 7$	$11 \neq 7$	$1 \neq 7$

R: São soluções da equação os pares ordenados: (1; − 2) , (7; 0).

Actividades

1. Quais das seguintes equações são do 1.º grau com duas incógnitas?

a) $2y = 4$

b) $3x = 2 + x$

c) $y + \gamma = -\frac{3}{2}y$

d) $x = 2 - y$

e) $3y - x = 4$

f) $4 - 2x + 3y = 2 - x$

g) $x + y + z = 5$

h) $x^2 + 3x = 4$

2. Considera as equações:

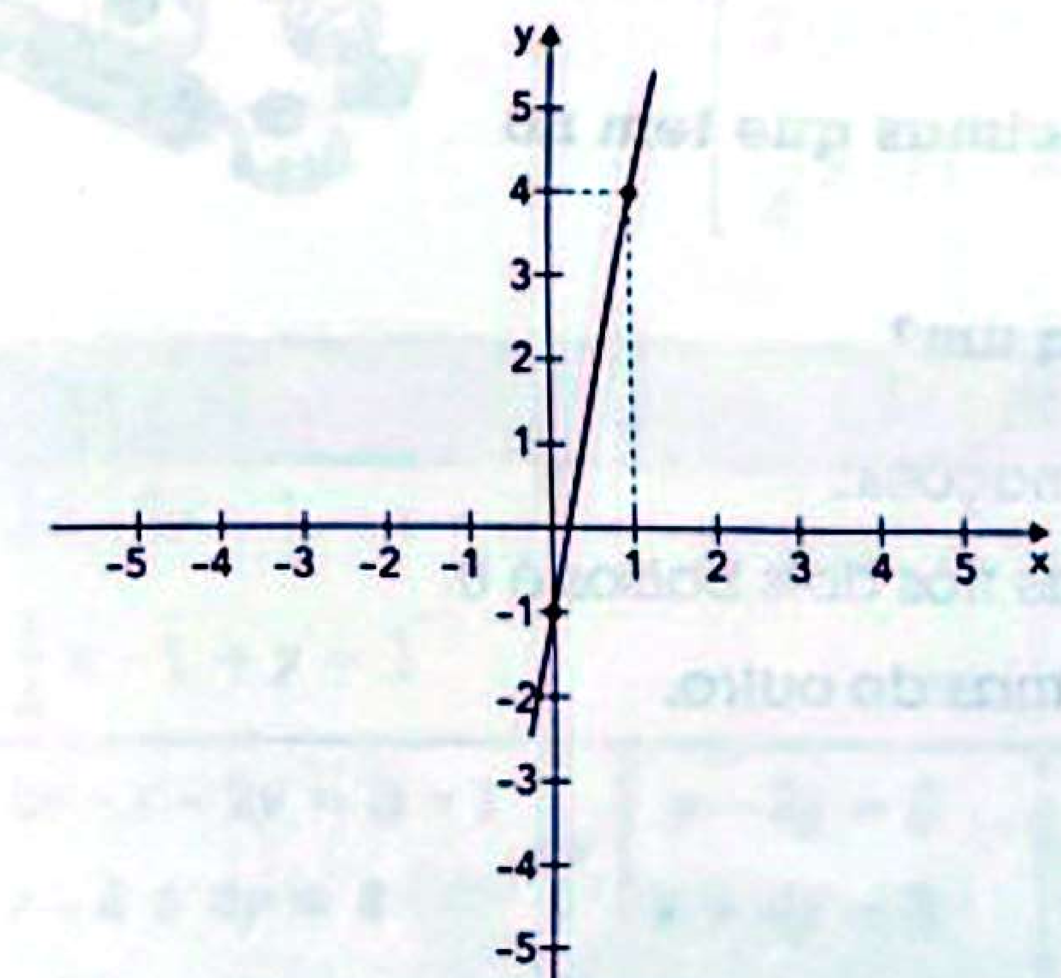
a) $2x + y = 5$

b) $\frac{x-y}{2} - 1 = \frac{1}{2}$

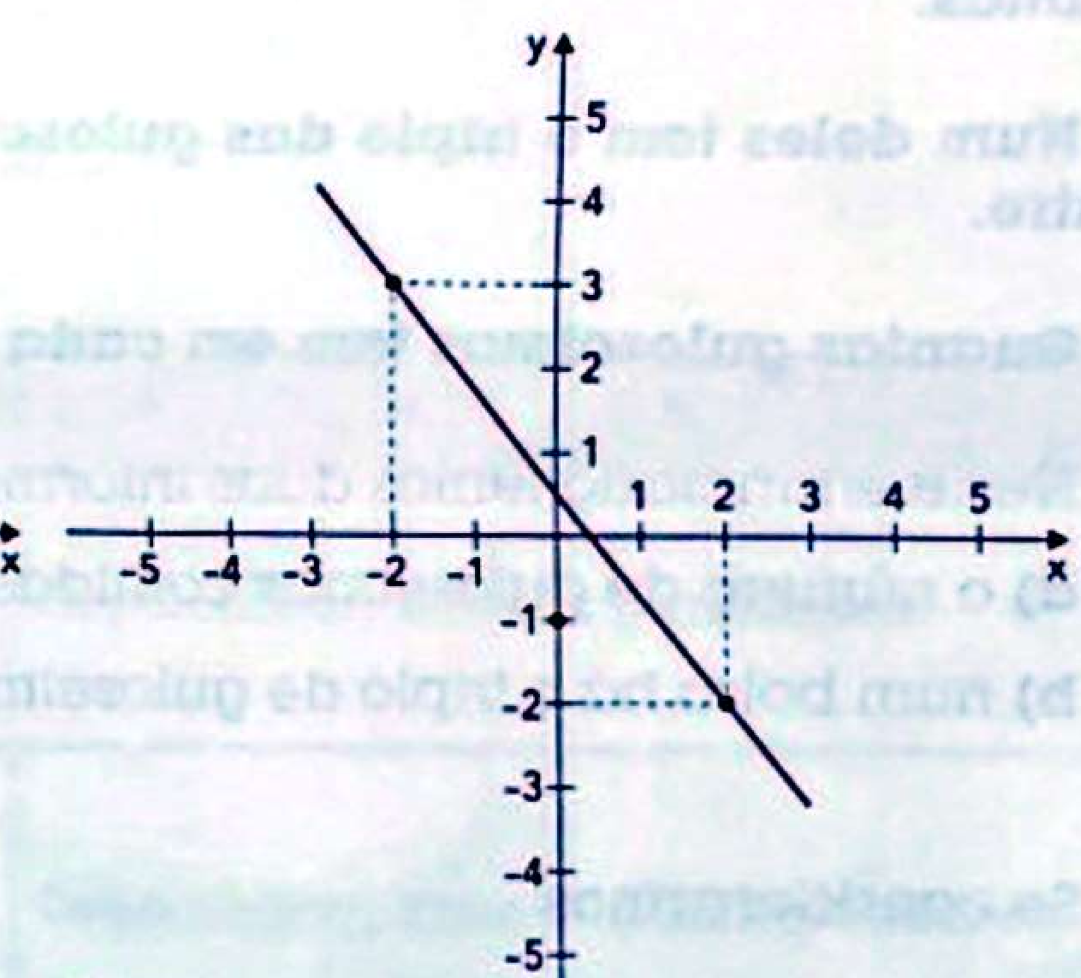
2.1 Resolve as equações em ordem a y e representa-as geometricamente.

3. Escreve uma equação com duas incógnitas que admite como solução o par $(2 ; 3)$.

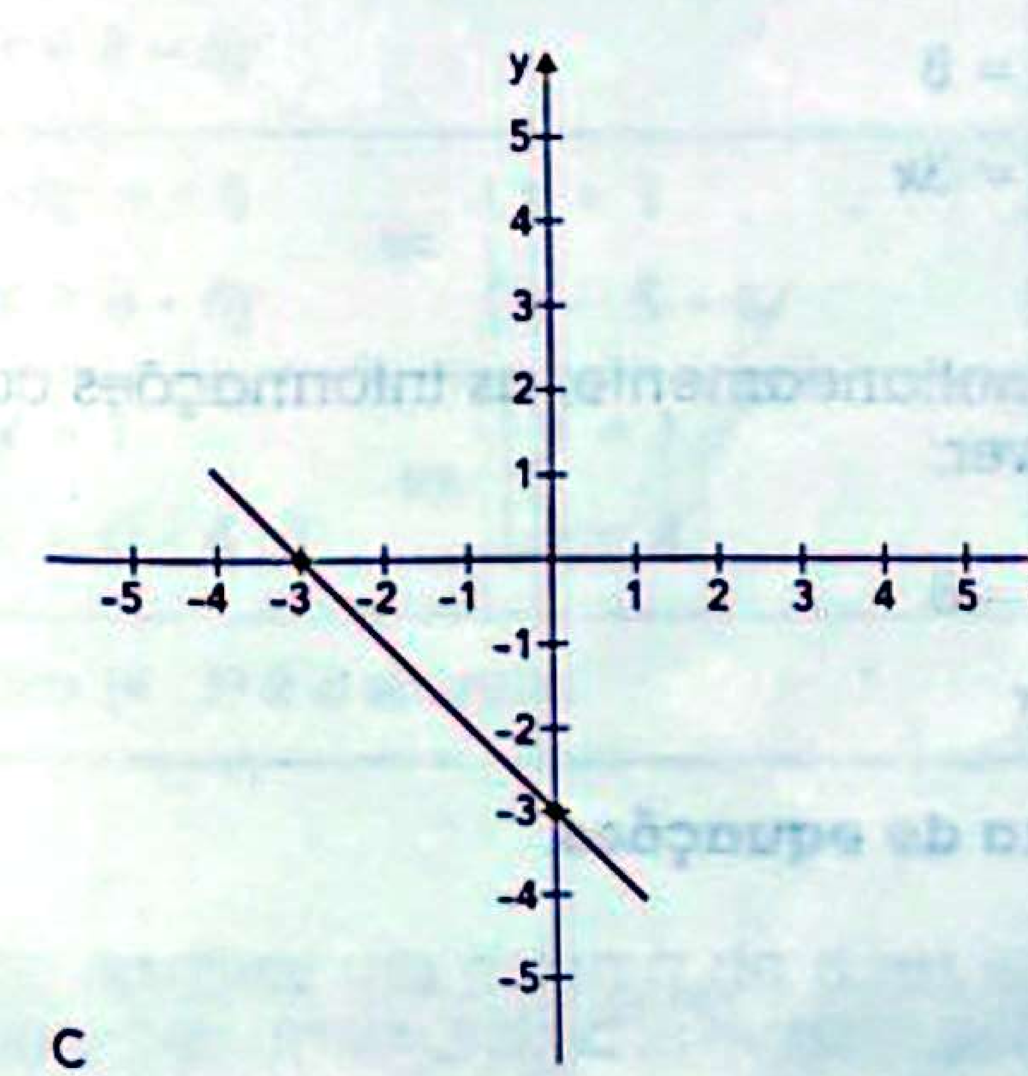
4. Observa os seguintes gráficos e indica a equação da recta representada.



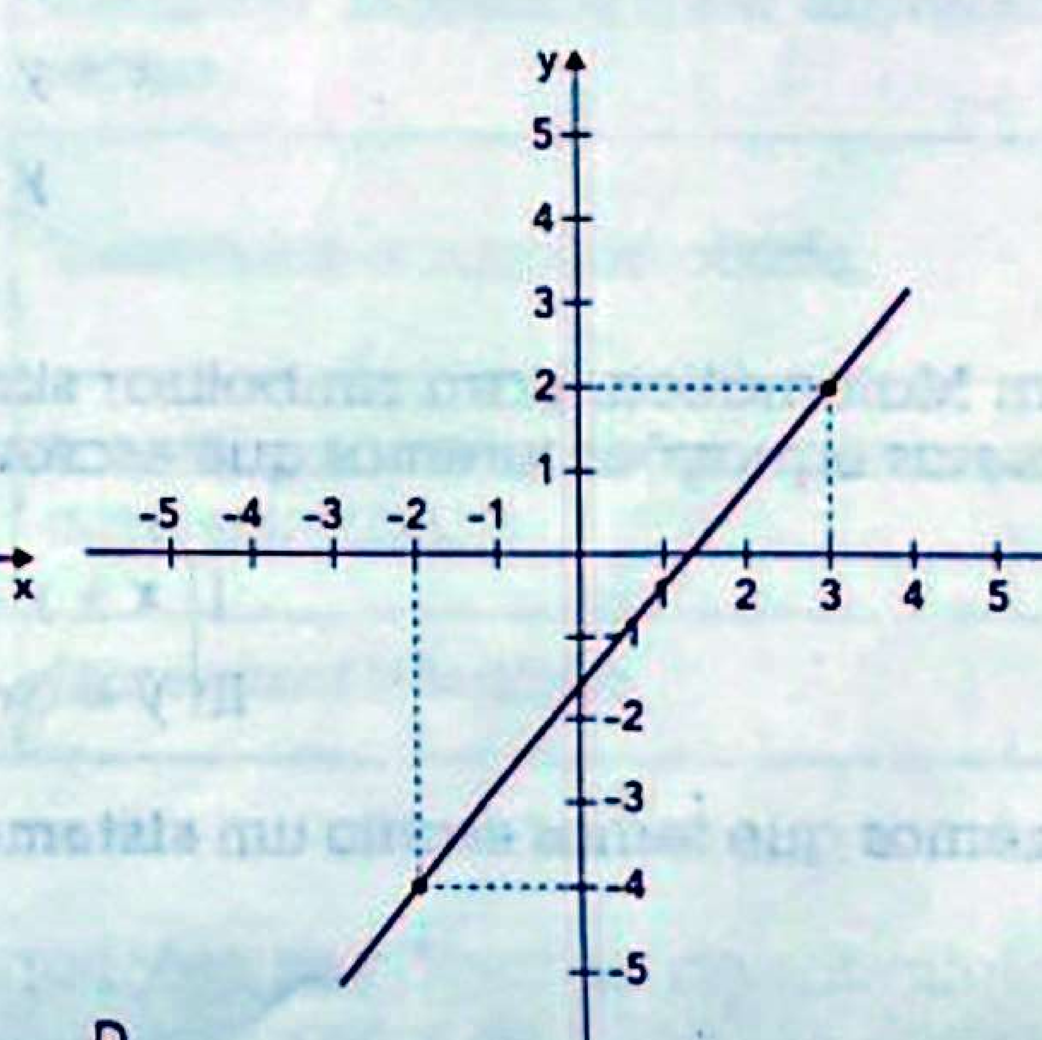
A



B



C



D

A.3 SISTEMAS DE DUAS EQUAÇÕES DO 1.º GRAU COM DUAS INCÓGNITAS

A Mónica tem guardado nos seus dois bolsos guloseimas.

Num deles tem o triplo das guloseimas que tem no outro.

Quantas guloseimas tem em cada um?

Neste enunciado temos duas informações:

a) o número de guloseimas contidas nos dois bolsos é 8.

b) num bolso há o triplo de guloseimas do outro.

Se considerarmos:

x = número de guloseimas de um bolso

y = número de guloseimas do outro bolso

Traduzindo as duas informações algebricamente temos:

$$x + y = 8$$
$$y = 3x$$

Em Matemática, para simbolizar simultaneamente, as informações contidas nas equações teremos que escrever:

$$\begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \end{array}\begin{cases} x + y = 8 \\ y = 3x \end{cases}$$

e dizemos que temos escrito um **sistema de equações**.

Definição:

Um par ordenado (x ; y) é solução de um sistema de duas equações com duas incógnitas, se x e y, for solução simultaneamente das duas equações.

A.3.1 MÉTODOS DE RESOLUÇÃO

- **Método de substituição**

Vamos resolver o sistema seguinte utilizando o método de substituição.

$$\begin{cases} 2(x - y) + 1 = x + 3 \\ \frac{1}{4}x - (1 - y) = 1 \end{cases}$$

Resolução	
$\begin{cases} 2x - 2y + 1 = x + 3 \\ \frac{1}{4}x - 1 + y = 1 \end{cases}$	Desembaraçamos os parênteses.
$\begin{cases} 2x - x - 2y = 3 - 1 \\ x - 4 + 4y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 2 \\ x + 4y = 8 \end{cases}$ **Forma canónica**	Desembaraçamos os denominadores.
$\begin{cases} x - 2y = 2 \\ x = 8 - 4y \end{cases}$	Resolvemos uma das equações em ordem a uma das incógnitas.
$\begin{cases} 8 - 4y - 2y = 2 \\ x = 8 - 4y \end{cases}$	Substituímos na outra equação a incógnita escolhida pela expressão obtida.
$\begin{cases} -6y = -6 \\ x = 8 - 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 8 - 4y \end{cases}$	Resolvemos a equação obtida.
$\begin{cases} y = 1 \\ x = 8 - 4 \cdot 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 4 \end{cases}$	Substituímos o valor encontrado na outra equação.
O par (4 ; 1) é a solução.	Escrevemos a solução.

Ao resolver um sistema de duas equações pelo método de substituição, procura-se obter uma das equações do sistema com uma só letra. Para isso, resolve-se uma das equações em ordem a uma das incógnitas e substitui-se a expressão encontrada na outra equação.

A escolha da incógnita e da equação que se considera no início deve ser aquela que mais facilita a resolução.

Exemplo:

Resolve o sistema $\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 5x - y = 7 \end{cases}$, usando o método de substituição.

Resolução:

$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 5x - y = 7 \end{cases}$ ⟶ Na segunda equação o coeficiente de y é -1. Se resolvermos a segunda equação em ordem a y não vão surgir denominadores. Vamos por isso, escolher esta letra e resolver a segunda equação em ordem a y.

$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ y = 5x - 7 \end{cases}$ ⟶ Na primeira equação vamos substituir y pela expressão $5x - 7$.

$\begin{cases} x + 2(5x - 7) = 8 \\ y = 5x - 7 \end{cases}$ ⟶ A primeira equação só tem uma incógnita. Vamos resolver esta equação e determinar x.

$\begin{cases} 11x = 8 + 14 \\ y = 5x - 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 5x - 7 \end{cases}$ ⟶ Substituímos o valor de x na segunda equação e determinamos y.

$\begin{cases} x = 2 \\ y = 5(2 - 7) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$ ⟶ Logo, a solução do sistema é $(x ; y) = (2 ; 3)$.

Actividades

1. Utilizando o método de substituição resolve os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x + y = 8 \\ x = 3y \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 5x + 2y = -15 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x - 5y = 12 \\ 3y + 2x = -4 \end{cases}$

2. Verifica se os pares ordenados

$(x ; y) = (5 ; 3)$ e $(x ; y) = (1 ; 3)$

são soluções dos sistemas, respectivamente:

a) $\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases}$

2.1 Indica uma solução da segunda equação no sistema a) que não seja solução do mesmo.

2.2 Mostra que $(x ; y) = (-2 ; 9)$ é solução do sistema b).

3. Determina **a** e **b** de modo que o sistema:

$\begin{cases} 6x + 5y = \mathbf{a} \\ -4x + y = \mathbf{b} \end{cases}$ tenha por solução $(x ; y) = (3 ; 1)$.

4. Considera a equação $xy + 30 = (x + 5)(y + 5)$.

a) Mostra que é do primeiro grau com duas incógnitas.

b) Indica uma solução da equação.

c) Resolve o sistema:

$\begin{cases} xy + 30 = (x + 5)(y + 5) \\ x = y + 5 \end{cases}$

• Método de comparação

Vamos resolver o sistema $\begin{cases} 2x + 4y = 16 \\ 5x + 3y = 19 \end{cases}$ utilizando o método de comparação.

Resolução	
$\begin{cases} 2x = 16 - 4y \\ 5x = 19 - 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 - 2y \\ x = \dfrac{19 - 3y}{5} \end{cases}$	Resolvemos as duas equações em ordem a uma das variáveis x ou y.
$8 - 2y = \dfrac{19 - 3y}{5} \Leftrightarrow 40 - 10y = 19 - 3y$	Comparamos ambas as equações.
$-7y = -21 \Leftrightarrow y = 3$	Resolvemos a equação em ordem à variável y.
$x = 8 - 2y$ $x = 8 - 2 \times 3$ $x = 2$	Substituímos o valor de y em qualquer equação.
O par (2 ; 3) é a solução.	Escrevemos a solução.

Ao resolver um sistema de duas equações pelo método de comparação, procura-se obter as duas equações do sistema com a mesma letra. Para isso, resolve-se as duas equações em ordem a uma das incógnitas e substitui-se o valor encontrado em qualquer equação.

Este método oferece vantagens, sobretudo se uma das variáveis do sistema dado já se apresenta com os mesmos coeficientes.

Exemplo:

Vamos resolver o sistema:

$\begin{cases} 3x - 9y = -6 \\ 3x - 15y = -36 \end{cases}$, usando o método comparação.

Resolução:

$\begin{cases} 3x - 9y = -6 \\ 3x = 15y - 36 \end{cases}$ ⟶ Na primeira e segunda equação o coeficiente de x é 3. Resolvemos ambas as equações em ordem a x.

$\begin{cases} 3x = 9y - 6 \\ 3x = 15y - 36 \end{cases}$ ⟶ Comparamos os dois membros direitos.

$\begin{cases} 15y - 36 = 9y - 6 \Leftrightarrow 6y = 30 \\ y = 5 \end{cases}$ ⟶ Resolvemos a equação obtida.

$\begin{cases} 3x = 9 \times 5 - 6 \Leftrightarrow 3x = 39 \\ x = 13 \end{cases}$ ⟶ Substituímos o valor de y em qualquer equação e determinamos x.

Logo, a solução do sistema é $(x ; y) = (13 ; 5)$.

Actividades

1. Resolve os seguintes sistemas aplicando o método de comparação.

a) $\begin{cases} x - y = 1 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 2y = 20 \\ 3x - 3y = 18 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4n + 2m = 6 \\ 2n + 2m = 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{3}{6} + \dfrac{2y}{3} = 4z \\ \dfrac{7z}{3} - 2 = \dfrac{2y}{3} \end{cases}$

e) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{2y}{3} = 3 \\ \dfrac{3x}{4} - \dfrac{y}{3} = 5 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 3m + 3n = -2 \\ 2m = 4n + 5 \end{cases}$

• **Método de redução**

Vamos resolver o sistema $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases}$ utilizando o método de redução.

Resolução	
$\begin{cases} x - y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases}$ $\overline{2x \quad = 4}$	Eliminamos as variáveis y por terem coeficientes simétricos.
$x = 2$	Isolamos a variável x.
$2 + y = 1 \Rightarrow y = -1$	Substituímos o valor de x em qualquer equação.
O par $(2 ; -1)$ é a solução.	Escrevemos a solução.

Ao resolver um sistema de equações pelo método de redução procura-se eliminar uma das variáveis. Para isso, resolve-se as duas equações em ordem a uma das incógnitas, de maneira a que, elas tenham coeficientes simétricos.

Em seguida, procede-se da mesma maneira como os métodos anteriores ensinados.

Exemplo:

Vamos resolver o sistema:

$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 5x - y = 7 \end{cases} \Rightarrow$

Resolução:

$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 5x - y = 7 \ (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 8 \\ 10x - 2y = 14 \end{cases}$ Na primeira equação o coeficiente de y é 2. Multiplicamos a segunda equação por 2.

$\begin{cases} x + \cancel{2y} = 8 \\ 10x - \cancel{2y} = 14 \end{cases}$ Eliminamos a variável de coeficiente simétrico e resolvemos a equação.

$\begin{cases} 11x = 22 \\ x = 2 \end{cases}$ Isolamos a variável x e substituímos em qualquer equação.

$$2 + 2y = 8$$
$$2y = 8 - 2$$
$$y = 3$$

Logo, a solução do sistema é $(x ; y) = (2 ; 3)$.

Actividades

1. Resolve os sistemas seguintes aplicando o método de redução:

a) $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4a - b = -4 \\ 6a + 3b = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 8x - 15y = -3 \\ 2x + 3y = \frac{3}{2} \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ -2x + 5y = 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \frac{1}{2}x + y = 0 \\ 3x - 2y = 5(x - 1) \end{cases}$

f) $\begin{cases} 3x + \frac{2}{5}y = 7 \\ x + 7y = 2 \end{cases}$

• **Método gráfico**

Para resolveres graficamente um sistema:

- representas as rectas associadas a cada uma das equações que formam o sistema dado, no mesmo referencial (gráfico);
- procuras no gráfico, se existirem, pontos comuns às duas rectas.

Exemplo:

Resolve graficamente o sistema de equações:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Resolução:

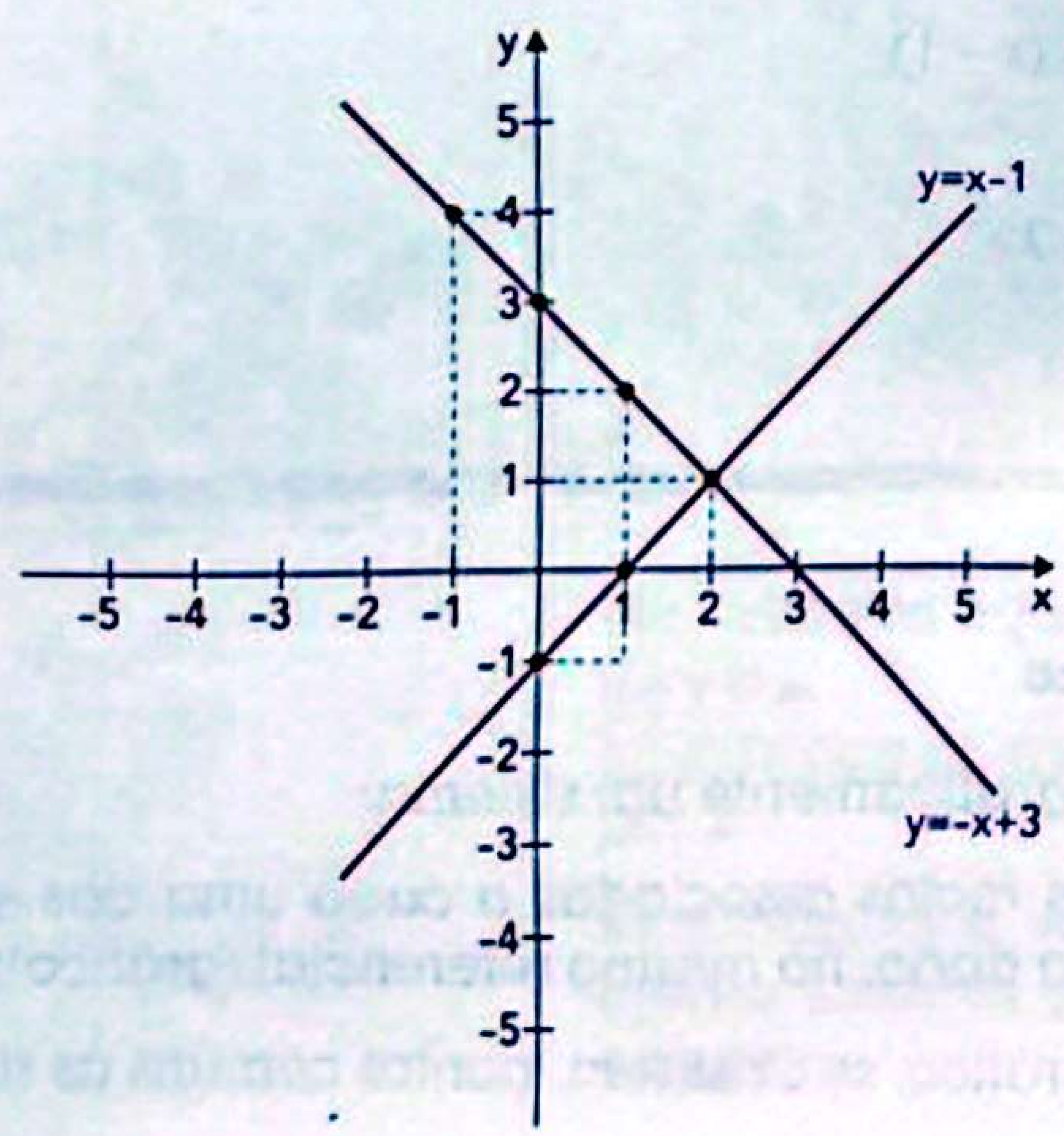
Primeiro deves resolver cada uma das equações do sistema em ordem a y.

$$\begin{cases} y = -x + 3 \\ -y = -x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 3 \\ y = x - 1 \end{cases}$$

x	0	1	−1
$y = -x + 3$	3	2	4

x	0	1	2
$y = x - 1$	−1	0	1

Depois, deves fazer a representação gráfica das rectas associadas a cada uma das equações no mesmo sistema de eixos.



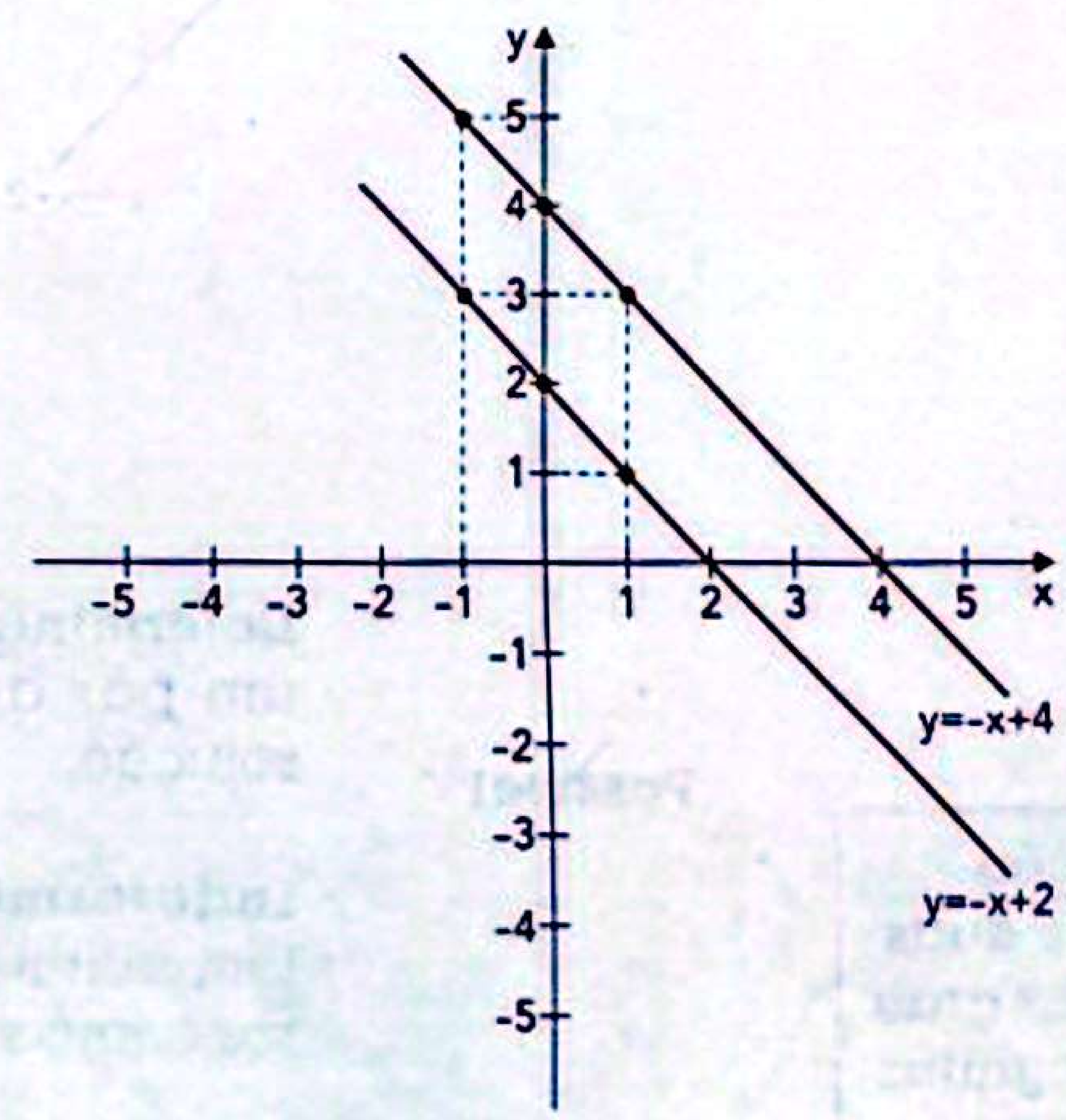
Por fim, procuras se existirem, pontos comuns às duas rectas.

Conclui-se que:

- As rectas $y = x - 1$ e $y = -x + 3$ são **concorrentes** no ponto (2; 1).
- O sistema tem uma única solução – é um **sistema possível e determinado**.
- A solução do sistema é **(2; 1)**.

Outros casos:

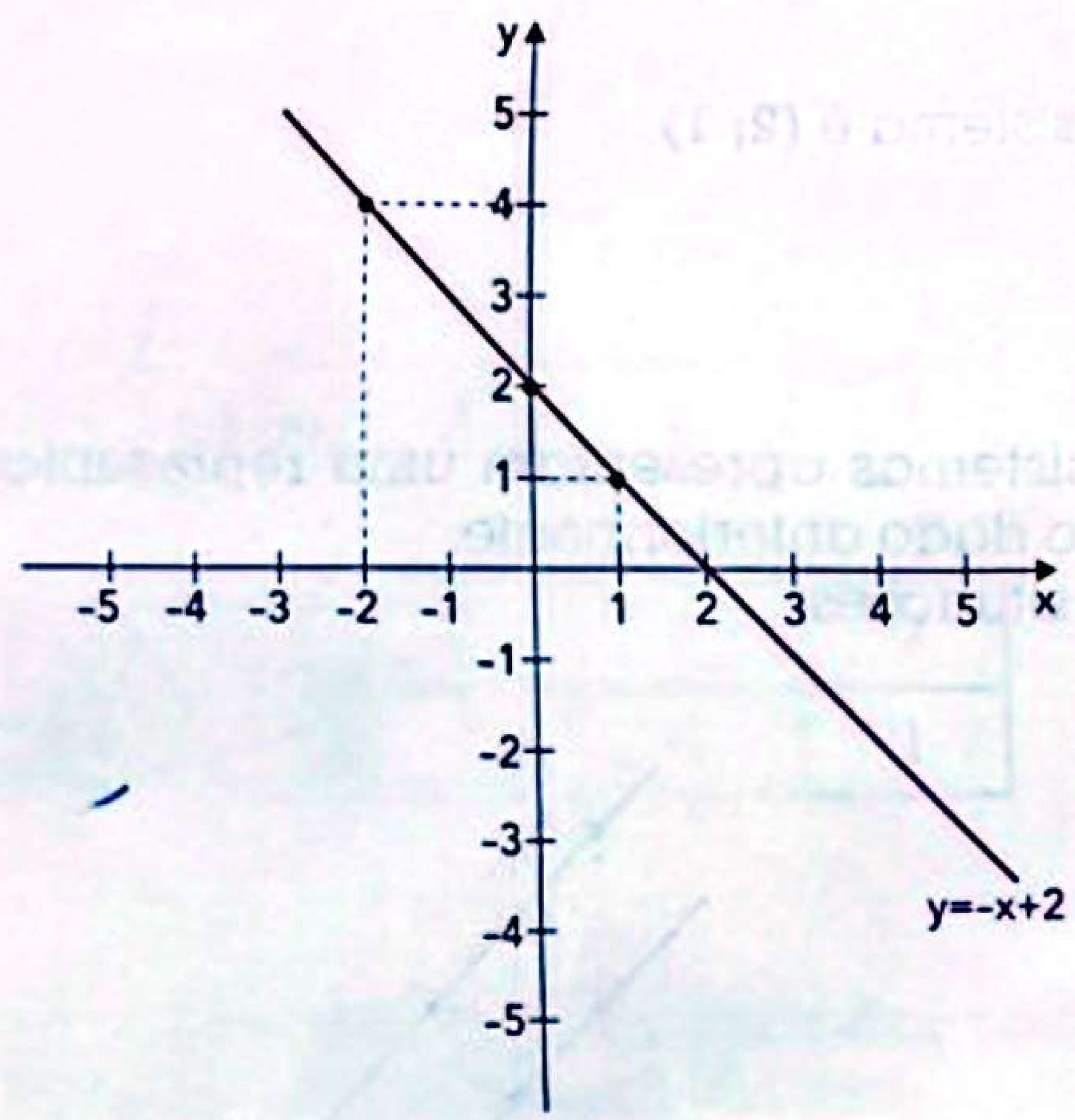
Nem todos os sistemas apresentam uma representação gráfica semelhante ao exemplo dado anteriormente.
Vejamos outras situações:



Neste caso, podes observar que as rectas $y = -x + 2$ e $y = -x + 4$ são **paralelas** – não têm qualquer ponto em comum.

Logo, o **sistema** é **impossível**.

Neste gráfico, verificas que as rectas $y = -x + 2$ e $2y = -2x + 4$ são **coincidentes**. O sistema dado tem uma infinidade de soluções – todos os pontos da recta são solução do sistema. É um **sistema possível e indeterminado**.



Resumindo temos:

Classificação de sistemas de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas

- **Possível**
  - **Determinado:** o sistema tem um par de números como solução.
  - **Indeterminado:** o sistema tem infinitos pares de números como solução.
- **Impossível:** não há nenhum par de números que verifique simultaneamente as duas equações – o sistema não tem solução.

Podes resolver os sistemas de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas, através de quatro métodos diferentes:

- método de substituição;
- método de comparação;
- método de redução;
- método gráfico.

Quando não te é pedido que uses um método específico, podes usar o que preferires para determinares a solução do sistema.

Actividades

Saberes resolver sistemas pode ser útil na resolução de problemas no teu dia-a-dia.

Resolve os seguintes problemas:

1. O Pedro gravou um programa musical de 11 horas, utilizando cassetes de 60 e 90 minutos, que encheu completamente.

1.1 Sabendo que usou x cassetes de 60 minutos e y cassetes de 90 minutos, diz o que representa:

• $60x$ • $90y$ • $60x + 90y$

1.2 Traduz por uma equação o enunciado do problema.

2. Numa casa de desporto venderam-se 31 embalagens de bolas de golfe. Algumas embalagens continham 3 bolas e outras 4. No total, venderam-se 104 bolas. Quantas eram as embalagens de 3 bolas? x y {20; 11}

3. Quinze pessoas, entre adultos e crianças, fizeram uma viagem de autocarro. Cada adulto pagou 140 Kwanzas e cada criança pagou metade desse preço. No total pagaram 1750 Kwanzas. Quantos eram os adultos e as crianças? (10; 5)

x → Adulto
y → Criança

4. Descobre a idade actual da Maria e do João, sabendo que, há um ano, a idade do João era o quádruplo da idade da Maria e que, daqui a três anos, a Maria terá metade da idade do João.

↓ x → idade da Maria
y → " do João

A.4 INEQUAÇÕES

Chama-se inequação a uma desigualdade onde figura pelo menos uma letra que se designa por incógnita.

A.4.1 RESOLUÇÃO

Exemplos: $0 > 3x + 7$; $2x - 5 < 5$; $3 - 5z < 2 + z$;

Dum modo geral, sempre que substituirmos numa equação «=» por «<» ou «>» obtemos uma inequação.

Nas inequações, tal como nas equações:

- A expressão antes de < ou > é o 1.º membro;
- A outra expressão é o 2.º membro.

Resolver uma inequação é procurar as suas soluções, isto é, o seu conjunto-solução.

Duas ou mais inequações com o mesmo conjunto-solução dizem-se equivalentes.

Exemplo: $\underbrace{-\frac{1}{2}(x-3)}_{1.^{\circ}\text{ membro}} \geq \underbrace{-\frac{x-5}{4}+\frac{1}{8}}_{2.^{\circ}\text{ membro}}$

Resolução	
Desembaraçar parênteses.	$-\underset{(\times 4)}{\frac{x}{2}} + \underset{(\times 4)}{\frac{3}{2}} \geq -\underset{(\times 2)}{\frac{x-5}{4}} + \frac{1}{8}$
Desembaraçar denominadores.	$-4x + 12 \geq -2x + 10 + 1$
Isolar os termos com incógnita e os termos que mudam de membro mudam de sinal.	$-4x + 2x \geq 10 + 1 - 12$
Adicionar os termos semelhantes.	$-2x \geq -1$
Passar o coeficiente da incógnita para denominador do 2.º membro. Se for um número negativo, trocar o sentido da desigualdade.	$x \leq \frac{-1}{-2} \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$
Apresentar o conjunto – solução.	C. S. = $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right]$

Actividades

1. Resolve as seguintes inequações e escreve o conjunto-solução (C.S.):

a) $3x < 10$

b) $3(x-2) > 3x + 1$

c) $5x < 4x + 3$

d) $x^2 > 1$

e) $2\left(x + \frac{1}{2}\right) > -2x + \frac{1}{2}$

f) $x - 3 \geq \frac{2x-1}{5}$

g) $x + 4x < -2$

Observa com atenção a resolução das seguintes inequações e verifica que existem algumas regras:

Como resolver a inequação $2x - 3 < 5$?

Equação	Inequação
$2x - 3 = 5$	$2x - 3 < 5$
$2x = 5 + 3$	$2x < 5 + 3$
$2x = 8$	$2x < 8$
$x = 4$	$x < 4$
$S = \{4\}$	$S =]-\infty; 4[$

Numa inequação pode-se passar um termo de um membro para outro, no caso de ser negativo tem que se inverter o sinal de desigualdade, como verás adiante.

Como resolver a inequação $3x > 9$?

Equação	Inequação
$3x = 9$	$3x > 9$
$x = \frac{9}{3}$	$x > \frac{9}{3}$
$x = 3$	$x > 3$
$S = \{3\}$	$S =]-3 ; +\infty[$

Como resolver a inequação $-3x > 9$?

Equação	Inequação
$-3x = 9$	$-3x > 9$
$x = \frac{9}{-3}$	$x > \frac{9}{-3}$
$x = -3$	$x > -3$
$S = \{3\}$	**Falso**

Observe que:

$5 > 2$ **Verdadeiro**

Multiplicando ambos os membros por 7 vem:

$5 \times 7 > 2 \times 7$ **Verdadeiro**

$35 > 14$

Multiplique-se ambos os membros por -7:

$5 \times (-7) > 2 \times (-7)$ **Falso**

$-35 > -14$

Para que fique correcto teríamos de inverter o sinal de desigualdade:

$-35 < -14$ **Verdadeiro**

Para resolver uma inequação procede-se de modo idêntico à resolução de uma equação, excepto quando for necessário multiplicar ou dividir ambos os membros por um número negativo.

Neste caso, ter-se-à de inverter o símbolo da desigualdade.

$-3x > 9$

$3x < -9$

$x < -9$ multiplicou-se por -1 ambos os membros de desigualdade e inverteu-se o símbolo da desigualdade.

$x < -\frac{9}{3}$

$x < -3$

Se se multiplicar por um número negativo ambos os membros da desigualdade inverte-se o sinal da desigualdade.

Exemplo:

Resolve, em R, cada uma das inequações, e apresenta a solução sob a forma de intervalo.

a) $4(x-9) > x$ **b)** $x \geq 3(x-2)$

Resolução:

a) $4(x-9) > x$

$4x - 54 > x$

$4x - x > 54$

$3x > 54$

$x > 18$

$S =]18 ; +\infty[$

b) $x \geq 3(x-2)$

$x \geq 3x - 6$

$x - 3x \geq -6$

$-2x \geq -6$

$x \leq \frac{6}{2}$

$x \leq 3$

$S =]-\infty; 3]$

Resumindo:

Para resolveres uma inequação, tens de ter sempre presente as propriedades/regras, que estudaste nos exemplos anteriores:

a) Quando se adiciona ou subtrai o mesmo número aos dois membros de uma desigualdade, o sentido da desigualdade mantém-se;

b) Quando se multiplica ou divide por um mesmo número positivo os dois membros de uma desigualdade, o sentido da desigualdade mantém-se;

c) Quando se multiplica ou divide por um número negativo os dois membros de uma desigualdade, o sentido da desigualdade passa ao sentido inverso.

Exemplo:

Problema : O António pensou no maior número ímpar que verifica a condição: «A soma do número natural que pensei com o dobro do seu consecutivo é menor que 36.»
Em que número o António pensou?

Resolução	
Escolher a incógnita.	***x*** é o número natural que o António pensou.
Traduzir o problema por uma inequação.	O consecutivo do número natural que o António pensou é $x + 1$; Então, o dobro do consecutivo é $2(x + 1)$; Se a soma do número natural com o dobro do seu consecutivo é menor que 36, podemos traduzir na inequação: $\mathbf{x + 2(x + 1) < 36}$
Resolver a inequação.	$x + 2(x + 1) < 36$ $x + 2x + 2 < 36$ $3x < 36 - 2$ $3x < 34$ $x < \frac{34}{3}$ $\mathbf{x < 11{,}33(3)}$
Resultado.	O número que o António pensou é o 11 (número natural ímpar menor que 11,33(3)).

Actividades

1. Resolve em R, cada uma das seguintes inequações e apresenta a solução sob a forma de intervalo:

a) $a - 1 < 5$

b) $2m + 1 \leq 9$

c) $x - 4 \geq 5$

$8a - 2 \geq 20$

$8a \geq 20 + 2$

d) $8a - 2 \geq 20$

$a = \frac{22}{8}$

e) $-1 > b - 1$ $= 7 - 1 > 5 - 1$

f) $30 \leq 17 + 3a$ $-5 > -1 + 1$ $-17 - 3a \leq -30$

g) $x - 2 \leq 3x$ $5 < 0$ $-3a \leq -30 + 17$

h) $5 - y \geq 3$ $]-\infty; 0[$ $-3a \leq -13$

i) $12 \leq 5 - 2b$ $30 \leq 17 + 3a$ $a \geq \frac{13}{3}$

j) $2 - x > 3 - 2x$ $17 + 3a \leq 30$ $3a = 13$

k) $a - 5 > 3a - 1$ $3a \leq 30 - 17$

l) $-8m - 7 \leq -2m + 5$ $3a \leq 13$

m) $2(1 - x) < -3(1 + x)$ $a \leq \frac{13}{3}$

2. Verifica se o conjunto $\{x \in R : x < 5\}$ é uma solução da inequação:

$$2(2x + 4) > 2$$

3. A Débora pensou no maior número inteiro ímpar que verifica a condição:

«A diferença entre 175 e o triplo desse número é maior que 31.»

Descobre o número em que pensou a Débora.

4. Numa grande fábrica, trabalham actualmente 24 operários e 8 gestores. Pretende-se recrutar igual número de operários e gestores.

Qual o menor número de funcionários a contratar para cada grupo, se a direcção da fábrica pretende ter nos seus quadros um número de gestores que seja, pelos menos, $\frac{3}{5}$ do número de operários.

5. A Oliana quer ir a uma loja de roupa e comprar saias, camisas e *jeans*, gastando no máximo 20 000 Kwanzas. Comprou duas saias a 3390 Kwanzas cada uma e três camisas a 2260 cada, e pretende ainda comprar duas *jeans* de igual preço cada uma.

Qual é o preço máximo de cada *jeans*?

6. Uma piscina de Luanda tem duas tarifas de entrada:

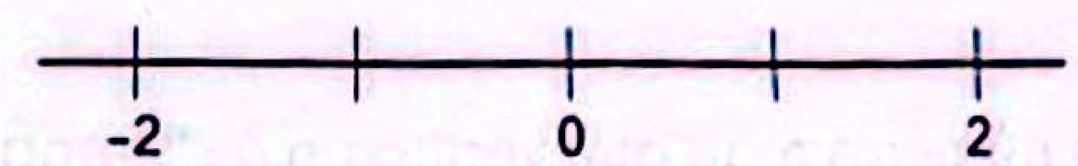
- Tarifa 1: 200 Kwanzas por entrada.
- Tarifa 2: assinatura mensal de 1000 Kwanzas, mais 60 Kwanzas por cada entrada.

A partir de quantas entradas é vantajoso usar a tarifa 2?

A.4.2 CONJUNTOS DEFINIDOS POR CONDIÇÕES

Observando o seguinte gráfico é possível indicar um conjunto com abcissas nos pontos cuja distância à origem é:

- inferior a duas unidades;
- superior a duas unidades.



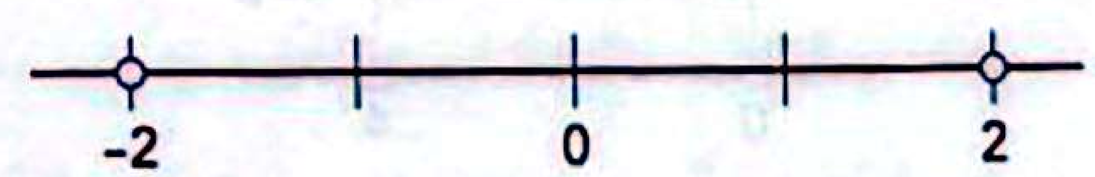
O conjunto das abcissas é $]-2\,;2\,[$; é o conjunto dos números x tais que, $x > -2$, e ao mesmo tempo $x < 2$, ou seja, são os números que são soluções da conjunção das duas inequações.

Essa conjunção representa-se por $x > -2$ e $x < 2$ ou pelo sistema:

$$\begin{cases} x > -2 \\ x < 2 \end{cases}$$

Pode ser ainda representado por $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ que significa: o conjunto de todos os números reais excepto o -2 e o 2.

A seguinte representação gráfica representa o sistema, uma vez que exclui apenas o -2 e o 2.

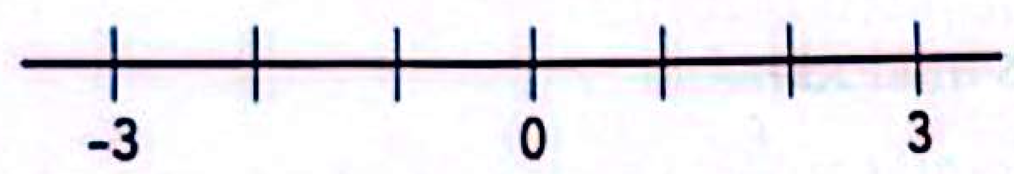


C conjunto pedido é $]-\infty\,;-2\,[\,\cup\,]\,2\,;+\infty\,[$; trata-se do conjunto dos números que verificam pelo menos uma das inequações $x < -2$; $x > 2$.

A $x < -2$ ou $x > 2$ chama-se disjunção das duas inequações.
A disjunção de duas inequações é verificada pelos números que satisfazem pelo menos uma delas.

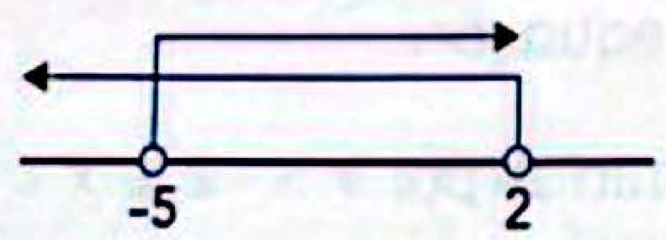
Exemplos:

- Conjunto dos números cujo valor absoluto é menor ou igual a 3 é representado no eixo.



- O conjunto dos números reais que verificam o sistema:

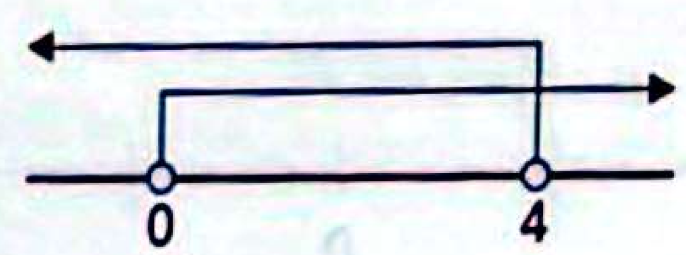
$$\begin{cases} x > -5 \\ x < 2 \end{cases}$$



O conjunto solução $x > -5$ e $x < 2$ é $]-5 ; 2[$.

- O conjunto dos números que verificam a disjunção:

$$x < 4 \text{ ou } x > 0 \text{ é }]-\infty ; +\infty[.$$



O conjunto dos números que verificam a disjunção é $]-\infty ; 4[\cup]0 ; +\infty[$, mas $]-\infty ; 4[\cup]0 ; +\infty[$ é igual a $]-\infty ; +\infty[$

A.5 EQUAÇÕES DO 2.º GRAU

A.5.1 RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO 2.º GRAU

Observa a seguinte equação:

$$5x^2 - 14x + 8 = 0$$

Embora conheças as equações, vais sentir algumas dificuldades na resolução deste tipo de equações.

Vamos rever e ampliar o estudo já feito sobre resolução de equações.

Definição:

Chama-se equação do segundo grau, com uma incógnita, toda a equação equivalente a uma do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, com a, b e c constantes reais e $a \neq 0$.

A equação do 2.º grau $5x^2 - 14x + 8 = 0$ tem três termos não nulos.

Termo em $x^2 \longrightarrow 5x^2$

Termo em $x \longrightarrow -14x$

Termo independente $\longrightarrow +8$

Trata-se por isso, de uma equação do 2.º grau completa.

Se o termo independente ou o termo em x for nulo, a equação do 2º grau é incompleta.

Assim, por exemplo, vejamos as seguintes equações:

$$x^2 = 0 \qquad 2x^2 - 2x = 0 \qquad x^2 - 5 = 0$$

Na primeira só aparece o termo do segundo grau, na segunda falta o termo independente e na terceira falta o termo do primeiro grau.

O termo em x^2 não pode ser nulo. Se assim fosse, a equação $ax^2 + bx + c = 0$ não seria do 2.º grau.

• Resolução de equações do 2.º grau incompletas

A propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, a lei do anulamento do produto, bem como, a noção da raiz quadrada e os casos notáveis da multiplicação de binómios, ajudar-te-ão a resolver algumas equações do 2.º grau.

Já consegues resolver qualquer equação incompleta do 2.º grau.

Exemplos:

• $\mathbf{4x^2 - 9x = 0}$

$x(4x - 9) = 0$

Primeiro põe-se em evidência o factor comum x, recorrendo à propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

Recorremos à lei do anulamento do produto.

$$x = 0 \text{ ou } 4x - 9 = 0$$

$$x = 0 \text{ e } x = \frac{9}{4}$$

As únicas soluções da equação são 0 e $\frac{3}{2}$.

• $\mathbf{4(x^2 - 7) = -3}$

Como o primeiro e o segundo membros são diferentes de zero, temos de preparar primeiro a equação para aplicar a lei de anulamento do produto.

$$4x^2 - 28 + 3 = 0$$

$$4x^2 - 25 = 0$$

O primeiro membro é uma diferença de dois quadrados, assim vem:

$$(2x - 5)(2x + 5) = 0$$

$$2x - 5 = 0 \text{ ou } 2x + 5 = 0$$

As únicas soluções da equação são $\frac{5}{2}$ e $-\frac{5}{2}$.

Repara que podias ter procedido de outro modo, recorrendo à noção da raiz quadrada:

$4x^2 - 25 = 0$ é equivalente a $x^2 = \frac{25}{4}$ e daqui, concluímos que, $x = \frac{5}{2}$ ou $x = -\frac{5}{2}$.

Apresentamos mais alguns exemplos de equações incompletas, dando outra forma de resolução:

• $\mathbf{3x(x - 2) - 3x(2x + 2) = 0}$

$3x(x - 2 - 2x - 2) = 0$		$3x^2 - 6x - 6x^2 - 6x = 0$
$3x(-x - 4) = 0$		$-3x^2 - 12x = 0$
$x = 0$ ou $-x - 4 = 0$	ou	$3x(-x - 4) = 0$
$x = 0$ ou $x = -4$		$x = 0$ ou $-x - 4 = 0$
		$x = 0$ ou $x = -4$

O conjunto das soluções é $\{0; -4\}$.

• $\mathbf{(4x - 3)(x + 2) = -6}$

Não podemos aplicar a lei do anulamento do produto, pois nenhum dos membros é zero; a equação apresentada é equivalente a cada uma das seguintes.

$4x^2 + 8x - 3x - 6 = -6$

$4x^2 + 5x = 0$

$x(4x + 5) = 0$

$x = 0$ ou $x = -\frac{5}{4}$ C.S $= \left\{0; \frac{5}{4}\right\}$

• $\mathbf{0 = 4x^2 - 10{,}24}$

Esta equação é equivalente a $0 = x^2 - 2{,}56$

outra forma,

$(x - 1{,}6)(x + 1{,}6) = 0$	$x^2 = 2{,}56$
$x = 1{,}6$ ou $x = -1{,}6$	$x = \sqrt{2{,}56}$ ou $x = -\sqrt{2{,}56}$
	$x = 1{,}6$ ou $x = -1{,}6$

As únicas soluções são 1,6 e − 1,6.

• $\mathbf{-4x^2 - 10{,}24 = 0}$

Como $x^2 \geq 0$ para qualquer valor real de x, concluímos que,

$-4x^2 - 10{,}24 < 0$ para qualquer valor de x.

A equação é impossível.

C.S $= \{ \}$

• $-3m + 6 = -3(m-9) + 5(m^2-6)$

$-3m + 6 = -3m + 27 + 5m^2 - 30$

$0 = 5m^2 - 9$

Outra forma:

$0 = \left(\sqrt{5m} - 3\right)\left(\sqrt{5m} + 3\right)$ ou $\frac{9}{5} = m^2$

$\sqrt{5m} - 3 = 0$ ou $\sqrt{5m} + 3 = 0$

$m = \sqrt{\frac{9}{5}}$ ou $m = -\sqrt{\frac{9}{5}}$

$m = \frac{3}{\sqrt{5}}$ ou $m = -\frac{3}{\sqrt{5}}$

Repara que as expressões que encontraste são diferentes, mas que devem representar os mesmos números, já que resultam da resolução da mesma equação.

Podes, entretanto, confirmar directamente que, $\frac{3}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{9}{5}}$.

Lembra que, dois números positivos ou negativos só são iguais se têm o mesmo quadrado.

$\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{3 \times 3}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{9}{5}$ e $\left(\sqrt{\frac{9}{5}}\right)^2 = \frac{9}{5}$

Com isto concluis que:

$-\frac{3}{\sqrt{5}} = -\sqrt{\frac{9}{5}}$

Também sabes que, $\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{3}{5}\sqrt{5}.$

Assim, ainda podes dizer que as únicas soluções da equação são $\frac{3}{5}\sqrt{5}$ e $-\frac{3}{5}\sqrt{5}$.

Actividades

1. Resolve cada uma das seguintes equações.

a) $-0{,}04 = -\frac{x^2}{4}$

b) $-x + x^2 = 3x - 5x^2$

c) $x^2 = 49$

d) $x^2 - 0{,}3x = 0$

e) $9x^2 = 36x$

f) $-\frac{3}{4}x^2 = \frac{1}{3}x$

g) $(9-x)(x+9) = 100$

h) $5x^2 = 13x^2 - 4$

2. Quantos termos tem uma equação de 2.º grau incompleta?

3. Resolve as equações:

a) $(1-x)^2 = (3x+1)(x+1)$

b) $-\frac{x(x+1)}{3} = \frac{1-3x}{9} - 2$

c) $\frac{1}{3}(x-1)^2 = -\frac{2}{3}x + 4$

d) $x^2 + \frac{9}{5} = 3\frac{(x+1)}{2} + \frac{3}{10}$

4. Escreve uma equação do 2.º grau incompleta, sendo nulo o termo independente.

• Resolução de equações do 2.º grau completas

Observa a equação:

$$2x(x-5)-7(x-5)=0$$

Vamos mostrar que é uma equação completa do 2.º grau.

$$2x^2-10x-7x+35=0$$
$$2x^2-17x+35=0$$

Podemos também resolver a equação, sem recorrer a esses passos, isto é, repara que o 2.º membro é zero e que há no primeiro membro um factor comum às duas parcelas: $(x-5)$.

Temos assim:

$$2x(x-5)-7(x-5)=0$$
$$(x-5)(2x-7)=0$$
$$x=5 \text{ ou } x=3{,}5$$

O conjunto-solução é $\{5;3{,}5\}$.

Exemplo:

Agora procura resolver cada uma das equações completas do 2.º grau.

a) $(x+3)^2=16$

$(x+3-4)(x+3+4)=0$

$x+3-4=0$ ou $x+3+4=0$

$x+3=4$ ou $x+3=-4$

$x=1$ ou $x=-7$

O conjunto-solução é $\{1;7\}$.

b) $(x+5)=-x(x+5)$

$(x+5)+x(x+5)=0$

$(x+5)(1+x)=0$

$x=-5$ ou $x=-1$

O conjunto-solução é $\{-5;-1\}$.

Actividades

1. Resolve cada uma das equações:

a) $-2x^2+7x=0$

b) $4x(x+1)=-1$

c) $0=1-16x^2$

d) $x^2+2x+1=4x^2$

e) $-75=3x^2-30x$

f) $\frac{1}{25}x^2+\sqrt{3}=0$

2. Considera a equação do segundo grau:

$$0=4x^2+8x+3$$

a) Mostra que a equação apresentada é equivalente a:

$$(2x+3)(2x+1)=0.$$

b) Indica o seu conjunto-solução.

3. Determina o conjunto-solução de cada equação do segundo grau.

a) $9n^2+6n+1=0$

b) $0=4m^2-3$

c) $0=-36^2+6$

d) $-a^2+8a-16=0$

e) $-c^2+50,41=0$

f) $-a^2+5{,}2+2a^2=\frac{1}{5}$

4. Completa de modo a obteres uma equação cuja única solução seja -1.

$$5x^2+10x+\ldots=0$$

• Fórmula resolvente das equações do 2.º grau

Vejamos que, é fácil resolver uma equação do 2.º grau se o 1.º membro de uma equação for o quadrado de um binómio.

Exemplos:

1. Resolve a equação:

$$(x + 2)^2 = 16$$

Resolução:

Se $(x + 2)^2 = 16$, então, $x + 2$ é igual a 4 ou $x + 2$ é igual a -4.

Logo, $(x + 2)^2 = 16$ é equivalente:

$x + 2 = 4$ ou $x + 2 = -4$

$x = 2$ $\quad$ $x = -6$

Desenvolvendo a equação $(x + 2)^2 = 16$, obténs $x^2 + 4x + 4 = 16$

$x^2 + 4x + 4 - 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 12 = 0$ (equação completa)

Claro que agora sabes que, o conjunto-solução desta equação é $\{-6; 2\}$.

2. Resolve a equação:

$$x^2 - 4x = 5$$

Resolução:

Neste caso o primeiro membro não é o quadrado de um binómio. Completemos o 1.º membro de modo a formar o quadrado.

$$\overset{\text{quadrado}}{}$$

$$x^2 - 4x + \underset{4}{\ldots} = (x - \underset{2}{\ldots})^2$$

metade

Outro Metodo

Procedimento:

- calcula-se a metade do 2.º coeficiente e coloca-se o membro calculado no 2.º membro;
- calcula-se o quadrado deste mesmo número e o valor calculado é colocado como última parcela no 1.º membro, com o objectivo de formar o quadrado do binómio;
- o sinal de operação dependerá do sinal do 2.º coeficiente.

Então, neste caso adicionaremos 4 a cada membro da equação dada.

$$x^2 - 4x + 4 = 5 + 4 \Leftrightarrow$$
$$(x - 2)^2 = 9$$

Logo, $x - 2 = 3$ ou $x - 2 = -3$

$x = 5$ ou $x = -1$

$S = \{-1; 5\}$

3. Resolve a equação:

$6x^2 - 12x - 5 = 0$.

Vamos resolver a equação reduzindo-a a uma situação idêntica à anterior.

$6x^2 - 12x - 5 = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 12x = 5$

$x^2 - 2x = \frac{5}{6}$

$x^2 - 2x + 1 = \frac{5}{6} + 1$

$(x - 1)^2 = \frac{11}{6}$

$x + 1 = \sqrt{\frac{11}{6}}$ ou $x + 1 = -\sqrt{\frac{11}{6}}$

$x = -1 + \sqrt{\frac{11}{6}}$ ou $x = -1 - \sqrt{\frac{11}{6}}$

$S = \left\{-1 - \sqrt{\frac{11}{6}}\,; -1 + \sqrt{\frac{11}{6}}\right\}$

Como vês, o processo é simples, os cálculos é que por vezes podem ser demorados.

Por um processo análogo, partindo da equação do 2.º grau:

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ com } a \neq 0$$

prova-se que, a equação é possível se e só se $b^2 - 4ac \geq 0$ sendo então equivalente a:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Esta é a fórmula resolvente da equação do 2.º grau, mas só interessa ser usada para as equações completas.

Assim:

Dada uma equação do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, com a, b e c constantes reais e $a \neq 0$, temos:

- Se $b^2 - 4ac < 0$ a equação é impossível.
- Se $b^2 - 4ac > 0$ a equação é possível e tem duas soluções, uma delas é:

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ e a outra é } \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

- Se $b^2 - 4ac = 0$ a equação é possível só com uma solução que é $\frac{-b}{2a}$.

É constante chamar binómio discriminante à expressão $b^2 - 4ac$ e representá-lo, para simplificar a escrita, pela letra grega Δ (delta).

Exemplo:

Resolve as seguintes equações do 2.º grau.

a) $x^2 - 7x + 10 = 0$ **b)** $-3x^2 - x + 1 = 0$

Resolução:

a) A equação dada já está na forma $ax^2 + bx + c = 0$

Temos $a = 1$; $b = -7$ e $c = 10$

Vamos usar a fórmula resolvente das equações do 2.º grau.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Substituindo a, b e c vem:

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \times 1 \times 10}}{2 \times 1}$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2}$$

$$x = \frac{7 + 3}{2} \text{ ou } x = \frac{7 - 3}{2}$$

$x = 5$ ou $x = 2$

Logo, $S = \{2 ; 5\}$.

b) $-3x^2 - x + 1 = 0$

$a = -3$

$b = -1$ $\quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$c = 1$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)2 - 4 \cdot (-3 \cdot 1}}{2 \cdot (-3)} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 12}}{-6}$$

$$x = \frac{1 + \sqrt{13}}{-6} \text{ ou } x = \frac{1 - \sqrt{13}}{-6}$$

Como $\sqrt{13}$ é um número irracional, o valor exacto das soluções é o que se indica, se pretendermos um valor aproximado para as soluções, podemos calcular.

Por exemplo, $-1{,}4$ e $-8{,}6$ são valores aproximados das soluções, com uma casa decimal.

Fórmula resolvente simplificada

Na resolução da equação $ax^2 + bx + c = 0$, $a \uparrow 0$, quando **b é par**, também se usa a fórmula:

$$x = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}, \text{ em que } k = \frac{b}{2}$$

Exemplo:

Resolve a equação $4x^2 - 12x - 20 = 0$, usando a fórmula

$$x = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}, \text{ sendo } k = \frac{b}{2}.$$

Resolução:

$a = 4$; $k = 6$; $c = -20$

$$4x^2 - 12x - 20 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{4}$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{4}$$

$$x = \frac{6 + 2}{4} \Leftrightarrow x = 2 \text{ e } x = \frac{6 - 2}{4} \Leftrightarrow x = 1$$

$S = \{1; 2\}$

Actividades

1. Resolve, utilizando a fórmula resolvente, cada uma das seguintes equações do 2.º grau.

a) $x^2 - 6x + 8 = 0$

b) $x^2 + 4x + 21 = 0$ $\Rightarrow 16 - 4 \cdot 1 \cdot 2$

c) $x^2 + 7x - 6 = 0$

d) $x^2 + 2x = -1$ $\Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0$

e) $5x^2 - 15x - 50 = 0$ $\Delta = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 1$

f) $4x^2 - 8x + 48 = 0$ $\Delta = 0$

g) $-2 + x + 6x^2 = 0$

h) $x^2 = -2 + 6x$

2. Resolve cada uma das seguintes equações, usando a fórmula resolvente simplificada.

a) $x^2 - 4x + 44 = 0$

b) $3x^2 + 64x + 21 = 0$

c) $4a^2 - 10a + 42 = 0$

3. Pretende-se colocar um vidro numa janela rectangular, com área 3,2 m² e perímetro 7,2 m.

Quais as dimensões do vidro?

4. A Margarida disse à Joana, quando esta lhe perguntou a idade:

«A soma do quadrado da minha idade com o valor da minha idade é 156.»

Que idade tem a Margarida?

Neste tema aprendi...

☐ **Números irracionais** são aqueles que podem ser representados por dízimas infinitas não periódicas.

☐ **Números racionais** são aqueles que podem ser representados por dízimas finitas ou por dízimas infinitas periódicas.

☐ **Recta real** é a recta onde representamos tanto os números racionais como os irracionais, isto é, onde representamos os números reais.

☐ Para **comparar números reais** recorre-se às relações >, < e = .

☐ Existem 4 tipos de representação de conjuntos de números reais: em **extensão**, em **compreensão**, em **intervalo** e **gráfica**.

☐ A operação de **intersecção** de dois conjuntos, por exemplo A e B, representa-se por A ∩ B, é o conjunto formado pelos elementos comuns a A e B.

☐ A operação de **reunião** de dois conjuntos, por exemplo A e B, representa-se por A ∪ B, é o conjunto formado pelos elementos comuns pelo menos a um destes conjuntos.

☐ A equação do **1.º grau a duas incógnitas** é uma equação onde figuram apenas duas variáveis com expoente 1. A **recta** é a representação geométrica de todos os **pares ordenados** que são solução da equação.

☐ Um par ordenado $(x ; y)$ é solução de um **sistema de duas equações com duas incógnitas**, se $(x ; y)$ for solução simultaneamente das duas equações.

- [ ] Um sistema de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas pode ser resolvido através dos métodos: substituição, comparação e redução. Também pode ser resolvido através da construção gráfica das duas equações do sistema, verificando os pontos comuns.

- [ ] Um **sistema possível determinado** é um sistema que tem um par de números como solução.

- [ ] Um **sistema possível indeterminado** é um sistema que tem infinitos pares de números como solução.

- [ ] Um **sistema impossível** é um sistema que não tem nenhum par de números que verifique simultamenamente as duas equações do sistema.

- [ ] Uma **inequação** é uma desigualdade onde figura pelos menos uma incógnita representada por uma letra.

- [ ] Uma **equação do 2.º grau com uma incógnita** é toda a equação do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, com a, b e c constantes reais e $a \neq 0$.

- [ ] Uma **equação do 2.º grau** chama-se **incompleta** se o seu termo independente ou o termo *x* for nulo.

- [ ] Na **resolução de equações do 2.º grau incompletas** utiliza-se a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, a lei do anulamento do produto, a noção de raiz quadrada e os casos notáveis da multiplicação.

- [ ] Na **resolução de equações do 2.º grau completas** se o 1.º membro da equação for o quadrado de um binómio utiliza-se a fórmula resolvente. Quando b é par, pode-se usar a fórmula resolvente simplificada.

Tema B Proporcionalidade inversa

B.1 CONSTANTE DE PROPORCIONALIDADE INVERSA

Em física sabemos que $e = v \times t$

e → espaço percorrido
v → velocidade média
t → tempo

Esta fórmula estabelece uma relação entre três variáveis **e**, **v** e **t**.

No exemplo seguinte, temos uma tabela onde se lêem valores de duas variáveis **v** e **t** que estão relacionadas.

v	55	22	44	11
t	4	10	5	20

O produto dos valores de cada coluna é constante:

$$55 \times 4 = 220\ ;\ 22 \times 10 = 220 \ldots$$

As variáveis v e t dizem-se **inversamente proporcionais**. A constante 220 chama-se **constante de proporcionalidade**.

Definição:

Se o produto de duas variáveis é uma constante não nula, as duas variáveis são inversamente proporcionais.

De um modo geral:

Se *x* e *y* são variáveis inversamente proporcionais, $xy = k$, sendo k, uma constante não nula, a constante de proporcionalidade.

B.2 TABELAS E GRÁFICOS

Partindo da equação $x\,y = 220$ tem-se:

$x = \dfrac{220}{y} \longrightarrow x$ como função de y

Ou $y = \dfrac{220}{x} \longrightarrow y$ como função de x

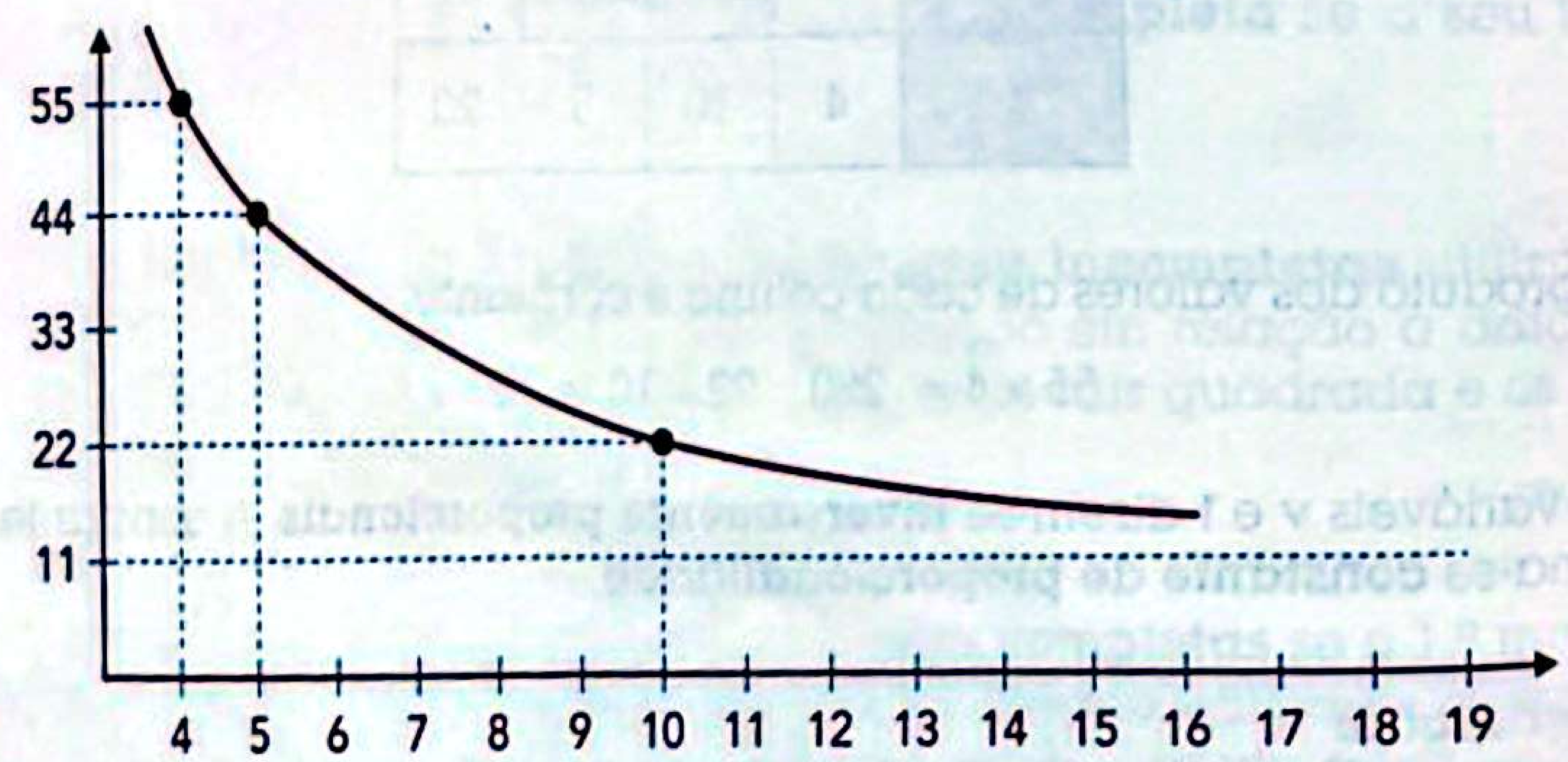
Sempre que temos duas variáveis inversamente proporcionais, podemos representar qualquer uma delas como função de outra.

Se consideramos a equação

$y = \dfrac{220}{x}$ ou $y = 220 \times \dfrac{1}{x}$ ou $x \longrightarrow y = \dfrac{220}{x}$

tomamos por variável independente x e para variável dependente y.

Representando graficamente os valores da tabela do exemplo anterior, tem-se:



De forma geral temos uma função do tipo:

$x \longrightarrow y = \dfrac{k}{x}$ (com k constante e $k \neq 0$) é uma função de proporcionalidade inversa e o número k é a constante da proporcionalidade.

B.3 PROPORCIONALIDADE INVERSA COMO FUNÇÃO $x \frown \dfrac{k}{x}$

Se duas variáveis estiverem relacionadas por uma proporcionalidade inversa, sempre que uma aumenta a outra diminui, mas este facto não é suficiente para que em matemática se diga que se trata de uma proporcionalidade inversa.

O produto de duas variáveis terá de ser sempre constante.

Relação de proporcionalidade

Sabemos nós que, desde os tempos remotos que se resolvem problemas usando a proporcionalidade directa e a proporcionalidade inversa.

- **Proporcionalidade directa**

Se duas variáveis estiverem relacionadas por uma proporcionalidade directa teremos:

$y = k \times x$ constante de proporcionalidade = k, $k \neq 0$

As duas variáveis aumentam ou diminuem conjuntamente mantendo sempre a mesma proporção (se uma duplica a outra duplica se uma triplica a outra triplica, etc.).

Exemplo:

$y = 10x$

Número de passageiros	Em Kwanzas
1	10
2	20
3	30
...	...
...	...
...	...

- **Proporcionalidade inversa**

Se duas variáveis estiverem relacionadas por uma proporcionalidade inversa teremos:

$y = \dfrac{k}{x}$, k = constante de proporcionalidade.

Enquanto uma variável aumenta a outra diminui na mesma proporção (se uma duplica a outra passa a metade, se uma triplica a outra passa a um terço, etc.).

B.4 ANÁLISE DE GRÁFICOS QUE TRADUZEM SITUAÇÕES DA VIDA REAL

Exemplos:

1. A tabela seguinte está incompleta. Completa-a, de modo a que, as variáveis x e y sejam inversamente proporcionais.

x		25		50
y	1		10	6

Resolução:

Para que as variáveis x e y sejam inversamente proporcionais o produto entre x e y terá de ser constante.

Como se conhecem dois valores correspondentes de x e y, tem-se que:

$$xy = 50 \times 6 \iff xy = 300 \iff y = \frac{300}{x}$$

Logo, se $y = 1$, $x = 300$

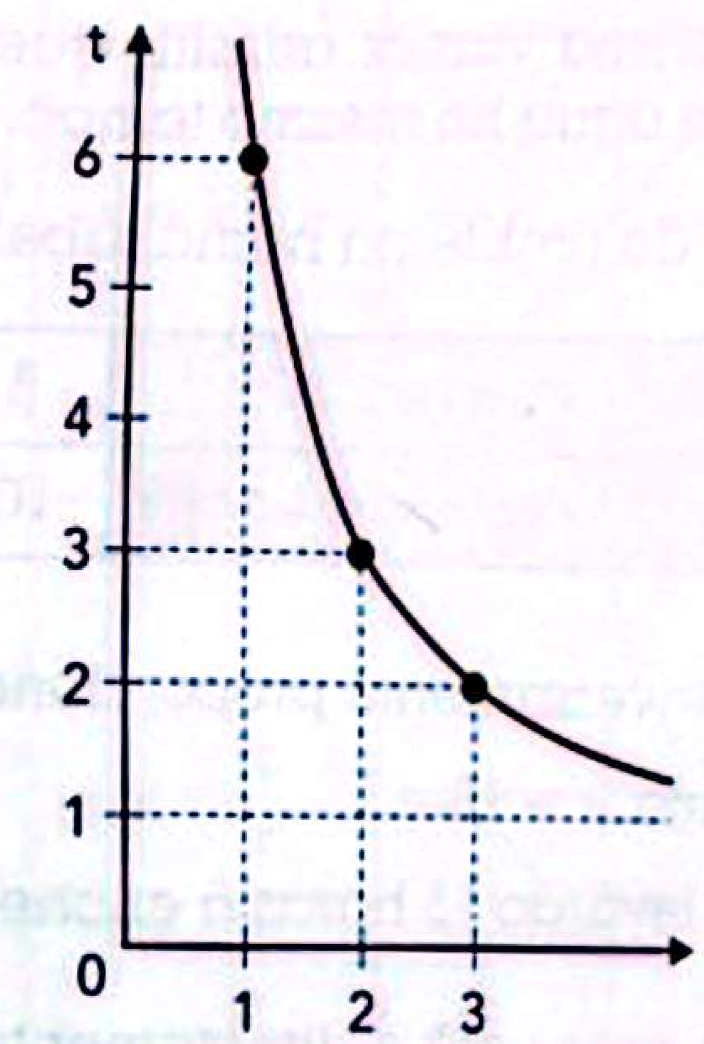
Se $x = 25$, $y = \frac{300}{25} \iff y = 12$

Se $y = 10$, $10 = \frac{300}{x} \iff x = 30$

Logo, a tabela completa será:

x	300	25	30	50
y	1	12	10	6

2. Um camponês leva 6 horas para lavrar a sua terra. Se a terra for lavrada por mais de um camponês, naturalmente levará menos tempo a ser lavrada. O gráfico seguinte relaciona o número de camponeses (**n**), com o número de horas de lavrar a terra (**t**).



2.1 Constrói uma tabela correspondente aos pontos assinalados no gráfico.

2.2 Diz justificando, se as variáveis **n** e **t** são inversamente proporcionais.

2.3 Escreve a equação algébrica da função que a situação real sugere.

Resolução:

2.1

n	1	2	2	6
t	6	3	2	1

2.2 As variáveis **n** e **t** são inversamente proporcionais porque o seu produto é constante $1 \times 6 = 2 \times 3 = 3 \times 2 = 6 \times 1 = 6$.

2.3 Com $\mathbf{n} \times \mathbf{t} = 6$, vem $\mathbf{t} = \frac{6}{n}$.

2.4 Logo, a equação algébrica será $t = \frac{6}{n}$.

3. Três torneiras iguais enchem uma cisterna em 10 horas. Se se estragasse uma das torneiras, quanto tempo levaria a encher a cisterna com as outras duas.

Resolução:

Na resolução do problema vamos admitir que as torneiras deitam a mesma quantidade de água no mesmo tempo.

Coloquemos os dados do problema numa tabela:

Número de torneiras (n)	3	2
Tempo que leva a encher (t)	10	?

As variáveis **n** e **t** são inversamente proporcionais.

Logo $3 \times 10 = 2x$, ou seja, $x = 15$.

Então, duas torneiras levarão 15 horas a encher a cisterna.

4. A altura y da imagem num ecrã é directamente proporcional à distância x do ecrã ao projector. Se a imagem tem 20 cm de altura quando o ecrã dista 100 cm do projector, a que distância do ecrã deve estar o projector para a imagem sofrer uma ampliação de 4 cm?

Resolução:

Sabemos que as variáveis x e y são directamente proporcionais.

Logo, $\frac{x}{y} = k$ (k constante).

Determinemos k:

$$y = 20 \text{ cm} \qquad x = 100 \qquad k = \frac{20}{100} = 0{,}2$$

Determinemos x:

Se $y = 20 + 4 = 24$

$\frac{24}{x} = 0{,}2 \qquad x = \frac{24}{0{,}2} \qquad x = 120$

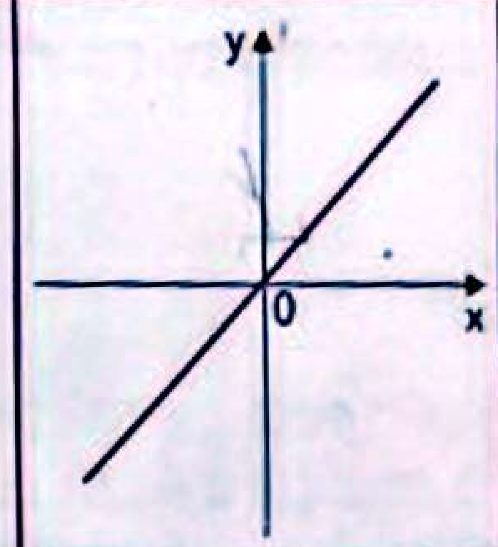
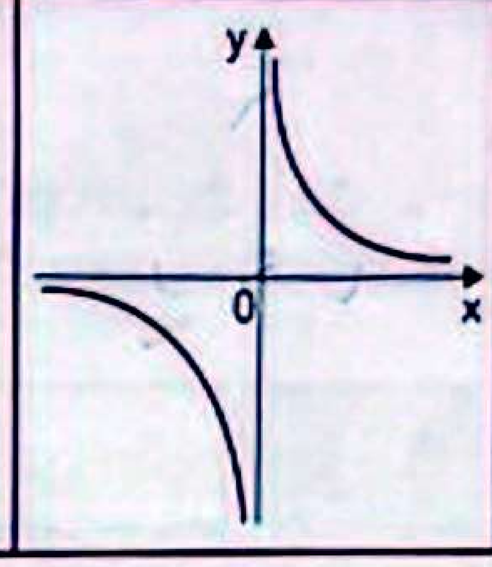
Logo, a distância pedida é 120 cm.

Resumindo:

Os valores de duas grandezas, que dependem uma da outra, podem estar relacionados por:

- uma proporcionalidade directa;
- uma proporcionalidade inversa;
- nenhum destes tipos de proporcionalidade.

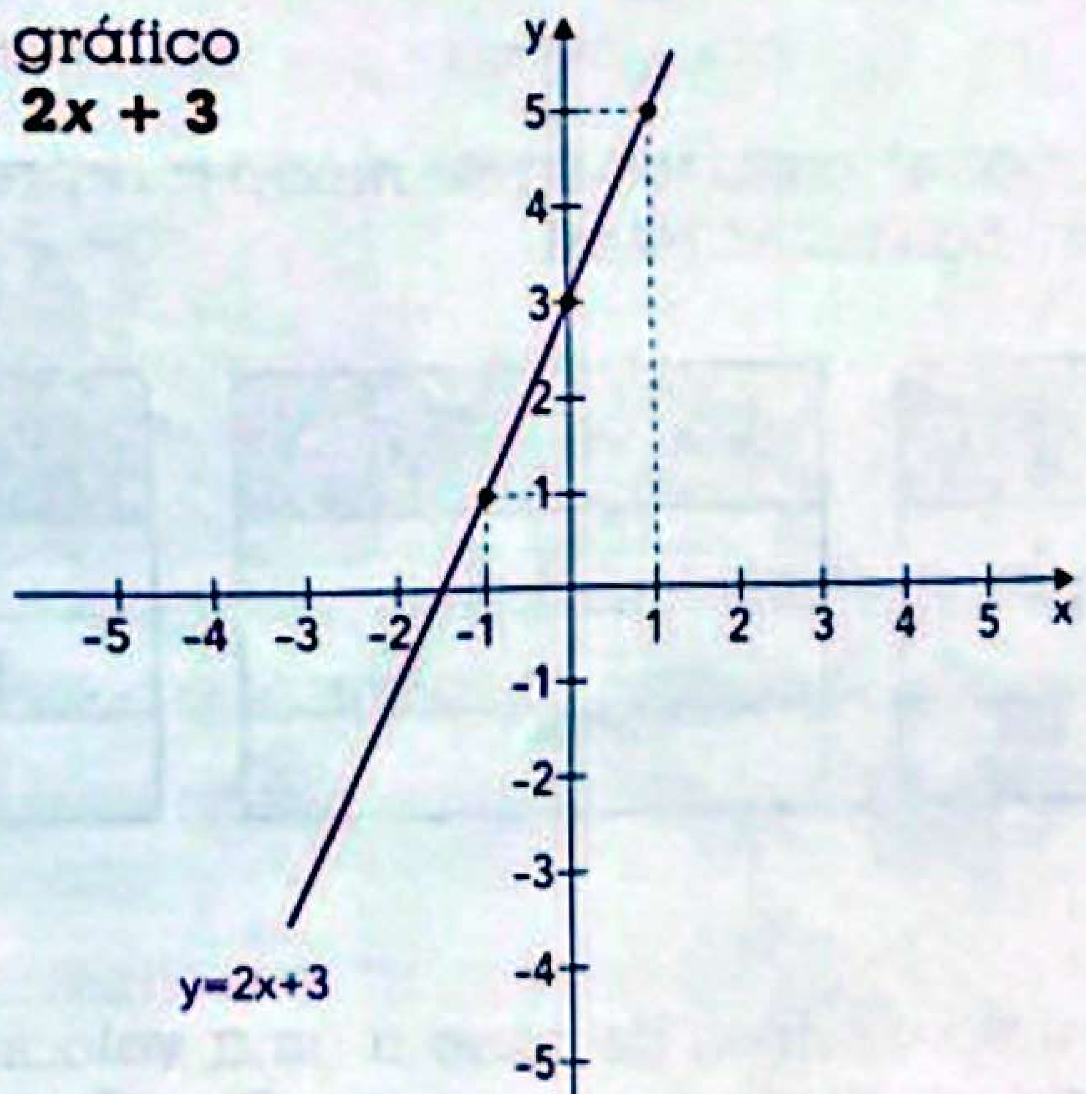
O quadro que se segue, sintetiza os dois tipos de proporcionalidade que estudaste.

Tipo de função	Expressão	Gráfico	Características
Proporcionalidade Directa	$y = k \times x$		• k: constante da função é o declive da recta que a representa; • Recta que passa na origem do sistema de eixos.
Proporcionalidade Inversa	$y = \frac{k}{x}$		• k: constante da função; • Hipérbole.

No caso de não se verificarem as condições que se apresentam, então as duas grandezas não se relacionam entre si através de uma proporcionalidade.

Exemplo:

Construção do gráfico da função: $\boldsymbol{y = 2x + 3}$



- O gráfico é uma recta e não uma hipérbole, logo, não é proporcionalidade inversa;
- A recta não passa na origem, logo, não é proporcionalidade directa.

Actividades

1. Um automóvel demora cerca de 4 horas de Luanda a Catete com uma velocidade de 60 km/h. Qual a distância percorrida?

2. Um pátio rectangular tem 12 m de comprimento e 15 m de largura. Qual deverá ser o comprimento (em metros) de outro pátio, com a mesma área do primeiro e 18 metros de largura?

3. Sendo dada uma função de proporcionalidade inversa pela tabela seguinte, faz o gráfico correspondente.

x	2	10	1	5
y	5	1	10	2

4. Num mapa, a distância entre duas cidades é de 6 cm, na realidade, a distância entre elas é de 30 km. Qual a escala do mapa?

5. Completa, se possível, cada tabela de modo a representar uma função de proporcionalidade inversa.

x	y
4	3
6	
	10

x	y
7	
	10

x	y
8	
4	1

6. O Walter foi a casa do Hélio, de carro a uma velocidade média de 70 km/h, e demorou 10 minutos a chegar. Quanto tempo levaria se tivesse ido a uma velocidade média de 50 km/h?

7. Na tabela abaixo, estão registados os números de garrafas que posso usar para esvaziar um bidão de azeite e as respectivas capacidades.

N.º de garrafas (n)	6	8	12	16	24
Capacidade da garrafa em litros (c)	2	1,5	1	0,75	0,5

7.1 Prova que se trata de uma proporcionalidade inversa.

7.2 Qual a constante de proporcionalidade? Qual o seu significado?

7.3 Se tivesses usado garrafas de 4 ℓ, quantas enchias?

8. A turma da Luísa tem 20 alunos. Pelo aniversário da professora, a turma queria juntar-se para comprar um ramo de flores. Para determinar de forma mais fácil, a quantia que cada um teria de pagar, a Luísa fez a seguinte tabela (com algumas das possibilidades):

N.º de alunos	2	4	6	8	10	12	15	20
Preço que cada aluno tem de pagar (Kwanzas)	1500	750	500	375	300	250	200	150

8.1 Faz um gráfico que traduza a tabela.

8.2 Verifica que as grandezas em estudo são inversamente proporcionais.

8.3 Qual a constante de proporcionalidade? O que representa?

9. As alturas e as áreas das bases de cilindros com o mesmo volume são inversamente proporcionais? Porquê? O que representa a constante?

Neste tema aprendi...

- ☐ Se as duas variáveis aumentam ou diminuem conjuntamente, mantendo sempre a mesma proporção, temos uma **proporcionalidade directa**.
- ☐ Se uma variável aumenta e a outra diminui na mesma proporção, temos uma **proporcionalidade inversa**.
- ☐ Uma função de proporcionalidade directa é do tipo $y = k \cdot x$
- ☐ Uma função de proporcionalidade inversa é do tipo $y = \frac{k}{x}$
- ☐ O gráfico de uma proporcionalidade directa é uma recta que passa na origem do sistema de eixos.
- ☐ O gráfico de uma proporcionalidade inversa é uma hipérbole.
- ☐ A constante numa função de proporcionalidade directa é o declive da recta.
- ☐ As proporcionalidades directas e inversas podem ser expressas em gráficos que traduzem situações da vida real.

Tema C Trigonometria do triângulo rectângulo

C.1 Razões trigonométricas de ângulos agudos

C.2 Relações entre as razões trigonométricas de um ângulo agudo

C.3 Tabelas de valores trigonométricos

A Trigonometria é o ramo da Matemática que se ocupa da medição de ângulos num triângulo.

A palavra Trigonometria tem origem do grego *tri* – **três**; *gonia* – **ângulo**; *metrein* – **medir** (*medição de triângulos*).

Na Trigonometria estabelece-se relações entre os lados e os ângulos de um triângulo rectângulo.

Os astrónomos gregos calcularam a distância da Terra à Lua através de funções chamadas trigonométricas. Estas funções também eram utilizadas para determinar a localização dos navios e para representar matematicamente sons musicais.

Tales de Mileto aprendeu com os egípcios a determinar a altura de uma área sem ter de subir ao cimo da copa.

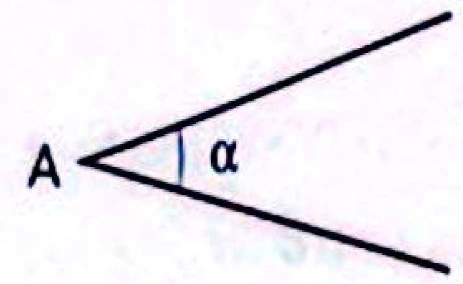
Para tal era apenas necessário medir a sombra. Usando a semelhança de triângulos, Tales de Mileto descobriu a que distância estavam os barcos inimigos da costa grega.

Só no fim da Idade Média é que o seno, o co-seno e a tangente receberam os seus nomes actuais.

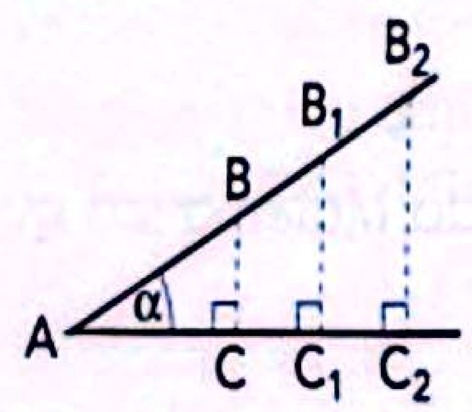
A seguir, vamos apresentar algumas relações simples entre os lados e os ângulos do triângulo.

C.1 RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS DE ÂNGULOS AGUDOS

Consideremos um ângulo agudo α, de vértice A.



Se sobre um dos lados do ângulo, tomarmos arbitrariamente os pontos C, C_1, C_2 e por esses pontos traçarmos perpendiculares ao lado AC, que encontram o outro lado do ângulo nos pontos B, B_1, B_2, respectivamente.



Obtemos assim, os triângulos rectângulos ABC, AB_1C_1, AB_2C_2, todos semelhantes entre si. Podemos, então, estabelecer as proporções:

$$\frac{\text{Comprimento do cateto oposto}}{\text{Comprimento da hipotenusa}} = \frac{\mathbf{CB}}{\mathbf{AB}} = \frac{\mathbf{C_1B_1}}{\mathbf{AB_1}} = \frac{\mathbf{C_2B_2}}{\mathbf{AB_2}} = \mathbf{k_1}$$

$$\frac{\text{Comprimento do cateto adjacente}}{\text{Comprimento da hipotenusa}} = \frac{\mathbf{AC}}{\mathbf{AB}} = \frac{\mathbf{AC_1}}{\mathbf{AB_1}} = \frac{\mathbf{AC_2}}{\mathbf{AB_2}} = \mathbf{k_2}$$

$$\frac{\text{Comprimento do cateto oposto}}{\text{Comprimento do cateto adjacente}} = \frac{\mathbf{CB}}{\mathbf{AC}} = \frac{\mathbf{C_1B_1}}{\mathbf{AC_1}} = \frac{\mathbf{C_2B_2}}{\mathbf{AC_2}} = \mathbf{k_3}$$

– A razão k_1, assim obtida, é chamada seno de α e escreve-se:

$\text{sen}\,\alpha = \frac{\overline{CB}}{\overline{AB}}$;

– A razão k_2, assim obtida, é chamada co-seno do ângulo α e escreve-se:

$\cos\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$;

– A razão k_3, assim obtida, é chamada tangente do ângulo α e escreve-se:

$\text{tg}\,\alpha = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}}$.

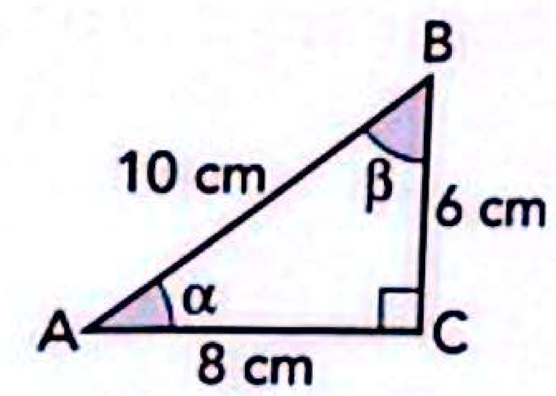
Se medirmos os lados AB, AB_1, AB_2, BC, B_1C_1, B_2C_2, AC, AC_1 e AC_2 verificaremos que as razões k_1, k_2, k_3 não dependem dos triângulos construídos, mas somente do ângulo α.

Os **senα, cosα, tgα** são chamados **razões trigonométricas do ângulo agudo α.**

Exemplos:

1. Para cada um dos triângulos abaixo, indica as razões trigonométricas dos ângulos agudos α e β.

1.1

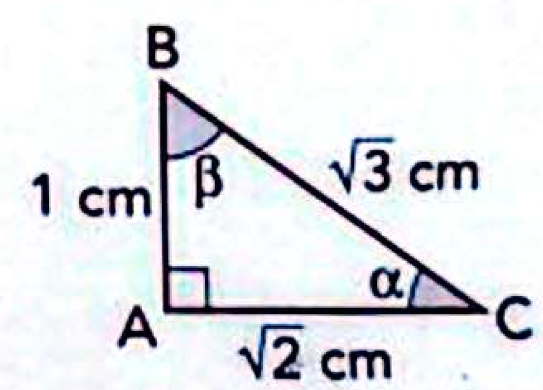


$\text{sen}\,\alpha = \frac{6}{10}$ $\quad$ $\text{sen}\,\beta = \frac{8}{10}$

$\cos\alpha = \frac{8}{10}$ $\quad$ $\cos\beta = \frac{6}{10}$

$\text{tg}\,\alpha = \frac{6}{8}$ $\quad$ $\text{tg}\,\beta = \frac{8}{6}$

1.2

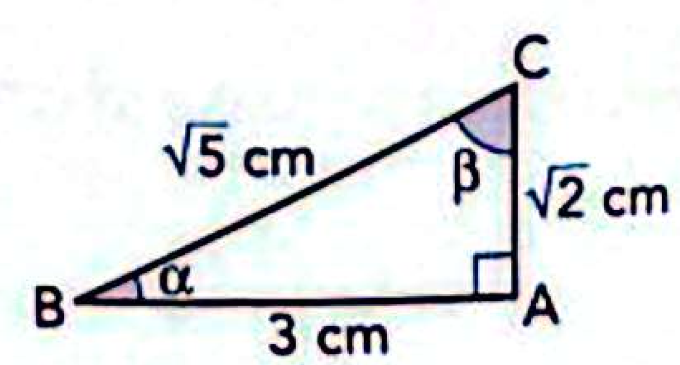


$\text{sen}\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad$ $\text{sen}\,\beta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ $\quad$ $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\text{tg}\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad$ $\text{tg}\,\beta = \frac{\sqrt{2}}{1}$

1.3



$\text{sen}\,\alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ $\quad$ $\text{sen}\,\beta = \frac{3}{\sqrt{5}}$

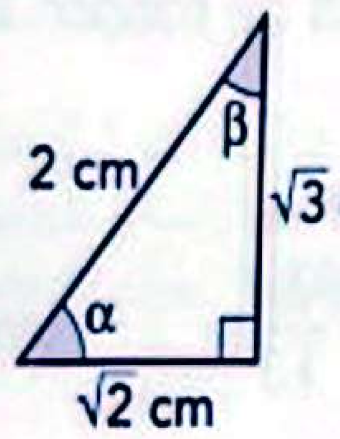
$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{5}}$ $\quad$ $\cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

$\text{tg}\,\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$ $\quad$ $\text{tg}\,\beta = \frac{3}{\sqrt{2}}$

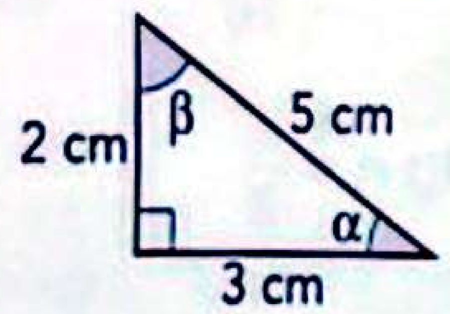
Actividades

1. Indica as razões trigonométricas dos ângulos agudos nos triângulos rectângulos abaixo:

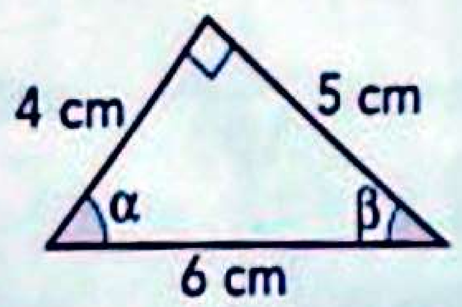
1.1



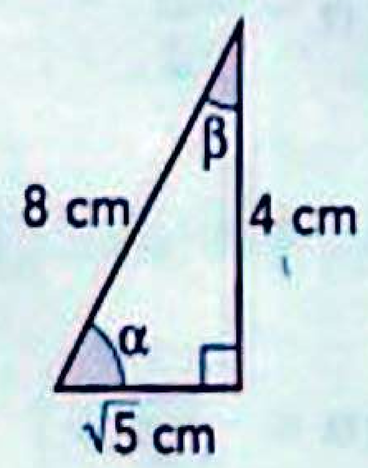
1.2



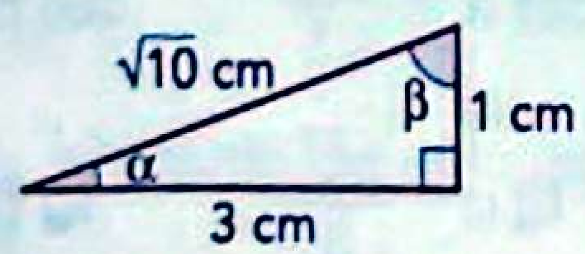
1.3



1.4



1.5

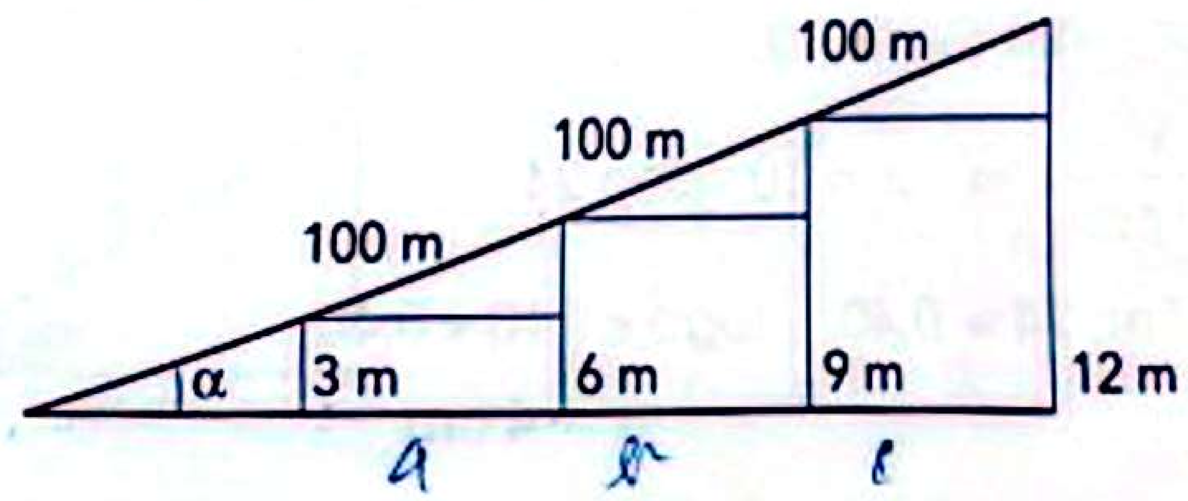


Aplicação das razões trigonométricas

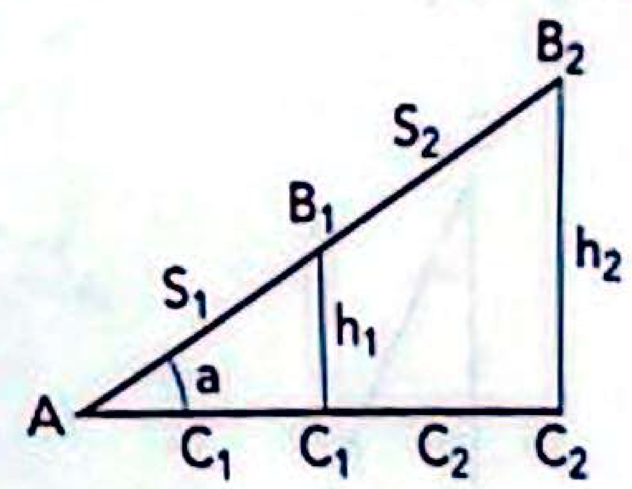
As razões trigonométricas possibilitam o cálculo de distâncias de figuras rectilíneas limitadas no plano e os seus respectivos ângulos.

O mais importante é que essas razões ou quocientes, não dependem do tamanho do triângulo mas apenas dos ângulos.

Por exemplo: Se a altura h de uma estrada aumenta uniformemente em 3 metros em cada 100 metros, assim a relação entre o aumento da altura h e a distância s, conforme a figura abaixo, é uma medida para a inclinação da estrada, isto é, a grandeza α do ângulo que a estrada e o plano horizontal formam.



Consideremos o triângulo:



Temos

$$h_1 : s_1 = h_2 : s_2 = \dots = h_n : s_n$$

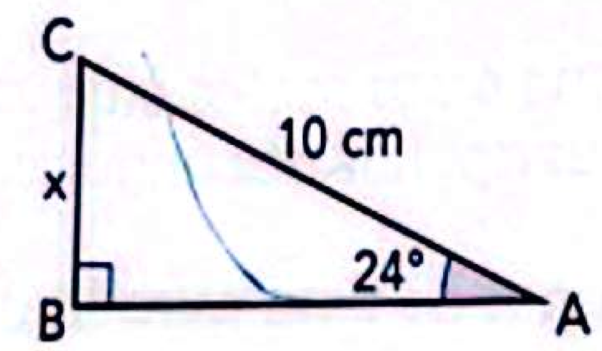
A relação h: s é uma função do ângulo α e chama-se seno de α.

$$\frac{h}{s} = \operatorname{sen}\alpha \quad \text{ou} \quad \frac{3}{100} = \operatorname{sen}\alpha$$

As razões trigonométricas de ângulos agudos permitem-nos resolver de forma mais rápida e fácil, alguns problemas frequentes na prática, tais como, determinar um ângulo agudo desconhecido de um triângulo rectângulo ou ainda determinar distâncias inacessíveis sem recorrer a régua, esquadro e transferidor, o que tornam o processo muito demorado e sujeito às inevitáveis imprecisões de desenho.

A. Determinação de um lado desconhecido.

1. Consideremos o triângulo [ABC]



de ângulo agudo $\alpha = 24°$ e hipotenusa = 10 cm.

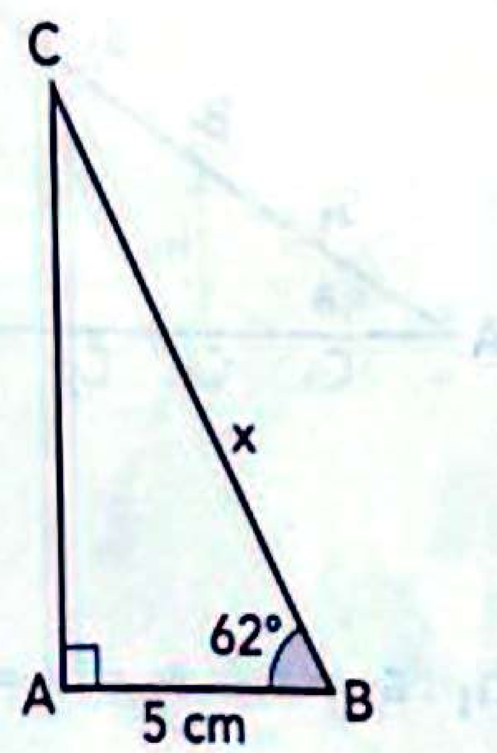
Para determinar o lado oposto x, cuja medida é desconhecida, procedemos da seguinte maneira:

$\text{Sen } 24° = \dfrac{x}{10 \text{ cm}} \Leftrightarrow x = 10 \times \text{Sen } 24$

Calculando Sen 24 = 0,40, logo $x = 10 \times 0{,}40$

$x = 4$ cm

2. Consideremos o triângulo [ABC]



de ângulo $\alpha = 62°$ e cateto adjacente = 5 cm.

Para determinar a hipotenusa x, cuja medida é desconhecida, procedemos da seguinte maneira:

$\text{Cos } 62° = \dfrac{5}{x} \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{\text{Cos } 62°}$

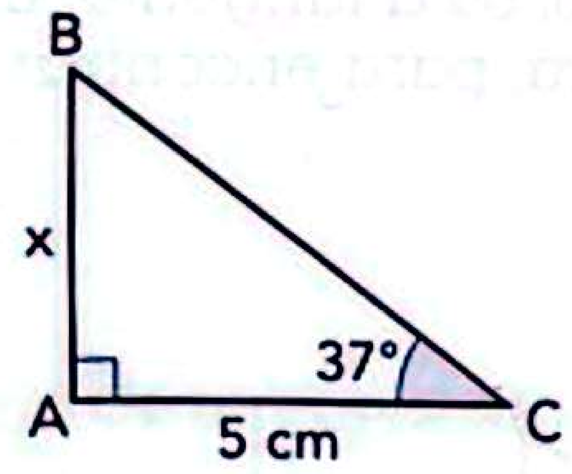
Calculando Cos 62° = 0,46, logo $x = \dfrac{5}{0{,}46}$

$x = 10{,}87$ cm

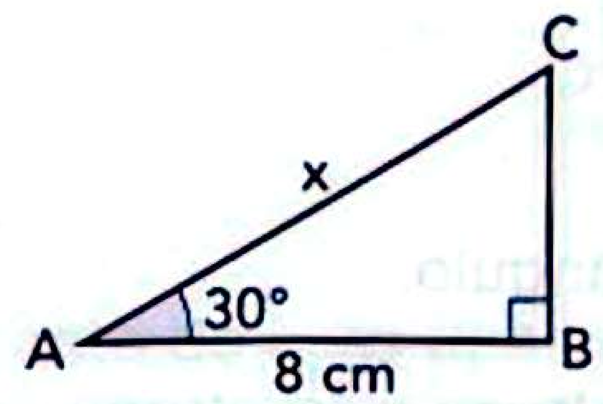
Actividades

1. Nos triângulos rectângulos abaixo, calcula o valor de x:

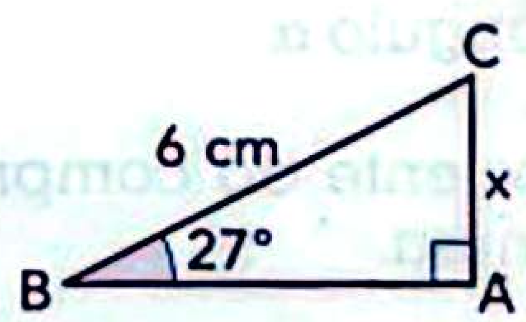
1.1



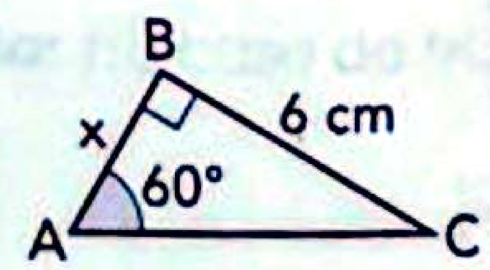
1.2



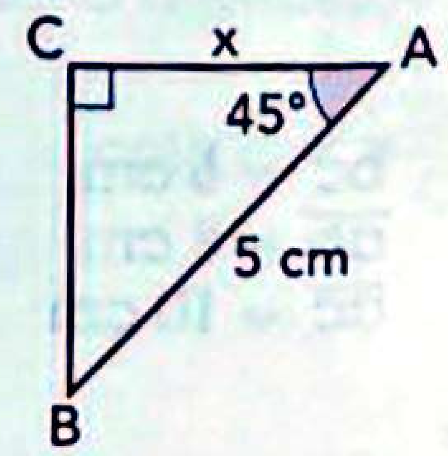
1.3



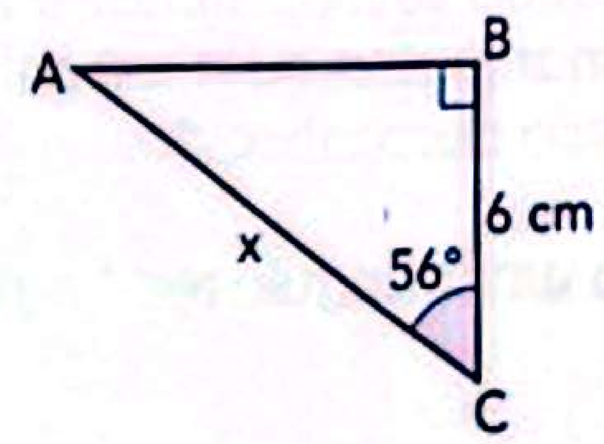
1.4



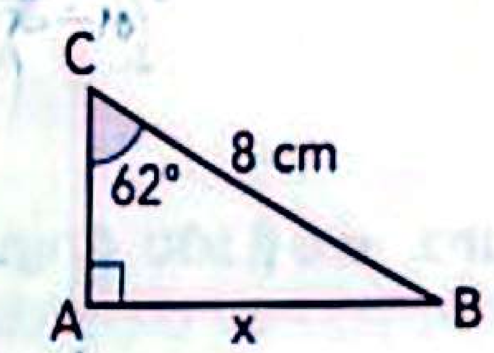
1.5



1.6

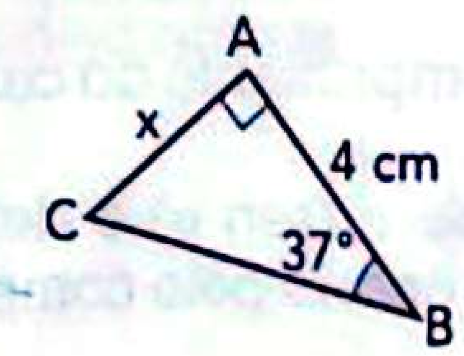


1.7

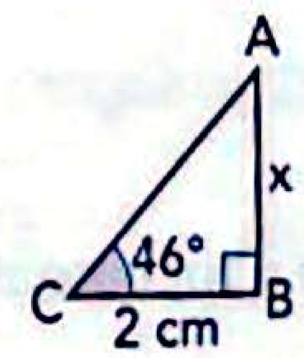


Calcular o arco

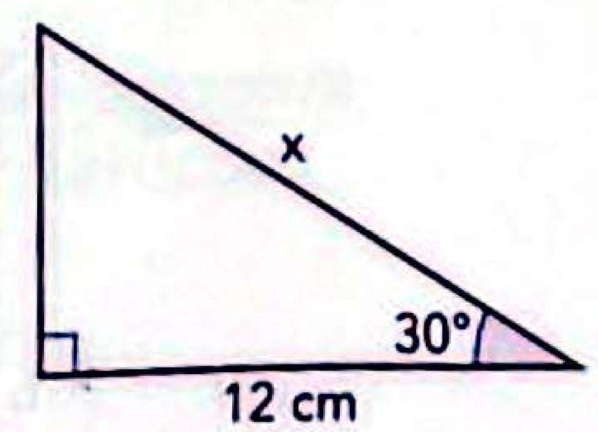
1.8



1.9



1.10

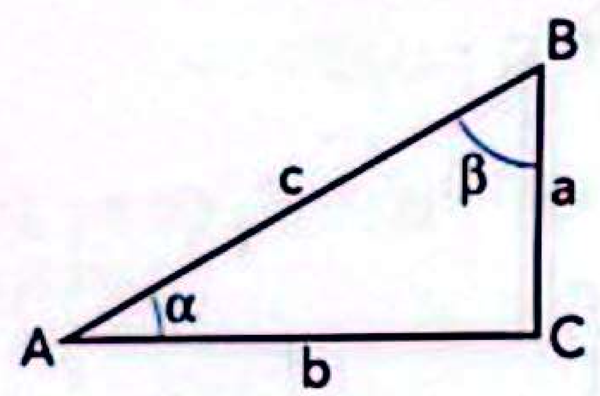


B. Determinação de um ângulo desconhecido

Para determinar a amplitude de um ângulo agudo de um triângulo rectângulo, sem recorrer à régua e transferidor, é suficiente conhecermos as medidas de dois dos seus lados.

Depois de se determinar o seno, o co-seno, ou a tangente, usa-se a tabela trigonométrica ou a máquina calculadora, para encontrar a amplitude do ângulo desconhecido.

Dado um triângulo rectângulo:



Na figura, α e β são ângulos agudos do triângulo.

$\overline{AB}$ é o comprimento da hipotenusa do ângulo α.

$\overline{BC}$ é o comprimento do cateto oposto ao ângulo α

$\overline{AC}$ é o comprimento do cateto adjacente ao ângulo α

a) Seno de α (sen α) é definido como o quociente do comprimento do cateto oposto pelo comprimento da hipotenusa.

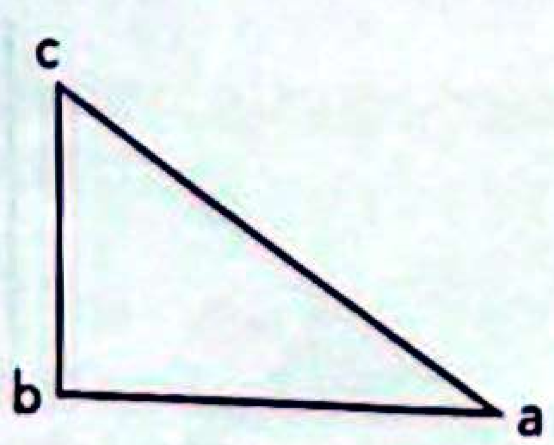
$$\text{Sen } \alpha = \frac{\text{comprimento do cateto oposto}}{\text{comprimento de hipotenusa}}$$

ou

$$\text{sen } \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$$

O seno de α representa-se por **sen** α.

Exemplo: vamos determinar o seno de α no triângulo abaixo, sendo a o ângulo no vértice a:



$\overline{bc} = 6$ cm
$\overline{ab} = 8$ cm
$\overline{ac} = 10$ cm

Logo, $\text{sen } \alpha = \frac{6 \text{ cm}}{10 \text{ cm}} = \frac{3}{5} = 0{,}6.$

b) Co-seno de α (cos α) é definido como o quociente do comprimento do cateto adjacente pelo comprimento da hipotenusa .

$$\cos \alpha = \frac{\text{comprimento do cateto adjacente}}{\text{comprimento da hipotenusa}}$$

ou

$$\cos \alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{b}{c}$$

O co-seno de α representa-se por cos α

Exemplo: vamos determinar o co-seno de α no triângulo da figura anterior.

$$\cos \alpha = \frac{8 \text{ cm}}{10 \text{ cm}} = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

c) Tangente de α (tg α) é definida como o quociente do comprimento do cateto oposto pelo comprimento do cateto adjacente.

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{comprimento do cateto oposto}}{\text{comprimento do cateto adjacente}}$$

ou

$$\text{tg } \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{a}{b}$$

A tangente de α representa-se por tg α.

Exemplo: no caso do triângulo em estudo a tangente de α será:

$$\text{tg } \alpha = \frac{6 \text{ cm}}{8 \text{ cm}} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

d) Cotangente de α (cotg α) é definida como o quociente do comprimento do cateto adjacente pelo comprimento do cateto oposto.

$$\text{cotg } \alpha = \frac{\text{Comprimento do cateto adjacente}}{\text{Comprimento do cateto aposto}}$$

ou

$$\text{cotg } \alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{b}{a} = \frac{1}{\text{tg}}$$

A cotangente de α representa-se por cotg α.

Exemplo: para **a** = 6 cm, **b** = 8 cm, **c** = 10 cm

a cotangente de α será:

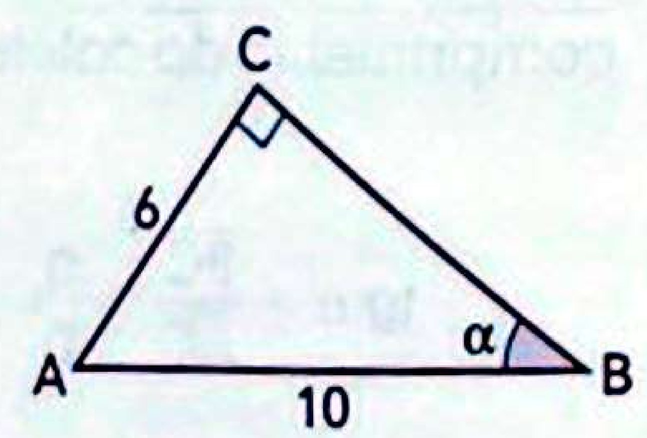
$$\text{cotg}\,\alpha = \frac{8\text{ cm}}{6\text{ cm}} = \frac{4}{3}$$

Na resolução das razões trigonométricas podemos distinguir os seguintes casos:

Triângulos nos quais são dadas medidas	
Caso 1	Um cateto e a hipotenusa
Caso 2	Um ângulo e a hipotenusa
Caso 3	Um ângulo e um cateto
Caso 4	Dois catetos

Exemplo:

1. Determina as razões trigonométricas do ângulo α da figura seguinte.



Dados: $\overline{AC} = 6$

$\overline{AB} = 10$

$\overline{BC} = ?$

Temos o caso 1:

Resolução: $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$ (pitágoras)

$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AC}^2$

$\overline{BC}^2 = 10^2 - 6^2 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 64; \overline{BC} = 8$

Então $\text{sen}\,\alpha = \frac{6}{10} \Leftrightarrow \text{sen}\,\alpha = \frac{3}{5}$;

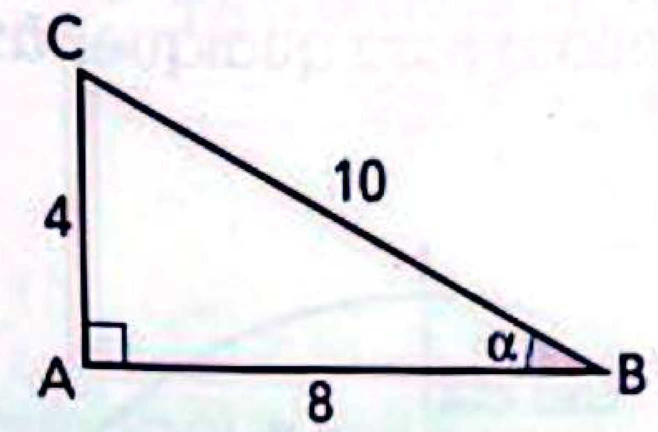
$\cos\alpha = \frac{8}{10} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{4}{5}$;

$\text{tg}\,\alpha = \frac{6}{8} \Leftrightarrow \text{tg}\,\alpha = \frac{3}{4}$

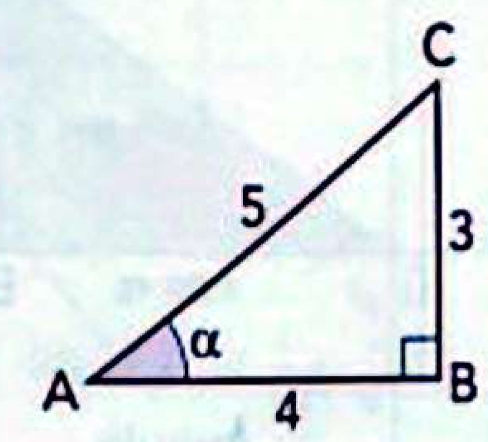
Actividades

1. Determina as razões trigonométricas dos triângulos:

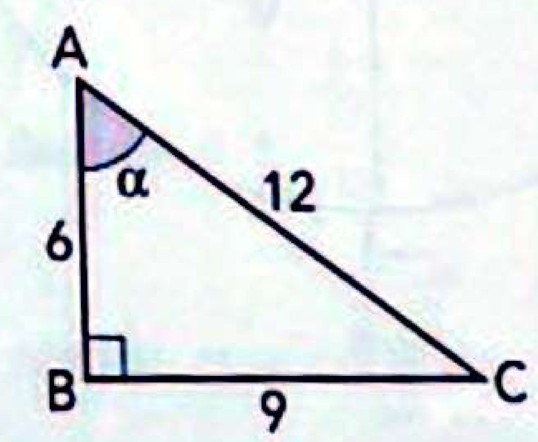
a)



b)



c)



2. Calcula:

a) Os lados iguais dum triângulo isósceles de base 10 cm e em que o ângulo do vértice é 42°.

b) A base de um triângulo isósceles em que dois lados de 18 metros se opõem a ângulos de 70°.

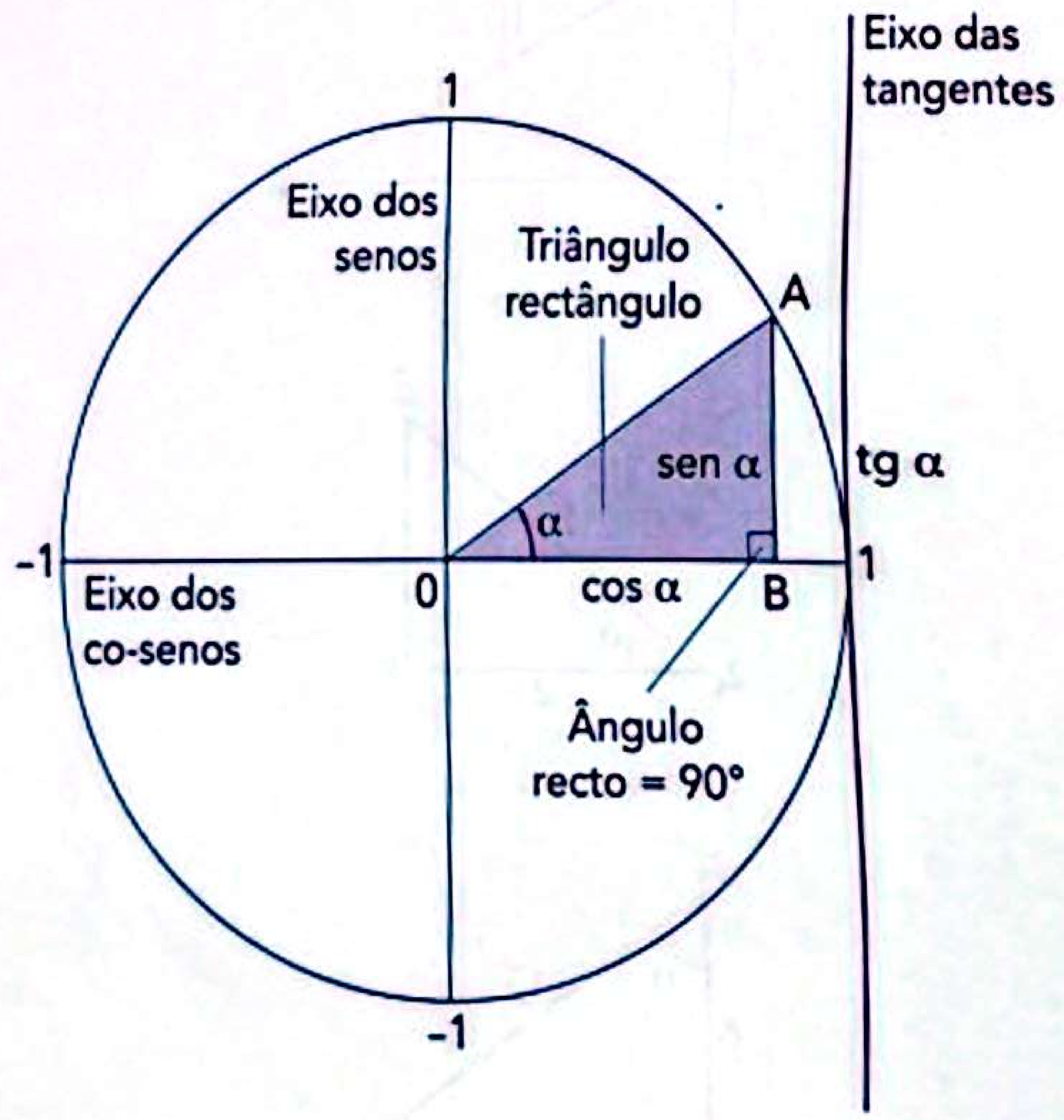
3. Um cabo de 20 m está esticado desde o alto de um poste até ao chão, fazendo com este um ângulo de amplitude 55°.

a) Qual a altura do poste?

b) A que distância da base do poste está preso no solo aquele cabo?

C.2 RELAÇÕES ENTRE AS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS DE UM ÂNGULO AGUDO

As razões trigonométricas relacionam-se entre si. Estas relações derivam das suas definições a partir de um círculo trigonométrico de centro **0** e um raio de **1** ou raio **r**, e são válidas para qualquer ângulo *x*.



$$\text{sen}\,\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{AO}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{BO}}{\overline{AO}}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{BO}}$$

Para $\overline{AO} = 1$ e $\overline{AB} = \overline{AO} \times \text{sen}\,\alpha$, $\overline{BO} = \overline{AO} \times \cos\alpha$, aplicando o teorema de pitágoras, teremos:

a) $\boxed{\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$

e

b) $\boxed{\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}}$

As fórmulas **a)** e **b)** são fórmulas fundamentais da trigonometria.

Fazem ainda parte destas fórmulas as seguintes:

$\boxed{\text{Cotg}\,\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}}$ $\boxed{\text{Tg}\,\alpha = \dfrac{1}{\text{cotg}\,\alpha}}$ $\boxed{\text{Cotg}\,\alpha = \dfrac{1}{\text{tg}\,\alpha}}$

Exemplos:

1. Determina sen α sabendo que $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$.

Resolução:

$\text{Sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\text{Sen}^2\alpha + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \text{sen}^2\alpha = 1 - \frac{1}{9}$

$\Leftrightarrow \text{sen}^2\alpha = \frac{8}{9}$

$\Leftrightarrow \text{sen}\,\alpha = \pm\sqrt{\frac{8}{9}}$

logo, $\text{sen}\,\alpha = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$

2. Sabendo que $\text{sen}\,\alpha = \frac{1}{2}$ e $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, determina tg α.

Resolução:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{1}{2} : \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \Leftrightarrow \text{tg}\,\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \text{tg}\,\alpha = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

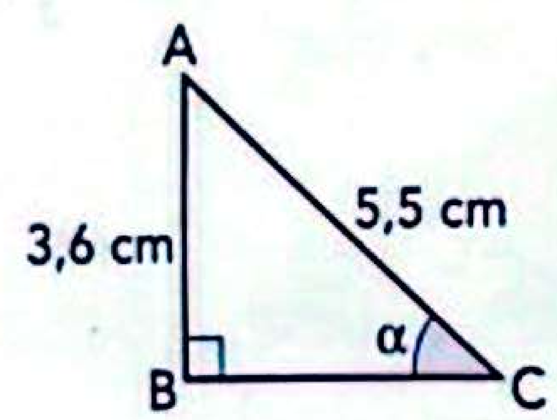
Actividades

1. Verifica com a calculadora que:

a) $\text{sen}^2 120^\circ + \cos^2 120^\circ = 1$

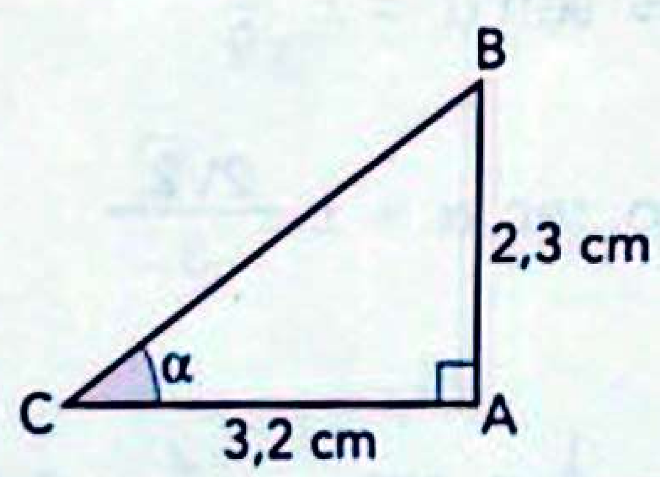
b) $\dfrac{\text{sen } 60^\circ}{\cos 60^\circ} = \text{tg } 60^\circ$

2. Dado o seguinte triângulo:



Determina, com duas casas decimais: tg α, sen α e cos α.

3. Considera o triângulo rectângulo ABC.



Determina:

sen α, tg α e cos α.

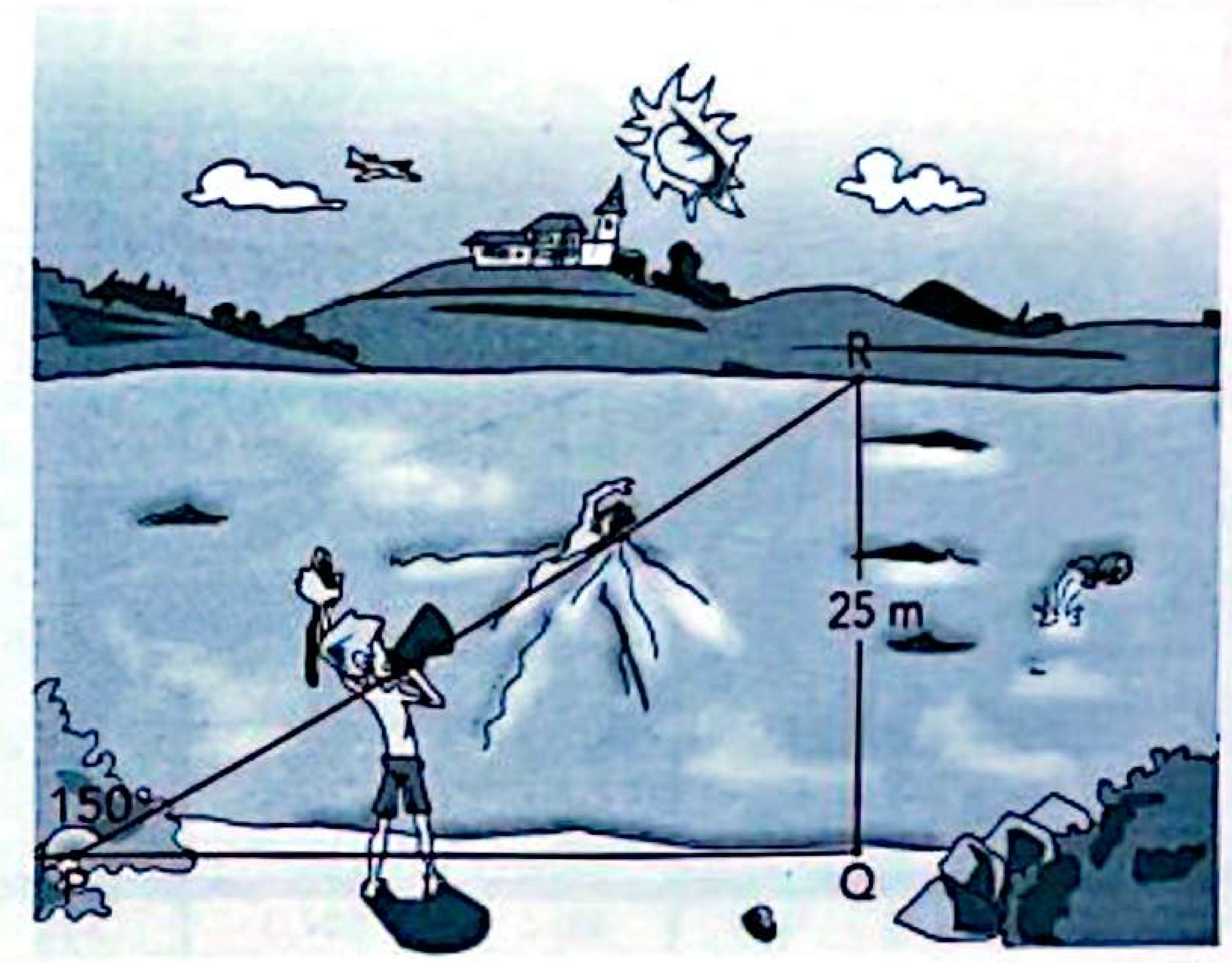
4. Determina o cos α sabendo que α é um ângulo agudo e que:

a) $\text{sen } \alpha = \dfrac{1}{3}$ **b)** $\text{tg } \alpha = \dfrac{5}{2}$

5. Determina sen α, sabendo que α é um ângulo agudo e que:

a) $\cos \alpha = 0{,}8$ **b)** $\text{tg } \alpha = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

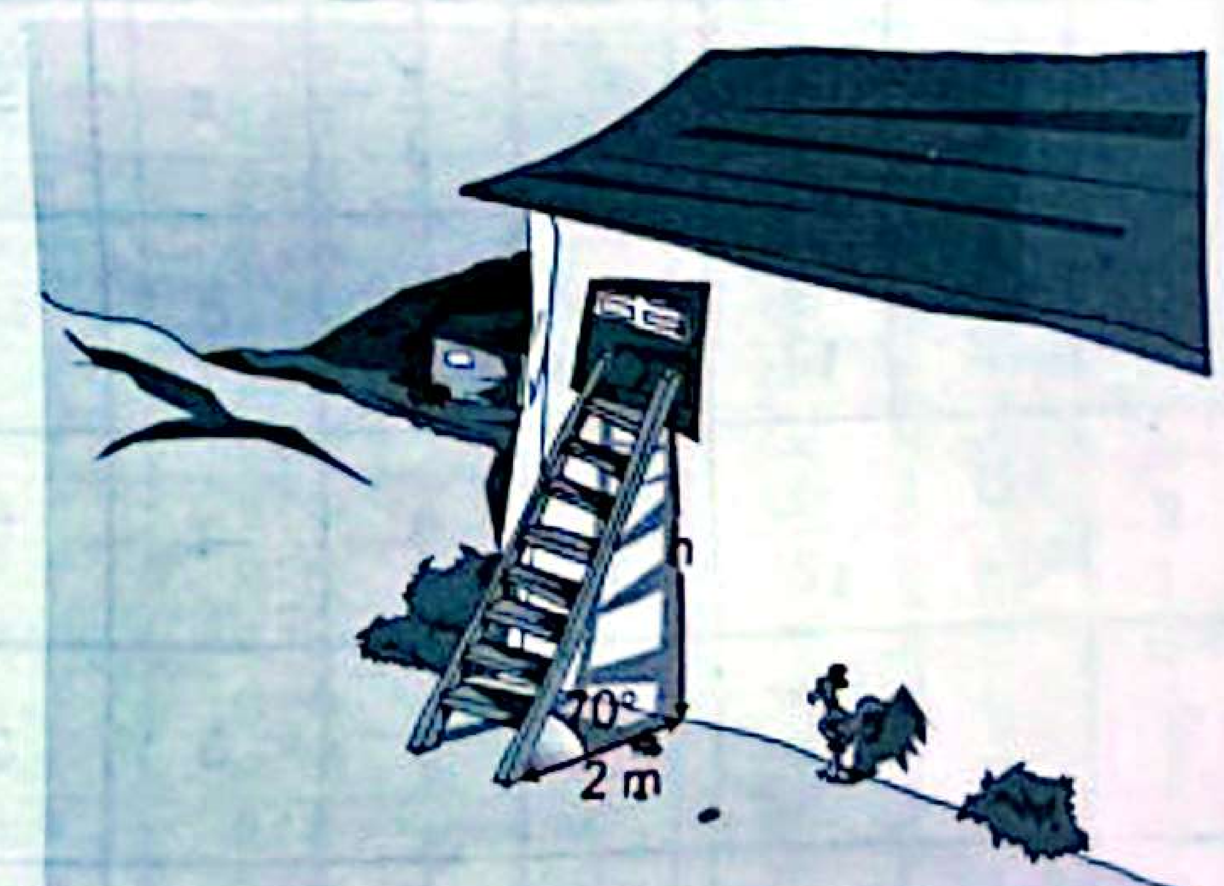
6. Um nadador parte de **P** para atravessar um rio com 25 m de largura. Foi arrastado pela corrente e chega a **R**.
Que distância percorreu a nado?



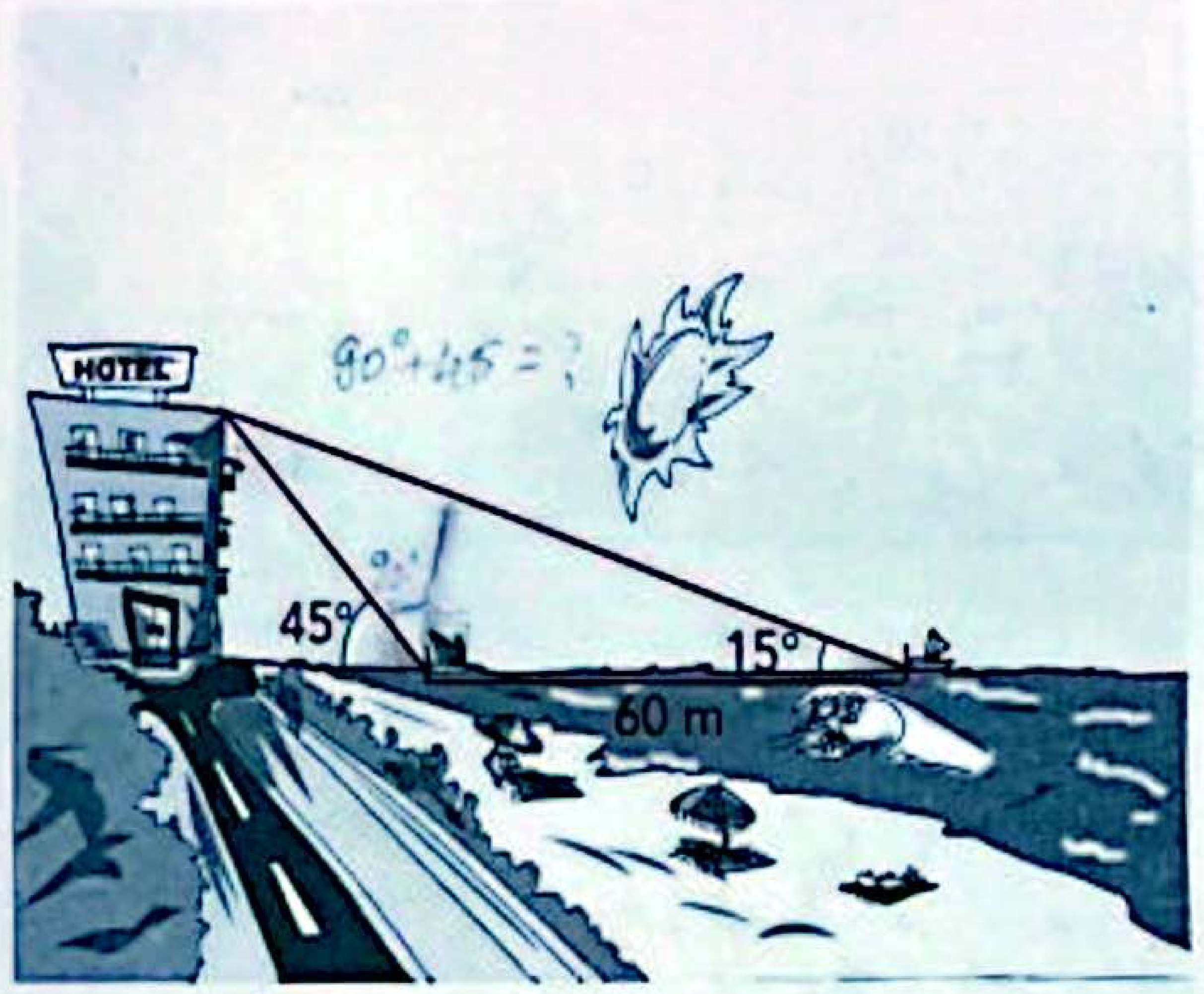
7. A escada faz um ângulo de 70° com o solo e a sua base encontra-se a 2 metros da parede.

a) Qual a altura h?

b) Qual o comprimento da escada?



8. Descobre a altura do hotel, construído junto à praia.



C.3 TABELAS DE VALORES TRIGONOMÉTRICOS

Consulta as seguintes tabelas, sempre que precisares para a resolução dos exercícios.

Tabela 1:

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Sen	0	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{2}{2}}$	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	1	0	−1	0
Cos	1	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\sqrt{\frac{2}{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0	1
Tg	0	$\sqrt{\frac{3}{3}}$	1	$\sqrt{3}$	0	0	0	0
Cotg	0	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{\frac{3}{3}}$	0	0	0	0

Tabela 2:

x	sen x	cos x	tg x	x	sen x	cos x	tg x
0°	0,000	1,000	0,000	46°	0,719	0,695	1,036
1°	0,017	1,000	0,017	47°	0,731	0,682	1,072
2°	0,035	0,999	0,035	48°	0,743	0,669	1,111
3°	0,052	0,999	0,052	49°	0,755	0,656	1,150
4°	0,070	0,998	0,070	50°	0,766	0,643	1,192
5°	0,087	0,996	0,087	51°	0,777	0,629	1,235
6°	0,105	0,995	0,105	52°	0,788	0,616	1,280
7°	0,122	0,993	0,123	53°	0,799	0,602	1,327
8°	0,139	0,990	0,141	54°	0,809	0,588	1,376
9°	0,156	0,988	0,158	55°	0,819	0,574	1,428
10°	0,174	0,985	0,176	56°	0,829	0,559	1,483
11°	0,191	0,982	0,194	57°	0,839	0,545	1,540
12°	0,208	0,978	0,213	58°	0,848	0,530	1,600
13°	0,225	0,974	0,231	59°	0,857	0,515	1,664
14°	0,242	0,970	0,249	60°	0,866	0,500	1,732
15°	0,259	0,966	0,268	61°	0,875	0,485	1,804
16°	0,276	0,961	0,287	62°	0,883	0,469	1,881
17°	0,292	0,956	0,306	63°	0,891	0,454	1,963
18°	0,309	0,951	0,325	64°	0,899	0,438	2,050
19°	0,326	0,946	0,344	65°	0,906	0,423	2,145
20°	0,342	0,940	0,364	66°	0,914	0,407	2,246
21°	0,358	0,934	0,384	67°	0,921	0,391	2,356
22°	0,375	0,927	0,404	68°	0,927	0,375	2,475
23°	0,391	0,921	0,424	69°	0,934	0,358	2,605
24°	0,407	0,914	0,445	70°	0,940	0,342	2,747
25°	0,423	0,906	0,466	71°	0,946	0,326	2,904
26°	0,438	0,899	0,488	72°	0,951	0,309	3,078
27°	0,454	0,891	0,510	73°	0,956	0,292	3,271
28°	0,469	0,883	0,532	74°	0,961	0,276	3,487
29°	0,485	0,875	0,554	75°	0,966	0,259	3,732
30°	0,500	0,866	0,577	76°	0,970	0,242	4,011
31°	0,515	0,857	0,601	77°	0,974	0,225	4,331
32°	0,530	0,848	0,625	78°	0,978	0,208	4,705
33°	0,545	0,839	0,649	79°	0,982	0,191	5,145
34°	0,559	0,829	0,675	80°	0,985	0,174	5,671
35°	0,574	0,819	0,700	81°	0,988	0,156	6,314
36°	0,588	0,809	0,727	82°	0,990	0,139	7,115
37°	0,602	0,799	0,754	83°	0,993	0,122	8,144
38°	0,616	0,788	0,781	84°	0,995	0,105	9,514
39°	0,629	0,777	0,810	85°	0,996	0,087	11,430
40°	0,643	0,766	0,839	86°	0,998	0,070	14,301
41°	0,656	0,755	0,869	87°	0,999	0,052	19,081
42°	0,669	0,743	0,900	88°	0,999	0,035	28,636
43°	0,682	0,731	0,933	89°	1,000	0,017	57,290
44°	0,695	0,719	0,966	90°	1,000	0,000	
45°	0,707	0,707	1,000				

Neste tema aprendi...

- ☐ **Trigonometria** é o ramo da Matemática que estuda a relação dos ângulos e dos lados num triângulo rectângulo.
- ☐ **Sen α** é igual ao cateto oposto a dividir pela hipotenusa do triângulo rectângulo.
- ☐ **Cos α** é igual ao cateto adjacente a dividir pela hipotenusa do triângulo.
- ☐ **Tg α** é igual ao cateto oposto a dividir pelo cateto adjacente do triângulo rectângulo.
- ☐ **Cotg α** é igual ao cateto adjacente a dividir pelo cateto oposto do triângulo rectângulo, logo é o inverso da Tg α.
- ☐ **Sen α**, **Cos α** e **Tg α** são chamados de razões trigonométricas do ângulo agudo **α**.
- ☐ As razões trigonométricas de um triângulo não dependem do seu tamanho mas apenas dos seus ângulos.
- ☐ Através do estudo das razões trigonométricas de um triângulo rectângulo, é possível determinar um lado desconhecido tendo o valor do ângulo agudo, ou determinar a amplitude de um ângulo agudo desconhecido tendo dois dos seus lados.

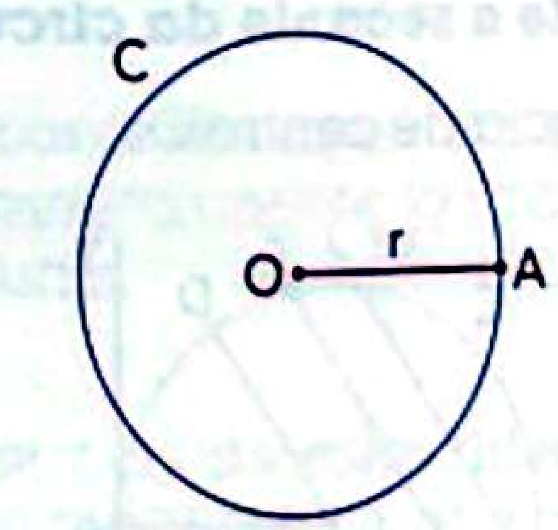
Tema D Geometria

D.1 CIRCUNFERÊNCIA, POLÍGONOS E ROTAÇÕES

Na 8.ª classe estudaste alguns lugares geométricos, tal como a circunferência, a esfera e o círculo.

Definimos como lugar geométrico o conjunto de todos os pontos que satisfazem uma determinada propriedade ou condição.

Seja C uma circunferência de centro O, [O A] é um segmento da recta definido pelo centro O e por um ponto A da circunferência.

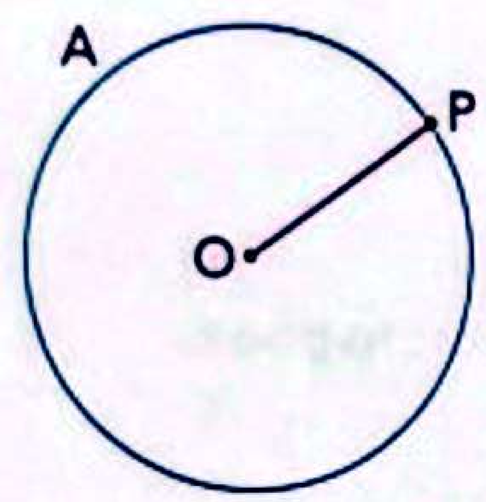


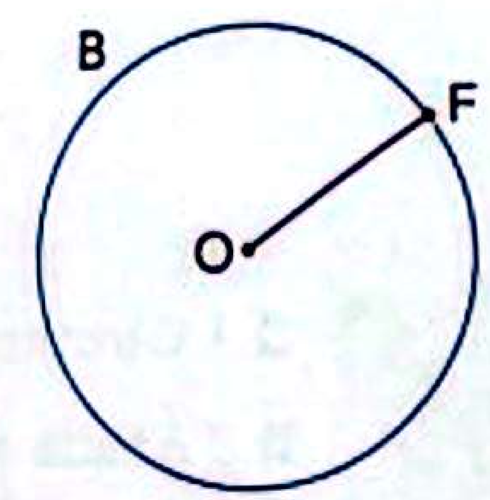
Circunferência é um conjunto de pontos de um plano que estão a uma distância constante r, de um ponto fixo O, do plano designado por centro da circunferência.

O segmento de recta [O A] = r é o raio da circunferência. Os raios de uma circunferência pertencem todos à mesma classe de equivalência – têm o mesmo comprimento.

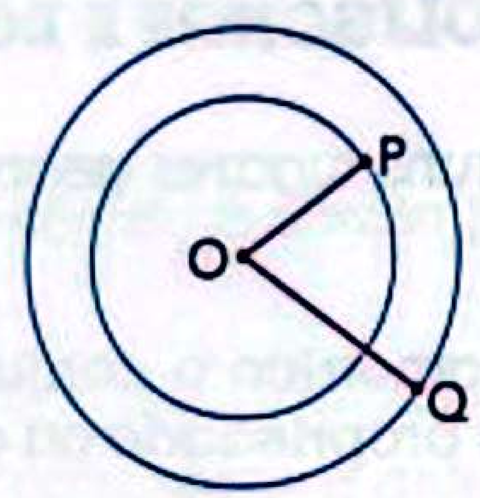
Uma circunferência fica definida quando são dados o seu centro e o seu raio.

Se duas circunferências têm raios iguais, elas são geometricamente iguais.





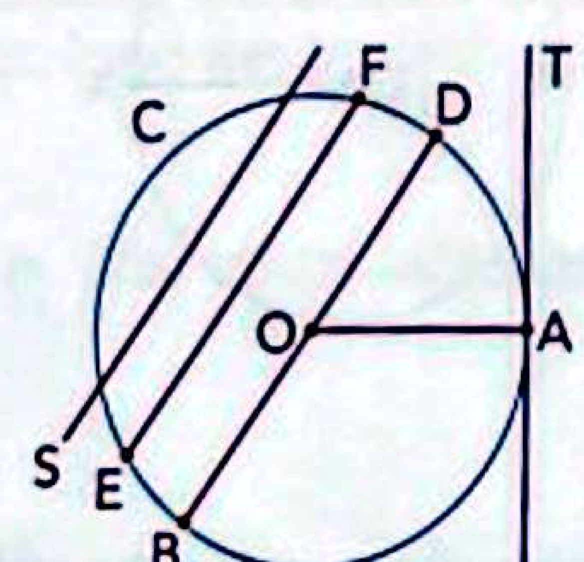
Há, também, circunferências com o mesmo centro; são circunferências concêntricas.



D.1.1 CORDAS, ARCOS E ÂNGULOS AO CENTRO CORRESPONDENTES NUMA CIRCUNFERÊNCIA

A. Arcos, cordas, tangente e secante da circunferência

Seja C uma circunferência de centro O:



Qualquer dos segmentos de recta EF e BD é determinado por dois pontos distintos de C, cada um deles é uma **corda** da circunferência.

A recta t intersecta C num só ponto, é portanto uma **tangente** à circunferência, em que A é o **ponto de tangência**.

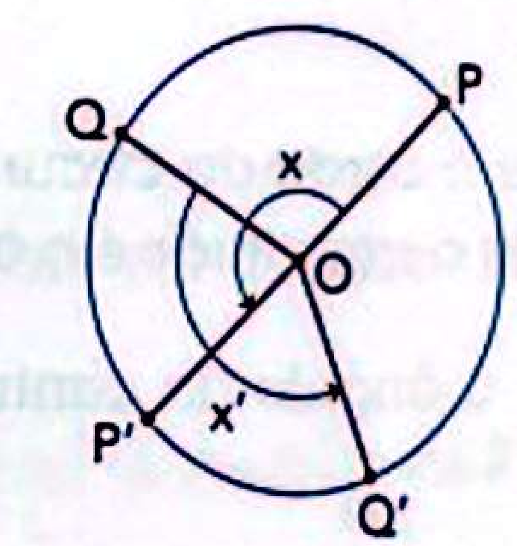
A tangente de uma circunferência é sempre perpendicular ao raio que passa pelo ponto da tangente (como podes ver na figura anterior).

A recta S intersecta a circunferência em dois pontos distintos, é pois, uma **secante** da circunferência.

Aos pontos E e F podemos chamar **pontos de secância** e o subconjunto de C, $\overset{\frown}{EF}$ é um **arco da circunferência**.

B. Igualdade geométrica de arcos de circunferência

Dada a circunferência C de centro O, raio OP e arco $\overset{\frown}{PQ}$ Aplicamos uma isometria (rotação) de centro O e amplitude x ao arco $\overset{\frown}{PQ}$.



Verifica-se o seguinte:

O arco $\overset{\frown}{PQ}$ não é geometricamente igual ao arco $\overset{\frown}{P'Q'}$ porque o ponto P sofreu isometria (P') mas o ponto Q sofreu uma rotação sem isometria (Q').

Teorema: Na mesma circunferência ou em circunferências geometricamente iguais, a arcos geometricamente iguais correspondem ângulos ao centro geometricamente iguais.

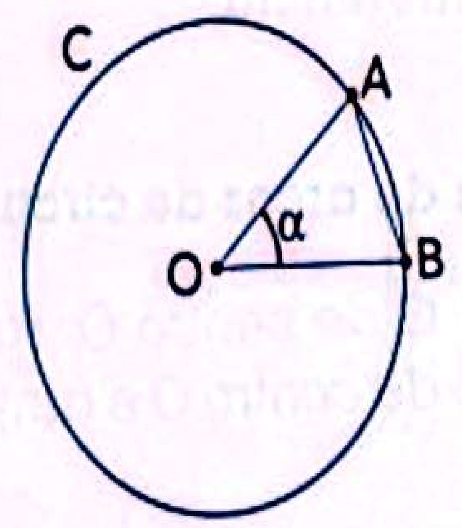
Nota: Em duas circunferências de raios diferentes, é possível encontrar arcos da mesma amplitude, e que não são geometricamente iguais.

O arco de uma circunferência é qualquer porção da circunferência compreendida entre dois pontos que se dizem extremidades do arco.

Podem ser:

- Arco menor é qualquer arco menor do que uma semicircunferência e que se pode designar com duas letras. Exemplo: $\overset{\frown}{PQ}$
- Arco maior é qualquer arco maior do que uma semicircunferência e que se pode designar com mais letras. Exemplo: $\overset{\frown}{QPQ'}$

Dada a circunferência C de centro O. Os raios [O A] e [O B] determinam um ângulo que tem a designação de **ângulo ao centro**, pois o seu vértice coincide com o centro da circunferência.



O segmento de recta [A B] é a corda da circunferência, e os pontos A e B correspondem ao arco $\overset{\frown}{AB}$ cuja a amplitude é o ângulo ao centro O.

O arco $\overset{\frown}{AB}$, a corda [AB] e o ângulo ao centro ($A\hat{O}B$) correspondem-se, mutuamente.

$$\text{Arco } \overset{\frown}{AB} \rightarrow [AB] \rightarrow \measuredangle\, \alpha$$

Ou

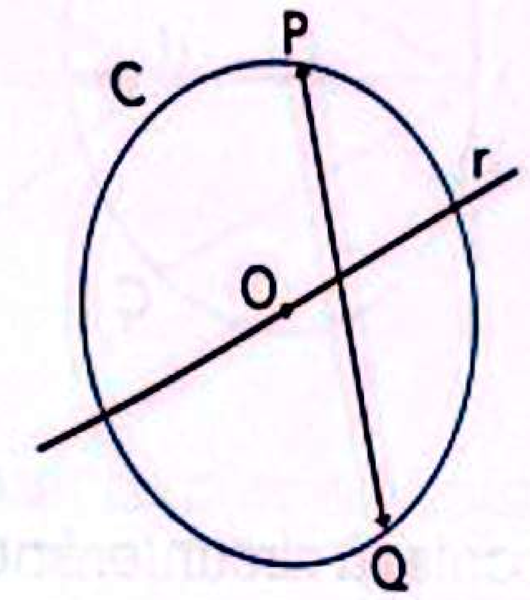
$$A\hat{O}B \rightarrow [AB] \rightarrow \text{Arco } \overset{\frown}{AB}$$

Assim diremos que numa circunferência:

- A arcos iguais correspondem ângulos ao centro e cordas iguais.
- A ângulos ao centro iguais correspondem arcos e cordas iguais.
- A cordas iguais correspondem arcos e ângulos ao centro iguais.

D.1.2 EIXOS DE SIMETRIA DE UMA CIRCUNFERÊNCIA

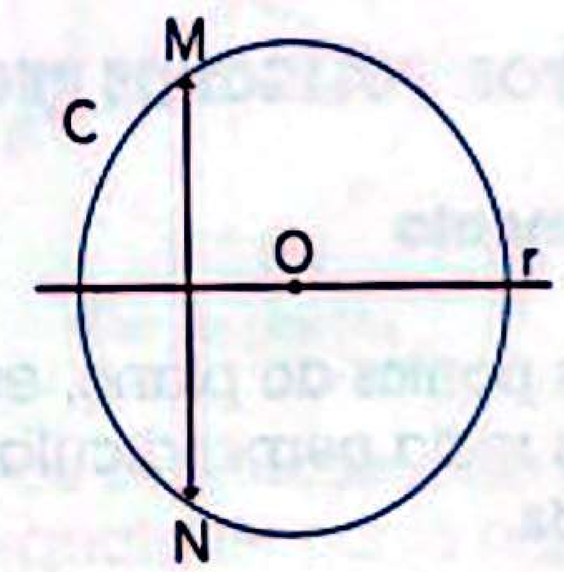
Dada a circunferência C de centro O, considera-se a recta r que passa pelo centro da circunferência.



a) Qualquer ponto $P \in C$ tem por imagem um ponto que também pertence a C.

Deste modo, designamos Q imagem de P, então:

$$\left.\begin{matrix} Q \rightarrow O \\ P \rightarrow O \end{matrix}\right\} = \overline{OQ} = \overline{OP} \\ \Downarrow \\ Q \in C$$



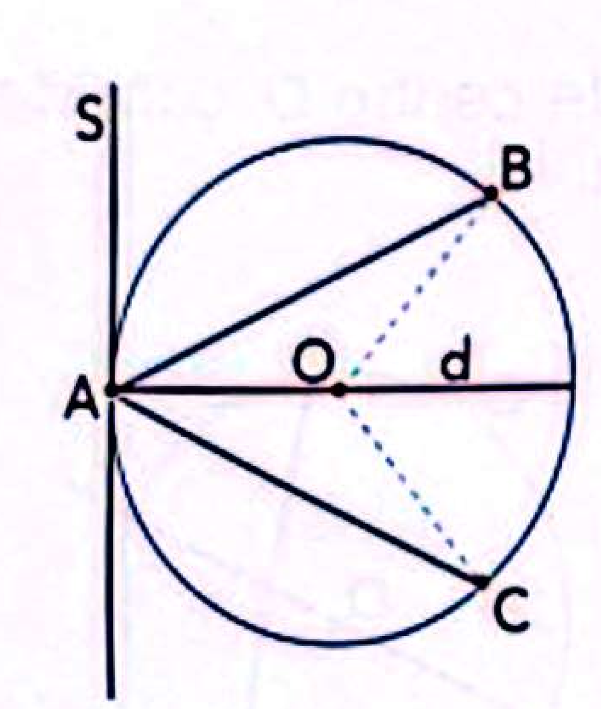
b) Qualquer ponto $M \in C$ é imagem de um ponto que também pertence a C.

$$\left.\begin{matrix} M \rightarrow O \\ N \rightarrow O \end{matrix}\right\} = \overline{OM} = \overline{ON} \\ \Downarrow \\ N \in C$$

Podemos concluir:

Teorema: Qualquer recta que passa pelo centro de uma circunferência é um eixo de simetria dessa circunferência (r).

É dada uma circunferência de centro O.



- As rectas AB e AC são secantes à circunferência.

- A recta AS é tangente à circunferência.

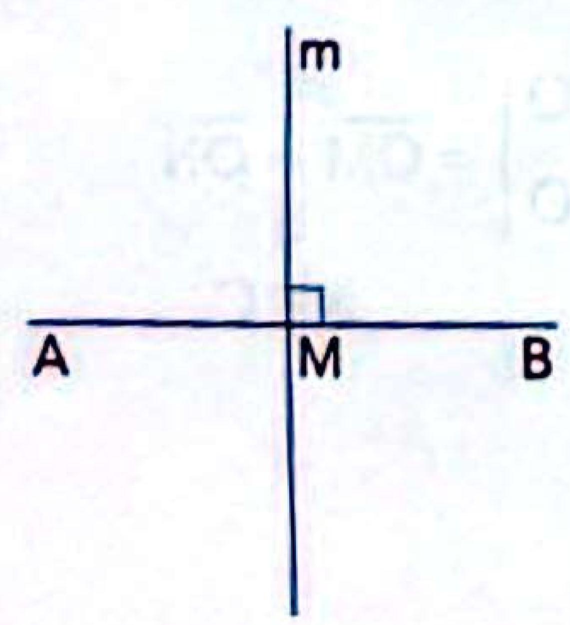
- A recta d corresponde ao diâmetro da circunferência.

D.1.3 POLÍGONOS INSCRITOS. POLÍGONOS REGULARES

• Mediatriz de um segmento

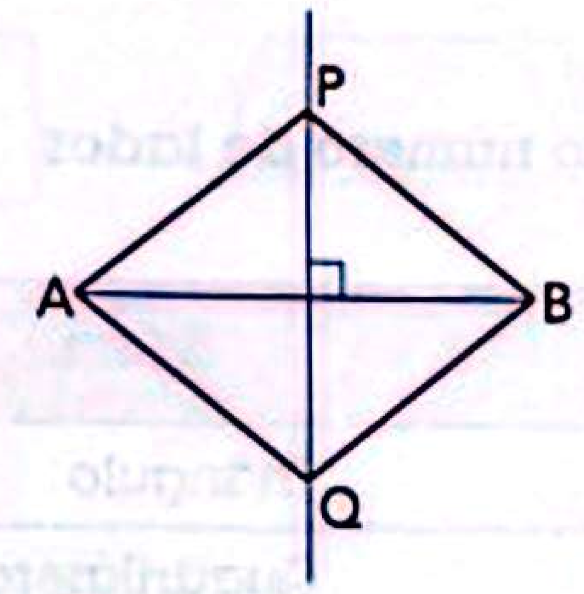
O lugar geométrico dos pontos do plano, equidistantes dos extremos de um segmento de recta, é a recta perpendicular ao meio desse segmento de recta e chama-se **mediatriz**.

Sendo m a mediatriz do segmento AB como mostra a figura.



Então, M é o ponto médio de [AB] e m é a mediatriz de [AB]

Qualquer ponto da mediatriz de um segmento da recta está a igual distância dos extremos desse segmento.



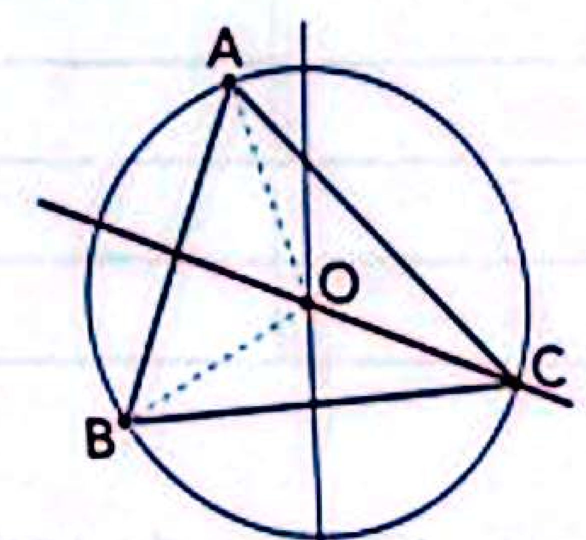
PA = PB

QA = QB

Como o ponto médio de um segmento é único, o mesmo acontece com a mediatriz, que é única.

Um polígono é a porção do plano limitado por uma linha poligonal fechada. Os elementos de um polígono são: os lados, os vértices e os ângulos.

Dado o triângulo [ABC], podemos imaginar três mediatrizes correspondentes aos três lados do triângulo. Em destaque na figura está apenas a mediatriz do lado AB do triângulo.



Eixo de simetria

Designamos por O o ponto de intersecção das mediatrizes de [BC], [AB] e de [CA]. Tendo em conta que qualquer ponto da mediatriz de um segmento dista igualmente dos seus extremos:

$$\left.\begin{array}{l} O \in \text{mediatriz de } [BC] = d(O, B) = d(O, C) \\ O \in \text{mediatriz de } [CA] = d(O, C) = d(O, A) \\ O \in \text{mediatriz de } [BA] = d(O, A) = d(O, B) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Então:} \\ d(O, C) = d(O, A) = d(O, B) \end{array}$$

Sendo d (O, B) = d (O, C) = d (O, A), o ponto O é o centro de uma circunferência que passa pelos três vértice, A, B e C; a essa circunferência dá-se o nome de **circunferência circunscrita ao triângulo**. Diz-se, ainda, que o triângulo está **inscrito** na circunferência.

Por três pontos não lineares A, B e C, passa uma e uma só circunferência.

Qualquer triângulo pode sempre inscrever-se numa circunferência, cujo centro é o ponto de intersecção das mediatrizes dos lados do triângulo.

Os polígonos em que os lados têm o mesmo comprimento e os ângulos a mesma amplitude dizem-se **polígonos regulares**.

Classificação dos polígonos quanto ao número de lados

Lados	Nome
3 lados	Triângulo
4 lados	Quadrilátero
5 lados	Pentágono
6 lados	Hexágono
7 lados	Heptágono
8 lados	Octógono
9 lados	Eneágono
10 lados	Decágono
11 lados	Hendecágono
12 lados	Dodecágono
15 lados	Pentadecágono
20 lados	Icoságono

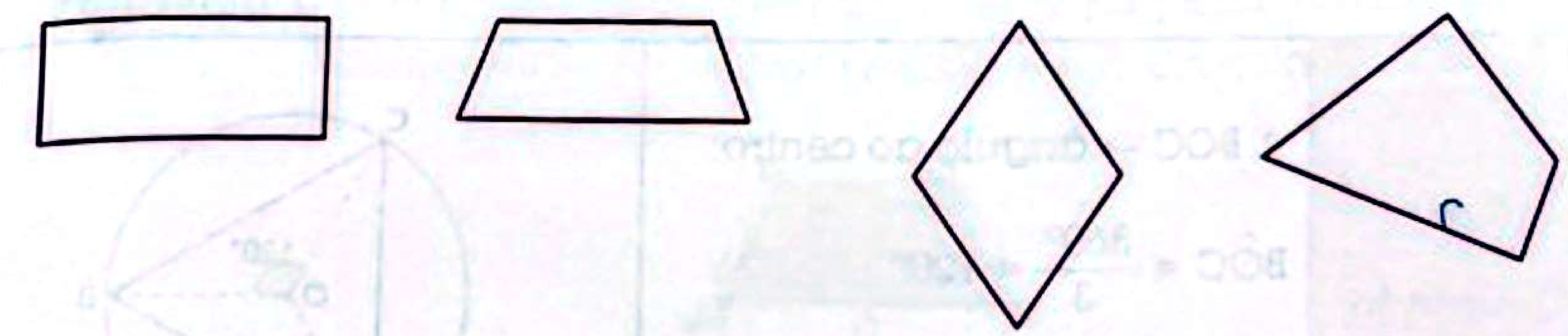
Dois polígonos com o mesmo número de lados dizem-se semelhantes quando têm:

- ângulos geometricamente iguais;
- lados correspondentes proporcionais.

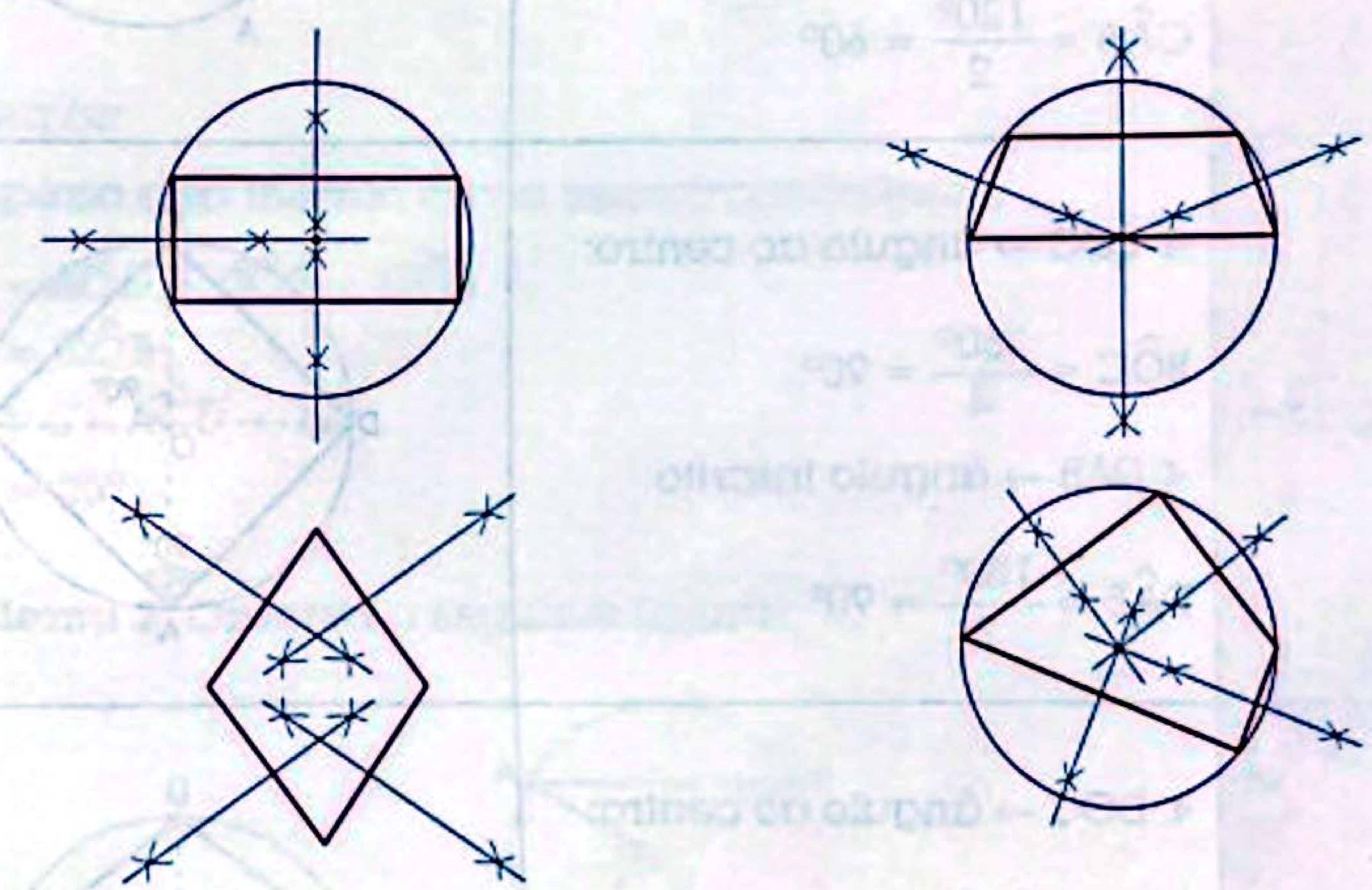
A **razão de semelhança** de dois polígonos semelhantes é a razão entre dois lados correspondentes.

- se $r > 1$ a semelhança é uma ampliação;
- se $r < 1$ a semelhança é uma redução;
- se $r = 1$ os polígonos são geometricamente iguais.

Agora, experimenta obter uma circunferência circunscrita a cada um dos seguintes quadriláteros:



Vejamos:



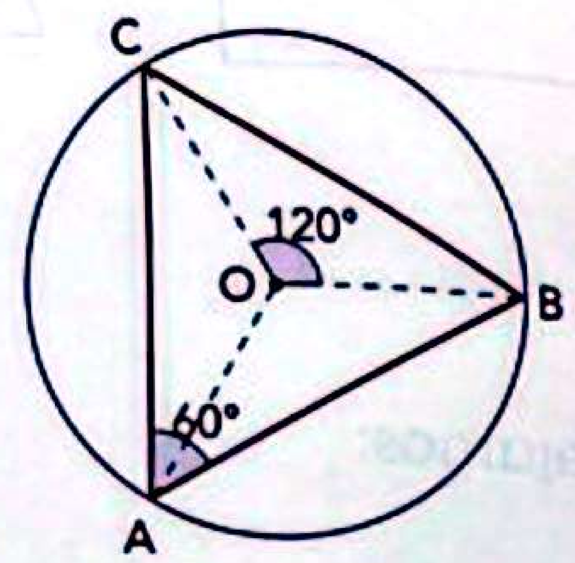
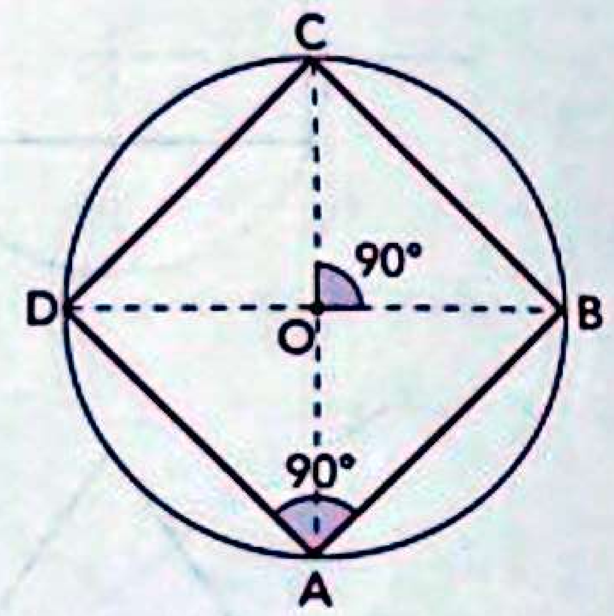
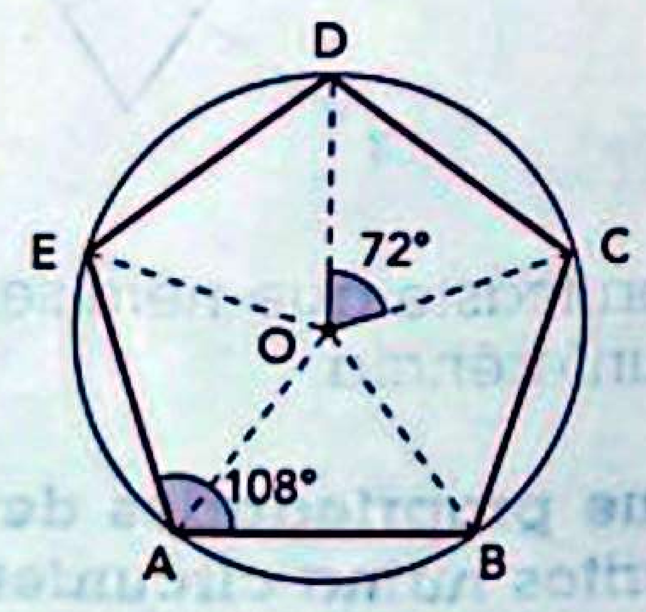
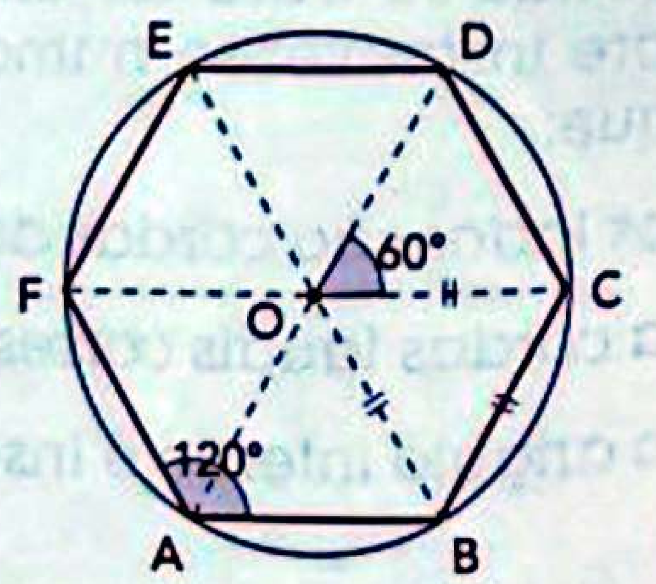
Verificaste que nem sempre é possível inscrever um quadrilátero numa circunferência.

Que propriedades devem ter os quadriláteros para que possam ser inscritos numa circunferência? Num quadrilátero inscrito numa circunferência, a soma das amplitudes de dois ângulos opostos é 180°.

Quando se trata de um polígono regular, qualquer que seja ele, pode sempre inscrever-se numa circunferência. E nestes casos é possível observar que:

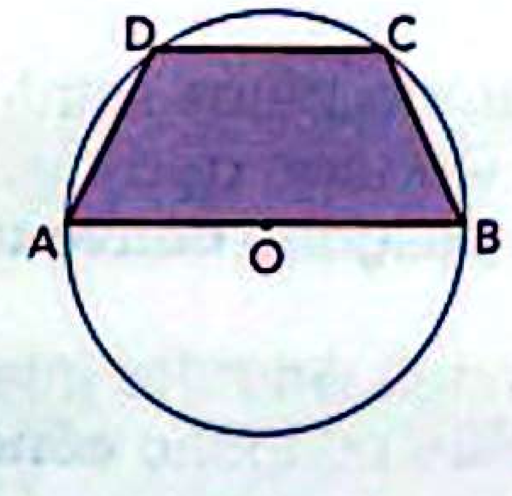
- os lados são cordas da circunferência geometricamente iguais;
- a cordas iguais correspondem ângulos ao centro iguais;
- o ângulo interno é inscrito na circunferência.

No seguinte quadro, podes observar exemplos de polígonos regulares inscritos na circunferência e a relação dos seus ângulos.

Triângulo	$\measuredangle BOC \rightarrow$ ângulo ao centro: $B\hat{O}C = \frac{360°}{3} = 120°$ $\measuredangle CAB$ – ângulo inscrito: $C\hat{A}B = \frac{120°}{2} = 60°$	
Quadrado	$\measuredangle BOC \rightarrow$ ângulo ao centro: $B\hat{O}C = \frac{360°}{4} = 90°$ $\measuredangle DAB \rightarrow$ ângulo inscrito: $D\hat{A}B = \frac{180°}{2} = 90°$	
Pentágono	$\measuredangle DOC \rightarrow$ ângulo ao centro: $D\hat{O}C = \frac{360°}{5} = 72°$ $\measuredangle EAB \rightarrow$ ângulo inscrito: $E\hat{A}B = \frac{216°}{2} = 108°$	
Hexágono	$\measuredangle DOC \rightarrow$ ângulo ao centro: $D\hat{O}C = \frac{360°}{6} = 60°$ $\measuredangle FAB \rightarrow$ ângulo inscrito: $F\hat{A}B = \frac{240°}{2} = 120°$	

Exemplos:

Problema 1: O trapézio [ABCD] de bases [AB] e [CD] está inscrito na circunferência de centro O e $C\hat{O}D = 70°$. Calcula $A\hat{O}D$.



Resolução:

O trapézio está inscrito numa semicircunferência:

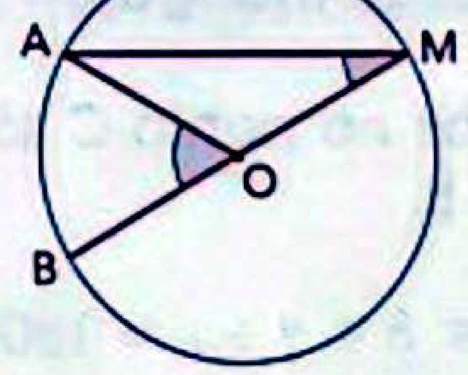
$180° = A\hat{O}D + D\hat{O}C + C\hat{O}B$

$A\hat{O}D = C\hat{O}B$

$180° = 2 \times A\hat{O}D + 70°$

$A\hat{O}D = 55°$

Problema 2: Observa a seguinte figura:



a) Que nome se dá ao ângulo $A\hat{M}B$ e ao ângulo $A\hat{O}B$, na circunferência de centro O?

b) Calcula $A\hat{O}B$ e $A\hat{O}M$.

Resolução:

a) $A\hat{M}B$ é ângulo inscrito na circunferência.

$A\hat{O}B$ é ângulo ao centro.

b) $A\hat{O}B = 30°$

$A\hat{M}B = 2 \times 30° = 60°$

$A\hat{O}B = 60°$

$A\hat{O}M = 180° - 60° = 120°$

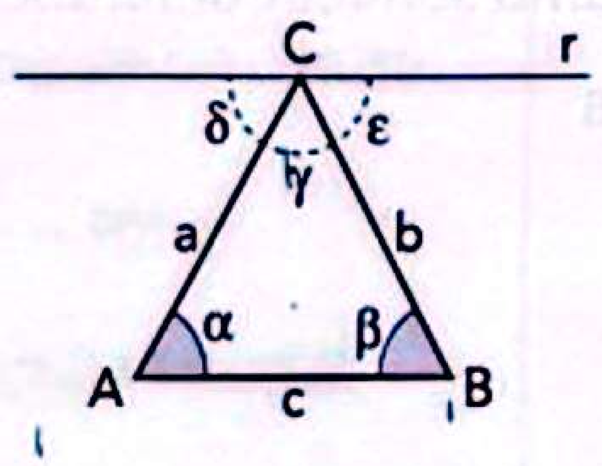
D.1.4 SOMA DAS AMPLITUDES DOS ÂNGULOS INTERNOS E SOMA DAS AMPLITUDES DOS ÂNGULOS EXTERNOS DE UM POLÍGONO CONVEXO

Um polígono tem o mesmo número de lados, de ângulos internos e de ângulos externos.

O ângulo interno é definido pelas semi-rectas que contêm dois lados consecutivos do polígono. Quando qualquer dos ângulos internos contém o polígono, trata-se de um polígono **convexo**.

Quando há pelo menos dois ângulos internos que contém apenas uma parte do polígono, trata-se de polígono **côncavo**.

Dado um triângulo **ABC** e uma recta **r** paralela ao lado AB do triângulo:



Assim, obtemos no ponto C um ângulo plano que é divido em três ângulos parciais, pelos lados AC e BC do triângulo.

Os ângulos externos formados no ponto C são iguais aos ângulos internos paralelos, isto é, $\delta = \alpha$ e $\varepsilon = \beta$.

É do nosso conhecimento que $\delta + \gamma + \varepsilon = 180°$, por conseguinte, também

$$\boxed{\alpha + \gamma + \beta = 180°}$$

Teorema: A soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é de 180°.

Como cada ângulo externo é um subângulo de um ângulo interno do triângulo, vale também a seguinte relação:

$$\alpha + \alpha' = 180°;\quad \beta + \beta' = 180° \text{ e } \gamma + \gamma' = 180°$$

Segundo o teorema, teremos:

$$\boxed{\alpha' + \beta' + \gamma' = 360°}$$

A soma das amplitudes dos ângulos externos de um triângulo é 360°. Assim como em qualquer polígono convexo.

Teorema: Cada ângulo externo de um triângulo é igual à soma dos dois ângulos internos opostos: $\alpha' = \beta + \gamma$; $\beta' = \gamma + \alpha$; $\gamma' = \alpha + \beta$.

Generalizando para qualquer polígono tem-se que:

- Para um polígono com n lados, a soma das amplitudes dos ângulos internos é:

$$n \times 180° - 2 \times 180°$$

$$180° (n - 2)$$

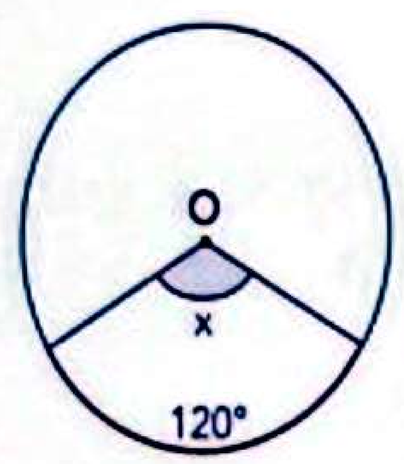
A soma das amplitudes dos ângulos internos de um polígono com n lados é: $(n - 2) \times 180°$.

Actividades

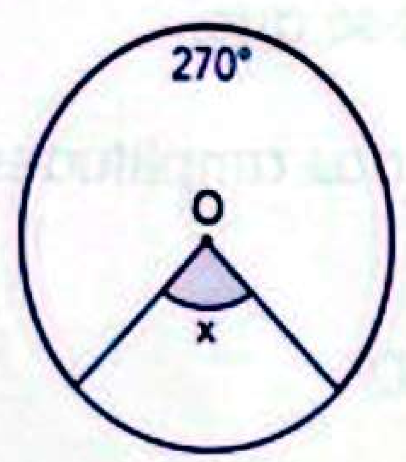
1. Um triângulo tem lados que medem 8, 12 e 16 cm. Determina os lados de um triângulo semelhante ao dado, cujo lado menor mede 2cm.

2. Em cada uma das figuras seguintes, determina x.

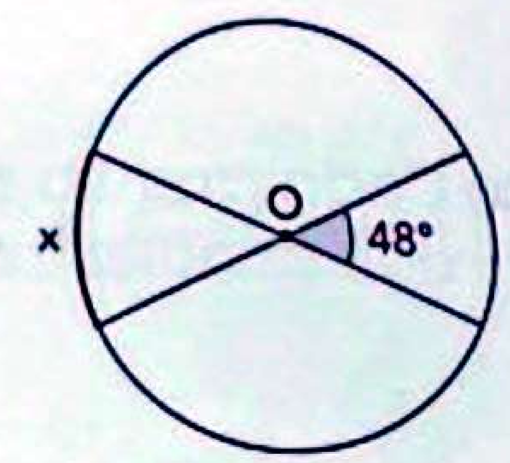
2.1



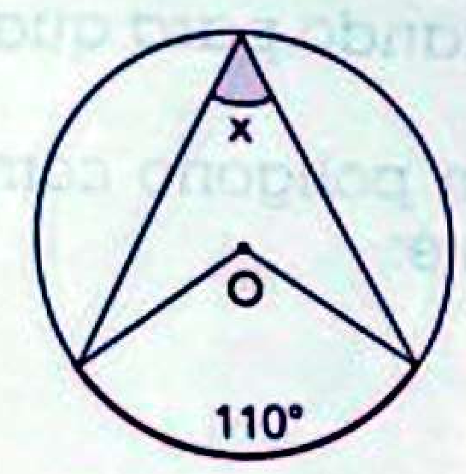
2.2



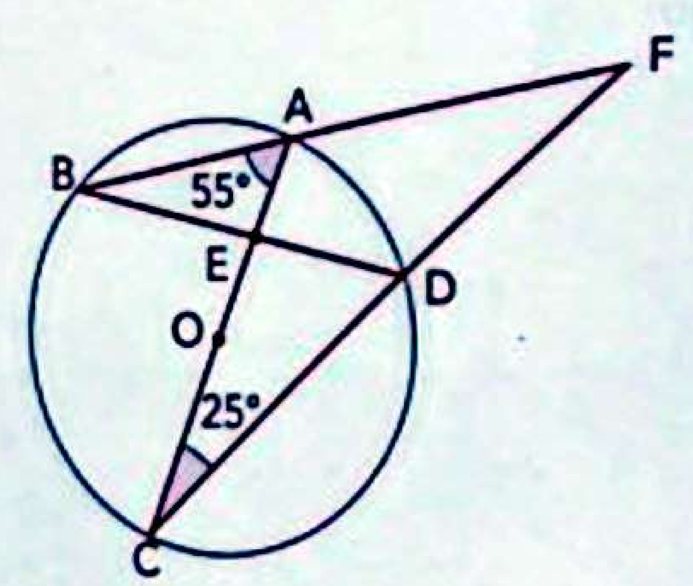
2.3



2.4



3. Observa a figura, onde B, A, F e C, D, F são pontos alinhados.



Calcula:

a) $B\hat{D}C$

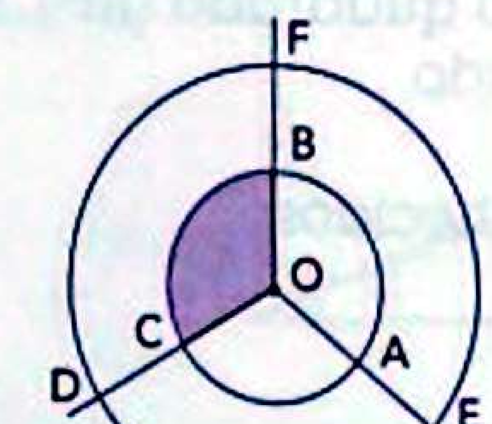
b) $B\hat{D}F$

c) $D\hat{E}C$

d) $A\hat{E}D$

e) $B\hat{F}C$

4. As circunferências são concêntricas:



AB = 130°
DE = 110°
OB = 8 mm
OF = 15 mm

Calcula:

a) $\overset{\frown}{FE}$.

b) O comprimento do arco $\overset{\frown}{FE}$ e do arco $\overset{\frown}{AB}$.

c) Serão geometricamente iguais os arcos $\overset{\frown}{BA}$ e $\overset{\frown}{FE}$.

d) Calcula a área do sector circular colorido na figura.

e) Desenha uma circunferência onde assinales um arco geometricamente igual ao arco $\overset{\frown}{AB}$ da figura.

5. Diz se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações.

5.1 Existe sempre uma circunferência que contém os três vértices de um triângulo.

5.2 Todo o paralelograma pode ser inscrito numa circunferência.

5.3 Se um quadrilátero está inscrito numa circunferência, então os ângulos opostos são suplementares.

5.4 Um triângulo inscrito numa semicircunferência é rectângulo.

5.5 Posso inscrever numa circunferência qualquer polígono.

6. No quadrilátero [ABCD] inscrito numa circunferência sabe-se que $D\hat{A}B = 90°$ e $A\hat{B}C = 112°$. Determina a amplitude dos dois outros ângulos internos.

7. Traça duas rectas, r e s , que se intersectam em O. Desenha uma circunferência de centro O e sejam A e C os pontos em que a circunferência intersecta s.

7.1 Classifica o quadrilátero [ABCD]. Justifica.

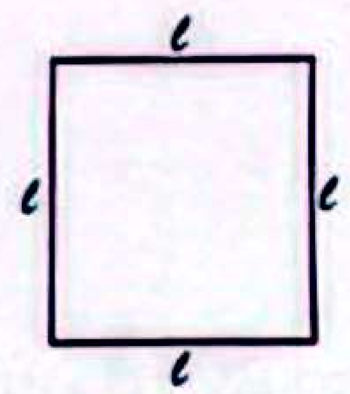
7.2 Como deverias traçar as duas rectas para obter um polígono regular? Justifica.

D.1.5 ÁREAS DE POLÍGONOS

A unidade de medida da área é o metro quadrado (m^2), sendo definida como a área de um quadrado de 1m de lado.

Eis a área de alguns polígonos mais conhecidos:

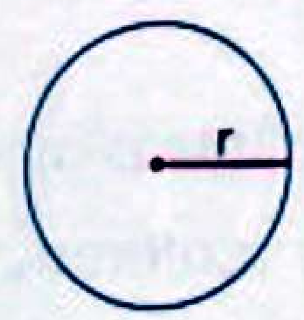
a) Quadrado: $A = l \times l = l^2$



ℓ = lado do quadrado

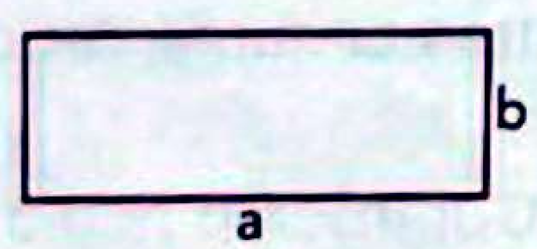
A área de um quadrado é igual ao seu lado ao quadrado.

b) Circunferência: $A = \pi r^2$



A área da circunferência é igual ao produto do seu raio ao quadrado pelo π.

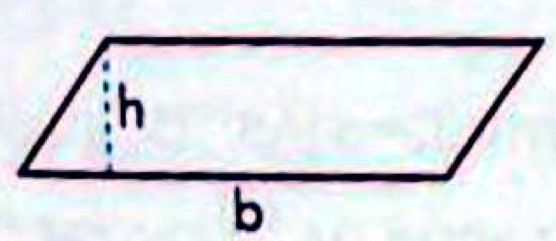
c) Rectângulo: $A = a \times b$



a = lado maior
b = lado menor

A área de um rectângulo é igual ao produto das suas dimensões.

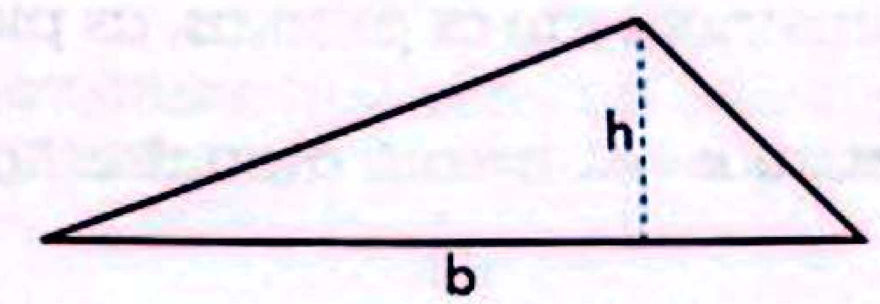
d) Paralelogramo: $A = b \times h$



b = base
h = altura

A área de um paralelogramo é igual ao produto do comprimento de uma base pela altura correspondente.

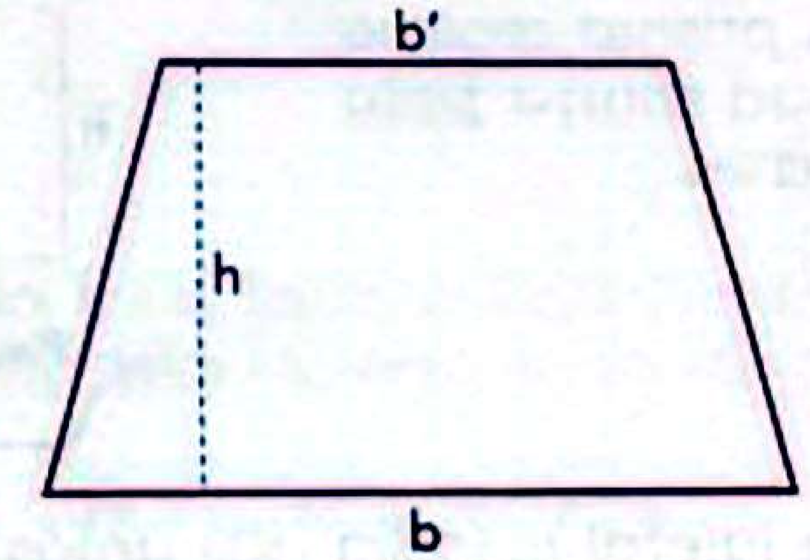
e) Triângulo: $A = \dfrac{b \times h}{2}$



b = base
h = altura

A área de um triângulo é igual a metade do produto do comprimento de um dos lados pela altura correspondente.

f) Trapézio: $A = \dfrac{b + b'}{2} \times h$



b = base maior
b′ = base menor
h = altura

A área de um trapézio é igual ao produto da soma dos comprimentos das bases pela altura.

g) Polígono regular: $A = \dfrac{P \times a}{2}$

P = perímetro
a = apótema

A área de um polígono regular é igual a metade do produto do perímetro (p) pela apótema (a).

D.2 ÁREAS E VOLUMES DE SÓLIDOS

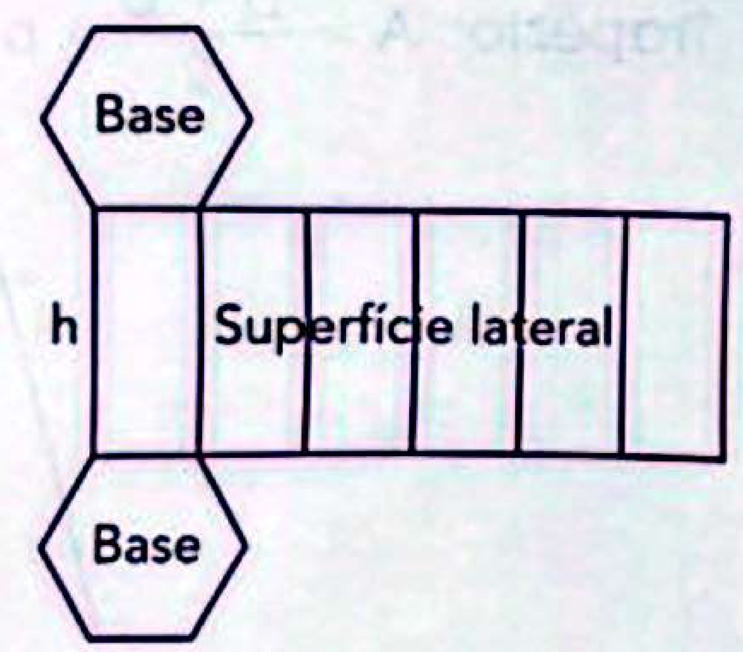
Os sólidos geométricos têm as superfícies formadas por polígonos planos. Exemplos de sólidos geométricos são os prismas, as pirâmides, os cilindros e os cones.

São conhecidas as fórmulas relativas à área das figuras planas mais frequentemente utilizadas.

D.2.1 ÁREAS DE SÓLIDOS

• **Prisma recto**

$$\boxed{A_l = P \times h}$$



A área lateral de um prisma recto é igual ao produto da sua altura pelo perímetro de uma das bases.

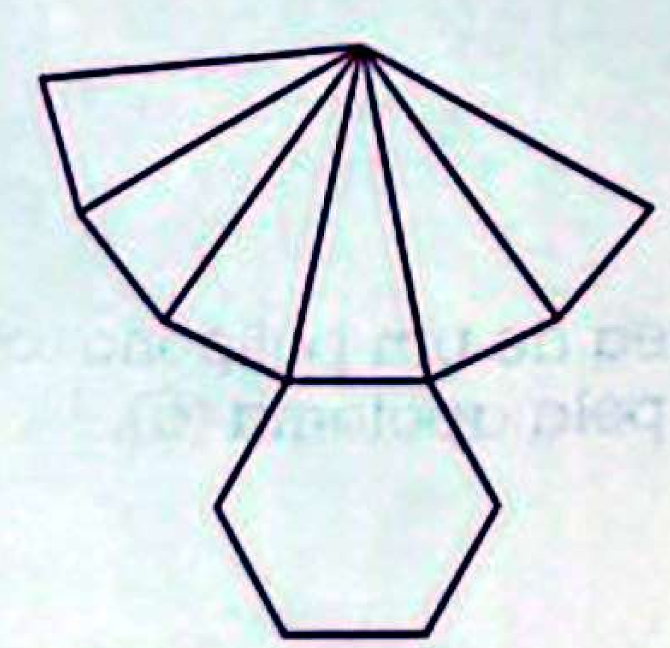
P = perímetro
h = altura

– Adicionando à área lateral a soma das áreas das bases, obtém-se a área total:

$$\boxed{A_t = A_l + 2\,A_b}$$

• **Pirâmide regular**

$$\boxed{A_l = n \times A_f}$$



n = número de faces da pirâmie
A_f = área de uma face lateral da pirâmide

A área lateral de uma pirâmide é igual à soma das áreas das faces laterais.

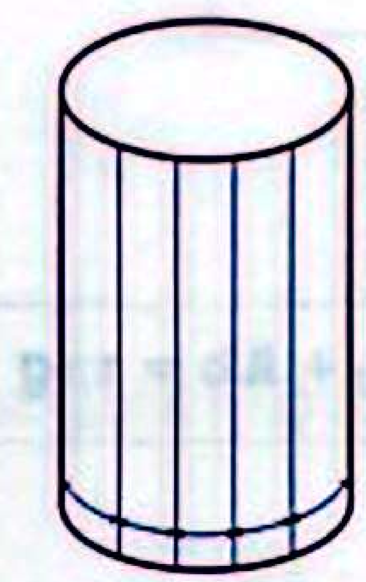
– Adicionando à área da base, obtém-se a área total:

$$\boxed{A_t = A_l + A_b}$$

• **Cilindro de revolução**

Inscrevamos numa das bases de um cilindro de revolução um polígono regular.

Considerando as geratrizes que passam pelos vértices desse polígono, fica definido um prisma regular; diz-se, desse prisma, que está inscrito no cilindro.



É evidente que a área da superfície lateral de qualquer dos prismas é menor que a área da superfície lateral do cilindro.

Entretanto, à medida que aumenta o número das suas faces, facilmente se reconhece, nos prismas da sucessão, que:

- as fronteiras das suas bases vão-se aproximando, cada vez mais, das circunferências que limitam as bases do cilindro;
- as áreas das suas superfícies laterais vão-se aproximando, cada vez mais, da área da superfície lateral do cilindro.

Sendo assim, é natural admitir que a área da superfície de um cilindro de revolução se pode calcular de forma análoga à de um prisma recto, isto é, multiplicando o comprimento da fronteira de uma base pela altura.

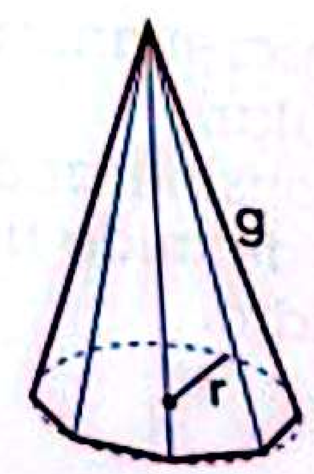
$$\boxed{A_l = 2r\pi \times h}$$

– Adicionando à área da superfície lateral a soma das áreas das bases, obtém-se a área da superfície total.

$$\boxed{A_t = A_l + 2 \times A_b}$$

- **Cone de revolução**

A área da superfície lateral do cone de revolução é igual a metade do produto da geratriz pelo comprimento da fronteira da base.



$$\boxed{A_l = \frac{1}{2} \times 2r\pi \times g}$$

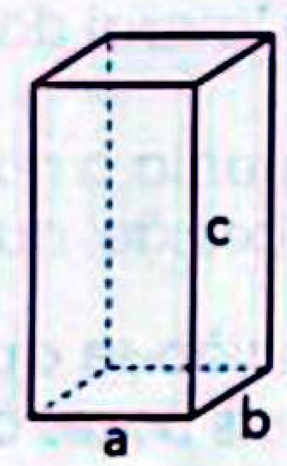
A área da superfície total é:

$$\boxed{A_t = A_l + Ab = r\pi g + r^2\pi}$$

D.2.2 VOLUMES DE SÓLIDOS

- **Paralelepípedo**

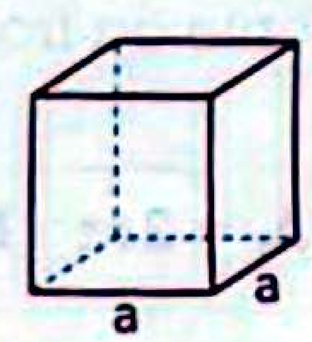
$$\boxed{V = a \times b \times c}$$



O volume do paralelepípedo rectângulo é igual ao produto das três dimensões.

- **Cubo**

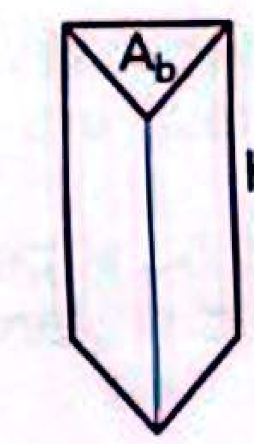
$$\boxed{V = a \times a \times a = a^3}$$



O volume do cubo é igual ao cubo do comprimento de uma aresta.

- **Prisma recto**

O volume de um prisma recto é igual ao produto da área da base pela altura.

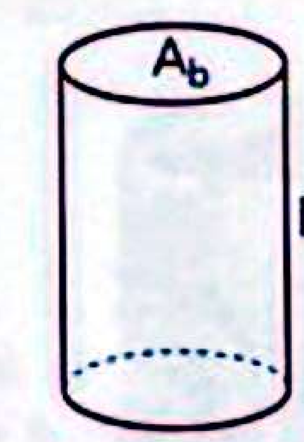


$$\boxed{V = A_b \times h}$$

- **Cilindro**

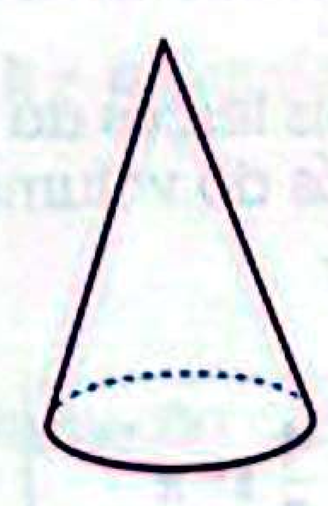
O volume de um cilindro qualquer é igual ao produto da área de uma base pela altura.

$$\boxed{V = A_b \times h}$$

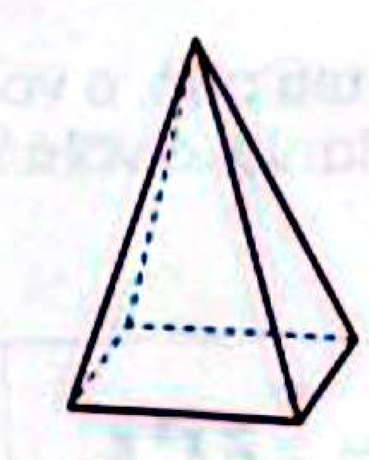


- **Pirâmide e cone**

O volume de uma pirâmide ou de um cone é igual a um terço do produto da área da base pela altura.



$$\boxed{V = \frac{1}{3} A_b \times h}$$



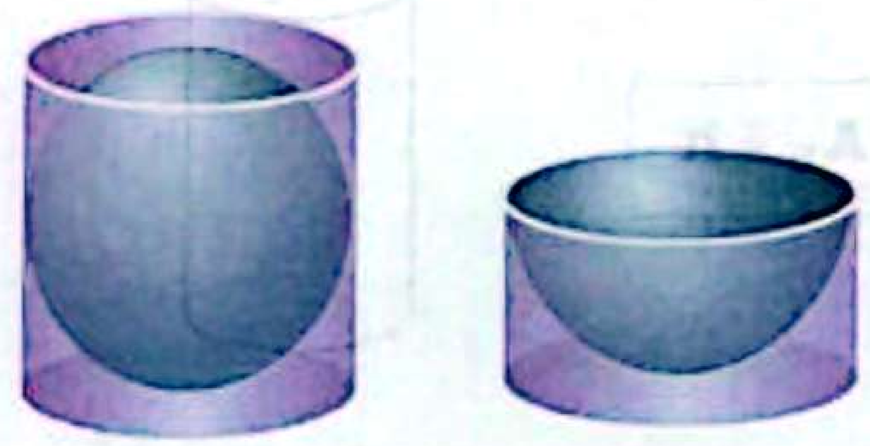
D.2.3 ÁREA E VOLUME DUMA ESFERA

A dedução da fórmula que permite calcular a área da superfície esférica será feita em estudos posteriores.

A área da superfície esférica é igual ao quádruplo da área de um círculo máximo da esfera respectiva.

$$\boxed{A = 4r^2 \pi}$$

O matemático italiano Luca Valério (1552-1618), baseado em estudos antigos de Arquimedes, para determinar o volume duma esfera, construiu uma tina em que cabia exactamente metade do cilindro circunscrito à esfera.



A altura interior da tina é igual, por consequência, ao comprimento r, dos raios da esfera. A base é igual a um círculo máximo.

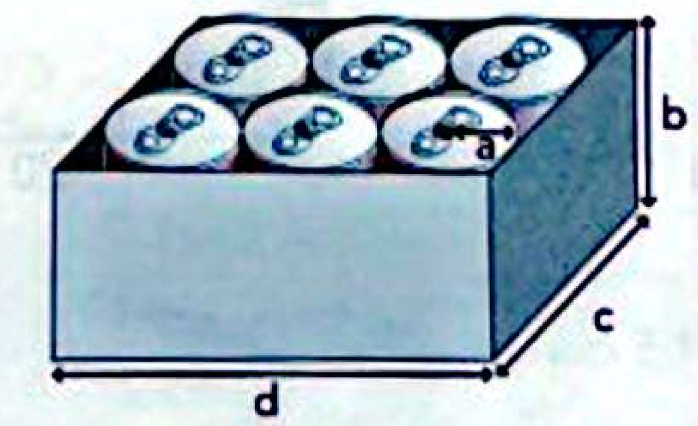
Enchendo a tina de água e introduzindo nela um hemisfério (metade da esfera), verificou que o volume da água, na tina, se reduzira a «um terço».

Assim concluiu que, o volume do hemisfério é dois terços da capacidade da tina, e portanto, o volume da esfera é dois terços do volume do cilindro circunscrito.

$$\boxed{V = \frac{2}{3} 2r^3 \pi} \quad \text{ou} \quad \boxed{V = \frac{4}{3} r^3 \pi}$$

Exemplo:

A figura abaixo representa uma caixa contendo latas cilíndricas de um refrigerante.



Dados:
$a = 4{,}5$ cm
$b = 12$ cm
$c = 16$ cm
$d = 24$ cm

a) Calcula qual o volume de cada uma das latas.

b) Calcula o volume da caixa e indica quantas latas ela pode armazenar no seu interior.

Resolução:

a) Para calcular o volume de um cilindro (que é a forma que as latas têm) usa-se a fórmula: $\mathbf{V = A_b \times h}$. Sendo assim:

$$A_b = \pi r^2 = \pi \times (4{,}5 \text{ cm})^2 = 63{,}585 \text{ cm}^2$$

$$V_{lata} = 63{,}585 \text{ cm}^2 \times 12 \text{ cm} = 763{,}02 \text{ cm}^3$$

R: O volume de cada lata é de aproximadamente 763 cm^3.

b) Para calcular o volume da caixa usa-se a fórmula aplicada aos paralelepípedos:

$\mathbf{V = d \times b \times c}$. Sendo assim:

$$V_{caixa} = 24 \text{ cm} \times 12 \text{ cm} \times 16 \text{ cm}$$

$$V_{caixa} = 4608 \text{ cm}^3$$

R: O volume da caixa é de 4608 cm^3.

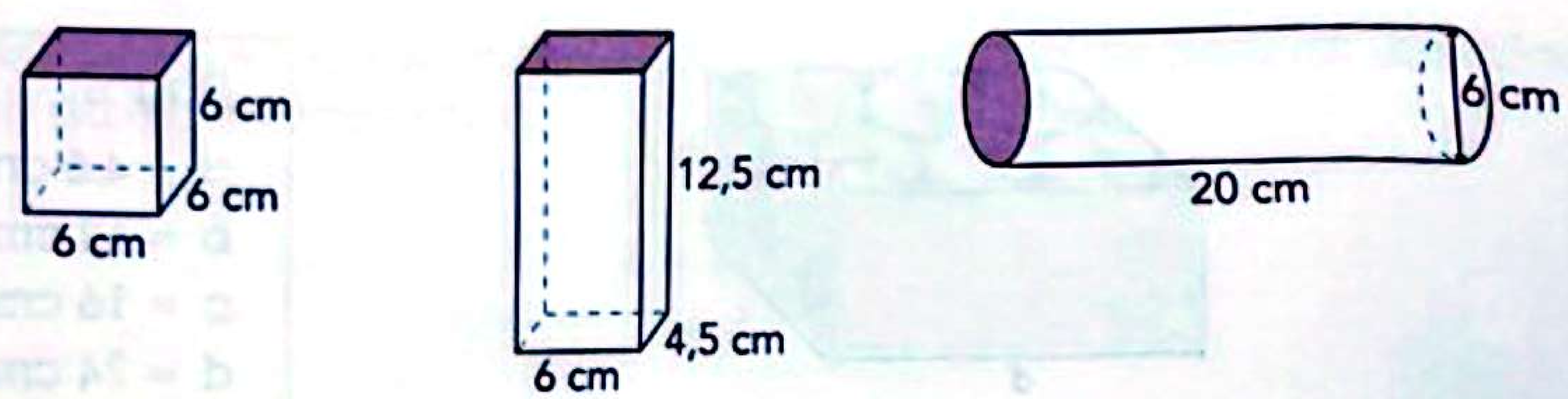
Depois de determinado o volume da caixa, é possível determinar quantas latas cabem na caixa:

$$\text{Número de latas na caixa: } \frac{4608}{763} = 6{,}03$$

R: Cabem 6 latas na caixa.

Actividades

1. Observa os sólidos e determina para cada um:



a) A área da face sombreada.

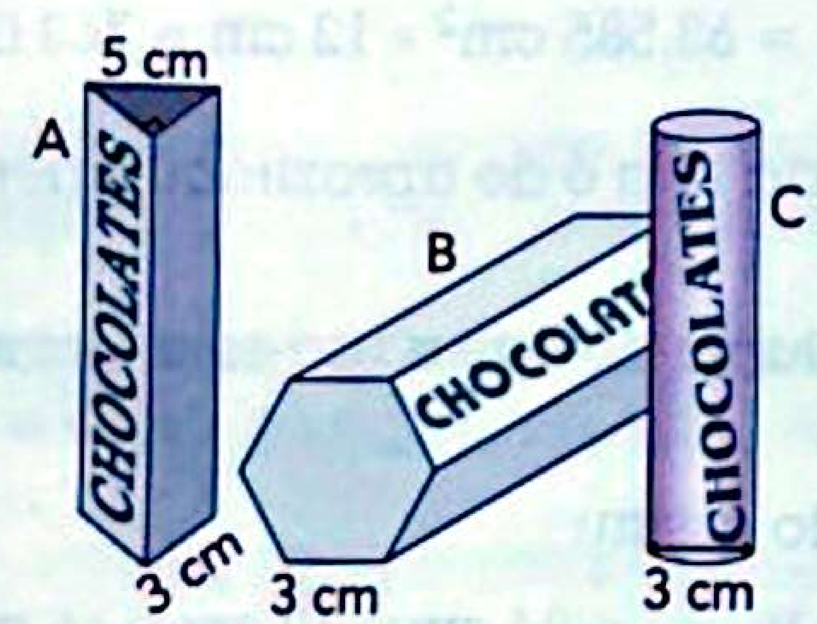
b) A área total.

c) O seu volume.

2. Observa as três embalagens de chocolates. A embalagem A tem a forma de um prisma recto, a embalagem B é um prisma regular e a embalagem C é um cilindro, tendo todas 12 cm de altura.

a) Em qual delas se gastou mais cartão? Justifica a tua resposta.

b) Qual tem maior volume? Justifica.

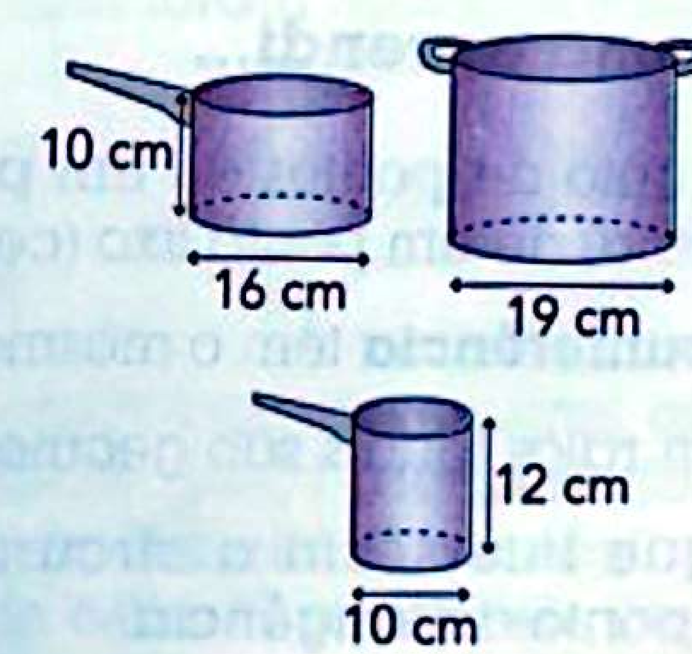


3. Determina o volume de uma bola de futebol com 15 cm de raio.

4. O João pretende deitar 2 litros de leite num dos três tachos sem que o leite transborde.

a) Quais pode escolher? Justifica a resposta.

b) A irmã do João, ao querer ajudá-lo, diz: «No maior até cabem 4 litros». Terá razão?



5. Um poço tem 100 decímetros de profundidade e o seu fundo tem um diâmetro de 40 decímetros.

5.1 Qual a sua capacidade máxima de água? Indica o resultado em dm^3 e em m^3.

5.2 O balde usado para tirar água do poço tem a capacidade de 5 litros (1 litro = 1 dm^3).
Quantos baldes seriam necessários para tirar toda a água do poço?

5.3 Está correcta a afirmação: «O balde tem 2 decímetros de diâmetro e 4 decímetros de altura.»? Justifica.

Neste tema aprendi...

☐ **Circunferência** é um conjunto de pontos de um plano que estão a uma distância constante (raio) de um ponto fixo (centro).

☐ Todos os **raios de uma circunferência** têm o mesmo comprimento.

Se duas circunferências têm raios iguais são geometricamente iguais.

☐ **Tangente** é uma recta que intersecta a circunferência num só ponto, que é denominado ponto de tangência.

☐ **Secante** é uma recta que intersecta a circunferência em dois pontos distintos, denominados pontos de secância.

☐ **Arco** de uma circunferência é qualquer porção da circunferência compreendida entre dois pontos que se dizem extremidades do arco.

☐ **Corda** é qualquer segmento de recta cujas extremidades são dois pontos da circunferência.

☐ **Diâmetro** é a corda que passa pelo centro da circunferência. O diâmetro divide a circunferência em duas semicircunferências.

☐ A arcos geometricamente iguais correspondem sempre ângulos ao centro com a mesma amplitude.

☐ Em circunferências de raios diferentes, é possível encontrar arcos da mesma amplitude, e que não são geometricamente iguais.

☐ Qualquer recta que passa pelo centro de uma circunferência é um **eixo de simetria** dessa circunferência.

☐ Os elementos de um polígono são: os lados, os vértices e os ângulos.

☐ Um polígono diz-se **inscrito numa circunferência** quando todos os seus vértices estão sobre a circunferência.

☐ **Polígono regular** é um polígono com os lados e os ângulos geometricamente iguais.

☐ Um triângulo e um polígono regular podem ser sempre inscritos numa circunferência.

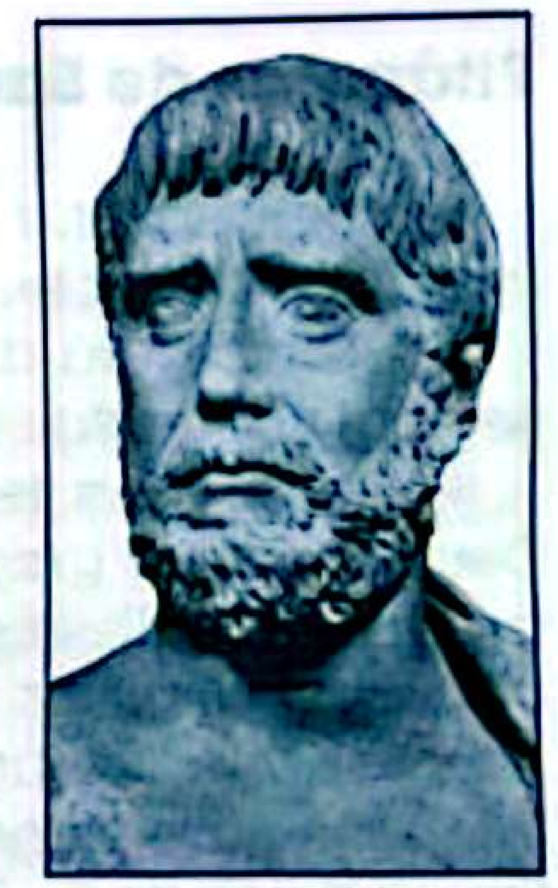
☐ Os polígonos são classificados quanto ao número de lados que possuem (ex: o quadrilátero tem 4 lados, o pentágono tem 5 lados, o hexágono tem 6 lados, etc.).

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

A Matemática é uma ciência antiga que tem sido objecto de estudo de muitas civilizações. Os primeiros a estudá-la foram os egípcios, sumérios e babilónios, tendo sido depois desenvolvida pelos gregos, de cuja língua vem a palavra matemática.

Nesta rubrica vamos explorar de forma simples a biografia de alguns dos matemáticos, que foram referidos neste manual.

Tales de Mileto


Tales de Mileto

Foi matemático, professor, astrónomo, astuto homem de negócios e filósofo grego, do período da filosofia grega conhecido por «Período Cosmológico». Diz-se que nasceu por volta de 640 a.C., em Mileto (na Ásia Menor, actual Turquia) onde viria a morrer com 94 anos.

É o mais antigo e o mais ilustre dos chamados «Sete Sábios da antiga Grécia» e a ele é atribuída a fundação da Escola Jónia. Tales é também considerado o fundador da Geometria Abstracta. Provou as suas teorias recorrendo a demonstrações geométricas feitas passo a passo, uma das suas inovações. Nenhum dos seus escritos foi recuperado pelo que se torna difícil afirmar com certeza quais as suas descobertas e o seu modo de fazer Matemática.

A ele são devidos ensinamentos que espantavam os homens da altura, como por exemplo, dizia ser capaz de calcular a que distância se encontrava da terra um qualquer navio que se encontrava no mar, tendo escrito inclusivamente um livro sobre navegação onde falava da importância da constelação Ursa Menor nas técnicas de navegação, as alturas de objectos, etc. Ficou famosa a sua previsão do eclipse solar de 585 a.C., pois nessa altura não era bem conhecido o comportamento cíclico dos eclipses da lua, bem como o espanto que causou entre os egípcios ao calcular a altura da Grande Pirâmide recorrendo apenas a sombras e aplicando casos de semelhança de triângulos.

Tales acreditava que a Terra era apenas um enorme disco flutuando num ainda muito maior oceano pelo que, para ele, tudo provinha da água.

Alguns dos teoremas que lhe atribuímos e que já estudaste neste manual:

- Uma circunferência é bissectada por qualquer um dos seus diâmetros.
- Qualquer ângulo inscrito numa semicircunferência é recto.
- Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.
- Dois triângulos são semelhantes se tiverem dois ângulos e um lado iguais.
- Um feixe de rectas paralelas, cortado por duas transversais, intersecta estas em segmentos correspondentes directamente proporcionais.

Pitágoras de Samos

Pitágoras

Nasceu na ilha grega de Samos, em 570 a.C. aproximadamente.

A sua mãe era de Samos e chamava-se Pythais, seu pai chamava-se Mnesarchus e era de Tyre.

Segundo uma lenda, a pitonisa do oráculo do Deus Delfos (os gregos davam o nome de Pitonisas a todas as mulheres que tinham a profissão de adivinhas) avisou os pais de Pitágoras que o filho esperado ia ser um homem de extrema beleza, inteligência e bondade, e iria contribuir de uma forma única para Humanidade. Quando este nasceu, os seus pais deram-lhe o nome de Pitágoras em homenagem à Pitonisa.

Depois de ter vivido durante 25 anos no Egipto onde sofreu influências de sacerdotes e mestres, voltou à sua terra natal, onde fundou uma escola com o seu nome. Para entrar na escola, os candidatos eram submetidos a provas, tanto físicas como psicológicas. Ao entrarem, os alunos teriam de doar todos os seus bens pessoais para um fundo comum e seguir todas as regras do seu mestre, tais como, serem vegetarianos, não usarem peles de animais e atribuírem a Pitágoras todas as descobertas que fizessem.

O seu nome é sempre referenciado no seu teorema dos triângulos rectângulos: a soma do quadrado dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.

Uma visão engraçada que tinham dos números era considerarem que os números pares eram femininos e os ímpares, com excepção do 1, eram masculinos. O 1 era o gerador de todos os outros números. O 5, era o símbolo do casamento, pois era a soma do primeiro número feminino, o 2, com o primeiro número masculino, o 3.

Além dos números pares e ímpares, os pitagóricos consideravam, também, os números perfeitos. Quando a soma dos divisores de um número é maior do que ele, o número é chamado de «excessivo». Quando a soma dos seus divisores for menor, o número é chamado de «deficiente». Os números mais importantes e raros eram aqueles cujos divisores somados produziam eles mesmos, e estes eram chamados de perfeitos. Por exemplo: os divisores de 12 são 1, 2, 3, 4 e 6. Somados dão 16. Logo, o 12 é um número excessivo. O número 6 tem como divisores os números, 1, 2 e 3, que somados dão 6. Portanto, 6 é perfeito. Os seguintes números perfeitos são 28, 496, 8128, 33550336 e o sexto é 8589869056.

Pitágoras concretizou a profecia e ficou na História da Matemática.

Alguns ditados Pitagóricos

«Anima-te por teres de suportar as injustiças; a verdadeira desgraça consiste em cometê-las.»

«A vida é como uma sala de espectáculos: entra-se, vê-se e sai-se.»

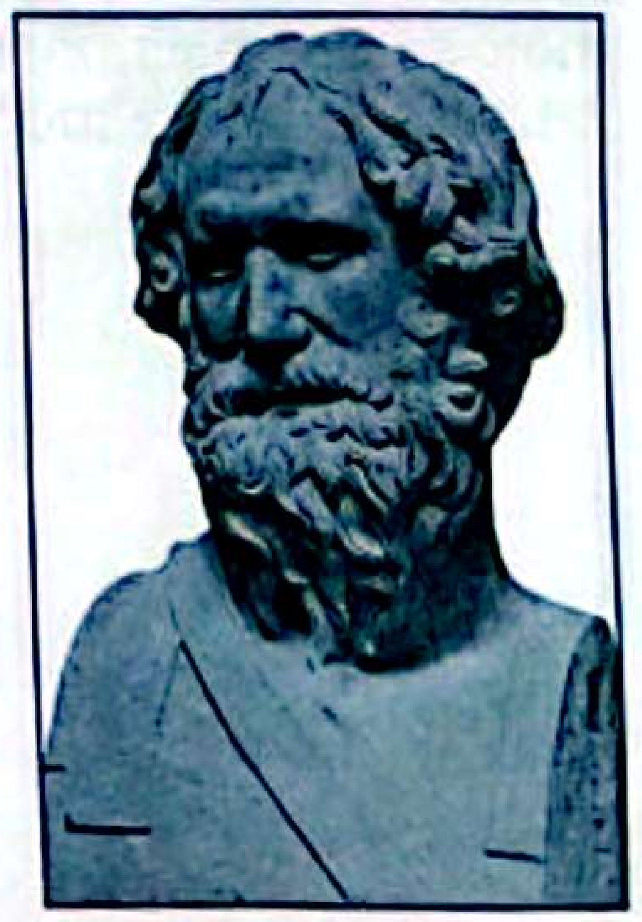
«A Evolução é a Lei da Vida, o Número é a Lei do Universo, a Unidade é a Lei de Deus.»

«Com ordem e com tempo encontra-se o segredo de fazer tudo e tudo fazer bem».

«O que fala, semeia. O que escuta, colhe».

«Educai as crianças e não será preciso punir os homens».

Arquimedes



Arquimedes

Nasceu em Siracusa em 287 a.C., Arquimedes foi para Alexandria quando Euclides já havia morrido e travou amizade com muitos sábios da Biblioteca. Voltou mais tarde a Siracusa, mas continuou a corresponder-se com os amigos alexandrinos. É precisamente nessas cartas que se podem encontrar as suas descobertas.

Dotado de uma inteligência prodigiosa, Arquimedes, assimilou rapidamente todos os conhecimentos adquiridos pela Humanidade até ao momento e, através de uma admirável série de descobertas, ampliou-os grandemente. É considerado um dos maiores génios da Antiguidade.

As áreas onde mais se envolveu foram: a Física, a Mecânica e a Matemática. Nesta rubrica só vamos referenciar a Matemática.

Conta a lenda que, Arquimedes queria inventar uma maneira de confirmar se a coroa do rei tinha sido inteiramente feita em ouro, ou se o joalheiro teria falsificado a obra que lhe tinha sido encomendada, substituindo parte do ouro por prata. Este problema preocupou o sábio, a tal ponto que, quando no meio de um banho, descobriu a solução – princípio da hidrostática (disciplina que se ocupa do equilíbrio dos líquidos) – saiu para a rua a comunicar aos seus concidadãos a sua descoberta, gritando: Eureka!

Em Geometria, o sábio teve o mérito de conceber métodos gerais, para calcular as áreas de figuras planas curvilíneas e os volumes de sólidos delimitados por superfícies curvas. Aplicou tais sistemas a vários casos particulares: à esfera, ao círculo, ao segmento de parábola, à área compreendida entre dois raios e dois passos sucessivos de uma espiral, aos segmentos esféricos, às superfícies geradas pelas revoluções em torno dos eixos principais dos rectângulos (ou melhor, os cilindros), a entidades geométricas produzidas pela revolução dos triângulos (ou seja, os cones), das parábolas, das hipérboles e das elipses.

Além disso, fez surgir a ideia de infinitamente grande ao querer contar os grãos de areia da praia de Siracusa. Esta abordagem da ideia de infinito surge também numa das suas obras, o Arenário, onde se propõe avaliar o número de grãos de areia (daí o nome da obra) que seria preciso para encher uma esfera grande como o Universo.

Descobriu ainda um método para calcular o Pi grego – π – o prodigioso número que estabelece a ligação entre a circunferência e o seu diâmetro, fixando o seu valor entre 3,1408... e 3,1428..., valores estes aproximados por defeito e por excesso, respectivamente, ao número que hoje representamos pela letra π = 3,14159... . Para a obtenção daqueles valores utilizou o método dos polígonos regulares inscritos e circunscritos à circunferência partindo dos de 6 lados e, por chegando até aos de 96 lados.

Formulário		
Fórmula resolvente		$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
Constante de proporcionalidade directa		$k = \frac{y}{x}$
Constante de proporcionalidade inversa		$k = y \times x$
sen α		$\frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$
cos α		$\frac{\text{cateto ajacente}}{\text{hipotenusa}}$
tg α		$\frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$ e $\frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$
Outras razões trigonométricas, além de sen α, cos α, tg α.		$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ $\text{cotg } \alpha = \frac{1}{\text{tg } \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\text{sen } \alpha}$
Áreas de polígonos	Quadrado	$A = \text{lado} \times \text{lado} = l^2$
	Rectângulo	$A = \text{largura} \times \text{comprimento}$
	Paralelogramo	$A = \text{base} \times \text{altura}$
	Triângulo	$A = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$
	Trapézio	$A = \frac{\text{base} + \text{base}'}{2} \times \text{altura}$
	Polígono regular	$A = \frac{\text{apótema} \times \text{perímetro}}{2}$
	Circunferência	$A = \pi r^2$
Áreas de sólidos	Prisma	$A_{total} = A_{lateral} + 2 \times A_{base}$ $A_{lateral} = P_{base} \times \text{Altura}$
	Pirâmide	$A_{total} = A_{lateral} + A_{base}$ $A_{lateral} = \frac{P_{base} \times \text{apótema}}{2}$
	Cilindro	$A_{lateral} = 2\pi r \times h$ $A_{total} = A_{lateral} + 2 \times A_{base}$
	Cone	$A_{lateral} = \frac{1}{2} \times 2\pi r \times g$ $A_{total} = A_{lateral} + A_{base} = \pi r g \times \pi r^2$
Volumes de sólidos	Cubo	$V = \text{aresta}^3$
	Paralelepípedo	$V = a \times b \times c$
	Esfera	$V = \frac{4}{3} r^3 \pi$
	Prisma	$V = A_{base} \times \text{altura}$
	Cilindro	
	Cone	$V = \frac{1}{3} A_{base} \times \text{altura}$
	Pirâmide	

Cálculo literal

Suprimir parêntesis

$$a + (b + c) = a + b + c$$
$$a + (b - c) = a + b - c$$
$$a - (b + c) = a - b - c$$
$$a - (b - c) = a - b + c$$

Desenvolver

$$k(a + b) = ka + kb$$
$$k(a - b) = ka - kb$$
$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

- Desenvolver um produto é escrevê-lo na forma de uma soma.

Factorizar

$$ka + kb = k(a + b)$$
$$ka - kb = k(a - b)$$
$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 = (a + b)(a + b)$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 = (a - b)(a - b)$$
$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

- Factorizar uma soma é escrevê-la em forma de um produto.

Soluções págs. 13-14

1. $\sqrt{26} > 5$ $\quad -\sqrt{26} < -5$ $\quad -7 = -\sqrt{49}$

$\frac{7}{5} < \sqrt{2}$ $\quad -\sqrt{61} < -3$ $\quad \frac{5}{4} > \frac{4}{5}$

2.

2.1 $-\sqrt{20} < -\frac{5}{2} < 6 < 6 < \sqrt{80}$

2.2 $-4 < -\sqrt{9} < \frac{4}{7} < 1 < \frac{6}{5}$

3.

4.

4.1 P.e.: número racional: 2,5

número irracional: $\sqrt{\frac{20}{3}}$

4.2 P.e.: número racional: 1,7

número irracional: $\sqrt{3}$

4.3 P.e.: número racional: $\frac{5}{2}$

número irracional: $\sqrt{7}$

5.

5.1 – 1,4: dízima finita

5.2 0,125: dízima finita

5.3 3,605... : dízima infinita não periódica

5.4 0,8: dízima finita

5.5 1,732... : dízima infinita não periódica

5.6 0,866... : dízima infinita não periódica

5.7 0,323 (23) : dízima infinita periódica (período 23)

5.8 3,12: dízima finita

6.

a	b	c	a+b	b+c	a–c	b–c
1	8	4	9	12	–3	4
–1	8	–4	7	4	–5	12
–2	7	3	5	10	–5	4
–2	–2	–3	–4	–5	1	1
4	4	–1	8	3	5	5
0,3	1,7	–0,4	2,0	1,3	0,7	2,1

7.

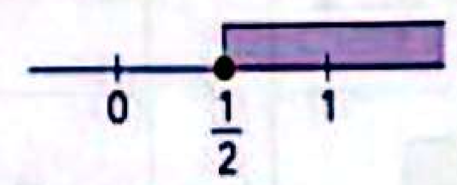
7.1 – V
7.2 – F
7.3 – V
7.4 – F
7.5 – V
7.6 – F
7.7 – V
7.8 – V

Soluções págs. 20-21

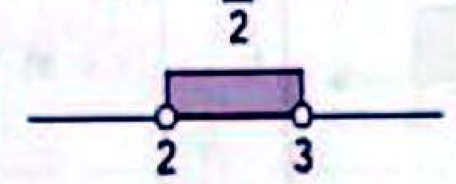
1.

1.1

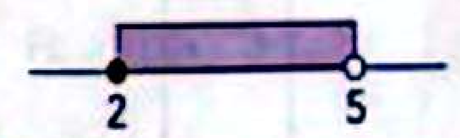
1.2



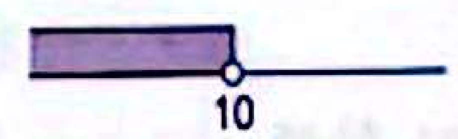
1.3



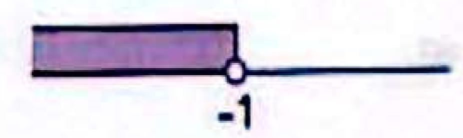
1.4



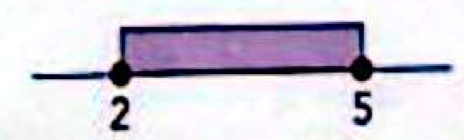
1.5



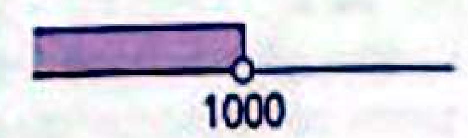
1.6



1.7



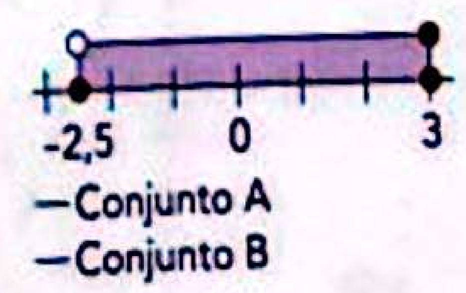
1.8



2.

2.1 a) $\in$ $\quad$ **d)** $\in$ $\quad$ **g)** $\notin$
b) $\in$ $\quad$ **e)** $\notin$ $\quad$ **h)** $\in$
c) $\notin$ $\quad$ **f)** $\in$ $\quad$ **i)** $\notin$

2.2



2.3 c)

3.

3.1 $\left]-3\,;\sqrt{7}\right]$

3.2 $\{0\}$

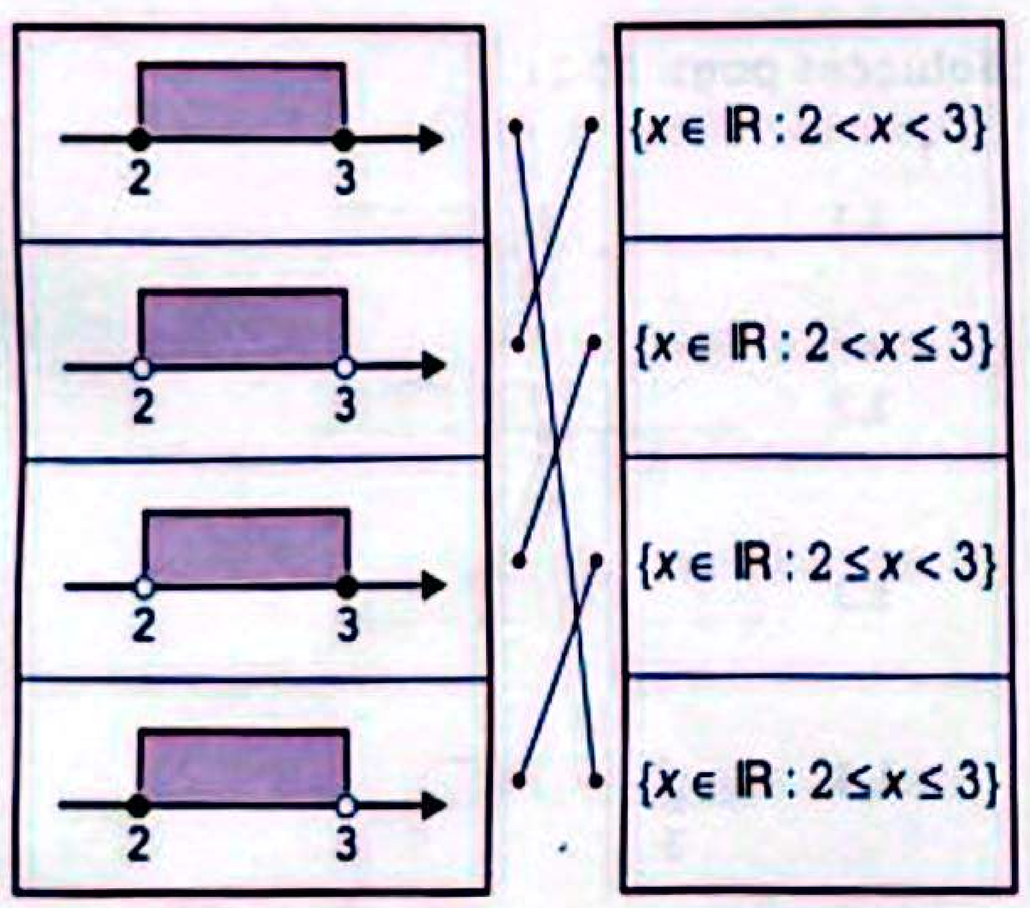
3.3 $[-5\,;2[$

3.4 $]-2\,;8[$

3.5 $]-\infty\,;11]$

3.6 $]-\infty\,;+\infty[$

4.



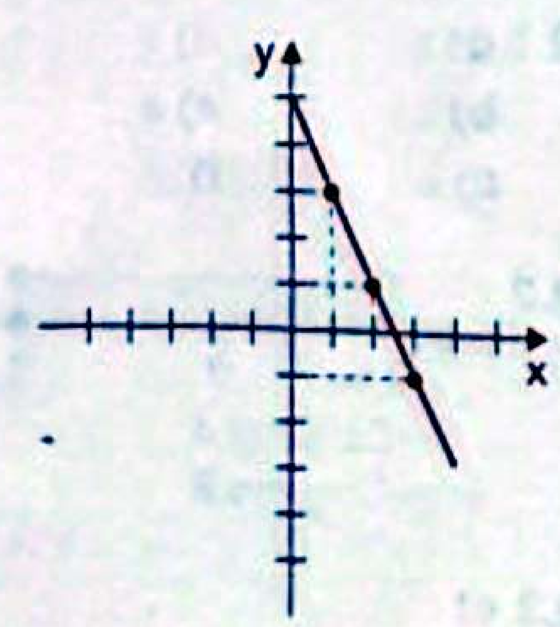
Soluções págs. 24-25

1. b) d) e)

2.1

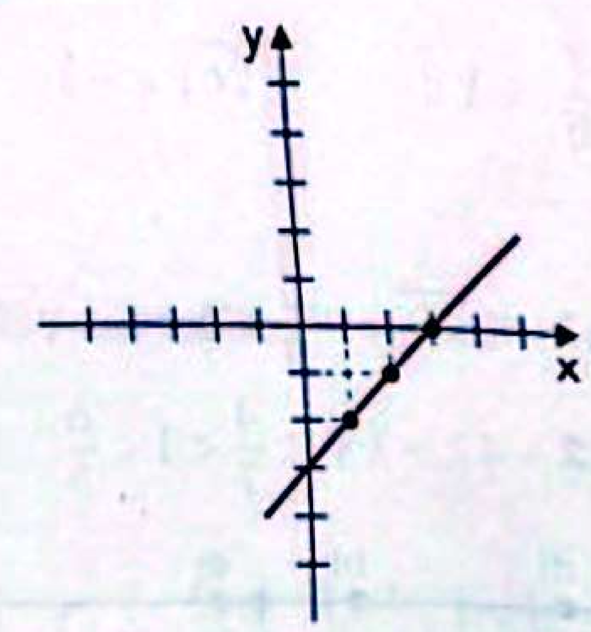
a) $y = -2x + 5$

Usando os 3 pontos (1; −3), (2; 1) e (3; −1) que são solução da equação, pode-se representar geometricamente a equação:



b) $y = -2x + 5$

Usando os 3 pontos (1; −2), (2; −1) e (3; 0) que são solução da equação, pode-se representar geometricamente a equação:



3. Por exemplo $2x + y = 7$.

4.

A: $y = 5x - 1$

B: $y = -\frac{5}{4}x$

C: $y = -x - 3$

D: $y = \frac{6}{5}x - 2$

Soluções pág. 29

1.

a) (2; 3)

b) (19; −55)

c) (1; −2)

2.

(5; 3) é solução.

(1; 3) não é solução.

2.1 (4; 2) por exemplo.

3. $a = 23$ e $b = -11$

4.

a) $x + y = 3$

b) (1; 2)

c) (4; -1)

Soluções pág. 31

1.

a) $\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$

b) (8; 2)

c) (1; 1)

d) $\left(-\frac{9}{10}; -\frac{123}{20}\right)$

e) $\left(\frac{13}{2}; \frac{3}{8}\right)$

f) $\left(\frac{1}{2}; -1\right)$

Soluções pág. 33

1.

a) (1; 2)

b) $\left(\frac{-1}{9}; \frac{32}{9}\right)$

c) $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right)$

d) $\left(\frac{-3}{16}; \frac{1}{8}\right)$

e) $\left(5; \frac{-5}{2}\right)$

f) $\left(\frac{241}{103}; \frac{-5}{103}\right)$

Soluções pág. 37

1.

1.1 $60x \rightarrow$ Tempo de gravação em cassetes de 60 minutos.

$90y \rightarrow$ Tempo de gravação em cassetes de 90 minutos.

$60x + 90y$ Tempo total de gravação.

1.2 $60x + 90y = 660$.

2. 20 embalagens.

3. 10 adultos e 5 crianças.

4. Maria → 3 anos
João → 9 anos

Soluções pág. 39

a) $\left]-\infty; \frac{10}{3}\right[$

b) impossível.

c) $]-\infty; 3[$

d) $]1; +\infty[$

e) $\left]\frac{3}{8}; +\infty\right[$

f) $\left[\frac{14}{3}; +\infty\right[$

g) $\left]-\infty; -\frac{2}{5}\right[$

Soluções págs. 43-44

1.

a) $]-\infty; 6[$

b) $]-\infty; 4]$

c) $[9\,; +\infty[$

d) $[11\,; +\infty[$

e) $]-\infty; 0[$

f) $[13\,; +\infty[$

g) $[-1\,; +\infty[$

h) $]-\infty; 2]$

i) $\left]-\infty; \frac{7}{2}\right]$

j) $]1; +\infty[$

k) $]-2\,; +\infty[$

l) $[-2; +\infty[$

m) $]-\infty; -5[$

2. A solução é $\left\{x \in \mathbb{R} : x > -\frac{3}{2}\right\}$

3. A Débora pensou no número 47.

4. Pelo menos 16.

5. No máximo cada jeans pode custar 3220 kwanzas.

6. É mais vantajoso usar a tarifa 2 partir de 7 entradas por mês.

Soluções pág. 51

1.

a) $x = \pm 0{,}4$

b) $x = 0 \vee x = \frac{2}{3}$

e) $x = 0 \vee x = 4$

f) $x = \frac{4}{9} \vee x = 0$

c) $x = \pm 7$ g) $\varnothing$

d) $x = 0 \vee x = -0{,}3$ h) $x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \vee x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2. Uma equação de 2.º grau incompleta tem 2 termos.

3.

a) $x = 0 \vee x = -3$ c) $x = \sqrt{11} \vee x = \sqrt{11}$

b) $x = \pm\sqrt{\frac{17}{3}}$ d) $x = 0 \vee x = 1{,}5$

4. $3x^2 + 5x = 0$ por exemplo.

Soluções pág. 53

1.

a) $x = 0 \vee x = \frac{7}{2}$

b) $x = -\frac{1}{2}$.

c) $x = \pm\frac{1}{4}$

d) $x = 1 + 12 \vee x = \frac{1}{2} - \sqrt{12}$

e) $x = 5$

f) impossível.

3.

a) $n = -\frac{1}{3}$

b) $m = \pm\sqrt{\frac{3}{4}}$

c) $x = \frac{1}{3}$

d) $a = 4$

e) $c = \pm 7{,}1$

f) $a = -5$

4. $c = 5$

Soluções pág. 58

1.

a) $x = 4 \vee x = 2$

b) impossível

c) $x = -7{,}77 \vee x = 0{,}77$

d) $x = -1$

e) $x = 5 \vee x = -2$

f) impossível

g) $x = 0{,}5 \vee x = -\frac{2}{3}$

h) $x = 5{,}645 \vee x = 0{,}354$

2.

a) impossível

b) $x = -\frac{1}{3} \vee x = -21$

c) $a = 2 \vee a = \frac{1}{2}$

3. 2 m por 1,6 m.

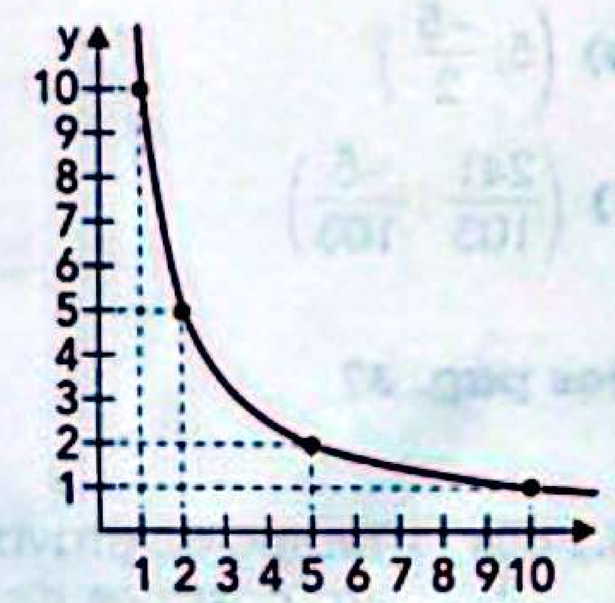
4. A Margarida tem 12 anos.

Soluções págs. 68-69

1. 240 km

2. 10 m

3.



4. $\frac{1}{500\,000}$

5.

x	y
4	3
6	1
1	10

x	y
7	4
2	10
10	2

x	y
2	2
8	1/2
4	1

6. 7,1 minutos

7.

7.1 $6 \times 2 = 8 \times 1{,}5 = 12 \times 1 = 16 \times 0{,}75 = 24 \times 0{,}5 = 12$

7.2 12

7.3 3

8.

8.3 3000. Representa o preço total do ramo de flores.

9. Sim, porque o produto da Ab pela altura dá o volume de cada cilindro, que é constante. A constante de proporcionalidade representa o volume.

Soluções pág. 74

1.

1.1 $\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\operatorname{sen}\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ $\operatorname{tg}\beta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

1.2 $\operatorname{sen}\alpha = \frac{2}{5}$ $\operatorname{sen}\beta = \frac{3}{5}$

$\cos\alpha = \frac{3}{5}$ $\cos\beta = \frac{2}{5}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3}$ $\operatorname{tg}\beta = \frac{3}{2}$

1.3 $\operatorname{sen}\alpha = \frac{5}{6}$ $\operatorname{sen}\beta = \frac{4}{6}$

$\cos\alpha = \frac{4}{6}$ $\cos\beta = \frac{5}{6}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{4}$ $\operatorname{tg}\beta = \frac{4}{5}$

1.4 $\operatorname{sen}\alpha = \frac{4}{8}$ $\operatorname{sen}\beta = \frac{\sqrt{5}}{8}$

$\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{8}$ $\cos\beta = \frac{4}{8}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{\sqrt{5}}$ $\operatorname{tg}\beta = \frac{\sqrt{5}}{4}$

1.5 $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$ $\operatorname{sen}\beta = \frac{3}{\sqrt{10}}$

$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$ $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{10}}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$ $\operatorname{tg}\beta = \frac{3}{1}$

Soluções pág. 77

1.1 3,76 cm
1.2 9,238 cm
1.3 2,72 cm
1.4 4,6 cm
1.5 3,54 cm
1.6 10,71 cm
1.7 7,06 cm
1.8 3,01 cm
1.9 2,07 cm
1.10 13,86 cm

Soluções pág. 81

1.

a) $\operatorname{sen}\alpha = \frac{4}{10}$

$\cos\alpha = \frac{8}{10}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{8}$

b) $\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{5}$

$\cos\alpha = \frac{4}{5}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$

c) $\operatorname{sen}\alpha = \frac{9}{12}$

$\cos\alpha = \frac{6}{12}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{9}{6}$

2.

a) 13,97 cm

b) 12,312 cm

3.

a) 16,38 metros

b) 11,48 metros

Soluções págs. 84-86

2. $\operatorname{sen}\alpha = 0{,}65$ $\cos\alpha = 0{,}76$ $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}85$

3. $\operatorname{sen}\alpha = 0{,}58$ $\cos\alpha = 0{,}81$ $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}72$

4.

a) $\cos\alpha = 0{,}94$

b) $\cos\alpha = 0{,}37$

5.
- **a)** sen $\alpha = 0{,}60$
- **b)** sen $\alpha = 0{,}97$

6. 50 metros.

7.
- **a)** $n \approx 5{,}49$ metros.
- **b)** $n \approx 5{,}85$ metros.

8. 22 metros.

Soluções págs. 102-103

2.
- **2.1** 120°
- **2.2** 90°
- **2.3** 48°
- **2.4** 55°

3.
- **a)** 55°
- **b)** 125°
- **c)** 100°
- **d)** 80°
- **e)** 30°

4.
- **a)** 130°
- **b)** 34,033 mm
- **c)** 18,15 mm
- **d)** Não
- **e)** 67,02 mm²

5.
- **5.1** V
- **5.2** F
- **5.3** V
- **5.4** V
- **5.5** F

6. 82°, 68°

7.
- **7.1** É um rectângulo, os diagonais são iguais.
- **7.2** Rectas perpendiculares.

Soluções págs. 112-113

1.
- **a)** $A_{\square} = 36\ cm^2$
  $A_{\square} = 27\ cm^2$
  $A_{\bigcirc} = 28{,}3\ cm^2$
- **b)** $A_{cubo} = 216\ cm^2$
  $A_{paralelepipedo} = 316{,}5\ cm^2$
  $A_{cilindro} = 433{,}5\ cm^2$
- **c)** $V_{cubo} = 216\ cm^3$
  $V_{paralelepipedo} = 337{,}5\ cm^3$
  $V_{cilindro} = 565{,}5\ cm^3$

2.
- **a)** Emb. A = 156 cm²
  Emb. B = 239,4 cm²
  Emb. C = 127,2 cm²
  Na embalagem B.
- **b)** $VA = 72\ cm^3$
  $VB = 280{,}8\ cm^3$
  $VC = 84{,}8\ cm^3$
  $VB > VC > VA$

3. 14 137,2 cm³

4.
- **a)** V tacho1 = 2,0106 dm³
  V tacho2 = 3,9694 dm³
  V tacho3 = 0,9425 dm³
- **b)** Não tem razão.

5.
- **5.1** 125600 dm³ · 125,6 m³.
- **5.2** 25120 baldes.
- **5.3** Não.

BIBLIOGRAFIA

INIDE; Programa de Matemática 9.ª Classe.

MARTINHO, M.ª Helena, e outros, *Matemática 8*, 1.º e 2.º Volumes, Texto Editores, Lisboa, 2000.

DURÃO, Elza Gouveia e BALDAQUE, Maria Margarida, *MAT9*, 1.º e 2.º Volumes, Texto Editores, Lisboa, 2003.