

Números racionais

UNIDADE

1

by Igor

CONTEÚDOS

Conjunto de números inteiros

- Revisão de números naturais
- Introdução de números inteiros
- Operações em \mathbb{Z}

Conjunto dos números racionais

- Revisão das fracções
 - Número racional negativo
 - Operações em \mathbb{Q}
- Potenciação
- Notação científica
- Raiz quadrada em \mathbb{Q}
- Expressões numéricas envolvendo todas as operações
- Resolução de problemas

Págs. 6 a 49

by-Igor

Revisão dos números naturais

Contar foi uma das primeiras actividades do Homem nos tempos mais remotos.

Os números naturais surgiram assim como uma necessidade humana de contar e ordenar objectos.

A sequência de números que começa em 1 (um) e continua com o seu sucessor $1 + 1 = 2$ (dois) e depois com o sucessor de 2, ou seja, $2 + 1 = 3$ (três) e assim por diante, chama-se **conjunto dos números naturais**.

O conjunto dos números naturais pode decompor-se em dois subconjuntos, um de **números ímpares** $\{1, 3, 5, \dots\}$ e outro de **números pares** $\{2, 4, 6, \dots\}$.

Conhecer melhor os números

Múltiplos e divisores

Os **múltiplos** de um número inteiro determinam-se multiplicando esse número por números inteiros, isto é, por $0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$

Se um número é **múltiplo** de outro, este é **divisor**, ou **submúltiplo**, do primeiro.

- **Múltiplo** de um número é qualquer produto desse número por um número inteiro.
- **Zero** é múltiplo de todos os números.
- **Qualquer número** é múltiplo de si próprio.
- O **conjunto dos múltiplos** de um número natural é um conjunto infinito.
- **Todo** o número natural é divisor de si próprio.
- **Um** é divisor de todos os números inteiros.
- O conjunto dos divisores de um número natural é um conjunto finito.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\} = \{\text{números naturais}\}$$

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \{\text{números inteiros}\}$$



Exercícios resolvidos

1. Uma caixa contém menos de 100 bombons. Se contarmos os bombons de oito em oito, sobram dois, mas se os contarmos de 11 em 11, não sobra nenhum. Quantos bombons tem a caixa?



Resolução

Contar os bombons de oito em oito e sobrar dois, significa que o número de bombons é a soma de um múltiplo de 8 com 2. Contar de 11 em 11 e não sobrar nenhum, significa que o número de bombons é múltiplo de 11. Construindo uma tabela:

Múltiplos de 8 mais 2	10	18	26	34	42	50	58	66	74	82	90	98
Múltiplos de 11	11	22	33	44	55	66	77	88	99			

Tem 66 bombons.

2. Quais são os divisores de 18?

Resolução

Procuro números naturais cujo produto seja 18:

$$1 \times 18 = 18$$

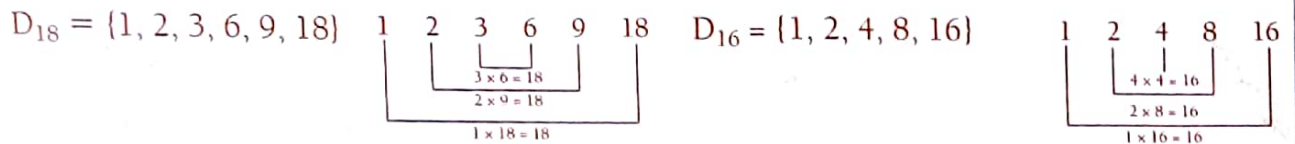
$$2 \times 9 = 18 \quad \text{O número 4 não é divisor de 18, porque não existe um número natural que multiplicado por 4 dê 18.}$$

$$3 \times 6 = 18$$

Diz-se que 18 é divisível por 1, 2, 3, 6, 9 e 18, ou ainda que 1, 2, 3, 6, 9 e 18 são os divisores de 18 e escreve-se:

$$D_{18} = \{\text{divisores de 18}\} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\} \quad \text{Verifica que estão todos.}$$

Para verificarmos se não nos escapou um divisor podemos recorrer ao seguinte truque:



CrITÉRIOS de divisibilidade

CrITÉRIOS de divisibilidade são regras simples que permitem verificar se um número é divisível por outro sem efectuar a divisão.

- Um número é divisível por:
 - 2 se for número par, isto é, se termina em 0, 2, 4, 6 ou 8.
 - 3 se a soma dos algarismos que compõem o número for um múltiplo de 3.
 - 5 se o algarismo das unidades for 0 ou 5.
 - 10 se o algarismo das unidades for 0.
 - 100 se os algarismos das unidades e das dezenas forem 0.
 - 1000 se os algarismos das unidades, das dezenas e das centenas forem 0.

Número primo. Número composto

Um número primo é um número natural maior que um, que tem apenas dois divisores: a unidade e o próprio número. Por exemplo: o número 7 é primo, porque os divisores de 7 são 1 e 7.

Um número composto é um número natural maior que um, que tem mais de dois divisores. Por exemplo: os números 4 e 6 são compostos, porque cada um deles tem mais de dois divisores.

Decomposição de um número em factores primos

Qualquer número composto pode-se escrever como um produto de factores primos.

A decomposição de um número composto em factores primos é única.

Um número é divisível por outro quando os factores primos que surgem na decomposição do menor também surgem na do maior, com expoentes iguais ou maiores.

Para decompor um número composto num produto de factores primos podes recorrer às divisões sucessivas.

UNIDADE 1

Divisões sucessivas

- Divide-se o número dado pelo seu menor divisor primo.
- Procede-se de igual modo com o quociente obtido até encontrar o quociente 1.

$$\begin{array}{r}
 24 \mid 2 \\
 0 \ 12 \mid 2 \\
 \quad 0 \ 6 \mid 2 \\
 \quad \quad 0 \ 3 \mid 3 \\
 \quad \quad \quad 0 \ 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{Representa-se: } 24 \mid 2 \\
 \quad \quad \quad 12 \mid 2 \\
 \quad \quad \quad \quad 6 \mid 2 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad 3 \mid 3 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad 1
 \end{array}$$

factores primos

quocientes

$$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^3 \times 3$$

Decomposição de 24 num produto de factores primos.



Exercícios resolvidos

1. Decompõe os números 286 e 504 num produto de factores primos.

Resolução

$$\begin{array}{r}
 286 \mid 2 \\
 143 \mid 11 \\
 \quad 13 \mid 13 \\
 \quad \quad 1
 \end{array}$$

$$\text{logo, } 286 = 2 \times 11 \times 13$$

$$\begin{array}{r}
 504 \mid 2 \\
 252 \mid 2 \\
 126 \mid 2 \\
 \quad 63 \mid 3 \\
 \quad \quad 21 \mid 3 \\
 \quad \quad \quad 7 \mid 7 \\
 \quad \quad \quad \quad 1
 \end{array}$$

$$\text{logo, } 504 = 2^3 \times 3^2 \times 7$$

2. O número de caricas do Manuel pode ser representado por $2^3 \times 3^2 \times 5$. Se o Manuel repartir igualmente as caricas por nove amigos, quantas dá a cada um? Quantos seriam os amigos do Manuel se, ao repartir igualmente as caricas, cada um ficasse com 45?

Resolução

Temos que $9 = 3^2$ e como 3^2 surge na decomposição de $2^3 \times 3^2 \times 5$, então $2^3 \times 3^2 \times 5$ é divisível por 3^2 e o quociente pedido é $2^3 \times 5$, ou seja, 40. O quociente de $2^3 \times 3^2 \times 5$ pelo número de amigos teria de ser 45, ou seja, $3^2 \times 5$. Logo, o divisor é 2^3 , isto é, o Manuel teria oito amigos.



Máximo divisor comum

- O máximo divisor comum de dois números é o maior número que os divide exactamente.
 - O máximo divisor comum de dois números decompostos em factores primos é o produto
- Veamos: m.d.c. (140, 150)

$$\begin{array}{r}
 140 \mid 2 \\
 70 \mid 2 \\
 35 \mid 5 \\
 7 \mid 7 \\
 1
 \end{array}$$

$$140 = 2^2 \times 5 \times 7$$

$$\begin{array}{r}
 150 \mid 2 \\
 75 \mid 3 \\
 25 \mid 5 \\
 5 \mid 5 \\
 1
 \end{array}$$

$$150 = 2 \times 3 \times 5^2$$

$$\text{m.d.c. (140, 150)} = 2 \times 5 = 10$$

Se um número é múltiplo de outro, este é divisor, ou submúltiplo, do primeiro.

- Quando o **máximo divisor comum** de dois números é 1, diz-se que os números são **primos entre si**.

Vejamos: m.d.c. (11, 15)

$$\begin{array}{r|l} 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

$$11 = 11$$

$$\begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$15 = 3 \times 5$$

m.d.c. (11, 15) = 1 então 11 e 15 são **números primos entre si**

- Não esqueças que pode ser útil usar o **m.d.c.** na **simplificação de fracções**.

Mínimo múltiplo comum

- O **mínimo múltiplo comum de dois números** é o menor número, diferente de zero, que é múltiplo desses números.
- O **mínimo múltiplo comum de dois números decompostos em factores primos** é o produto dos factores primos comuns e não comuns com o maior expoente.

Vejamos: m.m.c. (75, 270)

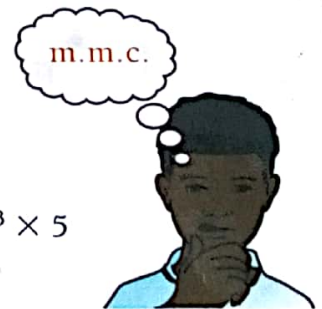
$$\begin{array}{r|l} 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$75 = 3 \times 5^2$$

$$\begin{array}{r|l} 270 & 2 \\ 135 & 3 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$270 = 2 \times 3^3 \times 5$$

$$\text{m.m.c. (75, 270)} = 2 \times 3^3 \times 5^2 = 2 \times 27 \times 25 = 1350$$



- Quando dois números são **primos entre si**, o **mínimo múltiplo comum** desses números é o produto deles.

Vejamos: 4 e 5 são números primos entre si porque:

$$\text{m.d.c. (4, 5)} = 1 \text{ logo } \text{m.m.c. (4, 5)} = 4 \times 5 = 20$$

- O **produto de dois números naturais** é igual ao produto do m.d.c. pelo m.m.c. desses números.
- Não esqueças que pode ser útil usar o **m.m.c.** para **reduzir fracções ao mesmo denominador**.

Números inteiros

Qual é o número que adicionado com 7 dá 3?

Estás perante um problema que não tem solução em \mathbb{N} , conjunto dos números naturais.

A necessidade de tornar estes problemas solúveis levou à criação de um novo conjunto de números – o **conjunto dos números inteiros relativos**, \mathbb{Z} .

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \dots\}$$

Podes agora constatar que o problema tem solução em \mathbb{Z} . De facto (-4) é o número que adicionado com 7 dá 3.

A distância do ponto representativo de cada número à origem designa-se por **valor absoluto** ou **módulo** do número.

valor absoluto ou módulo

Assim o valor absoluto de (-3) é 3 e o de $(+2)$ é 2.

Simbolicamente:

$$|-3| = 3 \quad | +2 | = 2$$



Dois números diferentes com o mesmo valor absoluto dizem-se **simétricos**.

Então como $|-3| = |+3|$, (-3) é simétrico de $(+3)$.

Ao representares os números inteiros relativos sobre a recta orientada, verificas que eles aumentam da esquerda para a direita. Utilizando o símbolo « $<$ » (menor que), esta situação traduz-se por:

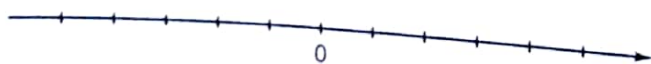
$$1 < -3 < -2 < -1 < 0 < +1 < +2 < +3 < \dots$$

Daqui, pode concluir-se:

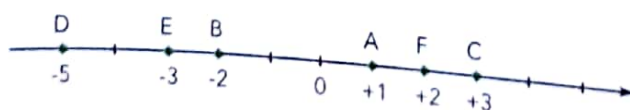
- O zero é maior do que todos os números negativos e menor do que todos os números positivos.
- Todo o número negativo é menor do que qualquer número positivo.
- De 2 números positivos, é menor o que estiver mais próximo da origem (tiver menor valor absoluto).
- De 2 números negativos é menor o que estiver mais longe da origem (tiver maior valor absoluto).

Exercícios resolvidos

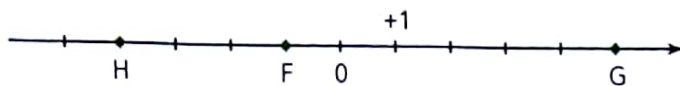
1. Desenha uma recta orientada como esta e, sobre ela, representa os seguintes números inteiros: A (+1) B (-2) C (+3) D (-5) E (-3) F (+2)



Resolução:



2. Indica quais as abcissas dos pontos F, G e H representados na recta orientada seguinte:



Abcissas



Resolução:

- F tem de abcissa -1 .
- G tem de abcissa $+5$.
- H tem de abcissa -4 .

3. Representa com todos os seus elementos (em extensão) cada um dos conjuntos.

- a) $A = \{x : x \in \mathbb{Z} \text{ e } |x| = 3\}$
- b) $B = \{x : x \in \mathbb{Z}^- \text{ e } |x| < 5\}$
- c) $C = \{x : x \in \mathbb{Z} \text{ e } |x| < -3\}$
- d) $D = \{x : x \in \mathbb{Z} \text{ e } |x| = 5\}$

Resolução:

- a) $A = \{-3, +3\}$
- b) $B = \{-4, -3, -2, -1\}$
- c) $C = \{ \}$, pois não há nenhum número cujo módulo seja negativo.
- d) $D = \{-5, 5\}$

4. Considera o conjunto $B = \{-3, 0, -8, +5, -2, +3, +1\}$. Utilizando o símbolo mais conveniente, coloca os elementos de B por ordem crescente.

Resolução:

$$-8 < -3 < -2 < 0 < +1 < +3 < +5$$

Operações em \mathbb{Z}

Adição

- A adição de dois números relativos com o mesmo sinal posicional é outro número relativo com o mesmo sinal e cujo valor absoluto é igual à soma dos valores absolutos das parcelas.
- A adição de dois números relativos com sinais diferentes é também um número relativo, com valor absoluto igual à diferença dos valores absolutos das parcelas e sinal igual ao da parcela, com maior valor absoluto.



Exercícios resolvidos

1. Resolve os problemas:

- a) O Zé e a Rosa têm uma sociedade; num negócio, o Zé ganhou 3 contos e a Rosa ganhou 2 contos. Indica:
 - Se tiveram lucro ou prejuízo.
 - Qual o resultado do negócio.

b) O comandante de um voo Maputo – Nampula anunciou que a 8 000 m de altitude a temperatura exterior era de $30\text{ }^{\circ}\text{C}$ negativos. Mais tarde anuncia que a 11 000 m a temperatura tinha descido $25\text{ }^{\circ}\text{C}$. Qual é a temperatura no exterior do avião quando ele esta a 11 000 m de altitude?

Resolução:

1. a) Zé ganhou 3 contos: $+3$
 Rosa ganhou 2 contos: $+2$
 Dois lucros dão lucro: $+5$

- b) Temperatura negativa: $-30\text{ }^{\circ}\text{C}$
 Temperatura desceu $25\text{ }^{\circ}\text{C}$: $-25\text{ }^{\circ}\text{C}$
 Temperatura final: $-55\text{ }^{\circ}\text{C}$

2. Efectua as seguintes adições de números inteiros relativos:

- a) $+5 + (+8)$ b) $-3 + (-2)$ c) $-5 + (-5)$
 d) $+3 + (+8)$ e) $-8 + (-2)$ f) $+7 + (+14)$

Resolução:

- a) $+13$ b) -5 c) -10 d) $+11$ e) -10 f) $+21$

Propriedades de adição

<p>Elemento neutro</p> <p>A adição de zero com qualquer número relativo é esse número relativo. Diz-se que 0 é o elemento neutro da adição.</p>	<ul style="list-style-type: none"> $0 + (+3) = +3$ $(-4) + 0 = -4$ $0 + 0 = 0$
<p>Associativa</p> <p>Podemos associar duas ou mais parcelas e ao resultado adicionar a outra parcela que a soma se mantém.</p>	<ul style="list-style-type: none"> $[(-4) + (+2)] + (-5) = (-2) + (-5) = -7$ $(-4) + [(+2) + (-5)] = (-4) + (-3) = -7$
<p>Comutativa</p> <p>Podemos trocar a ordem das parcelas que a soma se mantém.</p>	<ul style="list-style-type: none"> $(-7) + (+5) = (+5) + (-7) = -2$

A adição em \mathbb{N} também goza das propriedades elemento neutro, associativa e comutativa.



Exercícios resolvidos

1. Aplica a propriedade associativa da adição em \mathbb{Z} para calcular:

a) $+3 + (-5) + (-2)$ b) $-5 + (+5) + (-3)$

Resolução:

a) $[+3 + (-5)] + (-2) = -2 + (-2) = -4$ ou
 $+3 + [(-5) + (-2)] = +3 + (-7) = -4$
 É indiferente calcular de uma maneira ou de outra.

b) $-5 + [(+5) + (-3)] = -5 + (+2) = -3$
 $[-5 + (+5)] + (-3) = 0 + (-3) = -3$

Neste caso é preferível associar as duas primeiras parcelas



2. Verifica em cada alínea que, de facto, a adição em \mathbb{Z} é comutativa. Calcula:

a) $-3 + (-5)$ e $-5 + (-3)$ b) $+7 + (-17)$ e $-17 + (+7)$

Resolução:

a) $-3 + (-5) = -8$ e $-5 + (-3) = -8$ pelo que $-3 + (-5) = -5 + (-3)$
 b) $+7 + (-17) = -10$ e $-17 + (+7) = -10$ pelo que $+7 + (-17) = -17 + (+7)$

Subtracção

Subtracção é uma operação que a cada par de números – **aditivo** e **subtractivo** – faz corresponder outro número – o **resto**.

A subtracção é uma operação sempre possível em \mathbb{Z} (o que não sucedia em \mathbb{N}_0 , se bem te lembras).

Para subtrair dois números relativos, adiciona-se ao aditivo (o primeiro) o simétrico do subtractivo (o segundo).

$$(+2) - (+5) = (+2) + (-5) = -3$$



Exercícios resolvidos

Efectua as seguintes subtracções em \mathbb{Z} :

a) $(-3) - (+5)$ b) $(+13) - (+15)$ c) $(+7) - (-2)$ d) $0 - (+5)$

Resolução:

a) $(-3) - (+5) = -3 + (-5) = -8$ b) $(+13) - (+15) = +13 + (-15) = -2$
 c) $(+7) - (-2) = +7 + (+2) = +9$ d) $0 - (+5) = 0 + (-5) = -5$

A subtração é então uma operação que se pode transformar numa adição.
As expressões que só tenham operações de adição e subtração dizem-se **somas algébricas**.

Soma algébrica. Uso de parêntesis

Como uma **soma algébrica** se pode transformar sempre numa adição sucessiva, convencionou-se que os sinais operacionais de adição se podem suprimir, bem como os parêntesis que envolvem cada número relativo. Se a primeira parcela for positiva, o sinal posicional «+» também pode suprimir-se.

Numa soma algébrica, dois sinais iguais seguidos dão origem a um sinal de «+»; dois sinais diferentes seguidos dão origem a um sinal de «-».

- Se numa expressão tivermos um parêntesis precedido do sinal de «+», podemos suprimir o sinal e o parêntesis, obtendo-se uma expressão com o mesmo valor.
- Se por outro lado, o sinal que precede o parêntesis for «-», então podemos suprimir o sinal e o parêntesis trocando todos os sinais do interior deste. Este procedimento designa-se por **desembaraçar de parêntesis**.



Exercícios resolvidos

1. Transforma as somas algébricas em adições sucessivas:

- a) $(-3) + (-5) - (+3) + (+2) - (-5) - (-2)$
 b) $(+5) - (-2) + (-5) - (-7) - (+3) + (+5)$

Resolução:

- a) $(-3) + (-5) - (+3) + (+2) - (-5) - (-2) = -3 + (-5) + (-3) + (+2) + (+5) + (+2)$
 b) $(+5) - (-2) + (-5) - (-7) - (+3) + (+5) = +5 + (+2) + (-5) + (+7) + (-3) + (+5)$

2. Calcula o valor das somas algébricas:

- a) $(-3) - (+5) - (-8) + (-15)$
 b) $(+2) - (-7) + (-2) - (+5) - (-12)$

Resolução:

- a) $(-3) - (+5) - (-8) + (-15) = -3 + (-5) + (+8) + (-15) = -8 + (+8) + (-15) = 0 + (-15) = -15$
 b) $(+2) - (-7) + (-2) - (+5) - (-12) = +2 + (+7) + (-2) + (-5) + (+12) = +9 + (-7) + (+12) = +2 + (+12) = +14$

somas algébricas



3. Transforma as somas algébricas seguintes em expressões o mais simplificadas possível:

a) $(-2) + (+5) - (+3) - (-7) + (-8) + (+12)$

b) $(+7) - (+2) + (+5) - (-2) + (-3) - (-5)$

Resolução:

a) $(-2) + (+5) - (+3) - (-7) + (-8) + (+12) = -2 + 5 - 3 + 7 - 8 + 12$

b) $(+7) - (+2) + (+5) - (-2) + (-3) - (-5) = 7 - 2 + 5 + 2 - 3 + 5$

4. Desembaraça de parêntesis as expressões seguintes:

a) $-(-3 + 2 - 5) + (-4 + 5 - 1)$

b) $(-4 - 5 + 1) - (3 + 2 - 7)$

Resolução:

a) $-(-3 + 2 - 5) + (-4 + 5 - 1) = 3 - 2 + 5 - 4 + 5 - 1$

b) $(-4 - 5 + 1) - (3 + 2 - 7) = -4 - 5 + 1 - 3 - 2 + 7$

5. Desembaraça as expressões de parêntesis e, depois, calcula os números que designam:

a) $(-3 + 7) - (3 - 2) - (-4 + 2)$

b) $(2 + 6 - 1) + (-4 - 3 + 2) - (3 + 5)$

Resolução:

a) $(-3 + 7) - (3 - 2) - (-4 + 2) = -3 + 7 - 3 + 2 + 4 - 2 =$
 $= +4 - 3 + 4 = +8 - 3 = 5$

b) $(2 + 6 - 1) + (-4 - 3 + 2) - (3 + 5) = 2 + 6 - 1 - 4 - 3 + 2 - 3 - 5 =$
 $= 7 - 5 - 8 = 7 - 13 = -6$

Multiplicação

- O produto de dois números positivos é positivo.
- O produto de dois números negativos é positivo.
- O produto de um número positivo por um negativo é negativo.



Exercícios resolvidos

Calcula os produtos:

a) $+3 \times (+5)$

b) $-4 \times (+7)$

c) $+1 \times (-3)$

Resolução:

a) $+15$

b) -28

c) -3

Propriedades da multiplicação

Associativa

Podemos associar dois factores ou mais e ao resultado multiplicar o outro factor que o produto se mantém.

$$\begin{aligned} & \bullet (-4) \times (+2) \times (+3) = (-8) \times (+3) = -24 \\ & (-4) \times (+2) \times (+3) = (-4) \times (+6) = -24 \end{aligned}$$

Comutativa

Podemos trocar a ordem dos factores que o produto se mantém.

$$\bullet -7 \times (+5) = +5 \times (-7) = -35$$

Elemento neutro

O produto de um com qualquer número relativo é esse número relativo. Diz-se que 1 é o **elemento neutro** da multiplicação.

$$\begin{aligned} & \bullet -4 \times 1 = -4 \\ & \bullet 1 \times 8 = 8 \end{aligned}$$

Elemento absorvente

O produto de zero com qualquer número relativo é zero. Diz-se que 0 é o **elemento absorvente** da multiplicação.

$$\begin{aligned} & \bullet 0 \times (-5) = 0 \\ & \bullet 12 \times 0 = 0 \end{aligned}$$

Distributiva da multiplicação em relação à adição

O produto de um número por uma soma é igual à soma dos produtos desse número por cada uma das parcelas.

$$\bullet -2 \times (5 + 4) = -10 - 8 = -18$$

Distributiva da multiplicação em relação à subtracção

O produto de um número por uma diferença é igual à diferença entre o produto desse número pelo aditivo e o produto desse número pelo subtrativo.

$$\bullet -4 \times (10 - 6) = -40 + 24 = -16$$

A multiplicação em \mathbb{N} também goza das propriedades elemento neutro, associativa, comutativa, distributiva da multiplicação em relação à adição e à subtracção.

A multiplicação em \mathbb{N}_0 também goza das propriedades elemento neutro, elemento absorvente, associativa, comutativa, distributiva da multiplicação em relação à adição e à subtracção.



Exercícios resolvidos

1. Aplica a propriedade associativa da multiplicação em \mathbb{Z} para calcular:

a) $-1 \times (+3) \times (-5)$ b) $-11 \times (+7) \times (-1)$

Resolução:

a) $1 \times (+3) \times (-5) = -3 \times (-5) = +15$ ou $-1 \times (-15) = +15$
 c) $11 \times (+7) \times (-1) = -77 \times (-1) = +77$ ou $-11 \times (-7) = +77$

2. Verifica que, a multiplicação em \mathbb{Z} é comutativa:

a) $-3 \times (-5) = -5 \times (-3)$ b) $+7 \times (-17) = -17 \times (+7)$

Resolução:

a) $-3 \times (-5) = +15$ e $-5 \times (-3) = +15$ pelo que $-3 \times (-5) = -5 \times (-3)$
 b) $+7 \times (-17) = -119$ e $-17 \times (+7) = -119$ pelo que
 $+7 \times (-17) = -17 \times (+7)$

Divisão

A **divisão** é uma operação nem sempre possível em \mathbb{Z} .
 Por exemplo, a divisão dos números $+18$ e $+4$ não tem um resultado inteiro, ou seja, $+18 : (+4)$ não é possível em \mathbb{Z} .



Exercícios resolvidos

1. Calcula os quocientes seguintes:

a) $+24 : (+6)$ b) $-21 : (-7)$

Resolução:

a) 4 b) 3

2. Calcula os quocientes das divisões seguintes em \mathbb{Z} , se for possível:

a) $-36 : (-9)$ b) $25 : (-2)$
 c) $32 : (+18)$ d) $+11 : (+1)$

Resolução:

a) 4 b) Não há nenhum inteiro que seja quociente de 25 por (-2) .
 c) Também é impossível em \mathbb{Z} . d) 11



Exercícios de consolidação

- Decompõe em factores primos os seguintes números
a) 24 b) 36 c) 48 d) 75 e) 144 f) 1200
- Determina o máximo divisor comum de
a) 21 e 49 b) 35 e 70 c) 28 e 56
- Pretende-se dividir um terreno rectangular com 900 m por 1500 m em machambas iguais de forma quadrada.
a) Qual é a maior área que as machambas poderão ter?
b) E, nesse caso, em quantas machambas ficará o terreno dividido?
- Determina o mínimo múltiplo comum de:
a) 6 e 8 b) 8 e 12 c) 12 e 16 d) 16 e 32
- O máximo divisor comum do numerador e do denominador numa fracção ajuda a tornar a fracção irredutível. Simplifica as seguintes fracções tornando-as irredutíveis.
a) $\frac{72}{108}$ b) $\frac{360}{1440}$ c) $\frac{294}{343}$ d) $\frac{225}{375}$
- O mínimo múltiplo comum tem grande aplicação nas reduções de fracções ao mesmo denominador. Calcula e apresenta os resultados na forma irredutível.
a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{4} + \frac{1}{6}$ c) $\frac{2}{3} + \frac{5}{6}$
- Indica se são verdadeiras ou falsas das afirmações:
a) $|+3| < |-4|$ b) $-7 > 0$ c) $-3 < +2$ d) $-3 < -2$
e) $0 < |-3|$ f) $-3 > +1$ g) $-3 > -5$ h) $+2 > +8$
- Completa no teu caderno, com um dos símbolos «<», «>» ou «=», por forma a obteres afirmações verdadeiras:
a) $-8 \dots -3$ b) $0 \dots -2$ c) $|-3| \dots |+3|$
d) $+5 \dots +2$ e) $-3 \dots 0$ f) $+2 \dots -2$
- Efectua:
a) $(-3) + (+7)$ b) $(-2) + (+5)$ c) $(+7) + (-5)$
d) $(+3) + (-8)$ e) $(-5) + (+2)$ f) $(-8) + (+3)$
- Depois de voar a 11 000 m com uma temperatura exterior de 55°C negativos, um avião aterriza em Nampula, verificando-se que a temperatura exterior aumentou 85°C . Qual era a temperatura em Nampula?
- Efectua:
a) $0 + (-2)$ b) $(+5) + 0$ c) $(-3) + 0$
- Aplica a propriedade associativa da adição em \mathbb{Z} para calcular:
a) $-7 + (+16) + (-16)$ b) $-38 + (-189) + (+89)$
- Calcula o valor de cada uma das expressões da forma que achares mais conveniente:
a) $+7 + (-17) + (+8)$ b) $-13 + (+23) + (-10)$
c) $+28 + (-19) + (-11)$ d) $-101 + (+79) + (-78)$
e) $(-13) + (-7) + (+24) + (-4)$ f) $-3 + (+87) + (-87) + (+13)$

Exercícios de consolidação



14. Verifica que, a adição em \mathbb{Z} é comutativa:

a) $+13 + (-3)$ e $-3 + (+13)$

b) $+15 + (+13)$ e $+13 + (+15)$

15. Utilizando as propriedades associativa e comutativa, calcula pela forma mais fácil:

a) $-17 + (+38) + (+17) + (-8)$

b) $+11 + (+109) + (+39) + (-9)$

16. Indica o nome das propriedades da adição em \mathbb{Z} , aplicadas em cada uma das igualdades:

a) $(-7) + (+3) = (+3) + (-7)$

b) $0 + (-3) = (-3) + 0 = (-3)$

c) $(-3) + (-2) + (+4) = (-3) + (+2)$

17. Efectua:

a) $(-15) - (+12)$

b) $(-5) - 0$

c) $(+11) - (-15)$

d) $0 - (-3)$

e) $(-17) - (-12)$

f) $(-3) - (+3)$

18. Transforma as somas algébricas em adições sucessivas:

a) $(-5) + (+7) - (+2) - (-5) + (-2) - (-1)$

b) $(+2) - (-7) - (+2) - (-5) - (+7) - (-6)$

19. Calcula o valor das somas algébricas:

a) $(-17) + (+12) - (-15) - (+12) - (+8)$

b) $(+14) + (-7) + (+8) - (-7) - (+8) - (-5)$

20. Desembaraça de parêntesis as expressões seguintes:

a) $-8 + (3 - 4 + 1) - (-5 + 7 - 2)$

b) $3 - (-5 + 8 - 4) - (3 + 7 - 2)$

c) $-2 + |-5 - (-3 + 1)| - (5 + 1)$

21. Desembaraça as expressões de parêntesis e, depois, calcula os números que designam:

a) $8 - (3 + 7 - 2) - 1 + (5 - 3) + 7$

b) $-27 - (-2 + 3) - |2 + (5 - 3)|$

22. Calcula os produtos:

a) $0 \times (+7)$

b) $-2 \times (-3)$

c) $+4 \times (-5)$

d) $+5 \times (-1)$

e) -8×0

23. Aplica a propriedade associativa da multiplicação em \mathbb{Z} para calcular:

a) $+12 \times (-3) \times (-4)$

b) $-3 \times (-8) \times (-2)$

24. Verifica que a multiplicação em \mathbb{Z} é comutativa, calculando:

a) $+13 \times (-3)$ e $-3 \times (+13)$

b) $+15 \times (+13)$ e $+13 \times (+15)$

25. O número 1 é o elemento neutro da multiplicação em \mathbb{Z} .

Calcula:

a) $1 \times (-3)$

b) $-12 \times (+1)$

c) $7 \times (+1)$

d) $1 \times (+5)$

26. Indica o nome das propriedades da multiplicação em \mathbb{Z} aplicadas em cada uma das igualdades.

a) $-7 \times (+3) = +3 \times (-7)$

b) $1 \times (-3) = -3 \times 1 = -3$

c) $-3 \times (-2) \times (+4) = -3 \times (-8)$

27. Calcula os quocientes seguintes:

a) $-32 : (+8)$

b) $+28 : (-4)$

28. Calcula os quocientes das divisões seguintes em \mathbb{Z} , se for possível:

a) $-36 : (-5)$

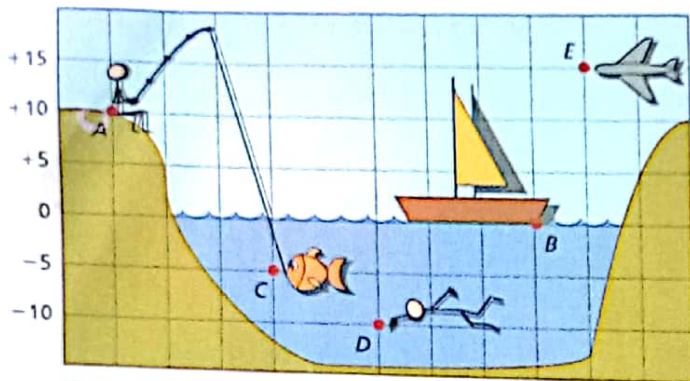
b) $-48 : (+12)$

c) $-8 : (-1)$

d) $0 : (-5)$

Números racionais

Na figura, as posições relativamente ao nível da água são:



- Pescador (A) +10
- Avião (E) +15
- Barco (B) 0
- Peixe (C) -5
- Nadador (D) -10

O sinal + é dispensável, por exemplo, +10 é o mesmo que 10.

Estas informações envolvem:

- Números precedidos de sinal + : +10 e +15 são **números positivos**.

O sinal + indica que esses números são **maiores que zero**.

- Números precedidos de sinal - : -5 e -10 são **números negativos**.

O sinal - indica que esses números são **menores que zero**.

- **Zero** é um número que não é positivo nem negativo.

É fácil associar números positivos e negativos a situações reais. Por exemplo:

- Uma temperatura de 23 °C abaixo de zero: -23.
- Um ganho de 30,50 MT: +30,50.
- 89 metros abaixo do nível da água do mar: -89.
- Um prejuízo de 20,40 MT: -20,40.

Os números positivos, negativos e o zero designam-se por **números relativos**.

A impossibilidade de, ao dividir números inteiros, obter sempre um número inteiro levou à criação dos **números fraccionários**.

Por exemplo, ao dividir 7 por 3, o resultado não é um número inteiro, mas um fraccionário que se pode representar pela fracção $\frac{7}{3}$.

Um número que se pode **representar** por uma **fracção** é um **número racional**.

Assim, por exemplo, -10; -5; +3, 5; 0; $-\frac{5}{6}$; $+\frac{7}{5}$ são **números racionais**.

O conjunto dos números racionais designa-se por **Q**

Observa agora subconjuntos de \mathbb{Q} :

- Conjunto dos números racionais positivos, \mathbb{Q}^+ :

$$\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}^+ \quad 8 \in \mathbb{Q}^+ \quad 3,2 \in \mathbb{Q}^+$$

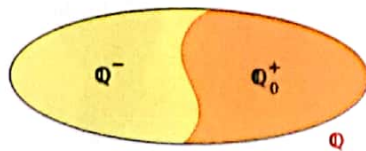
Se a \mathbb{Q}^+ acrescentarmos o zero obtemos \mathbb{Q}_0^+ .

- Conjunto dos números racionais negativos: \mathbb{Q}_0^-

$$-\frac{1}{6} \in \mathbb{Q}^- \quad -0,5 \in \mathbb{Q}^- \quad -9 \in \mathbb{Q}^-$$

Se \mathbb{Q}^- acrescentarmos o zero obtemos \mathbb{Q}_0^- .

- Reunindo \mathbb{Q}_0^+ com \mathbb{Q}_0^- obtém-se o conjunto \mathbb{Q} .



$$\mathbb{Q}^- \cup \mathbb{Q}_0^+ = \mathbb{Q}$$

- Conjunto dos números inteiros relativos, \mathbb{Z} :

$$-7 \in \mathbb{Z} \quad 0 \in \mathbb{Z} \quad +\frac{10}{2} \in \mathbb{Z} \text{ mas } 1,4 \notin \mathbb{Z}$$

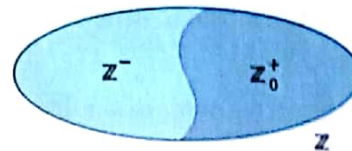
- O conjunto dos números inteiros positivos: \mathbb{Z}^+

$$5 \in \mathbb{Z}^+ \quad \frac{30}{3} \in \mathbb{Z} \quad 25,2 \notin \mathbb{Z}^+$$

- O conjunto dos números inteiros negativos: \mathbb{Z}^-

$$-34 \in \mathbb{Z}^- \quad -\frac{12}{3} \in \mathbb{Z}^- \quad \frac{1}{6} \notin \mathbb{Z}^-$$

- Reunindo \mathbb{Z}_0^+ com \mathbb{Z}^- obtém-se o conjunto \mathbb{Z} .



$$\mathbb{Z}^- \cup \mathbb{Z}_0^+ = \mathbb{Z}$$

Entre dois números inteiros relativos que difiram de uma unidade, não existe nenhum elemento de \mathbb{Z} .

Entre dois elementos de \mathbb{Q} , por mais próximos que estejam, existe sempre outro elemento de \mathbb{Q} .

• \mathbb{Z} = {números inteiros relativos}

\mathbb{Z}^+ = {números inteiros relativos positivos}

\mathbb{Z}_0^+ = {números inteiros relativos não negativos}

\mathbb{Z}^- = {números inteiros relativos negativos}

\mathbb{Z}_0^- = {números inteiros relativos não positivos}

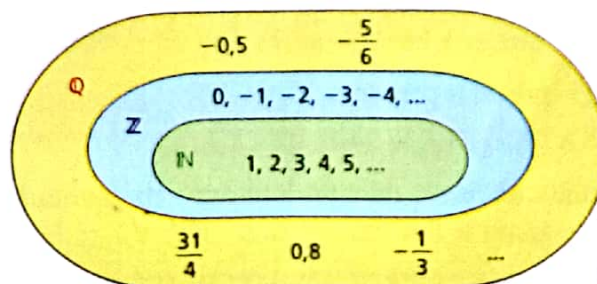
• \mathbb{Q} = {números racionais}

\mathbb{Q}^+ = {números racionais positivos}

\mathbb{Q}_0^+ = {números racionais não negativos}

\mathbb{Q}^- = {números racionais negativos}

\mathbb{Q}_0^- = {números racionais não positivos}



$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$



Exercício resolvido

Num museu, uma sala deve estar à temperatura de $18\text{ }^{\circ}\text{C}$, a fim de conservar os quadros expostos.

Numa tarde, mediu-se de hora a hora a temperatura entre as 14 h e as 19 h e registaram-se as variações, positivas e negativas, relativamente aos $18\text{ }^{\circ}\text{C}$. Completa a tabela:

Temperatura ($^{\circ}\text{C}$)	16	17	19	20	22	21
Variação de temperatura ($^{\circ}\text{C}$)			+1			

Resolução

Variação de temperatura ($^{\circ}\text{C}$): -2 ; -1 ; $+1$; $+2$; $+4$; $+3$.

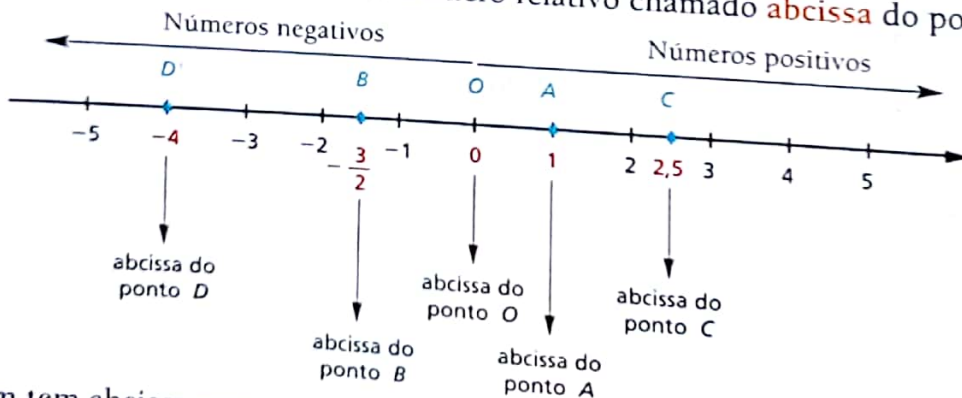
Representação na recta

Os números racionais podem ser representados numa recta.

Vais recordar como traçar uma recta graduada ou eixo:

- Desenha uma recta.
 - Marca um ponto – **origem** – e faz-lhe corresponder o zero.
 - Escolhe uma unidade de medida, u , e um sentido positivo (usualmente escolhe-se para sentido positivo o da esquerda para a direita, sendo o oposto o sentido negativo).
 - A partir da origem, para a direita e para a esquerda, marca segmentos de recta consecutivos com a mesma medida, u , e marca os inteiros relativos, como se mostra abaixo.
- A cada ponto do eixo associamos um número relativo chamado **abscissa** do ponto.

números racionais



- A origem tem abscissa zero que se representa: $O \rightsquigarrow 0$.
- O ponto A tem abscissa 1 que se representa: $A \rightsquigarrow 1$.
- O ponto B tem abscissa $-\frac{3}{2}$ que se representa: $B \rightsquigarrow -\frac{3}{2}$.
- O ponto C tem abscissa 2,5 que se representa: $C \rightsquigarrow 2,5$.
- O ponto D tem abscissa -4 que se representa: $D \rightsquigarrow -4$.

Ponto	A	B	C	D	O
Abscissa	+1	$-\frac{3}{2}$	+2,5	-4	0

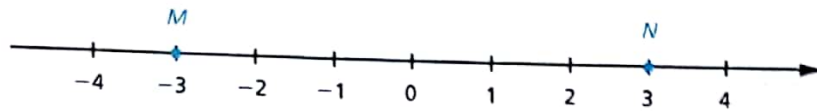
Existem pontos no eixo cujas abscissas não podem ser representadas por uma fracção, ou seja, não são números racionais relativos. Por exemplo: π , $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ...

Mais tarde estudarás estes números e aprenderás a representar no eixo alguns deles.

Módulo ou valor absoluto de um número

A cada ponto do eixo corresponde um só número, a abscissa; e a cada **abscissa** corresponde um só ponto do eixo.

Observa os pontos M e N de abscissas, respectivamente, -3 e 3 :



M dista 3 unidades de comprimento da origem.

N dista 3 unidades de comprimento da origem.

Logo, M e N estão à mesma distância da origem. Diz-se que -3 e $+3$ têm o mesmo **valor absoluto** ou **módulo**, e escreve-se:

$$|-3| = |+3| = 3.$$

Lê-se «o valor absoluto de -3 é igual ao valor absoluto de $+3$ que é igual a 3.»

Valor absoluto ou **módulo** de um número relativo, é a distância do ponto, que representa o número, à origem do eixo.

Diz-se, também, que as abscissas $+3$ e -3 são **números simétricos** um do outro.

Dois números diferentes de zero dizem-se simétricos se:

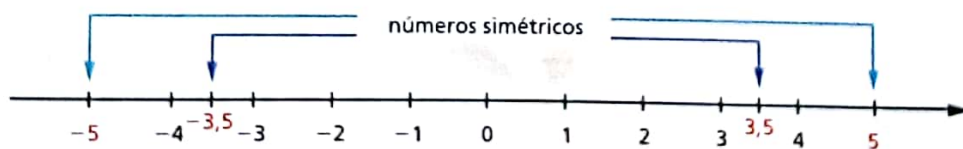
- Têm sinais contrários.
- Os pontos a que correspondem, na recta numérica, estão à mesma distância da origem.

Outros exemplos de números simétricos:

• $-3,5$ e $+3,5$

• $+5$ e -5

• o simétrico de zero é zero.



Exercícios resolvidos

1. Considera o centímetro como unidade de comprimento. Determina \overline{OA} , \overline{OB} , \overline{OC} , \overline{OD} , \overline{OE} e \overline{OF} ; e indica as abscissas dos pontos A, B, C, D, E e F



Resolução:

A \curvearrowright -3 ;

B \curvearrowright 4 ;

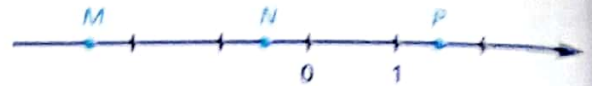
C \curvearrowright $-2,5$

D \curvearrowright $-1,2$;

E \curvearrowright $1,5$;

F \curvearrowright $4,5$

2. Entre que números inteiros relativos está compreendida a abscissa de cada um dos pontos M , N e P ?



Resolução:

- A abscissa de M está entre -3 e -2 .
- A abscissa de N está entre -1 e 0 .
- A abscissa de P está entre 1 e 2 .

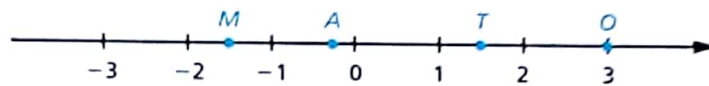
3. Completa as sequências. (Sugestão: utiliza um eixo e marca as abscissas indicadas.)

- a) $2, 0, -2, -4, \underline{\quad}, \underline{\quad}, \underline{\quad}$ b) $\underline{\quad}, 3, 0, -3, \underline{\quad}, \underline{\quad}, \underline{\quad}$

Resolução:

- a) $-6; -8; -10$ b) $6, 3, 0; -3, -6; -9; -12$

4. Considera a recta graduada e os pontos M , A , T e O :



Verdadeiro ou falso?

- a) A abscissa de M é $-\frac{3}{2}$.
- b) As abscissas dos pontos M e T são números simétricos.
- c) O ponto T dista da origem $-1,5$.
- d) $A \sim \frac{1}{4}$
- e) A distância entre os pontos M e T é $\frac{9}{2}$.
- f) Dois números simétricos têm o mesmo valor absoluto.

Verdadeiro
ou falso?



Resolução:

- a) V b) F c) F d) V e) F f) V

Ordenação de números racionais

Ordenar números relativos é fácil, representando-os num eixo.

- Qualquer número positivo é maior que zero.
- Qualquer número negativo é menor que zero.
- De dois números positivos é maior o que estiver mais distante do zero (ou seja, o que tiver maior valor absoluto).
- De dois números negativos é maior o que estiver mais próximo do zero (ou seja, o que tiver menor valor absoluto).
- De dois números de sinais contrários, o número negativo é sempre o menor.

Observa alguns exemplos.



Exercícios resolvidos

1. Colocar os números $-0,3$; 4 ; -2 ; 0 e $\frac{7}{2}$ por ordem crescente.

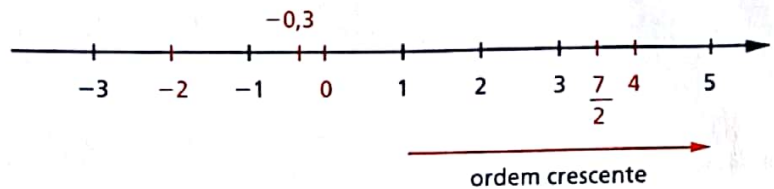
Resolução:

Represento os números num eixo e observo que:

- 2 está antes de $-0,3$, logo, $-2 < -0,3$
- $0,3$ está antes de 0 , logo, $-0,3 < 0$
- 0 está antes de $\frac{7}{2}$, logo, $0 < \frac{7}{2}$

• $\frac{7}{2}$ está antes de 4 , logo, $\frac{7}{2} < 4$

Então, $-2 < -0,3 < 0 < \frac{7}{2} < 4$



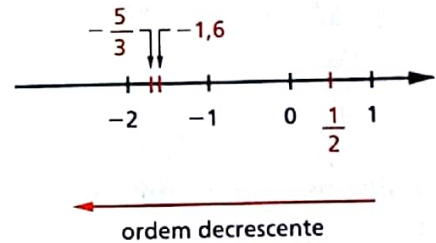
2. Colocar $-\frac{5}{3}$, $\frac{1}{2}$ e $-1,6$ por ordem decrescente.

Resolução:

$$-\frac{5}{3} = -1,666\dots$$

Representando os números num eixo, concluo que,

$$\frac{1}{2} > -1,6 > -\frac{5}{3}$$



Valores aproximados de números racionais

Temos que $\frac{17}{6} = 2,8(3)$ logo $2,8 < \frac{17}{6} < 2,9$.

Como $2,9 - 2,8 = 0,1$, então $2,8$ e $2,9$ são os valores aproximados de $\frac{17}{6}$ a menos de uma décima.

No dia a dia, se precisares de utilizar um valor aproximado deves ter em atenção o contexto da situação, escolhendo o valor aproximado mais adequado.

À décima ou a menos de $0,1$ significa inferior a $0,1$.



Exercícios resolvidos

1. Indica o valor aproximado de $-\frac{17}{8}$ à décima, por defeito e por excesso.

Resolução:

$$-\frac{17}{8} = -2,125$$

$$-2,2 < -\frac{17}{8} < -2,1$$

Valor aproximado de $-\frac{17}{8}$ por defeito a menos de $0,1$.

Valor aproximado de $-\frac{17}{8}$ por excesso a menos de $0,1$.

2. Considera os números -3 ; $+2$; $-\frac{1}{3}$; -4 ; $\frac{9}{4}$ e $-4,5$.

- Representa-os num eixo.
- Coloca os números dados por ordem crescente.
- Qual dos números dados tem maior valor absoluto?

Resolução:



b) $-4,5 < -4 < -3 < -\frac{1}{3} < +2 < \frac{9}{4}$ c) $-4,5$

3. Em cada caso, descobre todos os números inteiros relativos x que verificam as seguintes condições:

a) $-5,2 < x < -2,7$ b) $5,1 < x < 9,8$ c) $-5 < x < 2,9$

Resolução:

a) $\{-5, -4, -3\}$ b) $\{6, 7, 8, 9\}$ c) $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$

4. Indica os valores aproximados, por defeito e por excesso, com erro inferior a uma décima, de:

a) 142,19 b) $-9,35$ c) $\frac{7}{3}$ d) $-\frac{7}{3}$

Resolução:

a) 142,1; 142,2 b) $-9,4$; $-9,3$
 c) 2,3; 2,4 d) $-2,4$; $-2,3$

Adição de números racionais

Vamos interpretar as expressões:

- $(+5) + (+3) \rightarrow$ ganhei 5 e a seguir ganhei 3 \rightarrow então, ganhei 8, logo, $(+5) + (+3) = +8$
- $(+4) + (-3) \rightarrow$ ganhei 4 e a seguir perdi 3 \rightarrow então, ganhei 1, logo, $(+4) + (-3) = +1$
- $(-8) + (+5) \rightarrow$ perdi 8 e a seguir ganhei 5 \rightarrow então, perdi 3, logo, $(-8) + (+5) = -3$
- $(-5) + (-8) \rightarrow$ perdi 5 e a seguir perdi 8 \rightarrow então, perdi 13, logo, $(-5) + (-8) = -13$
- Para somar dois números racionais com o mesmo sinal:
 - Somam-se os valores absolutos das parcelas.
 - Mantém-se o sinal.

• $(+2) + (+5) = +7$

• $(-3) + (-7) = -10$

• $(-0,5) + (-4) = -4,5$



Exercícios resolvidos

1. Identifica as propriedades utilizadas em cada uma das igualdades:

a) $\left(-\frac{1}{3}\right) + 0 = \left(-\frac{1}{3}\right)$

b) $\left(-\frac{2}{5}\right) + 0 = 0 + \left(-\frac{2}{5}\right)$

c) $\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(+\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{5}{3}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{4}{3}\right)$

d) $\left(+\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right) = 0$

Resolução:

a) Elemento neutro da adição em \mathbb{Q}

b) Comutativa da adição em \mathbb{Q}

c) Associativa da adição em \mathbb{Q}

d) Elementos simétricos em \mathbb{Q}

2. Utiliza as propriedades da adição em \mathbb{Q} , de modo a facilitar a resolução das expressões:

a) $\left(-\frac{3}{4}\right) + (-1) + \left(+\frac{7}{4}\right)$

b) $(-0,5) + (+0,02) + \left(+\frac{1}{2}\right)$

Resolução:

$$\begin{aligned} \text{a) } \left(-\frac{3}{4}\right) + (-1) + \left(+\frac{7}{4}\right) &= \left[\left(-\frac{3}{4}\right) + (-1)\right] + \left(+\frac{7}{4}\right) = \\ &= \left[(-1) + \left(-\frac{3}{4}\right)\right] + \left(+\frac{7}{4}\right) = (-1) + \left[\left(-\frac{3}{4}\right) + \left(+\frac{7}{4}\right)\right] = \\ &= (-1) + \left(+\frac{4}{4}\right) = (-1) + (+1) = 0 \end{aligned}$$

Associativa, comutativa, associativa, elementos simétricos da adição em \mathbb{Q} .

$$\begin{aligned} \text{b) } (-0,5) + (0,02) + \left(+\frac{1}{2}\right) &= [(-0,5) + (+0,02)] + \left(+\frac{1}{2}\right) = \\ &= [(+0,02) + (-0,5)] + \left(+\frac{1}{2}\right) = (+0,02) + \left[(-0,5) + \left(+\frac{1}{2}\right)\right] = (+0,02) + 0 = 0,02 \end{aligned}$$

Associativa, comutativa, associativa, elemento neutro da adição em \mathbb{Q} .

Na adição sucessiva, para simplificar a escrita, suprimem-se os sinais de adição e todos os parêntesis, por exemplo:

• $(-4) + (-2) + (-1) + (+0,5) = -4 - 2 - 1 + 0,5$

• $\left(\frac{3}{5}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(+\frac{1}{5}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) = +\frac{3}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2}$

Subtracção de números racionais

Vamos calcular a diferença entre +6 e -2:

$$+6 - (-2) = x \quad \text{logo, } x + (-2) = +6, \text{ ou seja, } x = +8.$$

Esta diferença é o número que somado com -2 dá +6

Então, para efectuar $(+6) - (-2)$, vamos calcular a soma do aditivo com o simétrico do subtrativo:

$$+6 + (+2) = +8$$

↑
Simétrico de -2

$$\begin{array}{r} \text{Aditivo} \\ - \text{Subtrativo} \\ \hline \text{Diferença} \end{array}$$

Verificámos que calcular $+6 - (-2)$ é o mesmo que calcular $+6 + (+2)$, isto é:

Calcular a diferença entre dois números relativos é o mesmo que somar ao aditivo o simétrico do subtrativo.

Podes escolher outros pares de números relativos e confirmar a afirmação anterior.

Para subtrair dois números racionais relativos, adiciona-se ao aditivo o simétrico do subtrativo.

Exemplos:

$$-8 - (+3) = -8 + (-3) = -8 - 3 = -11$$



Exercícios resolvidos

Efectua as subtracções, como no exemplo dado:

$$\text{a) } \left(+\frac{3}{4}\right) - \left(-\frac{1}{4}\right) \quad \text{b) } \left(-2\frac{3}{5}\right) - \left(-\frac{1}{5}\right) \quad \text{c) } \left(-\frac{2}{3}\right) - (-2) \quad \text{d) } (+2) - \left(+\frac{3}{5}\right)$$

Resolução:

$$\text{a) } \left(+\frac{3}{4}\right) - \left(-\frac{1}{4}\right) = \left(+\frac{3}{4}\right) + \left(+\frac{1}{4}\right) = \left(+\frac{4}{4}\right) = 1$$

$$\text{b) } \left(-2\frac{3}{5}\right) - \left(-\frac{1}{5}\right) = \left(-2\frac{3}{5}\right) + \left(+\frac{1}{5}\right) = \left(-\frac{13}{5}\right) + \left(+\frac{1}{5}\right) = -\frac{12}{5}$$

$$\text{c) } \left(-\frac{2}{3}\right) - (-2) = \left(-\frac{2}{3}\right) + (+2) = \left(-\frac{2}{3}\right) + \left(+\frac{6}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

$$\text{d) } (+2) - \left(+\frac{3}{5}\right) = (+2) + \left(-\frac{3}{5}\right) = \left(+\frac{10}{5}\right) + \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{7}{5}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{c.a.} \\ 2\frac{3}{5} = \frac{(2 \times 5 + 3)}{5} = \frac{13}{5} \end{array} \right\}$$

$$\frac{2}{1,5} = \frac{6}{3}$$

$$\frac{2}{1,5} = \frac{10}{5}$$

Adição algébrica

- Dois sinais diferentes seguidos dão origem a um sinal $-$,
 - $\bullet +(-2) = -2$
 - $\bullet -(+0,5) = -0,5$
- Dois sinais $+$, ou dois sinais $-$, dão origem a um sinal $+$,
 - $\bullet +\left(+\frac{1}{3}\right) = +\frac{1}{3}$
 - $\bullet -\left(-\frac{3}{2}\right) = +\frac{3}{2}$

Regras dos sinais

$$\begin{aligned}
 +(-\underline{\quad}) &= -\underline{\quad} \\
 -(+\underline{\quad}) &= -\underline{\quad} \\
 ++\underline{\quad}) &= +\underline{\quad} \\
 --\underline{\quad}) &= +\underline{\quad}
 \end{aligned}$$

Expressões numéricas

- Numa expressão numérica que envolva somas algébricas podes **desembaraçar de parêntesis**.
- Suprimir os parêntesis precedidos do sinal $+$ e o sinal $+$ que os precede sem alterar os termos da soma algébrica que se encontram dentro dos parêntesis.
 - Suprimir os parêntesis precedidos do sinal $-$ e o sinal $-$ que os precede, substituindo cada termo da soma algébrica que se encontra dentro dos parêntesis pelo seu simétrico.

Vejam os:

$$+(-3 + 2) = -3 + 2$$

$$-(+9 - 7) = -9 + 7$$

$$-4 + (-7 + 10) = -4 + (+3) = -4 + 3 = -1$$

ou

$$\begin{aligned}
 -4 + (-7 + 10) &= -4 - 7 + 10 = \\
 &= -11 + 10 = -1
 \end{aligned}$$

- Efectuaram-se os cálculos dentro do parêntesis. Simplificou-se a escrita.

ou

- Suprimiram-se os parêntesis precedidos do sinal $+$ e o sinal $+$ que estava antes dos parêntesis, sem alterar os termos da soma algébrica que estava dentro dos parêntesis.

$$\begin{aligned}
 -4 - (-7 + 10) &= -4 - (+3) = \\
 &= -4 - 3 = -7
 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
 -4 - (-7 + 10) &= -4 + 7 - 10 = \\
 &= -14 + 7 = -7
 \end{aligned}$$

- Efectuaram-se os cálculos dentro dos parêntesis. Simplificou-se a escrita.

ou

- Suprimiram-se os parêntesis precedidos do sinal $-$ e o sinal $-$ que estava antes dos parêntesis, substituindo cada termo da soma algébrica que estava dentro dos parêntesis pelo seu simétrico.



Exercício resolvido

Efectua:

$$a) -\frac{3}{4} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right) - \left(\frac{5}{4} - \frac{7}{4}\right)$$

$$b) -\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) - \frac{1}{6}$$

Resolução:

$$a) -\frac{3}{4} + \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = \frac{-3 + 2 + 2}{4} = \frac{1}{4}$$

$$b) -\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = -\frac{3}{6} + \frac{4}{6} - \frac{1}{6} = \frac{-3 + 4 - 1}{6} = \frac{0}{6} = 0$$



29. Completa com os símbolos \in e \notin :

a) $0 \underline{\quad} \mathbb{Q}$

b) $-0,75 \underline{\quad} \mathbb{Z}^-$

c) $\frac{20}{2} \underline{\quad} \mathbb{Z}$

d) $-1,5 \underline{\quad} \mathbb{Q}$

e) $0 \underline{\quad} \mathbb{Z}$

f) $-\sqrt{2} \underline{\quad} \mathbb{Q}$

30. Verdadeiro ou falso?

a) $0 \notin \mathbb{Z}^+$

b) $-5 \in \mathbb{N}$

c) $-\sqrt{9} \in \mathbb{Z}^0$

d) $\frac{5}{2} \notin \mathbb{Z}$

e) $-\sqrt{2^3} \in \mathbb{Q}$

f) $0 \in \mathbb{Z}$

g) $0 \in \mathbb{Q}$

h) $1,3 \in \mathbb{Z}$

i) $1,(6) \in \mathbb{Z}$

31. Escreve uma fracção que represente:

a) $-0,5$

b) $-0,2$

c) $1,25$

32. Representa, num eixo, os pontos de abscissa:

a) $-\frac{2}{3}$

b) $+\frac{3}{2}$

c) $\frac{7}{3}$

d) $-\frac{5}{3}$

33. Completa:

a) O simétrico de -18 é $\underline{\quad}$.

b) $+0,6$ é o simétrico de $\underline{\quad}$.

c) O simétrico de zero é $\underline{\quad}$.

d) $-\frac{5}{8}$ é o simétrico de $\underline{\quad}$.

34. Seja $A = \{-3,2; \frac{1}{2}; -1,5; 8; 0; -0,5; -8\}$

Indica os elementos de A que obedecem a cada condição:

a) Pertencentes a \mathbb{Z}_0^- .

b) Pertencentes a \mathbb{Q} e não a \mathbb{Z} .

c) São números simétricos.

d) Têm módulo maior que um.

35. Indica:

a) Todos os números inteiros negativos situados entre $-4,5$ e $1,5$.

b) Quantos são os números inteiros relativos maiores que -3 e menores que 3 .

c) Um número racional relativo maior que -3 e menor que -2 .

36. Dá exemplo de um número:

a) Maior que $\frac{1}{4}$ mas menor que $\frac{1}{3}$.

b) Negativo e menor que -1 .

c) Inteiro negativo maior que $-\frac{5}{4}$.

d) Inteiro positivo maior que $\frac{5}{3}$ e menor que $\frac{7}{3}$.

37. Verdadeiro ou falso?

a) -7 é maior que o simétrico de 5 .

b) $-1,6$ é igual ao simétrico de $\frac{1}{6}$.

c) -9 é maior que o seu módulo.

d) O simétrico do simétrico de 3 é 3 .

38. a) Põe por ordem crescente os números racionais seguintes:

$$-1; 2,3; -\frac{1}{3}; 0; +2; -0,75$$

b) Põe por ordem decrescente os números racionais seguintes:

$$-1; +2,3; -\frac{1}{3}; 0; +2; -0,75$$

39. Representa os números racionais seguintes:

$-\frac{1}{2}, \frac{7}{3}, -\frac{1}{3}, 2, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{5}{2}$ pelas respectivas dízimas e, depois, ordena-as por ordem crescente.

40. Classifica cada uma das dízimas determinadas na questão anterior. Todo o número racional pode ser representado por uma dízima, que pode ser finita ou infinita periódica.

41. Identifica as propriedades utilizadas em cada uma das igualdades:

a) $(-\frac{1}{3}) + 0 = (-\frac{1}{3})$

b) $(-\frac{2}{5}) + 0 = 0 + (-\frac{2}{5})$

c) $(-\frac{1}{2}) + (+\frac{1}{3}) + (-\frac{5}{3}) = (-\frac{1}{2}) + (-\frac{4}{3})$

d) $(+\frac{2}{3}) + (-\frac{2}{3}) = 0$

42. Efectua:

a) $(+2) + (-\frac{5}{2}) = -\frac{1}{2}$

b) $(+0,7) + (-0,03) = 0,67$

c) $(-\frac{5}{3}) + (+\frac{2}{3}) = -1$

d) $(-\frac{1}{5}) + (+0,5) = \frac{3}{10}$

e) $(+\frac{3}{4}) - (+1\frac{2}{3}) = -\frac{11}{12}$

f) $(-\frac{1}{2}) - (-0,5) = 0$

g) $-(\frac{2}{3} + \frac{1}{6}) + \frac{1}{6} - (-\frac{2}{3} + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

h) $\frac{1}{5} - (-\frac{1}{2} + 2\frac{1}{5}) + (-\frac{2}{5} - 1) = -\frac{29}{10}$

i) $2\frac{1}{3} - (\frac{1}{5} + 3) + (-\frac{1}{3} + 2) = \frac{31}{30}$

j) $-2 + 3\frac{1}{2} - (-\frac{5}{2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{4}) = \frac{5}{4}$

k) $-2,1 - (-3 + 2,9) + 2 = 0$

l) $(1,7 - 1,2) + (1 - \frac{3}{2}) = 0$

Multiplicação de números racionais

- O produto de dois números positivos é um número positivo.

$$(+3) \times (+5) = +15 \quad 0,4 \times (+3) = 1,2 \quad \frac{1}{2} \times (+7) = \frac{7}{2} \quad 7 \times \left(+\frac{1}{7}\right) = +1$$

- O produto de dois números negativos é um número positivo.

$$-3 \times (-5) = +15 \quad -0,4 \times (-3) = 1,2 \quad -\frac{1}{2} \times (-7) = +\frac{7}{2} \quad -7 \times \left(-\frac{1}{7}\right) = +1$$

O produto de dois números com o mesmo sinal é um número positivo.

- O produto de dois números de sinais contrários é um número negativo.

$$+3 \times (-3) = -9 \quad -\frac{1}{2} \times (+2) = -1 \quad 2,5 \times (-2) = -5 \quad -\frac{3}{5} \times 10 = -6$$

O produto de dois números de sinais contrários é um número negativo.



Exercícios resolvidos

1. Determina o valor de cada um dos produtos:

a) $(-2) \times \left(-\frac{1}{3}\right)$ b) $\frac{2}{3} \times \left(-\frac{3}{4}\right)$ c) $\frac{2}{5} \times \left(-\frac{1}{4}\right)$ d) $-\frac{3}{4} \times 2$

Resolução:

a) $(-2) \times \left(-\frac{1}{3}\right) = +\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ b) $\frac{2}{3} \times \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{6}{12} = -\frac{1}{2}$

c) $\frac{2}{5} \times \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{2}{20} = -\frac{1}{10}$ d) $-\frac{3}{4} \times 2 = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$

Propriedades da multiplicação

Mantêm em \mathbb{Q} todas as propriedades da multiplicação que já conhecias.

Comutativa	• $a \times b = b \times a$, com $a, b \in \mathbb{Q}$
Associativa	• $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$, com $a, b, c \in \mathbb{Q}$
Elemento neutro	• $1 = 1 \times a = a$, com $a \in \mathbb{Q}$
Elemento absorvente	• $0 \times a = a \times 0 = 0$, com $a \in \mathbb{Q}$
Distributiva da multiplicação em relação à adição	• $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$, com $a, b, c \in \mathbb{Q}$
Distributiva da multiplicação em relação à subtração	• $a \times (b - c) = a \times b - a \times c$, com $a, b, c \in \mathbb{Q}$

UNIDADE 1

- Dois números cujo produto é um dizem-se inversos um do outro.

Repara que todo o número racional diferente de zero **tem inverso**.

Por exemplo, -3 é o inverso de $-\frac{1}{3}$ porque $-3 \times \left(-\frac{1}{3}\right) = 1$



Exercícios resolvidos

1. Determina o número designado por cada uma das expressões, aplicando a propriedade distributiva da multiplicação relativamente à adição algébrica. $-4 \times \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)$

Resolução:

$$-4 \times \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = -4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + (-4) \times \left(+\frac{1}{4}\right) = 2 - 1 = 1$$

2. Utilizando a propriedade distributiva da multiplicação relativamente à adição algébrica, põe em evidência o factor comum, em cada caso:

$$\frac{1}{2} \times 4 + \frac{1}{2} (-2) = \dots \times (4 - 2)$$

Resolução:

$$\frac{1}{2} \times 4 + \frac{1}{2} (-2) = \dots \times (4 - 2) \quad \frac{1}{2} \times (4 - 2)$$

Multiplicação sucessiva. Cálculo e propriedades

O valor de uma expressão com várias multiplicações pode obter-se multiplicando sucessivamente os factores pela ordem em que se encontram ou recorrendo às propriedades da multiplicação, facilitando os cálculos. Vejamos:

$$(-0,25) \times \left(-\frac{1}{3}\right) \times (+4) \times (-3) = \underbrace{(-0,25) \times (+4)}_{-1} \times \underbrace{\left(-\frac{1}{3}\right) \times (-3)}_{1} = -1 \times 1 = -1$$

Divisão de números racionais

- Vejamos:
- $+10 : (+2) = +5$
 - $+1,5 : (+5) = +0,3$
 - $-50 : (-5) = +10$
 - $-0,7 : (-10) = +0,07$

O quociente de dois números com o mesmo sinal é positivo.

- Vejamos:
- $-9 : (+3) = -3$
 - $-\frac{1}{2} : 3 = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = -\frac{1}{6}$
 - $+0,6 : (-2) = -0,3$
 - $-\frac{2}{5} : \frac{1}{4} = -\frac{2}{5} \times \frac{4}{1} = -\frac{8}{5}$

O quociente de dois números com sinais contrários é negativo.

Assim, as regras dos sinais da multiplicação mantêm-se na divisão.

O valor absoluto do quociente é o quociente dos valores absolutos do dividendo e do divisor.

O quociente de zero por um número diferente de zero é zero.

Numa divisão, o divisor é sempre diferente de zero.

Regras dos sinais

$$(+ \text{---}) : (- \text{---}) = - \text{---}$$

$$(- \text{---}) : (+ \text{---}) = - \text{---}$$

$$(- \text{---}) : (- \text{---}) = + \text{---}$$

$$(+ \text{---}) : (+ \text{---}) = + \text{---}$$



Exercícios resolvidos

Efectua as divisões:

a) $-8 : 4$

b) $-3 : (-2)$

c) $-0,1 : 0,01$

d) $-\frac{3}{2} : \frac{2}{3}$

e) $0,3^3 : (-0,01)^2$

f) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 : \left(\frac{2}{3}\right)^2$

Resolução:

a) -2

b) $\frac{3}{2}$

c) -10

d) $-\frac{9}{4}$

e) 270

f) $\frac{2}{3}$

Cálculo de expressões

No cálculo de uma expressão, deves:

- Observar a expressão atentamente.
- Respeitar as prioridades das operações.

Observa o cálculo de algumas expressões que envolvem as operações estudadas:

$\bullet -\frac{5}{3} + \frac{3}{7} \times \frac{1}{3} = -\frac{5}{3} + \frac{3}{21} = \frac{-35 + 3}{21} = -\frac{32}{21}$ <p style="text-align: center;">(7)</p>	A multiplicação tem prioridade sobre a adição.
$\bullet 8 : \left(-\frac{4}{1} + \frac{-1}{2}\right) = 8 : \left(\frac{-8}{2} + \frac{-1}{2}\right) = 8 : \left(-\frac{9}{2}\right) = \frac{-2}{9} \frac{16}{9}$	Efectuou-se primeiro o cálculo dentro do parêntesis.
$\bullet -3 \times \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{10}\right) : \left(\frac{-9}{10}\right) = -3 \times (0,4 - 0,1) : (-0,9) = -3 \times 0,3 : (-0,9) = -0,9 : (-0,9) = 1$	Neste caso, a substituição das fracções por numerais decimais facilita o cálculo.
$\bullet -0,1 : \left[\left(-2 + 3 \times \frac{1}{3}\right) - 4\right] = -0,1 : [(-2 + 1) - 4] = -0,1 : (-1 - 4) = -0,1 : (-5) = 0,02$	Começou-se por efectuar os cálculos dentro dos parêntesis curvos. Os parêntesis rectos passaram a curvos.
$\bullet 2x - 3y \text{ para } x = -1 \text{ e } y = -\frac{1}{3}$ $2 \times (-1) - 3 \times \left(-\frac{1}{3}\right) = -2 + 1 = -1$	Substituíram-se as variáveis pelo seu valor e efectuaram-se os calculos.

Potenciação

Um produto de factores iguais pode escrever-se como uma potência.

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \dots \times a}_{n \text{ factores}}, \quad a \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}$$

onde: n indica o número de vezes em que a base se repete

Vejam os:

$$\bullet 7^5 = 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$$

$$\bullet (-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2)$$

A potência de expoente um é igual à base.

$$a^1 = a, \quad a \in \mathbb{Q}$$

Vejam os:

$$\bullet 5^1 = 5$$

$$\bullet \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$$

O sinal do valor de uma potência depende do sinal da base e de o expoente ser par ou ímpar.

Vejam os:

$$\bullet \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\bullet \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = -\frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right) = +\frac{1}{9}$$

$$\bullet \left(-\frac{1}{3}\right)^3 = -\frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right) \times \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{27}$$

$$\bullet 2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$$



Exercícios resolvidos

1. Determina o número designado por cada uma das expressões:

a) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 : \left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)^2$

b) $-\frac{1}{5} + \frac{2}{5} \times (-3) + \frac{7}{5}$

c) $(-2)^3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 : \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)^2$

Resolução:

a) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 : \left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(-\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(-\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}\right)^2 = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

b) $-\frac{1}{5} + \frac{2}{5} \times (-3) + \frac{7}{5} = -\frac{1}{5} - \frac{6}{5} + \frac{7}{5} = \frac{-1-6+7}{5} = 0$

c) $(-2)^3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 : \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(-2 \times \frac{1}{4}\right)^3 : \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 : \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} =$
 $= \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$

2. Traduz por uma expressão numérica:

- a) A soma do quádruplo de -2 com $+\frac{1}{3}$. b) O dobro da soma de -1 com $-\frac{1}{2}$.
 c) A diferença entre o quadrado de -3 e o inverso de $+2$.

Resolução:

a) $4 \times (-2) + \left(+\frac{1}{3}\right)$ b) $2 \times \left[-1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\right]$ c) $(-3)^2 - \frac{1}{+2}$

Operações com potências

<p>Potências com a mesma base</p> $5^2 \times 5^3 = 5^{2+3} = 5^5$	<ul style="list-style-type: none"> Para multiplicar potências com a mesma base, mantém-se a base e adicionam-se os expoentes. $a^m \times a^n = a^{m+n}, \text{ com } a \in \mathbb{Q} \text{ e } m, n \in \mathbb{N}$
<p>Potências com o mesmo expoente</p> $7^3 \times 2^3 = (7 \times 2)^3 = 14^3$	<ul style="list-style-type: none"> Para multiplicar potências com o mesmo expoente, mantém-se o expoente e multiplicam-se as bases. $a^m \times b^m = (a \times b)^m, \text{ com } a, b \in \mathbb{Q} \text{ e } m \in \mathbb{N}$
<p>Potências com a mesma base</p> $\left(-\frac{1}{3}\right)^4 : \left(-\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)^{4-1} = \left(-\frac{1}{3}\right)^3$	<ul style="list-style-type: none"> Para dividir potências com a mesma base, mantém-se a base e subtraem-se os expoentes. $a^m \div a^n = a^{m-n}, \text{ com } a \in \mathbb{Q} \text{ e } m, n \in \mathbb{N}, m > n, a \neq 0$
<p>Potências com o mesmo expoente</p> $(-8)^3 : 4^3 = (-8 : 4)^3 = (-2)^3$	<ul style="list-style-type: none"> Para dividir potências com o mesmo expoente, mantém-se o expoente e dividem-se as bases. $a^m \div b^m = (a \div b)^m, \text{ com } a, b \in \mathbb{Q}, m \in \mathbb{N} \text{ e } b \neq 0$
<p>Potência de potência</p> $[(-0,7)^2]^3 = (-0,7)^{2 \times 3} = (-0,7)^6$	<ul style="list-style-type: none"> Para transformar uma potência de potência numa potência, mantém-se a base e multiplicam-se os expoentes. $(a^m)^n = a^{m \times n}, \text{ com } a \in \mathbb{Q} \text{ e } m, n \in \mathbb{N}$

Potência de expoente nulo

O quociente de um número por si mesmo é 1, mas também sabemos que o quociente de duas potências com a mesma base e o expoente é a diferença dos expoentes. Por exemplo:

• $4^3 \div 4^3 = 1$ ou $4^3 \div 4^3 = 4^{3-3} = 4^0$

Para que estes dois cálculos dêem o mesmo resultado teremos de considerar que: $4^0 = 1$.

Para qualquer número a , diferente de zero

$$a^n : a^n = a^{n-n} = a^0$$

$$a^0 = 1, a \in \mathbb{Q} \text{ e } a \neq 0$$

UNIDADE 1

Potências de expoente inteiro negativo

Pela definição de potência temos,

$$\bullet 3^2 \div 3^5 = \frac{3 \times 3}{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3} = \frac{1}{3 \times 3 \times 3} = \frac{1}{3^3}$$

Aplicando a propriedade da divisão da potência com a mesma base,

$$\bullet 3^2 \div 3^5 = 3^{2-5} = 3^{-3}$$

Para que estes dois cálculos dêem o mesmo resultado teremos de considerar que:

$$\frac{1}{3^3} = 3^{-3}$$

Uma potência de expoente inteiro negativo (diferente de zero) é igual ao inverso da potência com a mesma base e expoente simétrico.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad a \in \mathbb{Q} \text{ e } a \neq 0, n \in \mathbb{N}$$

Não te esqueças que $\frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$, então podemos definir potência de expoente inteiro negativo.

Uma potência de expoente inteiro negativo (diferente de zero) é igual a potência da base inversa e expoente simétrico.

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n, \quad a \in \mathbb{Q} \text{ e } a \neq 0, n \in \mathbb{N}$$

Operações com potência de expoente inteiro

- Para efectuar cálculos com **potências de expoente inteiro** iremos manter as propriedades definidas para os expoentes naturais para multiplicar e dividir potências com a mesma base ou mesmo expoente e potência de potência.
- Se as potências a **multiplicar ou dividir não têm a mesma base ou expoente**, não há regras. Devemos calcular o valor de cada potência de acordo com a definição.
- Para a **adição e subtracção de potências**, também não há regras, calcula-se o valor de cada potência e em seguida adiciona-se ou subtrai-se.



Exemplos

1. $2^0 = 1$

2. $\left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$

3. $\left(-\frac{4}{7}\right)^0 = 1$

4. $(-5)^{-2} = \frac{1}{(-5)^2} = \frac{1}{25}$

5. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16}$

6. $\left(-\frac{1}{5}\right)^{-3} = (-5)^3 = -125$



Exercícios resolvidos

1. Calcule:

a) $\frac{3^{-4} \cdot 4^{-4}}{[(12)^{-3}]^2}$

b) $\left(\frac{1}{5}\right)^{25} \div 5^{-23}$

c) $\frac{(0,25)^{-9} \cdot (0,25)^{-8}}{4^{-7}}$

Resolução:

a) $\frac{3^{-4} \cdot 4^{-4}}{[(12)^{-3}]^2} = \frac{12^{-4}}{(12)^{-6}} = 12^2 = 144$ b) $\left(\frac{1}{5}\right)^{25} \div 5^{-23} = \left(\frac{1}{5}\right)^{25} \div \left(\frac{1}{5}\right)^{23} = \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}$

c) $\frac{(0,25)^{-9} \cdot (0,25)^{-8}}{4^{17}} = \frac{(0,25)^{-17}}{4^{17}} = \frac{(0,25)^{-17}}{4^{17}} = \frac{1}{(0,25)^{17} \cdot 4^{17}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{4} \times 4\right)^{17}} = 1$

1. Escreva sob a forma de potência:

a) $6^{-30} \cdot 6^5$

b) $2^5 \cdot 3^5$

c) $\frac{14^{10}}{2^{10}}$

d) $\frac{7^4}{7^2}$

e) $\frac{(-3)^{15}}{(-3)^8}$

f) $(-4)^3 \times (-5)^3$

g) $7^3 \div 7^{-8}$

h) $(2^3)^{-4}$

Resolução:

a) $6^{-30} \cdot 6^5 = 6^{-25}$

b) $2^5 \cdot 3^5 = 6^5$

c) $\frac{14^{10}}{2^{10}} = 7^{10}$

d) $\frac{7^4}{7^2} = 7^2$

e) $\frac{(-3)^{15}}{(-3)^8} = (-3)^7$

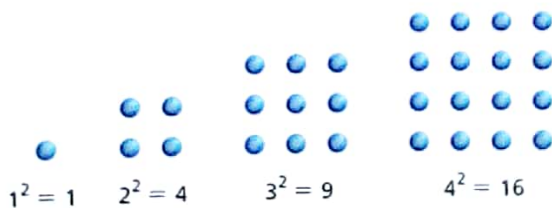
f) $(-4)^3 \times (-5)^3 = 20^3$

g) $7^3 \div 7^{-8} = 7^{11}$

h) $(2^3)^{-4} = 2^{-12}$

Quadrados perfeitos. Raiz quadrada

Observe a seguinte sequência onde os seus termos são quadrados de números naturais:



Quadrado perfeito é um número que é quadrado de um número natural.

Os números 1, 4, 9 e 16 são quadrados perfeitos porque $1 = 1^2$, $4 = 2^2$, $9 = 3^2$ e $16 = 4^2$.

Se escreveres, por exemplo, os quadrados dos números naturais até 100, verificas que os quadrados perfeitos terminam sempre em 0, 1, 4, 5, 6 ou 9.

Será 207 um quadrado perfeito?

Como $14^2 = 196$ e $15^2 = 225$, então não existe um número inteiro cujo quadrado seja 207, logo, 207 não é quadrado perfeito.



Exercício resolvido

O pátio quadrado da Maria tem 36 m^2 de área. Que comprimento tem o lado do pátio?

$$A = 36 \text{ m}^2$$

$$l = ?$$

Resolução:

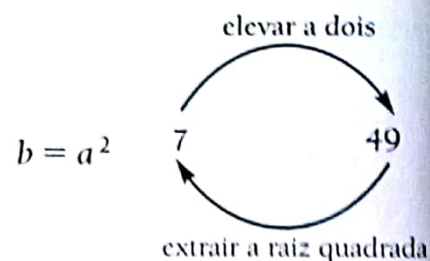
A medida do lado do pátio é o número cujo quadrado é 36, isto é, 6.

O pátio tem 6 m de lado visto que $36 = 6^2$. Diz-se que 6 é **raiz quadrada** de 36 e escreve-se $6 = \sqrt{36}$.

Quando um número b é **quadrado** de um número a :

diz-se que a é **raiz quadrada** de b .

Exemplo: $\sqrt{49} = 7$ porque $7^2 = 49$



A **raiz quadrada** permite, por exemplo, determinar a medida do lado de um quadrado conhecida a área.



Exercícios resolvidos

Existe um pátio quadrado com 106 m^2 de área. Que comprimento terá o lado do pátio?

Resolução:

Já sabes que a medida do lado, l , do pátio é tal que $l^2 = 106$ ou seja $l = \sqrt{106}$.

Utilizando a calculadora, vem: $\sqrt{106} = 10,29563014$

Pelo que teremos de determinar valores aproximados para a medida do lado. Com erro inferior a uma unidade:

Valor aproximado por defeito a menos de uma unidade: $10 < \sqrt{106} < 11$ Valor aproximado por excesso a menos de uma unidade.

Se queremos uma aproximação a menos de uma décima:

Valor aproximado por defeito a menos de uma décima: $10,2 < \sqrt{106} < 10,3$ Valor aproximado por excesso a menos de uma décima.

Assim, 10,2 m e 10,3 m são os valores aproximados a menos de uma décima do lado do pátio.

Potências de base dez

- Potências de base 10:

Expoentes positivos	$10^0 = 1$	Expoentes negativos
$10^1 = 10$		$10^{-1} = \frac{1}{10^1} = \frac{1}{10} = 0,1$
$10^2 = 100$		$10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0,01$
$10^3 = 1000$		$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0,001$
$10^4 = 10\ 000$		$10^{-4} = \frac{1}{10^4} = \frac{1}{10\ 000} = 0,0001$
$10^5 = 100\ 000$		

↓	↓
$10^n = 10 \dots 0$ n zeros	$10^{-n} = \frac{1}{10^n} = \frac{1}{10 \dots 0} = 0,0 \dots 01$ n zeros n zeros

Notação científica

- Representar um número em notação científica é escrevê-lo sob a forma de um produto de um número com um só algarismo antes da vírgula (diferente de zero) por uma potência de base dez, isto é:

$$a \times 10^p \quad \text{com } 1 \leq a < 10, p \in \mathbb{Z}$$

A escrita em notação científica permite facilmente comparar números.

- Para efectuar **multiplicações** e **divisões** de números na forma $a \times 10^p$, agrupa-se as potências de base dez, agrupa-se os outros números e efectua-se o cálculo.
- Para efectuar **adições** e **subtracções** de números na forma $a \times 10^p$, escreve-se cada termo com a mesma potência de base dez e factoriza-se a expressão, pondo-se em evidência a potência de base dez comum, e calcula-se o que fica dentro do parêntesis.

Vejam os:

- $234,75 = \underbrace{2,3475}_{\text{em notação científica}} \times 10^2$ com $a = 2,3475$ $p = 2$

Deslocou-se a vírgula duas casas para a esquerda, o que equivale a dividir por 10^2 ; para compensar, multiplicou-se por 10^2 .

Ordem de grandeza deste número: 2×10^2

- $0,00567 = \underbrace{5,67}_{\text{em notação científica}} \times 10^{-3}$ com $a = 5,67$ $p = -3$

Deslocou-se a vírgula três casas para a direita, o que equivale a multiplicar por 10^3 ; para compensar, dividiu-se por 10^3 , isto é, multiplicou-se por 10^{-3} .



Exercício resolvido

1. Indica a ordem de grandeza de $0,375 \times 10^6$ e de 524×10^{-5}

Resolução:

$$0,375 \times 10^6 = 3,75 \times 10^5 \approx 4 \times 10^5$$

$$524 \times 10^{-5} = 5,24 \times 10^{-3} \approx 5 \times 10^{-3}$$

Escreveu-se em notação científica e arredondou-se.

2. Indica que número representa cada uma das seguintes potências de base 10:

- a) 10^3 b) 10^4 c) 10^6 d) 10^9 e) 10^{12} f) 10^{24}

Resolução:

a) $10^3 = 1\ 000$ (um milhar)

b) $10^4 = 10\ 000$ (dez milhares)

c) $10^6 = 1\ 000\ 000$ (um milhão)

d) $10^9 = 1\ 000\ 000\ 000$ (um milhar de milhões)

e) $10^{12} = 1\ 000\ 000\ 000\ 000$ (um bilião, ou seja, um milhão de milhões)

f) $10^{24} = 1\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000$ (um trilião, ou seja, um bilião de biliões)

3. Representa, em notação científica, os seguintes números:

a) 83 742

b) 3 745,2

c) 0,0178

Resolução:

a) $8,3742 \times 10^4$

b) $3\ 745,2 = 3,7452 \times 10^3$

c) $0,0178 = 1,78 \times 10^{-2}$

4. Escreve de outra forma os números aqui representados em notação científica:

Resolução:

a) 1 270

b) 231 000

c) 9 090 000

d) 50 010



43. Passa para o teu caderno e completa por forma a obteres afirmações verdadeiras:

- a) $-\frac{1}{2} \times \dots = -\frac{1}{2}$ b) $\frac{2}{3} \times \left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{2}{5} \times \dots$ c) O inverso de $\frac{2}{3}$ é
- d) $-\frac{1}{5}$ é o inverso de
- e) $-2 \times \left(\dots - \frac{1}{3}\right) = -1 + \dots$ f) $\frac{1}{2} \times (-3) \times \left(-\frac{1}{3}\right) = \dots \times 1$
- g) $\dots \times \left(-2 + \frac{1}{2}\right) = -8 + 2$ h) $-\frac{2}{5} \times \dots = 0$

44. Determina o número designado por cada uma das expressões, aplicando a propriedade distributiva da multiplicação relativamente à adição algébrica.

- a) $\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) \times 10$ b) $-0,2 \times (-20 + 1,5)$

45. Utilizando a propriedade distributiva da multiplicação relativamente à adição algébrica, põe em evidência o factor comum, em cada caso:

- a) $-2 \times \left(-\frac{1}{3}\right) - 2 \times \frac{1}{5} =$ b) $-1 \times \frac{3}{2} + 1 \times \frac{3}{2}$

46. Determina, na sua forma mais simplificada, o número racional designado por cada uma das expressões:

- a) $-\frac{2}{3} \times (-2) \times \frac{3}{4}$ b) $\frac{3}{5} \times |-10 \times (-3)|$
- c) $-3 \times \frac{1}{6} \times (-2) \times \left(-\frac{1}{5}\right)$ d) $\frac{7}{10} \times \left(-\frac{1}{14}\right) \times 7 \times (-20)$

47. Determina o número designado por cada uma das potências:

- a) $\left(\frac{3}{5}\right)^2$ b) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2$ c) $-\frac{2^2}{3}$ d) $\frac{-2^3}{-3^2}$
- e) $\left(-\frac{3}{4}\right)^4$ f) $\left(-\frac{1}{3}\right)^2$ g) -1^{16} h) 0^8
- i) $\left(1\frac{1}{2}\right)^3$ j) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{3^2}$ k) $(-0,3)^3$ l) $(-0,1)^2$

48. Efectua:

- a) $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^3$ b) $[(-3)^2]^3$ c) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$

49. Efectua as divisões:

- a) $6 : (-2)$ b) $5 : (-3)$ c) $\frac{3}{2} : \frac{2}{3}$
- d) $\frac{2}{5} : (-3)$ e) $\frac{5}{3} : (-2)$ f) $-\frac{3}{8} : \frac{1}{4}$
- g) $(-0,2)^2 : \frac{1}{5^2}$ h) $(2)^{-5} : \left(\frac{1}{2}\right)^3$ i) $\left(-\frac{3}{5}\right)^9 : \left(-\frac{3}{5}\right)^7$

50. Determina o número designado por cada uma das expressões:

a) $\left(2\frac{1}{3}\right)^5 : \left(\frac{7}{3}\right)^3 - \left(\frac{7}{3}\right)^2$

b) $(-1)^{35} \times \left(-2 - \frac{2^2}{6} \times 3\right)$

c) $\left(2 - \frac{2}{3}\right)^2 \times \left(1 + \frac{1}{3}\right) : \frac{2^2}{3}$

d) $[(-1)^3]^7 - 4 : \left(-\frac{2}{3}\right)$

e) $6 + (-2)^4 : (-2) \times 0,1^3$

g) $\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^2 : \left(\frac{5}{4}\right)^2 \times \left(\frac{5}{3} : \frac{6}{5}\right)^2}{\left[\left(\frac{5}{6}\right)^2\right]^3}$

f) $(2)^{-1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 : 2^3 + 2^2$

i) $\frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{-17} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{-17} \div (0,3)^{-15}}{[(-1)^{-3}]^2 - (0,3)^{-2}}$

h) $\frac{\left(-1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right)^{-19}}{\left(-\frac{5}{6}\right)^{-18}}$

j) $\frac{3^{-7} \div (2^{-7} \times 2^{-7})}{2^0 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^7} + 3^{-1} - (-1)^{-4}$

51. Representa cada um dos seguintes números na forma de uma potência de expoente positivo.

a) 2^{-3}

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$

c) $\left(\frac{1}{4} \times 6\right)^{-1}$

d) 21^0

e) $(0,25)^{-3}$

52. Traduz por uma expressão numérica:

a) O quadrado do excesso de -5 sobre $+\frac{2}{5}$.

b) O inverso do quadrado da soma de $+4$ com -3 .

c) A soma dos quadrados de -2 e $+\frac{1}{4}$.

d) A diferença entre o simétrico de $+\frac{1}{3}$ e o inverso de $-\frac{1}{2}$.

53. Escreve em numeração científica:

a) 72,215

b) 145,002

c) 10 025,04

d) 3 000

e) 250

f) 0,0002

g) $16,25 \times 10^{-4}$

h) $0,002 \times 10^2$

i) $234,56 \times 10^3$

54. Representa os seguintes números na forma de potência de 10:

a) 100 000

b) 0,0001

c) 10

d) 1

e) 0,1

f) 10 000 000

55. Efectua as operações indicadas e apresenta o resultado na forma científica:

a) $(3 \times 10^5) \times (0,2 \times 10^4)$

b) $(3,3 \times 10^3) \div (1,1 \times 10^{-2})$

c) $(1,7 \times 10^5) + (6,3 \times 10^4)$

d) $(2,25 \times 10^{-2}) - (5,1 \times 10^{-4})$

Exercícios propostos



1. Representa por um número relativo cada uma das seguintes situações:

- a) A altura de um papagaio de papel que está 65 m acima do nível da água do mar.
- b) A posição de um mergulhador que está 180 m abaixo do nível médio da água do mar.
- c) A temperatura de ebulição do álcool, que é 78 °C.
- d) A temperatura no Monte Binga, que está dois graus abaixo de zero.
- e) A temperatura em Lichinga, quando está 20 °C acima de zero.
- f) Um lucro de 1 000 meticaís.
- g) Um prejuízo de 5 000 meticaís.

2. Verdadeiro ou falso?

- a) $|-5| = 5$
- b) $|-5| > 4$
- c) $|+7| = -7$
- d) $|7| > -7$
- e) $|-0,4| = \frac{2}{5}$
- f) $|-6| = 6$
- g) $|\frac{7}{5}| = \frac{7}{5}$
- h) $|-1,2| > -1,2$

3. Calcula:

- a) $(2^2 \div 3)^{-2} \div \left(1 + \frac{1}{3}\right)^{-1}$
- b) $\left(\frac{6^{-5}}{6^{-2}}\right)^{-1} \times 36^3$
- c) $2^{-2} - \frac{2^{-1}}{2} + 2^0$
- d) $\left(\frac{1}{5}\right)^{19} \times (5)^{20} \div 5^{-1}$
- e) $7^{-1} \times 7 - 7^0 + (-2,5)^0$
- f) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} \div \left(\frac{1}{3}\right)^4$
- g) $\frac{(0,5)^{-7} \times (0,5)^{-8}}{2^{15}}$
- h) $\left(1 - \frac{1}{2}\right)^3 \times 4^3 - \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{12} \div \left(\frac{1}{3}\right)^{14}$

4. Indica quais das seguintes expressões representam o número $\frac{3}{5}$:

- a) $\left(\frac{5}{3}\right)^1$
- b) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-1} \times (2 + 5^0)$
- c) $\left(\frac{2}{5}\right)^2 - \frac{3}{5}$
- d) $\left(\frac{3}{5}\right)^8 \div \left(\frac{3}{5}\right)^7$
- e) $\left[\left(\frac{1}{5}\right)^2\right]^3 \div \left(\frac{3}{5}\right)^6 \times 5$

5. Representa em numeração científica:

- a) 0,25
- b) $0,3 \times 0,008$
- c) $(4 \times 10^{-3}) \div (2 \times 10^{-4})$
- d) $54\,321 \times 10^{-2}$
- e) $\left(\frac{1}{8}\right)^2 \times 10^{-3}$
- f) 1 254

1.ª Parte

Indica a resposta correcta: A, B, C ou D.

1. O número $-\frac{6}{4}$ é elemento de:

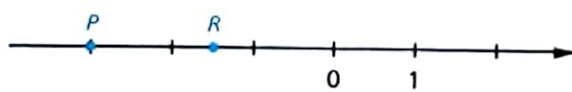
A. \mathbb{Z}^- B. \mathbb{N} C. \mathbb{Q}^- D. \mathbb{Q}^+
2. Os números inteiros relativos, n , tais que $-2,3 < n < 0,9$, são:

A. $-2, -1, 0, 1$ B. $-3, -2, -1, 0$ C. $-2, -1, 0, 1$ D. $-2, -1, 0$
3. O simétrico do simétrico de $-\frac{3}{2}$ é:

A. $-3,2$ B. $-\frac{3}{2}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $3,2$
4. O número $-5,23$ é menor que:

A. $-5,23$ B. $-5,2$ C. -6 D. $-5,3$
5. A expressão $|0| + |-5| + |0,5| + |-1|$ é igual a:

A. $-6,5$ B. $0,5$ C. $-5,5$ D. $6,5$
6. Num dia, a temperatura foi 4°C , e, durante a noite, a temperatura desceu 7°C . A temperatura à noite desceu até:

A. 3°C B. 7°C C. -7°C D. -3°C
7. No eixo , as abcissas dos pontos P e R são:

A. $P \curvearrowright -2$ B. $P \curvearrowright 2$ C. $P \curvearrowright -3$ D. $P \curvearrowright -3$
 $R \curvearrowright -4$ $R \curvearrowright 4$ $R \curvearrowright 1,5$ $R \curvearrowright -1,5$
8. A expressão $1 - \left(-\frac{3}{2} - 1\right)$ representa:

A. $-1,5$ B. -1 C. $3,5$ D. $\frac{5}{2}$
9. A expressão $-2 + 4 : (-2) \times (-1)^2$ representa:

A. -4 B. 2 C. 1 D. 0
10. O valor de $4x^2 \times \frac{1}{2}$ para $x = -1$ é:

A. $4,5$ B. $-3,5$ C. $3,5$ D. $-4,5$



2.ª Parte

1. O matemático grego Tales de Mileto morreu em 547 a.C. com 77 anos de idade. Em que ano nasceu Tales?

2. Observa o eixo:

Qual pode ser a abcissa de um ponto B que dista 7 unidades do ponto A?

3. Desembaraça de parêntesis e calcula:

a) $-\left(-\frac{1}{3}\right) - \left(+\frac{3}{2}\right) - \left(-\frac{1}{6}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)$ b) $-3,5 - \left(-\frac{1}{2} + 0,2 - \frac{1}{5}\right) + (-2 - 1)$

4. Calcula o valor de $a - 5b - 3ab$ para $a = -1$ e $b = -0,1$.

5. Sendo o produto de x por y igual a -2 , determina o valor de $20 \times x \times (-5) \times y$. Indica as propriedades da multiplicação que utilizaste para efectuar o cálculo.

6. Calcula:

a) $\frac{5}{3} - \frac{1}{2} : \left(-\frac{7}{12} + \frac{1}{4}\right)$ b) $\left(\frac{3}{4} - \frac{5}{3}\right)^2 : \left(-\frac{3^3 - 2^4}{12}\right)$

7. Completa com as operações aritméticas, de modo que a igualdade seja verdadeira.

$$-8 \text{ ___ } (+10) \text{ ___ } (-1,2) \text{ ___ } (+2) = -4$$

8. Calcula o valor em horas, aproximado às centésimas por excesso, de um intervalo de tempo de 55 minutos.

9. Observa a tabela. Será y directamente proporcional a x? Justifica.

x	-1	-2,5	-3	2	1
y	-4	-10	-12	-8	-4

10. O Tiago, o Francisco e o António são irmãos. Cada um deles utilizou um dos três elevadores parados no mesmo andar de um hotel.

O primeiro subiu 5 andares, o segundo desceu 2 andares e o António, que subiu 9 andares, chegou ao 8.º andar.

a) De que andar partiram os três irmãos?

b) Quantos andares têm de subir o Tiago e o Francisco para se encontrarem com o António?





OBJECTIVOS

O aluno deve ser capaz de:

- Identificar uma equação linear.
- Reconhecer equações equivalentes.
- Aplicar princípios de equivalência na resolução de equações simples.
- Traduzir na linguagem algébrica situações dadas na linguagem comum.
- Interpretar na linguagem comum situações dadas na linguagem algébrica.
- Interpretar o enunciado de um problema.
- Traduzir um problema por meio de uma equação linear.
- Resolver problemas concretos por meio de equações lineares, compreendendo os procedimentos envolvidos.
- Analisar a solução de uma equação no contexto do problema.

by-igor

CONTEÚDOS

Equação linear

- Revisão da noção de variável
- Revisão do conceito de equação, termos de uma equação e termos semelhantes
- Equação linear
- Conceito de solução e conjunto solução de uma equação
- Equações equivalentes
- Princípios de equivalência de duas ou mais equações
- Resolução de equações lineares do tipo $ax = b$, $ax - b = c$, $ax + b = cx + d$ (sendo a , b e c racionais e a e c diferentes de zero)
- Resolução de problemas concretos da vida conducentes a uma equação linear
- Equações literais

by-igor

Noção de equação

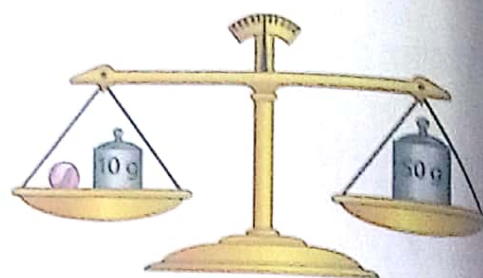
Soluções de uma equação

Equação: é uma igualdade em que figura, pelo menos, uma variável.

Na equação $x + 10 = 50$, a variável x representa um número desconhecido – é a incógnita.

Raízes, ou soluções, de uma equação são os valores da incógnita que transformam a equação numa igualdade verdadeira.

Ao conjunto das raízes de uma equação chama-se conjunto-solução.



$$x + 10 = 50$$

Os membros e os termos de uma equação

Termos semelhantes

Numa equação, o sinal = separa os dois membros:

$$\underbrace{-2x + 3}_{1.º \text{ membro}} = \underbrace{x - 5x + 5}_{2.º \text{ membro}}$$

À esquerda do sinal = temos o primeiro membro e à direita do sinal = temos o segundo membro.

O primeiro membro tem duas parcelas, isto é, dois termos, e o segundo membro tem três parcelas, isto é, três termos.

Aos termos que não contêm a incógnita chamam-se termos independentes.

Observa outra equação:

$$5y + 2y = 700$$

Nesta equação, os termos $5y$ e $2y$ têm igual a parte com variável. Dizem-se termos com parte literal igual, isto é, termos semelhantes.

Colocando em evidência o factor comum, y , podes reduzir os termos semelhantes desta equação. A equação $(5 + 2)y = 700$ é equivalente a $7y = 700$.

Quando num membro existem termos semelhantes, podemos reduzir esses termos recorrendo à propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.



Exercícios resolvidos

1. Selecciona as alíneas em que se apresentam equações:

a) $c + 5 = 2c + 3$

b) $3x - 7 > 12$

c) $2a - \frac{a}{3} = a + 2$

Resolução:

a) É uma equação.

b) Não é equação, pois o sinal não é de igual. Neste caso chama-se inequação.

c) É uma equação.

2. Na equação $3x - 5 = 3 - x$, indica:

a) O primeiro membro.

b) Quantos termos tem o 2.º membro.

c) Os termos que constituem o 1.º membro.

d) Se 2 é, ou não, a sua solução.

Resolução:

a) O primeiro membro é $3x - 5$.

b) O segundo membro tem dois termos, 3 e $-x$.

c) Os termos que constituem o 1.º membro são $3x$ e -5 .

d) Para ver se 2 é solução da equação $3x - 5 = 3 - x$ há que substituir x por 2 e verificar se se obtém uma igualdade:

$$3 \times 2 - 5 = 3 - 2$$

$$6 - 5 = 3 - 2$$

$$1 = 1$$

Sim, de facto 2 é solução da equação dada.

3. Selecciona, de entre os elementos do conjunto $A = \left\{-5, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, 4\right\}$, as soluções das equações seguintes:

a) $\frac{x}{2} - x = x - 6$

b) $5 - a = 2a + 20$

Resolução:

Há que substituir em cada equação a incógnita por cada um dos elementos do conjunto.

$$a) \frac{x}{2} - x = x - 6 ; x = -5 \Leftrightarrow \frac{-5}{2} - (-5) = -5 - 6 \Leftrightarrow -\frac{5}{2} + 5 = -11 \text{ Falso}$$

$$x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{-\frac{1}{2}}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} - 6 \Leftrightarrow -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = -\frac{13}{2} \text{ Falso}$$

$$x = 0 \Leftrightarrow \frac{0}{2} - 0 = 0 - 6 \Leftrightarrow 0 - 0 = -6 \text{ Falso}$$

$$x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 6 \Leftrightarrow \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{11}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} = -\frac{11}{2} \text{ Falso}$$

$$x = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} - 1 = 1 - 6 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} = -5 \text{ Falso}$$

$$x = 4 \Leftrightarrow \frac{4}{2} - 4 = 4 - 6 \Leftrightarrow 2 - 4 = -2 \Leftrightarrow -2 = -2 \text{ Verdade.}$$

Então 4 é solução desta equação.

b) $5 - a = 2a + 20$

$$a = -5 \rightarrow 5 - (-5) = 2(-5) + 20 \rightarrow 10 = -10 + 20 \rightarrow 10 = 10 \text{ Verdade.}$$

Então 5 é solução desta equação. Como uma equação do 1.º grau com uma incógnita só pode ter uma solução, não é preciso experimentar as restantes que, de certeza, não servem. Como exercício podes tentar verificar os restantes elementos do conjunto A.

Equações equivalentes

Em algumas equações és capaz de descobrir mentalmente as soluções.

Considera as seguintes equações:

$$a + 5 = 6 \text{ e } 4b = 4$$

Repara que:

- 1 é solução de $a + 5 = 6$ porque $1 + 5 = 6$ é uma igualdade verdadeira.
- 1 é solução de $4b = 4$ porque $4 \times 1 = 4$ é uma igualdade verdadeira.

Temos que 1 é solução das duas equações e, como não admitem outras soluções, podemos afirmar que $a + 5 = 6$ e $4b = 4$ têm o mesmo conjunto solução, que é $\{1\}$.

Como $a + 5 = 6$ e $4b = 4$ têm o mesmo conjunto solução, dizem-se equações equivalentes.

Equações que têm o mesmo conjunto solução dizem-se equivalentes.



Exercícios resolvidos

1. Serão as equações $-2x = 0$ e $x + 2 = 4$ equivalentes?

Resolução:

0 é solução de $-2x = 0$ porque $-2 \times 0 = 0$ é uma igualdade verdadeira.

2 é solução de $x + 2 = 4$ porque $2 + 2 = 4$ é uma igualdade verdadeira.

Estas duas equações não têm o mesmo conjunto solução, por isso, não são equivalentes.

2. Dadas as equações: $x + 3 = 7$ e $2x = 8$

a) Mostra que 4 é solução das equações dadas, sem as resolveres.

b) Indica, justificando, se é verdadeira ou falsa a seguinte afirmação: «As equações dadas são equivalentes.»

Resolução:

a) Basta substituir a incógnita pelos valores propostos:

$$4 + 3 = 7 \Leftrightarrow 7 = 7$$

$$2 \times 4 = 8 \Leftrightarrow 8 = 8$$

b) É verdadeira, pois as duas equações têm o mesmo conjunto-solução.

Exercícios de consolidação



1. Observa as seguintes expressões e identifica as que são equações. Justifica a tua escolha.

$x = 3$

$x + 5 < 2$

$6a - 2a = 4$

$2(x + 3)$

$3 + 2 = 5$

$x + 2y = 3$

$x^2 = 3$

$|x| = 25$

$2x + 5 + 3x$

2. Para cada uma das seguintes equações, escolhe o valor de x (à direita) que é raiz, ou solução, da equação.

a) $2x = 0$

$x = 2$

$x = -2$

$x = 0$

b) $2 - x = -2$

$x = -4$

$x = 4$

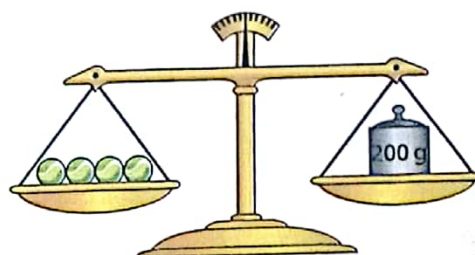
$x = 0$

c) $\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}$

$x = -1$

$x = 0$

3. Na figura vês os dois pratos de uma balança em equilíbrio, com quatro berlindes iguais num prato e uma massa de 200 g no outro prato.



a) Designando por y a massa em gramas de cada berlinde, escreve a equação que traduz a situação de equilíbrio da balança.

b) Mostra que a massa de cada berlinde é 50 g.

4. Completa o quadro:

Equação	Incógnita	1.º membro	2.º membro	Termos do 1.º membro	Termos do 2.º membro
$-2a - 3 = a + 1$					
$-5y = 0$					
$-\frac{3}{2} + t = \frac{t}{2} + 3$					
$1 + 9c + 3 = -6 + c$					
				$3x; -1$	$5x; -\frac{1}{2}$

5. Quando é que numa equação dois termos se dizem semelhantes?

Na equação $\frac{1}{3}x + 7 = 2x$, indica os termos semelhantes.

6. Reduzindo os termos semelhantes, simplifica cada uma das seguintes expressões:

a) $x + 7x$

b) $-a + 8a$

c) $2 + \frac{1}{2}x - x$

d) $-x + 4 - \frac{3}{2}x$

7. São dadas as equações: $-\frac{1}{2}x = \frac{25}{100}$ e $-\frac{x}{2} - 1 = -x$

a) Verifica, sem resolveres a equação, se $-\frac{1}{2}$ é raiz, ou solução, de cada uma das equações.

b) As equações dadas são equivalentes? Justifica.

Regras para a resolução de equações

Resolver uma equação é descobrir o valor (ou valores) da incógnita que transformam a equação numa igualdade verdadeira.

Como sabes, existem equações muito simples que consegues resolver mentalmente, ou por tentativas, mas para saberes resolver equações mais complicadas precisas de aprender algumas regras:

1.º $y + 3 = 11$ Se numa adição desconhecemos uma das parcelas, podemos obtê-la através da operação subtração

$$y = 11 - 3$$

Comparando:

$$y + 3 = 11 \text{ com } y = 11 - 3$$

observas que $+3$ saiu do primeiro membro da equação e apareceu -3 no segundo membro, isto é:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow y + 3 &= 11 \\ \Leftrightarrow y &= 11 - 3 \\ \Leftrightarrow y &= 8 \end{aligned}$$



2.º $x - 4 = 2$ Numa subtração aditivo = subtrativo + resto

$$\Leftrightarrow x = 2 + 4$$

Comparando:

$$x - 4 = 2 \text{ com } x = 2 + 4$$

observas que -4 saiu do primeiro membro da equação e apareceu $+4$ no segundo membro, isto é:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow x - 4 &= 2 \\ \Leftrightarrow x &= 2 + 4 \\ \Leftrightarrow x &= 6 \end{aligned}$$



Então, podemos enunciar a regra:

Numa equação podemos mudar um termo de um membro para outro trocando-lhe o sinal, obtendo-se, assim, uma equação equivalente.

3.º $5b = 35$ Numa equação que envolve uma multiplicação, se desconhecemos um factor, podemos obtê-lo através da operação divisão.

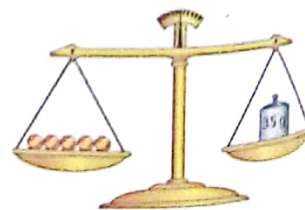
$$\Leftrightarrow b = 35 : 5$$

Comparando:

$$5b = 35 \text{ com } b = 35 : 5$$

observas que se passou da primeira equação para a segunda dividindo ambos os membros por 5:

$$\begin{array}{ccc} 5b = 35 & & \\ : 5 & \curvearrowright & : 5 \\ b = 7 & & \end{array}$$



$$4^{\circ} \frac{a}{10} = 2$$

$$a = 2 \times 10 \quad \text{dividendo} = \text{quociente} \times \text{divisor}$$

Comparando:

$$\frac{a}{10} = 2 \quad \text{com} \quad a = 2 \times 10$$

observas que se passou da primeira equação para a segunda multiplicando ambos os membros da equação por 10:

$$\begin{array}{c} \frac{a}{10} = 2 \\ \times 10 \quad \swarrow \quad \searrow \quad \times 10 \\ a = 20 \end{array}$$

Então, podemos enunciar a seguinte regra:

Numa equação podemos multiplicar ou dividir ambos os membros por um mesmo número diferente de zero, obtendo-se, assim, uma equação equivalente.

$$5^{\circ} 2t - 2 = 5t - 11$$

$$\Leftrightarrow 2t - 5t = -11 + 2$$

$$\Leftrightarrow (2 - 5)t = -9$$

$$\Leftrightarrow -3t = -9$$

$$\Leftrightarrow \frac{-3t}{-3} = \frac{-9}{-3} \quad \text{Dividiram-se ambos os membros da equação por } -3 \text{ para isolar a incógnita.}$$

$$\Leftrightarrow t = 3$$

$$S = \{3\}$$

Para resolver esta equação deves colocar os termos com incógnita num dos membros e os termos independentes no outro membro:

- Mudou-se $5t$ para o 1.º membro, trocando-lhe o sinal;
- Mudou-se -2 para o 2.º membro, trocando-lhe o sinal.

Reduziram-se os termos semelhantes.

Resolver equações



Exercícios resolvidos

Resolve as equações seguintes:

a) $3x + 5 = 8$

Resolução

a) $3x + 5 = 8$

$$\Leftrightarrow 3x = 8 - 5$$

$$\Leftrightarrow 3x = 3$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = 1; \quad S = \{1\}$$

b) $7x - 6 = 12x + 4$

b) $7x - 10 = 12x + 4$

$$\Leftrightarrow 7x - 12x = 4 + 6$$

$$\Leftrightarrow -5x = 10$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{10}{5}$$

$$\Leftrightarrow x = -2; \quad S = \{-2\}$$

Classificação de equações

As equações podem ser possíveis ou impossíveis:

- Quando uma equação possível admite qualquer número como solução diz-se **indeterminada**.
- Quando uma equação não tem solução diz-se **impossível**.

Vamos classificar equações:

$$\begin{aligned}
 1.^{\circ} \quad & -3(x+1) = -2x - x - 3 \\
 \Leftrightarrow & -3x - 3 = -2x - x - 3 \\
 \Leftrightarrow & -3x + 2x + x = +3 - 3 \\
 \Leftrightarrow & -3x + 3x = 0 \\
 \Leftrightarrow & 0x = 0
 \end{aligned}$$

Usa-se a propriedade distributiva da multiplicação para desdobrar de parêntesis:

$$k(a + b) = ka + kb$$

A equação dada diz-se **indeterminada** porque admite qualquer número como solução.

$$\begin{aligned}
 2.^{\circ} \quad & -10 + 2(x+1) = 2x \\
 \Leftrightarrow & -10 + 2x + 2 = 2x \\
 \Leftrightarrow & 2x - 2x = 10 - 2 \\
 \Leftrightarrow & 0x = 8
 \end{aligned}$$

A equação dada diz-se **impossível** pois não tem solução (não existe um número que multiplicado por zero dê oito).

$$\begin{aligned}
 3.^{\circ} \quad & -2(y-1) = 2 - (y+7,5) \\
 \Leftrightarrow & -2y + 2 = 2 - y - 7,5 \\
 \Leftrightarrow & -2y + y = 2 - 7,5 - 2 \\
 \Leftrightarrow & -y = -7,5 \\
 \Leftrightarrow & y = \frac{-7,5}{-1} \\
 \Leftrightarrow & y = 7,5
 \end{aligned}$$

Classificar equações



A equação dada é **possível**.

Resolução de problemas recorrendo a equações

Na resolução de um problema, usando uma equação deve:

- Ler com atenção o enunciado e distinguir o que é dado do que é pedido.
- Escolher a incógnita.
- Escrever a equação que traduz o problema.
- Resolver a equação.
- Interpretar o resultado no contexto do problema.



Exercícios resolvidos

1. O João quer cortar uma tábua, com 83 cm de comprimento, em duas partes. Uma das partes deve ter mais 2 cm que o dobro do comprimento da outra parte. Com que comprimento vai ficar cada parte?

Resolução:

O que é dado?

Tabua com 83 cm de comprimento a dividir em duas partes diferentes. Uma das partes deve ter mais 2 cm que o dobro do comprimento da outra.

O que é pedido?

Os comprimentos de cada uma das partes.

Qual o caminho a seguir?

Designando a medida do comprimento da parte menor por x , então a medida do comprimento da outra parte é $2x + 2$.

Relaciono os dados por uma equação: $2x + 2 + x = 83$.

Resolvo a equação que traduz o problema:

$2x + 2 + x = 83$	Colocam-se os termos com incógnita num membro e os termos independentes no outro.
$\Leftrightarrow 2x + x = 83 - 2$	Reduzem-se os termos semelhantes.
$\Leftrightarrow 3x = 81$	Dividem-se ambos os membros por 3.
$\Leftrightarrow x = 27$	

A parte menor mede 27 cm e a outra parte mede $2 \times 27 + 2 = 56$, ou seja, 56 cm.

A resposta faz sentido?

Sim, somando os comprimentos encontrados obtemos o comprimento inicial da tabua:

$$27 + 56 = 83$$

2. Um pai tem o triplo da idade do seu filho. Daqui a 5 anos, a soma das suas idades será 58 anos. Que idades têm actualmente o pai e o filho?

Resolução:

Seja x a idade actual do filho, então $3x$ é a idade actual do pai.

Na tabela seguinte apresentam-se as idades actuais do filho e do pai, bem como as idades respectivas daqui a 5 anos.

	Actual	Daqui a 5 anos
Idade do filho	x	$x + 5$
Idade do pai	$3x$	$3x + 5$

Resolução de problemas



Como daqui a 5 anos, a soma das idades será 58 anos, vem:

$$x + 5 + 3x + 5 = 58$$

$$\Leftrightarrow 4x = 58 - 5 - 5$$

$$\Leftrightarrow 4x = 48$$

$$\Leftrightarrow x = 12$$

Concluimos que o pai tem 36 anos e o filho tem 12 anos.

A resposta faz sentido, pois daqui a 5 anos o pai terá 41 anos e o filho terá 17 anos, sendo a soma das suas idades igual a 58 anos.

É importante saber traduzir em linguagem matemática algumas frases em linguagem corrente

Linguagem corrente	Linguagem matemática
A soma de cinco com metade de um número.	$5 + \frac{x}{2}$
A soma de quinze com o dobro de um número.	$15 + 2x$
O quintuplo da soma de um número com três.	$5(x + 3)$
Dois números inteiros consecutivos.	$x, x + 1$
Três números pares consecutivos.	$2x, 2x + 2, 2x + 4$
Dois números ímpares consecutivos.	$2x + 1, 2x + 3$
A idade do Luis daqui a três anos.	$x + 3$
A idade do António há cinco anos.	$x - 5$

Utilizou-se x como variável, mas poderia ter sido outra letra qualquer.

Exercícios de consolidação



8. Mentalmente, resolve as seguintes equações:

a) $2x = 0$

b) $\frac{c}{7} = 0$

c) $d + 2 = 0$

d) $2y - 2 = 0$

e) $x - \frac{1}{2} = 0,5$

f) $\frac{3}{2} + a = \frac{14}{2}$

g) $|x| = 2$

h) $y^2 = 9$

9. Sabes que numa equação podemos mudar um termo de um membro para o outro trocando-lhe o sinal, obtendo uma equação equivalente. Resolve as seguintes equações usando esta regra:

a) $x - 13 = -41$

b) $12 - b = -14$

c) $-56 = -t - 7$

10. Sabes que numa equação podemos multiplicar ou dividir ambos os membros pelo mesmo número, diferente de zero, obtendo uma equação equivalente. Usa esta regra e resolve as seguintes equações:

a) $9x = 36$

b) $-5x = 45$

c) $144 = -12a$

11. Usa as duas regras que aprendeste e resolve as seguintes equações:

a) $4x - 5 = 35$

b) $6 = -9 - 3y$

c) $4z + 7 = -1$

d) $\frac{m}{3} - 7 = -10$

e) $2a - 7 = 4a + 4$

f) $7 - 6y = 6 - 7y$

12. Resolve as seguintes equações:

a) $5x + 8 = 3x - 10$

b) $3y - 4 = y - 8$

c) $8a - 4 + 5 = 2a - 7$

13. Ao classificar as equações seguintes:

a) $7x = 0$

b) $0x = 34$

c) $|x| = -2$

d) $9x = 9$

e) $-\frac{5}{2}x = 0$

f) $|x| = 2$

g) $x^2 = -4$

h) $5x = 5^4$

a Ana afirmou: «Existem quatro possíveis, três impossíveis e uma indeterminada.» Estás de acordo? Explica.

14. Resolve e classifica cada uma das seguintes equações:

a) $3(2x - 3) + 4(x + 2) = 2(5x - 2)$

b) $5y - 3 = 2(y - 1) - (-3y + 1)$

c) $-3 - \left(\frac{1}{2} + 2x\right) = -1 - 4x$

15. Um jardim do centro de uma cidade é rectangular, sendo o comprimento o triplo da largura. Quando dou uma volta, contornando o jardim, ando 480 metros. Que dimensões tem o jardim?

16. A soma de três números pares consecutivos é 414. Quais são os números?

17. A soma de dois números ímpares consecutivos é a quinta potência de dois. Quais são os números?

Equações do 1.º grau com denominadores

Traduz o problema: dois terços de idade do João, hoje, é um sexto da idade que terá daqui a quarenta e cinco anos. Qual é a idade actual do João?

- A idade actual do João é x .
- A idade do João daqui a quarenta e cinco anos será de $x + 45$.

A equação que traduz o enunciado é:

$$\frac{2}{3}x = \frac{1}{6}(x + 45) \text{ Equação do 1.º grau com denominador.}$$



Resolução de equações do 1.º grau com denominadores

<p>1. Desembaraçar a equação de parêntesis:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Usa-se a propriedade distributiva da multiplicação para fazer desaparecer os parêntesis. 	$\frac{2}{3}x = \frac{1}{6}(x + 45)$
<p>2. Desembaraçar a equação de denominadores:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Multiplicam-se ambos os membros da equação pelo m.m.c. dos denominadores. m.m.c.(3,6) = 6 • Suprimem-se os denominadores. 	$\frac{2}{3}x = \frac{1}{6}x + \frac{45}{6}$ <p>(2) (1) (1)</p> $\frac{4x}{6} = \frac{x}{6} + \frac{45}{6}$ $6 \times \frac{4x}{6} = 6 \times \frac{x}{6} + 6 \times \frac{45}{6}$ $4x = x + 45$
<p>3. Agrupar:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Termos com incógnita num membro. • Termos sem incógnita noutro membro. • Ao trocar um termo de um membro para o outro, muda-se-lhe o sinal. 	$4x - x = 45$
<p>4. Reduzir os termos semelhantes:</p>	$3x = 45$
<p>5. Dividir ambos os membros da equação pelo coeficiente de x.</p>	$\frac{3x}{3} = \frac{45}{3}$ $x = 15$ <p style="text-align: right;">$S = \{15\}$</p>

Verificação:

Substitui-se, na equação dada, x por 15:

$$\frac{2}{3} \times 15 = \frac{1}{6} (15 + 45)$$

$$\frac{30}{3} = \frac{60}{6} \quad 10 = 10 \quad \text{Verdadeiro}$$

R.: A solução de operação é 15.



Exercícios resolvidos

1. Resolva as equações:

a) $\frac{x}{3} + \frac{x}{7} = 5$

T.P.C
↙ ↘

b) $\frac{4x}{5} - \frac{2(x+7)}{4} = 4$

Resolução:

a) $\frac{x}{3} + \frac{x}{7} = 5$

(7) (3) (21)

$\frac{7x}{21} + \frac{3x}{21} = \frac{105}{21}$

$7x + 3x = 105$

$10x = 105$

$x = 10,5$

Desembaraça-se a equação de denominadores: m.m.c. (3, 7) = 21

Reduz-se os termos semelhantes.

Verificação: Substitui-se, na equação dada, a incógnita por 10,5.

$\frac{10,5}{21} + \frac{10,5}{21} = 5$

$3,5 + 1,5 = 5$

$5 = 5$ Verdadeiro

R.: A solução é 10,5.

b) $\frac{4x}{5} - \frac{2(x+7)}{4} = 4$

(4) (5) (20)

$16x - 10x - 70 = 80$

$16x - 10x = 70 + 80$

$6x = 150$

$\frac{6x}{6} = \frac{150}{6}$

$x = 25$

$S = \{25\}$

Usa-se a propriedade distributiva para desembaraçar de parêntesis.

Reduz-se ao mesmo denominador: m.m.c. (4, 5) = 20

Suprime-se os denominadores.

• Agrupa-se os termos com incógnita num membro e os termos sem incógnita no outro. Ao trocar um termo de membro, muda-se-lhe o sinal.

• Reduz-se os termos semelhantes.

• Divide-se ambos os membros da equação pelo mesmo número para encontrar a solução.

Verificação:

$\frac{4 \times 25}{2} - \frac{2(25+7)}{4} = 4$

$20 - 16 = 4$

$4 = 4$ Verdadeiro

R.: 25 é solução da equação dada.

Equações literais

Muitas fórmulas utilizadas, por exemplo, em:

- Matemática: para calcular perímetros, áreas, volumes...
- Física: para calcular velocidades, resistências eléctricas, temperaturas...
- Economia: para calcular juros, taxas...

são equações que contêm mais que uma letra.

As equações onde, além da incógnita, aparecem uma ou mais letras, chamam-se equações literais.

- São equações literais: porque todas têm, pelo menos, duas letras diferentes.

$$xy + 3 = 0$$

$$d = v \times t$$

$$ax + b = 5$$

$$P = 2c + 2l \quad (\text{perímetro de um rectângulo})$$

$$R = \frac{V}{i} \quad (\text{lei de Ohm})$$

$$V = \pi r^2 h \quad (\text{volume do cilindro})$$

$$j = c \times r \times t \quad (\text{juro simples})$$

- Não são equações literais: porque contêm apenas uma letra, a incógnita.

$$2x + 3 = 4 \quad y^2 + 1 = 5 \quad 5x - 15 = \pi$$

Matemática e as Ciências Físico-Químicas

A fórmula: $v = \frac{d}{t}$ onde

v – velocidade

d – distância percorrida

t – tempo

é uma equação literal que está resolvida em ordem a v e é equivalente às equações literais:

• $d = vt$ – equação literal resolvida em ordem a d .

• $t = \frac{d}{v}$ – equação literal resolvida em ordem a t .

Isto é,

$$v = \frac{d}{t} \Leftrightarrow d = vt \Leftrightarrow t = \frac{d}{v}$$





Exercícios resolvidos

1. Resolva, em ordem a x , cada uma das equações literais:

$$a) x - \frac{y}{5} = y - \frac{x+2}{3}$$

Resolução:

$$a) x - \frac{y}{5} = y - \frac{x+2}{3} \Leftrightarrow 15x - 3y = 15y - 5x - 10 \Leftrightarrow$$

$$(15) \quad (3) \quad (15) \quad (5)$$

$$\Leftrightarrow -15y = -5x - 15x - 10 \Leftrightarrow -18y = -20x - 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{18y - 10}{20} \rightarrow y = \frac{9y - 5}{10}$$

2. Resolva, em ordem a x , as equações:

$$a) x - \frac{5m+3}{2} = m - \frac{x}{4}$$

Resolução:

$$a) x - \frac{5m+3}{2} = m - \frac{x}{4} \Leftrightarrow 4x - 10m - 6 = 4m - x \Leftrightarrow$$

$$(4) \quad (2) \quad (4) \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow 4x + x = 4m + 10m + 6 \Leftrightarrow 5x = 14m + 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{14m + 6}{5}$$

3. A fórmula que relaciona a temperatura em graus centígrados, C , com a temperatura em graus Fahrenheit, F , é dada por:

$$C = \frac{5}{9} (F - 32)$$

Como exprimir graus Fahrenheit em função dos graus centígrados?

Resolução:

Trata-se de resolver a equação dada em ordem a F , isto é, de resolver a equação sendo F a incógnita:

$$C = \frac{5}{9} (F - 32)$$

Usa-se a propriedade distributiva para desembaraçar de parêntesis.

$$C = \frac{5}{9} F - \frac{160}{9}$$

Reduz-se ao mesmo denominador.

$$9C = 5F - 160$$

Suprime-se os denominadores.

$$9C + 160 = 5F$$

Isola-se o termo com incógnita.

$$F = \frac{9C + 160}{5}$$

Divide-se ambos os termos pelo coeficiente da incógnita.

18. Resolva as equações:

a) $\frac{x}{2} + 4 = 5 + \frac{x}{6}$

b) $\frac{2y}{5} - 4 = 2 + \frac{y}{4}$

c) $\frac{2x}{3} - \frac{3x}{5} = 1$

d) $\frac{t}{8} - \frac{t}{18} + \frac{t}{6} = 5$

e) $\frac{x-2}{2} = -10 - \frac{6-x}{2} + x$

f) $\frac{2x-3}{3} - 4 = -\frac{2x-5}{2} - \frac{2x-9}{4}$

19. Resolva as equações:

a) $\frac{1}{2} - \frac{2(x+1)}{3} = -\frac{1}{2}(x+3)$

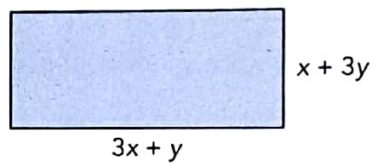
b) $\frac{10x+2}{3} - \frac{2(3x+2)}{15} - \frac{7x+1}{3} = 0$

c) $\frac{1}{4} - \frac{x+1}{20} = \frac{1}{5}(x-4) - \frac{1}{2} - \frac{x}{8}$

20. A diferença entre um número e os seus dois nonos é 63. Qual é o número?

21. A soma de seis com dois quintos de um número é igual à diferença entre sete décimos desse número e 15. Qual é o número?

22. Observa o rectângulo da figura:



a) Escreve uma fórmula que permita determinar o perímetro, P , do rectângulo da figura.

b) Resolva a equação em ordem a y .

c) Calcula y , sendo $P = 60$ cm e $x = 5$ cm.

23. Resolva as seguintes equações literais:

a) $ax + 2y + c = 7$ em ordem a y

b) $5ax - 2b = 8c$ em ordem a x

c) $ax + b = cx + d$ em ordem a x

24. A fórmula que permite converter graus centígrados, C , em graus Fahrenheit, F , é:

$$F = \frac{9}{5}C + 32$$

a) Resolva esta equação em ordem a C .

b) Calcula a temperatura, em graus centígrados, correspondente à temperatura de 23°F .

25. Cálculo de um juro simples de um capital c , à taxa r e num tempo t :

$$j = c \times r \times t$$

Resolva em ordem a t .

Exercícios propostos



1. Dadas as equações:

$$3y = 9 \qquad 5y = 0 \qquad 0 = a - 2 \qquad |x| = 6$$

- Qual delas admite zero como solução?
- Qual delas admite 6 e -6 como soluções?
- Qual delas é equivalente à equação $y + 1 = 3$?
- Alguma das equações dadas admite -2 como solução? Justifica.

2. Sabes que numa equação podemos mudar um termo de um membro para o outro trocando-lhe o sinal, obtendo uma equação equivalente. Resolve as seguintes equações usando esta regra:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } a + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} & \text{b) } c - 8 = 4,5 & \text{c) } 12 + a = -19 \\ \text{d) } x + 2 = 0,9 & \text{e) } \frac{1}{3} + y = \frac{11}{2} & \text{f) } -d + \frac{1}{5} = \frac{1}{6} \end{array}$$

3. Resolve as seguintes equações:

$$\text{a) } 1,5x - 6 = 2 + \frac{1}{2}x \qquad \text{b) } 6b - b - 2^2 = 7b + 10 \qquad \text{c) } x - \frac{3}{4} = 2x - 0,5$$

4. Resolve as equações:

$$\text{a) } \frac{2x+8}{3} - \left(\frac{t+6}{3} - \frac{9-t}{3} \right) = \frac{7}{2} \qquad \text{b) } \frac{\frac{y}{2} + 1}{3} - \frac{3y+2}{12} = \frac{y-6}{5}$$

$$\text{c) } \left(\frac{4a}{9} - 5 \right) - 4 = \frac{2}{3}a - (a - 2) \qquad \text{d) } \frac{c-4}{7} + \frac{3c-5}{3} = \frac{2}{7}(c-3)$$

5. Resolve e classifica as equações:

$$\text{a) } \frac{x+1}{8} + \frac{4x-5}{8} + \frac{1}{2} = \frac{\frac{y}{2}x}{3} \qquad \text{b) } \frac{14x-3}{15} = \frac{x+1}{9} = \frac{37x-23}{45}$$

6. De um depósito de gasolina retirou-se um terço do seu conteúdo; depois, retirou-se três quartos do restante e o depósito ainda ficou com 40 litros.

Quantos litros tinha, inicialmente, o depósito?

7. As idades de dois amigos são dois números inteiros consecutivos, tais que quatro nonos do maior excede em oito unidades dois treze avos do menor.

Quais as idades dos dois amigos?

8. Uma fórmula que estabelece a relação entre a idade (i) e o número mínimo de horas de sono (h) de um indivíduo com menos de 15 anos, é definida por:

$$2h + i = 30$$

- Resolve a equação dada em ordem a h .
- Quantas horas deve dormir, no mínimo, um jovem com 14 anos?

9. Resolve as seguintes equações literais:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } a + 2b + 3c = d & \text{em ordem a } c \\ \text{b) } 3a - 2b + c - d = 0 & \text{em ordem a } b \end{array} \qquad \text{c) } -\frac{1}{3}x - \frac{b}{2} = b - 2x \quad \text{em ordem a } b$$

Handwritten notes:
 $9 + 2b + 3c = d$
 $3a - 2b + 3c = d$

1.ª Parte

Indica a resposta correcta: A, B, C ou D.

1. A raiz da equação $-2y = 0$ é:

- A. 2 B. -2 C. 0 D. 1

2. A solução da equação $|-5| + x = 0$ é:

- A. 5 B. $\frac{1}{5}$ C. -5 D. 0

3. A equação equivalente à equação $x + x + x = 4$ é:

- A. $x^3 = 4$ B. $4 = 2x + 1$ C. $4 = 2 + x$ D. $3x = 4$

4. A raiz da equação $2(x - 5) - 3x = 0$ é:

- A. 5 B. -10 C. 10 D. -5

5. A equação equivalente a $-7(2x + 1) - x = 7$ é:

- A. $-14x + 1 - x = 7$ B. $-14x - 7 + x = 7$
 C. $-14x - 7 = 7 + x$ D. $-14x - 7 = 7 - x$

6. A Telma abriu um livro, somou os números das duas páginas e obteve 77. Qual era o número da primeira página?

- A. 38 B. 31 C. 37 D. 34

7. A amplitude do menor ângulo do triângulo representado ao lado é:

- A. 60° B. 30°
 C. $22,5^\circ$ D. 16°



8. A figura é formada por quadrados. Se a figura tiver 60 cm de perímetro, a sua área, em centímetros quadrados, será:

- A. 60 B. 180
 C. 720 D. 125



9. Escolhe a expressão que representa a solução da equação $2,5 - (x + 1) = 3x - 0,5$:

- A. $-3 + \frac{5}{2}$ B. $(-2)^2 + \frac{1}{2}$ C. $(-1)^3 + (-2)$ D. $1\frac{1}{2}2^4 \div 1\frac{1}{2}2^3$



2.ª Parte

1. Numa equação, os termos do 1.º membro são -1 e $3x$, e do 2.º membro são 1 e x .

a) Escreve a equação.

b) Verifica que 1 é solução da equação que escreveste.

2. Resolve mentalmente as seguintes equações:

a) $a + 5 = 0$

b) $\frac{2}{3}x = 0$

c) $|x| = 4$

3. Classifica as seguintes equações:

a) $x = x - 7$

b) $3x - 4 = 3x - (-2)^2$

4. Resolve as seguintes equações:

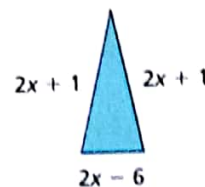
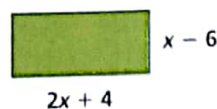
a) $-2(x - 1) + 3(x + 1) = -7$

b) $0,2(m + 1) = 0,1m$

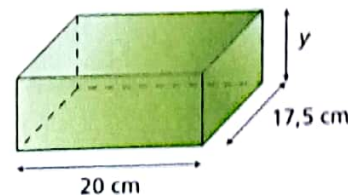
5. O João tem 32 anos e a sua filha tem 7 anos.

Daqui a quantos anos é que a idade do pai será o dobro da idade da filha?

6. Para que valores de x o rectângulo e o triângulo da figura ao lado têm o mesmo perímetro (unidade: centímetro).
Discute a solução.



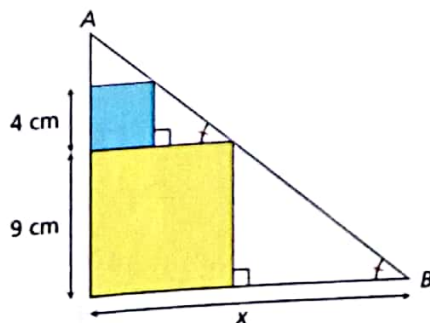
7. Calcula y , sabendo que o comprimento total das arestas do paralelepípedo ao lado é 2 m.



8. Inventa um problema que possa ser resolvido pela equação $3x + 2 = 68$.

9. Três primas falam das suas economias. A Ana está admirada, pois junta em meticais metade do que economiza a Maria, que é mais nova. A Joana amealha o triplo do que economiza a Ana e todas juntas economizam 27 meticais por semana. Quanto economiza cada uma?

10. O Manuel desenhou dois quadrados e o segmento $[AB]$ como vês na figura seguinte.
Determina x .





OBJECTIVOS

O aluno deve ser capaz de:

- Localizar um ponto no plano (S.C.O.).
- Determinar as coordenadas de um ponto num referencial cartesiano.
- Diferenciar a proporcionalidade directa da proporcionalidade inversa.
- Resolver problemas da vida corrente (percentagens, juros, impostos, escalas, que envolvam proporcionalidades directa e inversa).
- Explicar o conceito de aplicação ou função como correspondência entre dois conjuntos e dar exemplos relacionados com outras ciências.
- Reconhecer em correspondências as que são funções.
- Determinar numa função o domínio e o contradomínio.
- Identificar as aplicações sobrejectivas, injectivas e bijectivas.
- Construir tabelas das funções do tipo: $y = ax$ e $y = ax + b$.
- Representar graficamente uma função linear.
- Determinar o zero de uma função linear.
- Observar regularidades e estabelecer leis matemáticas que expressam a relação de dependência entre as variáveis.
- Explicar o significado dos coeficientes a e b .
- Determinar a expressão analítica duma recta.
- Resolver problemas concretos da vida aplicando funções lineares.

by-Igor

CONTEÚDOS

Coordenadas cartesianas. Revisão

- Sistemas de coordenadas cartesianas
- Identificação das coordenadas de um ponto no sistema de coordenadas ortogonais
- Proporcionalidade directa e inversa

Funções lineares

- Conceito de correspondência
- Introdução do conceito de aplicação ou função a partir de situações da vida prática
- Conceito de variável dependente e variável independente
- Determinação de imagens numa função
- Modos de definir uma aplicação
- Aplicações sobrejectivas, injectivas e bijectivas
- Conceito de função linear
- Representação gráfica de funções do tipo $y = ax$ e $y = ax + b$
- Determinar os zeros de uma função linear
- Significado geométrico dos coeficientes a e b
- Determinação da expressão analítica duma recta

by-Igor

Representação de pontos no plano

Duas rectas graduadas e perpendiculares (ortogonais) constituem um referencial com origem na sua intersecção.

Um ponto do plano é representado por dois números chamados coordenadas do ponto.

Um sistema de eixos cartesianos é constituído por dois eixos perpendiculares:

- O eixo das abcissas é horizontal.
- O eixo das ordenadas é vertical.

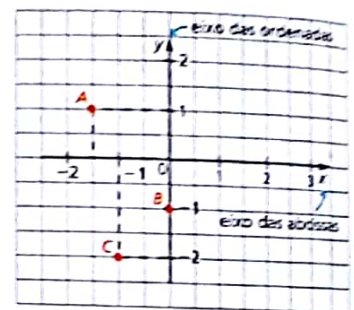
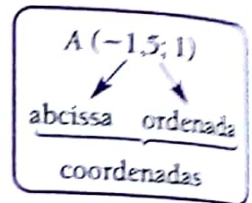
Um ponto do plano representa-se por duas coordenadas, relativas a cada um dos dois eixos do referencial.

A primeira coordenada, relativa ao eixo dos xx , é a abcissa.

A segunda coordenada, relativa ao eixo dos yy , é a ordenada.

As coordenadas dos pontos A e B representados ao lado são:

$$A(-1,5; 1) \quad B(0, -1)$$



Para representar no referencial o ponto C (-1, -2), marco a abcissa de C, que é -1, no eixo das abcissas, e marco a ordenada, que é -2, no eixo das ordenadas. Traço perpendiculares aos eixos na abcissa e na ordenada, respectivamente, cuja intersecção é o ponto C (-1, -2).



Exercício resolvido

1. Um sistema de eixos divide o plano em quatro regiões chamadas quadrantes.

a) Num sistema de eixos assinala os pontos:

$$A(1, 3) \quad B(-3, -1) \quad C(4, -2) \quad D(0, 1) \quad E(-1, 0)$$

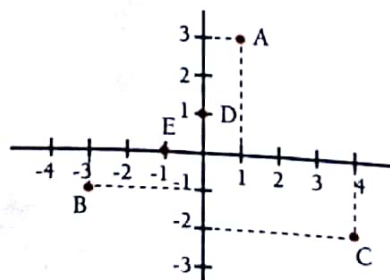
b) Em que quadrantes se encontram:

i) os pontos de abcissa positiva?

ii) os pontos de ordenada negativa?

Resolução:

1. a)



b) i) 1.º e 4.º quadrantes

ii) 3.º e 4.º quadrantes

Proporcionalidade directa

Dadas duas grandezas, A e B, diz-se que B é directamente proporcional a A quando é constante o quociente dos valores de B pelos valores correspondentes de A.

A constante de proporcionalidade é o quociente:

$$\frac{\text{valor de B}}{\text{valor correspondente de A}}$$

Se A é directamente proporcional a B, então também B é directamente proporcional a A. As duas constantes de proporcionalidade são inversas uma da outra.

• Comprando laranjas

Massa de laranjas (kg)	0,5	1,5	4
Preço (meticais)	10	30	80



Vamos efectuar o quociente do preço pela massa de laranjas correspondente:

$$\frac{10}{0,5} = 20$$

$$\frac{30}{1,5} = 20$$

$$\frac{80}{4} = 20$$

Como podes verificar, a razão entre o preço das laranjas e a sua massa é constante.

Podemos, então, afirmar que:

- O preço das laranjas é directamente proporcional à sua massa.
- A constante de proporcionalidade é 20, representando este valor o preço, em meticais, de 1 kg de cerejas.

Repara que: se a massa triplica, o preço também triplica; se a massa é oito vezes maior, o preço também é oito vezes maior.

		$\times 3$	$\times 8$
Massa de laranjas (kg)	0,5	1,5	4
Preço (meticais)	1,00	3,00	8,00
	$\times \frac{1}{2}$		$\times 2$
		$\times 3$	$\times 8$

Podes verificar ainda que: se o preço é directamente proporcional à massa, também a massa é directamente proporcional ao preço, sendo as constantes de proporcionalidade inversas uma da outra.

• Aluguer de um automóvel

Duração do aluguer (dias)	Preço (meticais)
2	300
7	9 100
14	15 400



UNIDADE 3

Efectuando o quociente do preço pelo número de dias de aluguer correspondente, obténs:

$$\frac{3\ 000}{2} = 1\ 500 \quad \frac{9\ 100}{7} = 1\ 300 \quad \frac{15\ 400}{14} = 1\ 100$$

Como podes verificar, a razão entre o preço do aluguer de um automóvel e o número de dias correspondente não é constante. Então, podemos afirmar que o preço do aluguer de um automóvel não é directamente proporcional ao número de dias do aluguer.

É possível, a partir de uma tabela, construir um gráfico cartesiano que represente a informação da tabela. Para isso, faz-se corresponder a cada par de valores da tabela um ponto no gráfico.

Vamos construir o gráfico associado à tabela, que traduz uma situação de proporcionalidade directa.

Distância (milhas)	25	75	80
Distância (km)	50	40	120

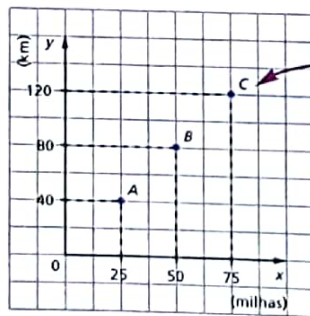
- Assinalando os pontos correspondentes aos dados da tabela:

A (25, 40)

B (50, 80)

C (75, 120)

obténs um gráfico que fornece toda a informação da tabela.



Ao ponto C corresponde o par ordenado:

(75, 120)
 ↙ ↘
 abscissa ordenada
 └──────────┘
 coordenadas

- Verifica que os pontos A, B e C estão alinhados com a origem do sistema de eixos. Isto acontece sempre numa situação de proporcionalidade directa.



Exercícios resolvidos

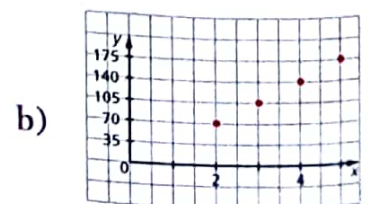
1. Observa a tabela seguinte:

x	2	3	4	5
y	70	105	140	175

- Mostra que y é directamente proporcional a x e indica a constante de proporcionalidade.
- Representa graficamente, num sistema de eixos como o indicado, a relação de proporcionalidade da tabela anterior.

Resolução

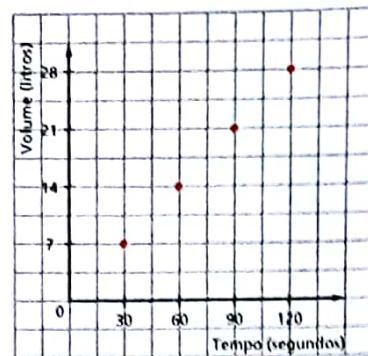
a) $\frac{70}{2} = \frac{105}{3} = \frac{140}{4} = \frac{175}{5} = 35 \rightarrow \text{const.}$



2. Abriu-se uma torneira e registou-se o volume de água, em litros, debitado pela torneira, de 30 em 30 segundos.

Observa o gráfico onde constam os registos efectuados e responde às seguintes questões:

- O volume de água debitado é directamente proporcional ao tempo? Porquê?
- Quantos litros de água debita a torneira num minuto e meio?
- Constrói a tabela associada ao gráfico.



Resolução:

- Sim, porque os pontos do gráfico estão alinhados em recta com a origem.
- Pelo gráfico vê-se que em 1,5 minutos debita 21 litros.

c)

Tempo (segundos)	30	60	90	120
Volume (litros)	7	14	21	28

Para resolver problemas de proporcionalidade directa é importante recordar:

- A razão é utilizada para comparar números.

Dados dois números, a e b , sendo $b \neq 0$, a razão de a para b escreve-se:

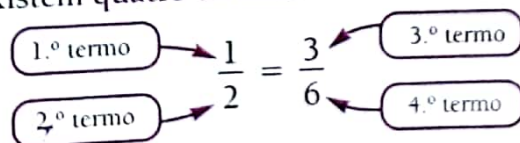
antecedente $a : b$ ou $\frac{a}{b}$ a e b são os termos da razão.
consequente

Lê-se: «Razão de a para b .»

Numa razão, a ordem é importante, $4 : 5$ é diferente de $5 : 4$.

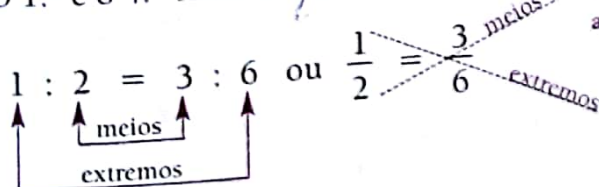
- Uma proporção é uma igualdade entre duas razões.

Numa proporção existem quatro termos:



O 2.º e o 3.º termos são os meios.

O 1.º e o 4.º termos são os extremos.



Numa proporção, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos: $2 \times 3 = 1 \times 6$

Observa como podes determinar um termo desconhecido numa proporção:

$$\frac{2}{5} = \frac{6}{x} \text{ logo } 5 \times 6 = 2 \times x \text{ pelo que } x = \frac{5 \times 6}{2} \text{ ou seja } x = 15.$$



UNIDADE 3

Exercícios resolvidos

1. Os preços das alcatifas são directamente proporcionais às respectivas áreas.
Qual a área de uma alcatifa que custou 35 000 meticais?

Área de alcatifa (m ²)	2	9	12,5
Preço (meticais)	2 000	9 000	12 500

Resolução:

A constante de proporcionalidade é:

$$\frac{2\,000}{2} = \frac{9\,000}{9} = \frac{12\,500}{12,5} = 1000$$

Representa o preço, em meticais, de 1 m² desta alcatifa.

A área de uma alcatifa que custou 1 000 meticais obtém-se dividindo 35 000 por 1000:

$$35\,000 : 1\,000 = 35$$

Uma alcatifa que custou 35 000 meticais tem 35 m² de área.

2. Os preços de diferentes retalhos de uma peça de tecido são directamente proporcionais aos respectivos comprimentos.
Determina o valor de x .

Comprimento (m)	1,8	3	4,2
Preço (meticais)	x	360	504

Resolução:

1.º método – pela constante de proporcionalidade:

$$\frac{360}{3} = 120 \text{ Preço de 1 m.}$$

Comprimento (m)	1,8	3	4,2
Preço (meticais)	x	360	504

$$x = 1,8 \times 120 \text{ logo } x = 216$$

Logo, o preço de 1,8 m de tecido é 216 meticais.

2.º método – se o preço de 3 m de tecido é 369 meticais, então o preço de 1,8 m é:

Pelas proporções

$$\frac{3}{360} = \frac{1,8}{x}$$

$$x = \frac{360 \times 1,8}{3}$$

$$x = 4216$$

Pela regra de três simples

comprimento

3

1,8

$$x = \frac{1,8 \times 360}{3}$$

$$x = 316$$

Preço

360

x

Logo, o preço de 1,8 m de tecido é 216 meticais.

3. Uma cidade mantém a razão entre o número de espaços verdes e o número de habitantes. Se existiam quatro parques para 60 000 pessoas, quantos parques tem hoje a cidade, sabendo que nela vivem 90 000 pessoas?

Resolução:

$$\frac{4}{60\,000} = \frac{x}{90\,000}$$

logo, temos que $x = \frac{4 \times 90\,000}{60\,000}$

e assim $x = 6$

Concluimos que a cidade tem seis parques.

Usou-se uma proporção.



Exercícios de consolidação

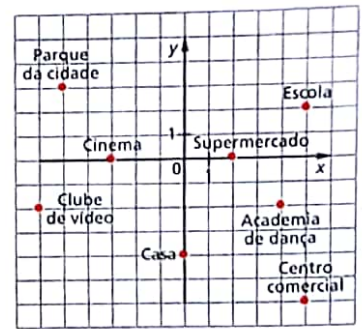


1. Considera o referencial ao lado

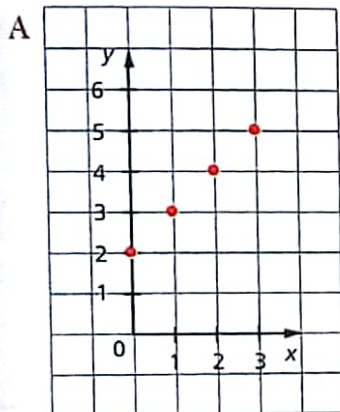
a) Localiza pelas suas coordenadas: a casa, a academia de dança, a escola, o parque da cidade e o clube de vídeo.

b) Certo dia, o trajecto da Joana foi o que corresponde aos pontos: $(0, -4)$, $(5, -6)$, $(2, 0)$ e $(-3, 0)$.

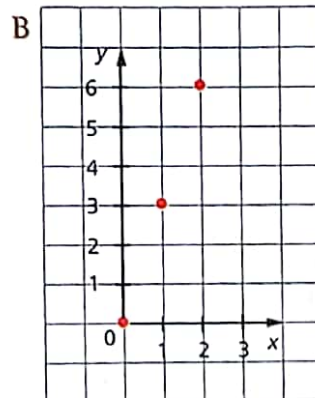
Qual foi o trajecto da Joana?



2. Observando cada um dos gráficos, completa a tabela que lhe está associada.



x	y
0	
1	
2	
3	



x	y
0	
1	
	6

3. Na caixa de cereais da figura observa a sua informação nutricional. Se preparares uma taça com 40 g destes cereais, que massa ingeres de proteínas? E de fibras?



4. A massa de ferro depende do volume.

a) Sabendo que a massa de ferro é directamente proporcional ao volume, completa a tabela:

b) Qual o volume de um pedaço de ferro com 1 kg?

Volume (cm ³)	1	10		1300
Massa (g)		79	316	

5. Completa a tabela com os valores do perímetro e da área dos quadrados com o lado indicado.

Lado do quadrado (cm)	0,5	2	3,5	6
Perímetro (cm)				
Área (cm ²)				

a) O perímetro é directamente proporcional ao comprimento do lado? Justifica.

b) A área é directamente proporcional ao comprimento do lado? Justifica.

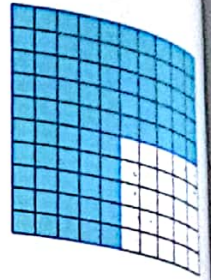
Percentagens

Observa a figura ao lado, que está dividida em 100 quadrículas iguais.
Das 100 quadrículas, 75 estão coloridas.

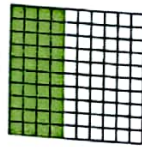
$$\frac{75}{100} = 75\%$$

Lê-se «Setenta e cinco por cento.»

Significa que 75% das quadrículas são coloridas.



Uma percentagem é uma razão com conseqüente 100.



A parte colorida é $\frac{2}{5} = 0,40$, isto é, 40%.

Observa agora a resolução de problemas do dia-a-dia que envolvem percentagens.



Exercícios resolvidos

1. Dos 1 500 atletas que participaram numa maratona, só 70% cortaram a meta. Quantos atletas terminaram a maratona?

Resolução:

... de... → ... × ...

70% de 1500 é

$$\frac{70}{100} \times 1500 = 1050$$

Proporção

$$\frac{70}{100} = \frac{x}{1500}$$

$$x = \frac{70 \times 1500}{100}$$

$$x = 1050$$

Regra de três simples

$$\begin{array}{r} 70 - 100 \\ x - 1500 \end{array}$$

$$x = \frac{70 \times 1500}{100}$$

$$x = 1050$$



Como vês, podes escolher qualquer um destes processos para resolveres o problema.
R.: São 1 050 os atletas que terminaram a corrida.

2. Quanto pagarei pela mota se me fizerem 15% de desconto?



Resolução:

O desconto corresponde a 15% de 600, isto é $\frac{15}{100} \times 600 = 90$, logo, o desconto é de 90 meticais.

Preço a pagar: $600 - 90 = 510$ ou

$100\% - 15\% = 85\%$ O que vou pagar, em percentagem.

$85\% \times 600 = 510$ O que vou pagar, em meticais.

R.: Com um desconto de 15%, o preço da mota será de 510 meticais.

3. Um desconto de 7% sobre o preço de uma camisola corresponde a 140 meticais. Qual o preço da camisola sem o desconto?

Resolução:

$$\frac{7}{100} \times x = 140 \quad \left| \quad \frac{7}{100} = \frac{140}{x}$$

$$x = 140 : 0,07 \quad \text{ou} \quad x = \frac{140 \times 100}{7}$$

$$x = 2\,000 \quad \left| \quad x = 2\,000$$

R.: O preço sem desconto da camisola é de 2 000 meticais.

4. Numa revista com 120 páginas, 36 estão destinadas à publicidade. Calcula a percentagem do número total de páginas ocupada com publicidade.



Resolução:

Número de páginas com publicidade	36	x
Número total de páginas	120	100

isto é:

$$\frac{36}{120} = \frac{x}{100}$$

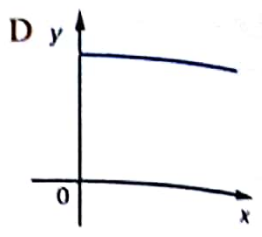
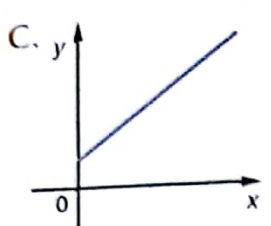
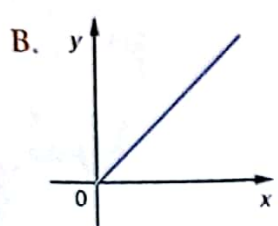
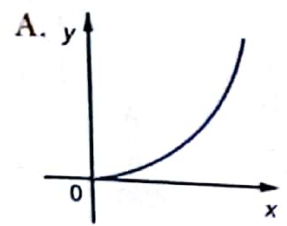
$$x = \frac{36 \times 100}{120}$$

$$x = 30$$

R.: Há 30 páginas com publicidade em 100 páginas da revista. Então, a publicidade ocupa 30%.



6. Quais os gráficos que não representam uma situação de proporcionalidade directa? Justifica.



7. Imprimiu-se uma folha e verificou-se que a altura do texto é directamente proporcional ao número de linhas.

- a) Neste texto, qual a altura de 17 linhas?
- b) Quantas linhas correspondem a 16,5 cm de altura?

Número de linhas	6	9	11
Altura (mm)	30	45	55

8. Para oito crepes são necessários dois ovos, 50 g de farinha, 5 cl de leite, duas colheres (de sopa) de manteiga e uma colher (de chá) de açúcar. Sabendo que para fazer a mesma receita têm de se manter as proporções, que quantidades se devem usar dos outros ingredientes se se usar 175 g de farinha?



9. Procede-se ao enchimento de uma piscina cilíndrica com 2,10 m de profundidade. O nível de água sobe regularmente 5 cm de 12 em 12 minutos.

Completa a tabela ao lado:

Tempo (min)	12	24	60	180
Altura da água (cm)	5			

10. Foram inquiridas 100 pessoas acerca da forma como tomam conhecimento das notícias diárias e registaram-se as respostas.

Exprime os resultados em percentagem.

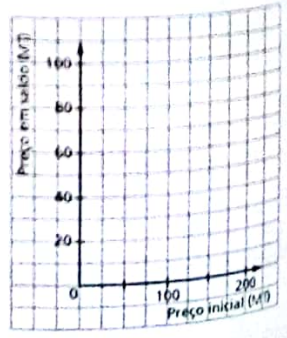
Jornal	Televisão	Radio	Internet
25	55	12	8

11. Nos saldos foi aplicada uma redução de 40% a todos os preços.

a) Completa a tabela:

Preço inicial (MT)	25	50	100	175
Desconto (MT)				
Preço em saldo (MT)				

- b) O desconto é directamente proporcional ao preço inicial?
- c) Completa o gráfico com os dados da tabela. O preço em saldo é directamente proporcional ao preço inicial? Justifica com base no gráfico.



Proporcionalidade inversa

Nesta tabela estão em estudo duas variáveis: o comprimento e a largura do rectângulo, onde x representa o comprimento e y a largura, em centímetros.

x	1	2	3	4	...
y	6	3	2	1,5	...

↓ ↓ ↓ ↓
 $1 \times 6 = 2 \times 3 = 3 \times 2 = 4 \times 1,5 = \dots = x \cdot y = 6$

- Multiplicando uma medida qualquer do comprimento pela medida da largura correspondente obtém-se sempre um valor constante, neste caso, 6, que é a medida da área.
- O comprimento e a largura dependem um do outro e quando um aumenta o outro diminui na mesma proporção.
- Se o comprimento duplica, a largura passa a metade; se o comprimento triplica, a largura diminui para a terça parte. Isto é, o comprimento e a largura variam na razão inversa um do outro. O comprimento e a largura destes rectângulos são inversamente proporcionais e escreve-se:

$x \cdot y = 6$

Neste exemplo, 6 é a constante de proporcionalidade e a medida da área de cada rectângulo.

Problema

O João desloca-se, diariamente, entre duas localidades.

Velocidade em km/h (v)	50	80	100
Tempo em horas (t)	6	3,75	3

A tabela seguinte relaciona a velocidade média com o tempo gasto em cada viagem.

- Quando o João duplica a velocidade, o que acontece ao tempo de viagem?
- Qual a distância entre as duas localidades?

Trata-se de um problema com duas variáveis: v e t , sendo uma das variáveis função da outra.

Na tabela verificas que:

$50 \times 6 = 300$
 $80 \times 3,75 = 300$
 $100 \times 3 = 300$

isto é,

$$v \cdot t = 300$$

↑
constante de proporcionalidade

Calcular velocidade média



- As variáveis v e t são inversamente proporcionais, uma vez que o produto das duas variáveis é uma constante não nula.
- Quando o João duplica a velocidade (passa de 50 km/h para 100 km/h) o tempo passa a metade (de 6 h para 3 h).
- A constante de proporcionalidade é 300 e representa a distância, em quilómetros, entre as duas localidades.

Duas variáveis são inversamente proporcionais se o produto de um qualquer valor de uma pelo correspondente valor da outra é constante e diferente de zero.

$x \cdot y = k$ com $k \neq 0$
 ↳ constante de proporcionalidade

*Com x=2
 Calcula a velocidade média*

Exercício resolvido

1. Para se embalar a produção diária de ovos são precisos 120 cartões, cada um levando duas dúzias e meia. Quantos cartões são precisos para embalar a mesma produção diária, se se usarem cartões de duas dúzias?

Resolução:

O número de cartões necessários e o número de ovos por cartão são grandezas inversamente proporcionais. Logo,

$$120 \times 30 = 24x \Leftrightarrow 3600 = 24x \Leftrightarrow x = \frac{3600}{24} = 150$$

R.: São precisos 150 cartões de 24 ovos.

2. Justificar que são inversamente proporcionais as variáveis x e y , cujos valores correspondentes estão registados na tabela,

x	7	8,4	4,2	1
y	3,6	3	6	25,2



é indicar a constante de proporcionalidade.

Resolução:

Se x e y são inversamente proporcionais, então $x \cdot y = k$, com $k \neq 0$.

$$7 \times 3,6 = 8,4 \times 3 = 4,2 \times 6 = 1 \times 25,2 = 25,2$$

Então x e y são inversamente proporcionais.

A constante de proporcionalidade é 25,2.

3. Sabendo que x e y são inversamente proporcionais:

a) Indicar a constante de proporcionalidade.

b) Copiar e completar a tabela.

x	4	3	
y	48		12

Resolução:

a) Se x e y são inversamente proporcionais, $x \cdot y = k$, com $k \neq 0$.
Neste caso, $4 \times 48 = 192$, logo, $k = 192$.

b) Completar a tabela:

$$3 \cdot y = 192 \Leftrightarrow y = 192 : 3 \Leftrightarrow y = 64$$

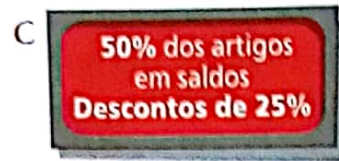
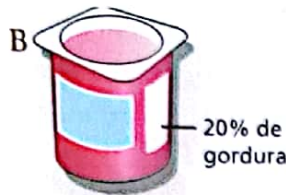
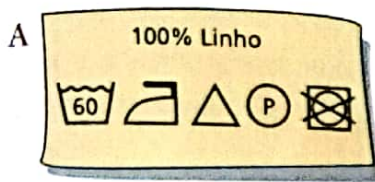
$$x \cdot 12 = 192 \Leftrightarrow x = 192 : 12 \Leftrightarrow x = 16$$

x	4	3	16
y	48	64	12

Exercícios de consolidação



12. Interpreta cada uma das informações.



13. Completa os quadros seguintes:

A

Porcentagem	Fracção decimal	Numeral decimal
7%		
135%		
	$\frac{39}{100}$	

B

Porcentagem	Fracção irredutível	Numeral decimal
20%		
45%		
120%		

14. Calcula:

- a) 25% de 8300 MT b) 46% de 200 m c) 185% de 6,4 kg

15. Será que 30% de 18 é o mesmo que 18% de 30? Explica.

16. Uma reforma de 500 MT teve um aumento de 3%. Qual é o valor actual da reforma?

17. Um desconto de 21% sobre o preço de uma viagem corresponde a 168 meticais. Qual é o preço da viagem sem desconto?

18. Uns calções de banho custam 200 meticais mais 17% de IVA. Quanto pago se me fizerem um desconto de 10%?

IVA – Imposto sobre o Valor Acrescentado

19. Uma obra foi feita por 60 operários em 18 dias. Se trabalharem ao mesmo ritmo, quantos dias demoram 9 operários a fazerem a mesma obra?

20. Um livro tem 300 páginas e cada página tem 24 linhas. Quantas linhas deverá ter cada página do mesmo livro se for reeditado apenas com 240 páginas?

21. Averigua se são inversamente proporcionais as variáveis x e y , cujos valores correspondentes estão registados nas tabelas.

Para as variáveis inversamente proporcionais, indica, em cada caso, a constante de proporcionalidade.

a)

x	1	2,5	5
y	10	4	2

b)

x	3	9	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{4}$
y	$\frac{5}{18}$	$\frac{5}{54}$	15	$\frac{10}{3}$

22. Sabendo que a e b são inversamente proporcionais, indica a constante de proporcionalidade. Copia e completa a tabela:

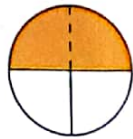
a	0,05	0,2		1,5
b	30		3	

Gráficos circulares

Observa:



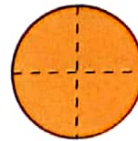
25% colorido



50% colorido



75% colorido



100% colorido

Calcular uma percentagem:
8 é que percentagem de 40?

$$\frac{8}{40} = 0,20 \text{ isto é } 20\%$$

Recorde:

- é útil aplicar mentalmente percentagens:
- 10% de... é dividir por 10; por exemplo: 10% de 80 é 8.
- 50% de... é dividir por 2; por exemplo: 50% de 70 é 35.
- 25% de... é dividir por 4; por exemplo: 25% de 400 é 100.
- 1% de... é dividir por 100; por exemplo: 1% de 750 é 7,5.
- 20% de... é dividir por 5; por exemplo: 20% de 30 é 6.
- 5% de... é dividir por 20; por exemplo: 5% de 30 é 1,5.

Calcular uma percentagem



Exercício resolvido

1. Observa os resultados para a eleição do delegado de turma.
Que percentagem de votos obteve cada candidato?

Resolução:

$$\frac{7}{25} = 0,28 \text{ isto é } 28\%$$

$$\frac{10}{25} = 0,4 \text{ isto é } 40\%$$

$$\frac{8}{25} = 0,32 \text{ isto é } 32\%, \text{ ou } 100\% - (28\% + 40\%) = 32\%$$

2. Um calção de 75 MT custa 48 MT em promoção.
Qual a percentagem de desconto?

Resolução:

O desconto é $75 - 48 = 27$.

É a razão entre o desconto e o preço inicial.



$$\frac{27}{75} = 0,36, \text{ logo, o desconto é de } 36\%.$$

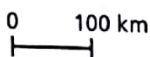
Número de Votantes - 25	
Ana	- 7
Fernando	- 10
José	- 8

Escalas

A escala é a razão entre o comprimento no desenho e o comprimento real correspondente (expressos nas mesmas unidades). As distâncias no desenho são directamente proporcionais às distâncias reais.

$$\text{Escala} = \frac{\text{distância no desenho}}{\text{distância real}}$$

Quando observas um mapa encontras uma indicação referente à escala utilizada, por exemplo:



que significa que o comprimento deste segmento de recta, 1 cm, no mapa, representa uma distância real de 100 km, isto é, 10 000 000 cm.

A escala numérica correspondente é:

$$1 : 10\,000\,000 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{10\,000\,000}$$

As medidas dos comprimentos no desenho e as medidas dos comprimentos reais são directamente proporcionais.

A escala numérica é uma constante de proporcionalidade.

Uma escala também se pode representar na forma gráfica, temos então, a escala gráfica. É muito vulgar este tipo de escalas em mapas e plantas.

<p>3 cm no mapa corresponde a 300 km, ou seja, 1 cm no mapa corresponde a 100 km na realidade.</p>	<p>4 cm no mapa corresponde a 600 km, na realidade, ou seja, 1 cm corresponde a 150 km.</p>
--	---

- Quando projectamos um prédio, um automóvel, um barco,... usamos escalas de redução. As mais vulgares são:

1 : 2	1 : 5	1 : 10	1 : 100 000
1 : 20	1 : 50	1 : 100	1 : 250 000
1 : 200	1 : 500	1 : 1000	1 : 1 000 000
1 : 2000	1 : 5000	1 : 100 000	1 : 2 000 000

- Quando queremos desenhar um micróbio, ou um objecto de pequenas dimensões, usamos escalas de ampliação. As mais usadas são:

2 : 1	5 : 1	10 : 1	100 : 1
-------	-------	--------	---------

UNIDADE 3

- Um objecto desenhado em tamanho real diz-se que está desenhado à escala de 1 : 1.



1:1
Escala real



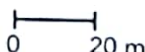
2:1
Escala de ampliação



1:60 000 000
Escala de redução



Exercícios resolvidos

1. Dada a escala gráfica  determina a escala numérica.

Resolução:

1 cm ——— 20 m

Escala numérica: $\frac{1}{2\,000}$

- 2.a) Considere o mapa ao lado. Qual é a escala numérica do mapa?
b) Qual é a distância mínima que percorre um helicóptero numa viagem Maputo-Manhiça?

Resolução:

- a) No mapa consta a escala gráfica.

Com a régua verificas que um segmento de recta com 1 cm corresponde a 10 km.

A escala numérica é: $\frac{1}{1\,000\,000}$

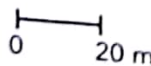
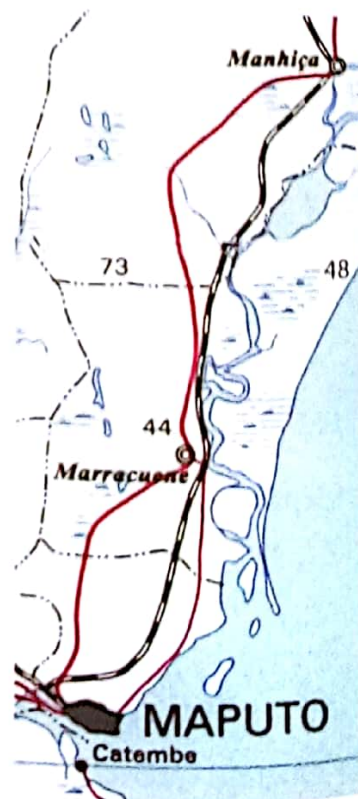
isto é, 1 cm no desenho representa 10 km, ou seja, 1 000 000 cm na realidade.

- b) Com a régua verificas que a distância Maputo-Manhiça no mapa é 8,5 cm.

$$\text{Então: } \frac{1}{10} = \frac{8,5}{x}$$

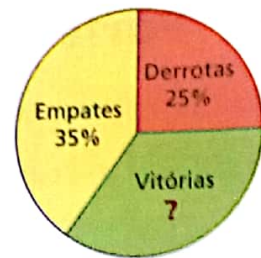
$$x = 8,5 \times 10 \text{ e assim } x = 85$$

Logo, a distância mínima que percorre um helicóptero numa viagem Maputo-Manhiça é 85 km.





23. O gráfico circular representa os resultados obtidos em 60 jogos por uma equipa de futebol.



- Qual a percentagem de vitórias?
- Mostra que a equipa perdeu 15 jogos.
- Qual o número de vitórias? E de empates?

24. Calcula mentalmente:

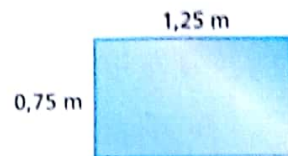
- | | | |
|------------------|-------------------|--------------------|
| a) 10% de 620 MT | b) 5% de 620 MT | c) 10% de 805 g |
| d) 1% de 805 g | e) 50% de 24 ovos | f) 200% de 24 ovos |

25. Numa escola com 125 alunos, 80 são raparigas e noutra, com 600 alunos, 240 são rapazes. Em qual das escolas é maior a percentagem de raparigas? Explica.

26. Um salário de 940 MT subiu para 968,20 MT. Qual foi a percentagem de aumento?

27. A figura ao lado representa um vidro.

- Converte, em centímetros, os comprimentos reais assinalados.
- Usa a régua e mede, em centímetros, os comprimentos correspondentes no desenho.

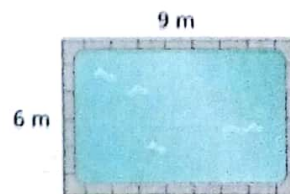


Completa a tabela seguinte:

Comprimento real (cm)			
Comprimento no desenho (cm)			1

28. A maqueta de um barco tem 16 cm de comprimento. Sabendo que o comprimento real do barco é 40 m, qual a escala a que foi feita a maqueta?

29. No projecto de uma casa, um arquitecto representou o comprimento de 12 m por 6 cm. Qual a escala utilizada?



30. Em que escala está desenhada a piscina representada ao lado?

31. Determina a distância real entre Macabula e Ressano Garcia.



Escala 1:250 000

1.ª Parte

Indica a resposta correcta: A, B, C ou D.

1. Em qual das tabelas, as grandezas P e Q são directamente proporcionais?

A.

P	2	4,5	6
Q	8	18	20,5

B.

P	7	10,5	8
Q	21	37,5	24

C.

P	12	25	38
Q	6	12,5	20

D.

P	6	18	40
Q	1,5	4,5	10

2. Na tabela de proporcionalidade directa:

0,8	4	b
a	10	50

a) O valor de a é:

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

b) O valor de b é:

- A. 10 B. 15 C. 20 D. 25

3. À velocidade constante, um ciclista percorre 45 km em 3 horas. Mantendo a velocidade, que distância percorre em 4,5 horas?

- A. 22,5 km B. 67,5 km C. 90 km D. 202,5 km

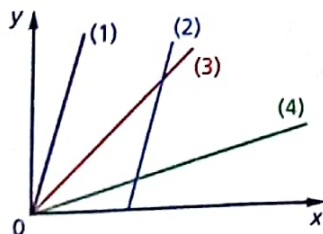
4. Se 12% dum valor são 72 meticais, então o valor é:

- A. 864 MT B. 600 MT C. 300 MT D. 360 MT

5. Qual é a escala num mapa em que 3 cm correspondem a 4,5 km?

- A. 1 : 45 B. 1 : 15 C. 1 : 150 000 D. 1 : 1 500 000

6. Na figura seguinte encontram-se representados quatro gráficos numerados de 1 a 4. Qual é o gráfico que não é de proporcionalidade directa?



- A. 1 C. 3
B. 2 D. 4

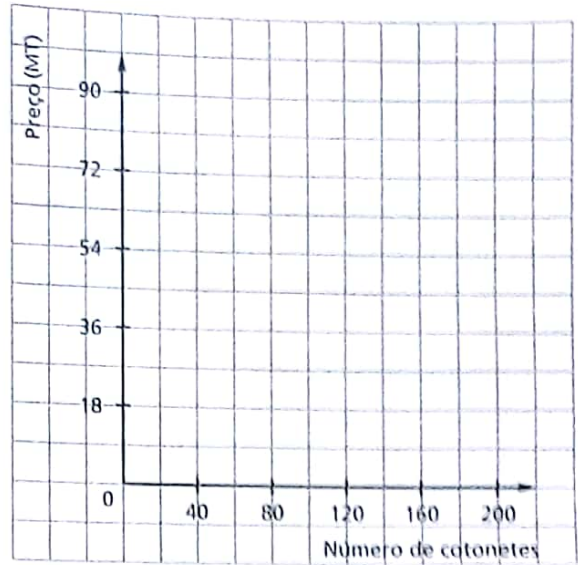


2.ª Parte

1. Observa a tabela seguinte:

Número de cotonetes	40	60	100	200
Preço MT	18	27	45	90

- O preço é directamente proporcional ao número de cotonetes? Justifica a tua resposta.
- Representa graficamente os dados da tabela num sistema de eixos como o da figura.
- Confirma pelo gráfico a resposta à alínea a).
- Indica a constante de proporcionalidade neste caso e explica o seu significado.
- Qual é o preço de 80 destas cotonetes?
- Quantas cotonetes compro com 54 meticais?

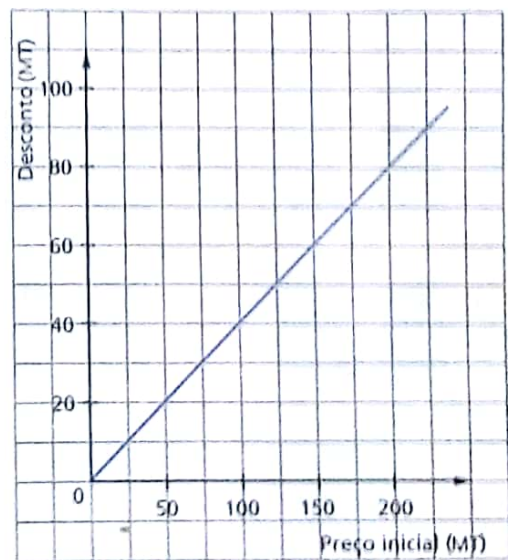


2. Um armazém está em saldos.

a) A partir do gráfico ao lado, completa a tabela:

Preço inicial (MT)	50		
Descontos (MT)		40	70

- O desconto é directamente proporcional ao preço inicial? Porquê?
- Quanto pagarei por um artigo que inicialmente custava 170 meticais?
- Ao comprar um artigo, poupei 90 meticais. Qual era o seu preço inicial?



3. Um sofá custa 15 200 MT sem IVA.

Sabendo que o IVA é de 17%, quanto é o valor do IVA deste sofá?
Qual é o preço de venda do sofá?



4. Num mapa à escala 1 : 1 000 000, a distância entre duas cidades é 6,2 cm. Qual é a distância real entre as duas cidades?

Aplicações

Uma aplicação de A em B é uma correspondência unívoca de A para B.

Ao conjunto de partida (A) dá-se o nome de domínio da aplicação, e os seus elementos dizem-se os objectos (ou originais). Aos seus correspondentes – que são elementos do conjunto de chegada (B) – dá-se o nome de imagens (ou transformados). O conjunto das imagens é o contradomínio da aplicação (pode ser (B) ou um seu subconjunto próprio).

Uma aplicação pode ser definida por diferentes processos – um diagrama de setas, uma tabela, um gráfico cartesiano, uma expressão designatória – de forma a que sejam indicados o domínio, o conjunto de chegada e uma maneira de determinar a imagem de cada elemento do domínio.

Uma aplicação diz-se:

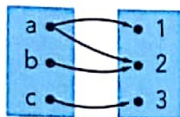
- Sobrejectiva – quando o contradomínio coincide com o conjunto de chegada.
- Injectiva – quando a objectos diferentes entre si correspondem imagens também diferentes entre si.
- Bijectiva – quando é, ao mesmo tempo, sobrejectiva e injectiva.



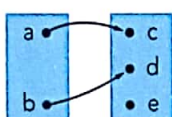
Exercícios resolvidos

1. Os diagramas seguintes representam diferentes correspondências entre conjuntos. Indica, justificando, aqueles que representam aplicações:

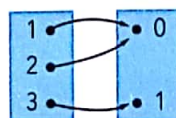
a)



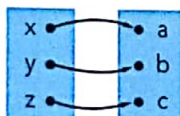
b)



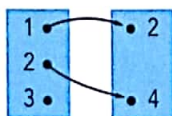
c)



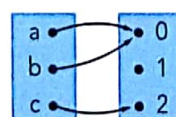
d)



e)



f)



Resolução:

b), c), d), f), representam aplicações, porque cada elemento do conjunto de partida tem uma e uma só imagem.

2. Numa turma da 8.^a classe, alguns alunos obtiveram, no final do 1.^o semestre, nota de 13 valores e, os restantes, nota de 11 valores.

A correspondência do conjunto dos alunos da turma para o conjunto das notas possíveis (0 a 20 valores) pode ser definida por:

$$x \mapsto \text{nota obtida em Matemática}$$

Será uma aplicação? Justifica a resposta e, em caso afirmativo, indica o domínio e o contradomínio.

Resolução:

É. Porque a cada aluno corresponde uma nota e uma só.

$$D = \{\text{alunos dessa turma da 8.ª classe}\}$$

$$D' = \{11, 13\}$$

3. Completa de acordo com as indicações de cada alínea, os diagramas seguintes:

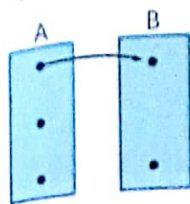


Diagrama 1

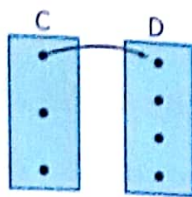


Diagrama 2

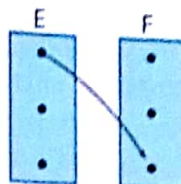
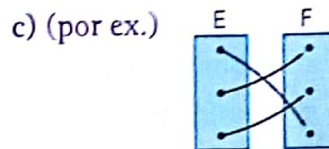
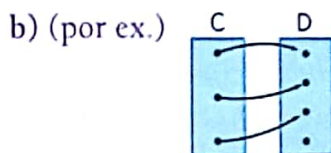
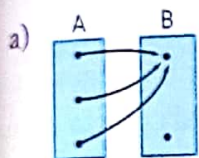


Diagrama 3

- O diagrama 1 – sabendo que ele representa uma aplicação não injectiva e não sobrejectiva.
- O diagrama 2 – sabendo que ele define uma aplicação injectiva.
- O diagrama 3 – de forma a que a aplicação respectiva seja bijectiva.
(Nota: só podes traçar setas, não podes acrescentar elementos aos conjuntos.)
- Os diagramas 1 e 2 nunca poderiam representar aplicações bijectivas. Porquê?

Resolução:



d) Em 1, A e B não têm o mesmo número de elementos e o mesmo sucede em 2 com C e D.

4. Considera as aplicações $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

- A aplicação a é injectiva ou não injectiva? Porquê?
- E a aplicação b ?
- Se soubermos que a é uma aplicação bijectiva, que poderemos concluir acerca do conjunto de chegada dessa aplicação? Justifica a resposta.

Resolução:

- Injectiva, pois a objectos diferentes correspondem imagens diferentes.
- Não injectiva, porque, por exemplo, $b(1) = b(4) = 3$.
- É o conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$ pois, sendo sobrejectiva, o conjunto de chegada coincide com o contradomínio.

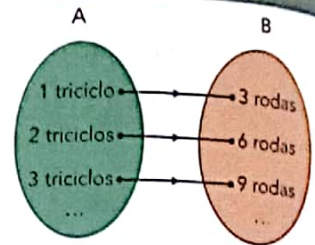
Conceito de função

Um triciclo tem três rodas, dois triciclos têm seis rodas. Quantas rodas têm três triciclos? E quatro? E n triciclos? Estabeleceu-se uma correspondência entre triciclos e rodas. O número de rodas depende do número de triciclos.

A cada número de triciclos corresponde um único número de rodas.

O conjunto de pares ordenados:

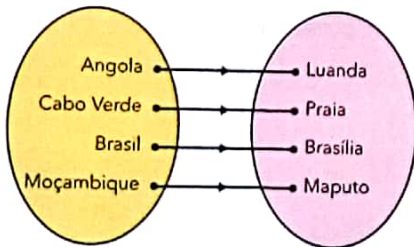
$(1, 3) (2, 6) (3, 9) (4, 12) (\dots, \dots)$ define esta função, correspondência que a cada elemento do conjunto A faz corresponder um e um só elemento do conjunto B.



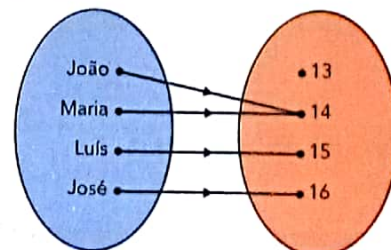
Exemplos

1. Outros exemplos de funções:

- A correspondência que a cada raio faz corresponder o comprimento da circunferência (perímetro do círculo).
- A correspondência entre espaço percorrido e tempo gasto a percorrê-lo, no movimento uniforme.
- A correspondência que a cada número inteiro relativo faz corresponder o seu quadrado.
- A correspondência entre cada país e a sua capital.
- A correspondência entre cada pessoa e a sua idade em anos.

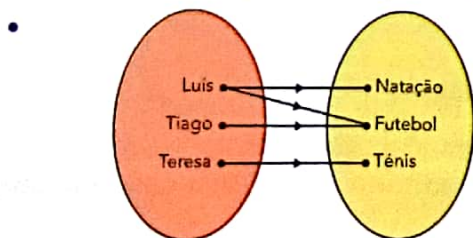


Capital de... A cada país corresponde uma e uma só capital.

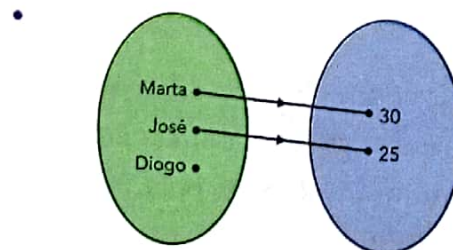


Idade em anos de... A cada pessoa corresponde uma e uma só idade.

2. Não são funções, as correspondências seguintes:



Desporto praticado por... A cada aluno não corresponde um e um só desporto. O Luís pratica dois.



Dias de férias de... Ao Diogo não corresponde um número de dias de férias.

Dados dois conjuntos, A e B, chama-se função de A para B a toda a correspondência que a cada elemento de A faz corresponder um e um só elemento de B.

Modos de definir uma função

Vamos representar de três maneiras diferentes, através de uma tabela (1), através de um gráfico cartesiano (2) e através de uma expressão algébrica (3), a função que relaciona o número de triciclos com o número de rodas.

1. Tabela

Triciclos	1	2	3	...
Rodas	3	6	9	...

2. Gráfico cartesiano

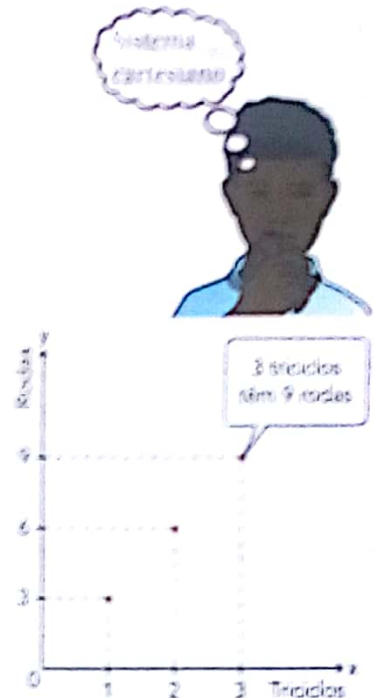
No sistema de eixos cartesianos representamos os pares ordenados que definem a função. No exemplo «triciclos e rodas»,

(1, 3) (2, 6) (3, 9) (...)

- O primeiro elemento do par, abcissa, representa-se no eixo Ox (eixo das abcissas).
- O segundo elemento do par, ordenada, representa-se no eixo Oy (eixo das ordenadas).

Neste exemplo, não faz sentido unir os pontos do gráfico.

Porquê?



3. Expressão algébrica

Escolheu-se a letra t , para o número de triciclos, e a letra r , para o número de rodas. Que expressão relaciona r e t ? É $r = 3t$.

Para mostrar que r depende de t , escreve-se:

$$r(t) = 3t \quad \text{ou} \quad r: A \rightarrow B$$

$$t \rightarrow 3t$$

- r e t são variáveis.
- t é a variável independente e os valores desta variável chamam-se objectos. O conjunto dos objectos é o domínio da função, D .
- r é a variável dependente. Os transformados dos objectos, isto é, os seus correspondentes no conjunto de chegada B , chamam-se imagens. O conjunto das imagens é o contradomínio da função, D' .

No nosso exemplo, função r de A em B :

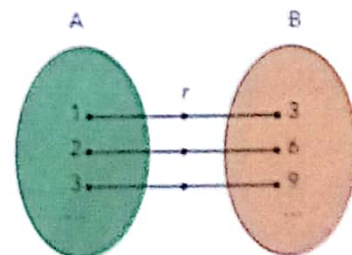
$$D = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$D' = \{3, 6, 9, \dots\}$$

$$r(1) = 3$$

$$r(2) = 6$$

$$r(3) = 9$$



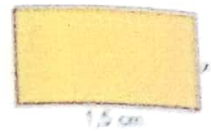
Já sabes que $r(t)$ se representa no eixo Oy e que t se representa no eixo Ox . De um modo geral, podemos escrever ainda:

$$y = 3x$$



Exemplo

Um rectângulo tem 1,5 cm de comprimento e largura variável x cm.
Determinou-se a área do rectângulo para diferentes valores da variável x .



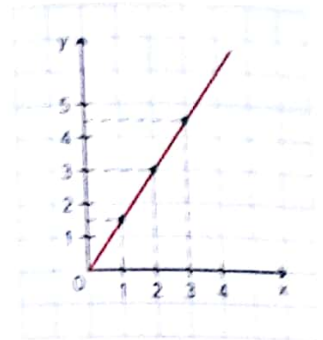
Vamos representar esta função por:

- Tabela

x (largura em cm)	1	2	3
y (área em cm ²)	1,5	3	4,5

- Gráfico cartesiano

No sistema de eixos cartesianos, representamos os pontos da tabela e unimo-os porque, por exemplo, para valores entre zero e 1 correspondem áreas entre zero e 1,5.



- Expressão algébrica

$$y = 1,5x$$

Função – correspondência entre duas variáveis, em que a cada valor da variável independente corresponde um, e um só, valor da variável dependente.

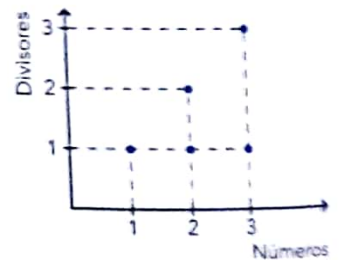
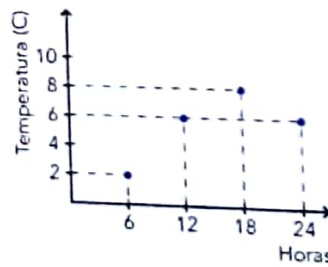


Exercícios resolvidos

Qual das correspondências é uma função? Justifica.

Para a função, indica:

- Domínio e contradomínio.
- Os objectos que têm a mesma imagem.
- A imagem do objecto 12.



Resolução:

Só o gráfico A representa uma função. No gráfico B, ao objecto 3 correspondem duas imagens, 1 e 3, logo, não é função.

a) $D = \{6, 12, 18, 24\}$ $D' = \{2, 6, 8\}$

b) 12 e 24

c) 6

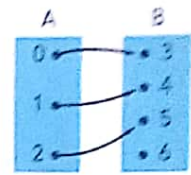


32. Designando por H o conjunto dos seres humanos:

- a) A correspondência $H \rightarrow H$, definida por $x \rightarrow$ irmão de x será uma aplicação? Porquê?
 b) E a correspondência $H \rightarrow \mathbb{N}_0$, tal que $x \rightarrow$ idade de x (em anos)? Justifica.

33. O diagrama define uma aplicação de A em B .

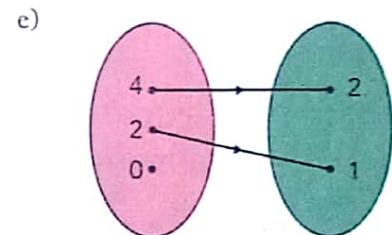
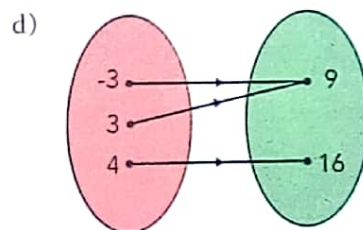
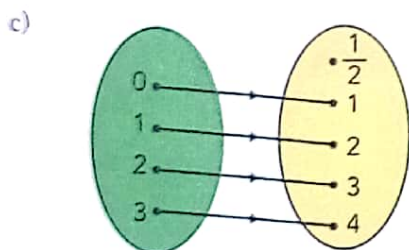
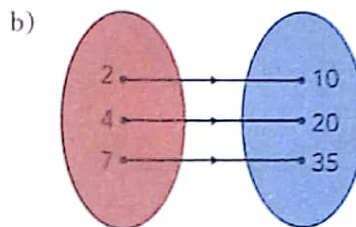
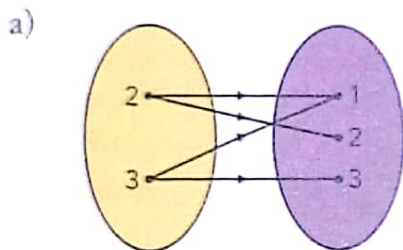
- a) Qual é a imagem de 1?
 b) Que objecto tem 5 por imagem?
 c) Qual é o domínio da aplicação?
 d) Qual é o contradomínio?



34. A respeito da aplicação $\{0, 1, 2\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$
 $x \rightarrow 2x + 1$

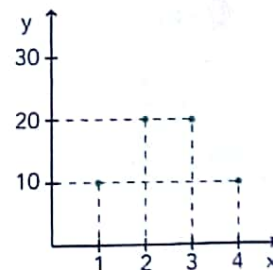
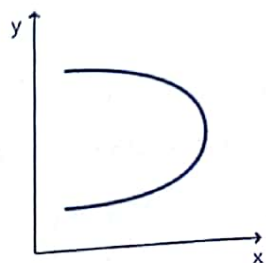
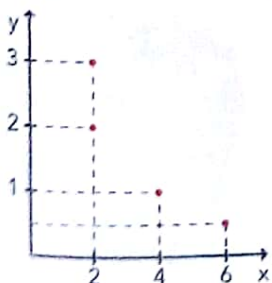
- a) Classifica-a quanto à sobrejectividade. b) Classifica-a quanto à injectividade.
 (Nota: se considerares necessário, podes começar por construir um diagrama da aplicação.)

35. Quais das correspondências seguintes são funções? Justifica a resposta.



- f) A correspondência que a cada aluno de uma turma associa o seu número na pauta.
 g) A correspondência que a cada artigo, numa loja, associa o seu preço com 10% de desconto.

36. a) Qual das correspondências é uma função? Justifica.



- b) Para a função, indica:
 b.1) Domínio e contradomínio.

b.2) Dois objectos com a mesma imagem.



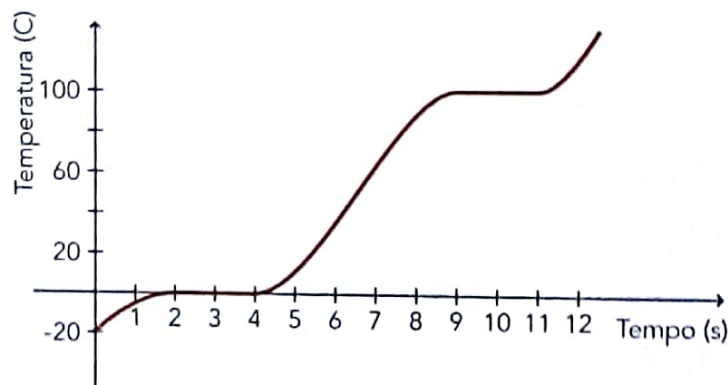
Exercícios de consolidação

37. A tabela indica os pontos de fusão de algumas substâncias. O ponto de fusão é função da substância, como sabes.

Substância	Ponto de fusão (°) (C)
Oxigénio	- 218
Dióxido de carbono	- 78
Éter	- 116
Água	0
Mercurio	- 39
Ferro	1535

- Qual é a imagem do éter?
- Quais são os objectos cujas imagens têm valores inferiores a $-100\text{ }^{\circ}\text{C}$?
- Escreve o domínio e o contradomínio da função dada.
- Qual é o estado físico de cada substância a $30\text{ }^{\circ}\text{C}$?
- Qual é a substância cujo ponto de fusão é o dobro do ponto de fusão do mercúrio?

38. Observa o gráfico que mostra como se comporta uma quantidade de água pura durante o aquecimento.



- Qual é a variável independente? E a variável dependente?
- Qual é a imagem do objecto zero? E do 3?
- A partir de quantos segundos, a água se encontra no estado líquido?
- Qual é o significado físico do patamar horizontal entre os 9 e os 11 segundos?

39. Sendo $E = \{1, 2, 3\}$ e $F = \{4, 8, 12\}$, consideremos a aplicação $E \rightarrow F$, definida por $x \mapsto 4 \cdot x$

- Determina o conjunto das imagens e representa-o extensivamente.
- Escreve os pares ordenados formados por cada um dos elementos de E e pela respectiva imagem (em F).
- Representa a aplicação utilizando um gráfico cartesiano.

40. h é a aplicação de \mathbb{Q} em \mathbb{Q} , definida por $x \mapsto h(x) = 2x - \frac{1}{2}$

Calcula:

- $h(0)$
- $h(-2)$
- x tal que $h(x) = 0$
- $h(3)$
- $h\left(\frac{1}{5}\right)$
- x tal que $h(x) = -1$



41. Considera as aplicações $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

- A aplicação a é injectiva ou não injectiva? Porquê?
- E a aplicação b ?
- Se soubermos que a é uma aplicação bijectiva, que poderemos concluir acerca do conjunto de chegada dessa aplicação? Justifica a resposta.

Função de proporcionalidade directa

Calcularam-se os perímetros de vários quadrados, conhecidos os comprimentos dos lados, e registaram-se os resultados numa tabela:

Lado do quadrado (x; em cm)	1	2	3	4
Perímetro do quadrado (y; em cm)	4	8	12	16

$+1 \quad +1 \quad +1$
 $+4 \quad +4 \quad +4$

Por observação da tabela, podes concluir que:

- Se trata de uma situação de proporcionalidade directa, sendo 4 a constante de proporcionalidade. Logo:

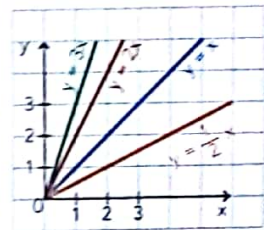
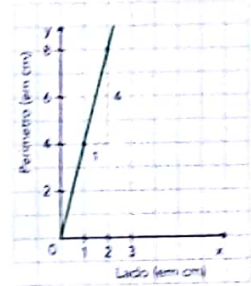
$$y = 4x$$

- Por outro lado, se x aumenta 1 unidade, y aumenta 4 unidades.

Vamos representar graficamente $y = 4x$:

A representação gráfica é uma recta que:

- Passa na origem do sistema de eixos coordenados.
- Tem declive 4, isto é, $k = 4$.
- As funções $y = kx$ ou $x = kx$ com $k \neq 0$ são funções afins lineares.
- O gráfico é uma recta que passa na origem do sistema de eixos coordenados. k é o declive da recta.
- Uma situação de proporcionalidade directa traduz-se por uma função do tipo:



$x = kx$ sendo k a constante de proporcionalidade.



Exercício resolvido

Seja a função $f(x) = 1,2x$:

a) Calcula: $f(0)$ $f(-3)$ $f\left(\frac{5}{6}\right)$

b) Qual é o objecto que tem por imagem 6?

c) Trata-se de uma função de proporcionalidade directa? Justifica.

Resolução:

a) $f(0) = 1,2 \times 0 = 0$; $f(-3) = 1,2 \times (-3) = -3,6$; $f\left(\frac{5}{6}\right) = 1,2 \times \frac{5}{6} = \frac{12}{10} \times \frac{5}{6} = \frac{2}{2} = 1$

b) $1,2x = 6 \Leftrightarrow x = \frac{6}{1,2} \Leftrightarrow x = 6 \times \frac{10}{12} \Leftrightarrow x = 5$

c) É uma função de proporcionalidade directa pois é uma função do tipo $x = kx$ (em que $k = 1,2$).

Gráfico da função $x \rightsquigarrow kx + b$

Num laboratório, mediu-se a temperatura de um líquido a medida que este aquecia e fez-se o registo numa tabela.

Vamos descobrir qual é a expressão algébrica desta função. Observa a sequência de valores das variáveis:

$x \rightarrow$ tempo em minutos;

$y \rightarrow$ temperatura em °C.

x	0	1	2	3	4	5
y	10	12	14	16	18	20

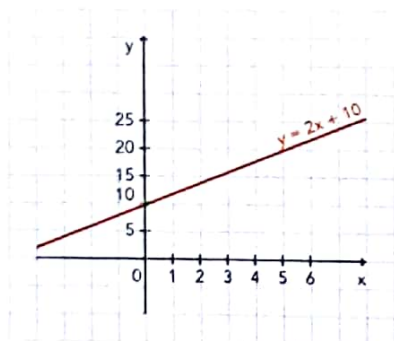


		+1	+1	+1	+1	+1
x	0	1	2	3	4	5
y	$10 + 2 \times 0$	$10 + 2 \times 1$	$10 + 2 \times 2$	$10 + 2 \times 3$	$10 + 2 \times 4$	$10 + 2 \times 5$
		+2	+2	+2	+2	+2

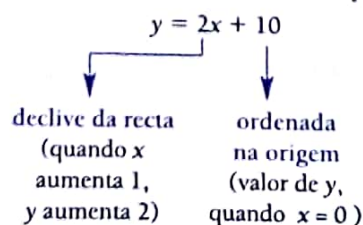
Observa que, se x aumenta 1 unidade, y aumenta 2 unidades. Então, a expressão algébrica da função representada na tabela é:

$$y = 10 + 2x \text{ ou seja } y = 2x + 10$$

Vamos representar graficamente a função $y = 2x + 10$ utilizando os valores da tabela.



O gráfico de $y = 2x + 10$ é uma recta que não passa na origem do sistema de eixos.



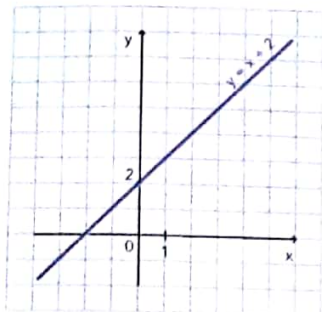
- As funções $y = kx + b$ ou $x \rightsquigarrow kx + b$ são funções afins.
- O gráfico é uma recta que corta o eixo dos yy no ponto $(0, b)$. k é o declive da recta.
- Rectas com o mesmo declive são paralelas.



Exemplos

Outros exemplos de funções $x \hookrightarrow kx + b$:

$x \hookrightarrow x + 2$



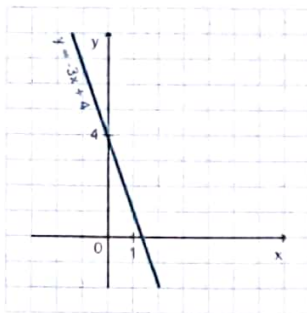
x	1	2	3
y	3	4	5

$y = 1x + 2$

↓
declive

↓
ordenada na origem

$x \hookrightarrow -3x + 4$



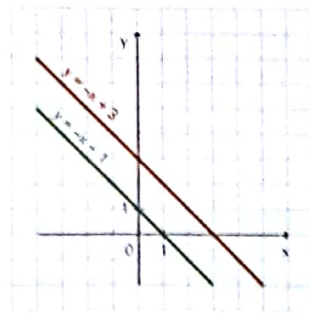
x	-1	0	1
y	7	4	1

$y = -3x + 4$

↓
declive

↓
ordenada na origem

$x \hookrightarrow -x + 1$ e $x \hookrightarrow -x + 3$



x	0	1	2
y	1	0	-1

$y = -x + 1$

↓
declive -1

x	-1	0	1
y	4	3	2

$y = -x + 3$

↓
declive -1

Estas rectas têm o mesmo declive, $k = -1$, logo, são rectas paralelas.



Exercícios resolvidos

1. a) Escreve de diferentes formas a expressão algébrica da função f , que a cada elemento x do domínio faz corresponder a soma do dobro de x com uma unidade.

b) Completa: $f(3) = \dots$ $f(\dots) = 17$

Resolução:

a) $x \hookrightarrow 2x + 1$ ou $f(x) = 2x + 1$ ou $y = 2x + 1$ ou $x \hookrightarrow f(x) = 2x + 1$

b) $f(3) = 2 \times 3 + 1 = 7$ $2x + 1 = 17 \Leftrightarrow 2x = 16 \Leftrightarrow x = 8$

2. Descobre a expressão algébrica de uma função $x \hookrightarrow kx + b$, a que pertencem os pontos (x, y) da tabela.

x	0	1	2	3
y	3	5	7	9

Resolução:

Para $x = 0$ temos $y = 3$, isto é, a ordenada na origem é 3 logo $b = 3$

Observando a tabela, vemos que: quando x aumenta uma unidade, y aumenta duas unidades logo, o declive é positivo e igual a 2, ou seja, $k = 2$

Então, a função é: $x \hookrightarrow kx + b$ isto é $x \hookrightarrow 2x + 3$

↓ ↓
2 3

Gráfico da função $x \curvearrowright b$

Sejam as funções:

$$y = 2$$

- É uma função do tipo

$$x \curvearrowright kx + b$$

com

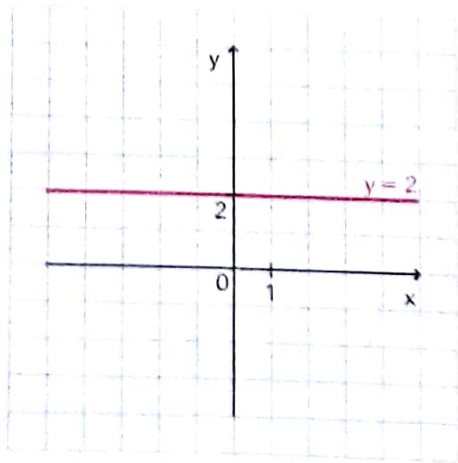
$$k = 0 \text{ (declive nulo)}$$

$$b = 2$$

- Qualquer objecto x , nesta função, tem por imagem 2.

Graficamente:

x	1	2	3
y	2	2	2



$$y = -1$$

- É uma função do tipo

$$x \curvearrowright kx + b$$

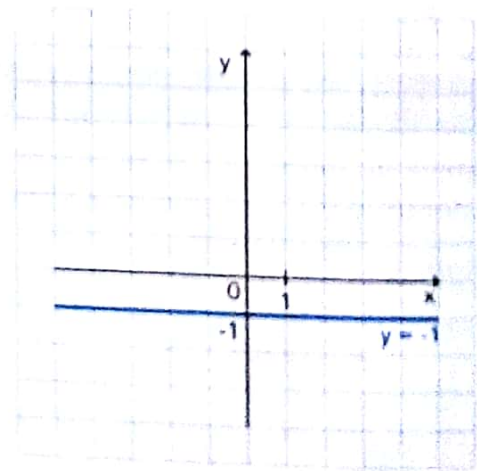
com

$$k = 0 \text{ (declive nulo)}$$

$$b = -1$$

- Qualquer objecto x , nesta função, tem por imagem -1.

x	-2	-1	0
y	-1	-1	-1



- As funções $y = b$ ou $x \curvearrowright b$ designam-se por funções afins constantes.
- O gráfico é uma recta paralela ao eixo dos xx que corta o eixo dos yy no ponto $(0, b)$.

Função de proporcionalidade inversa

O produto de dois números positivos é 4. Que números podem ser?

Se representarmos por x e y esses números, podemos escrever:

$$x \cdot y = 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{y} \Leftrightarrow y = \frac{4}{x}$$



Se escrevermos:

$y = \frac{4}{x}$ $\left\{ \begin{array}{l} y \text{ é função de } x \\ \text{é a expressão algébrica ou analítica da função de proporcionalidade inversa que a } x \\ \text{faz corresponder } y = \frac{4}{x} \end{array} \right.$

ou seja,

$x \curvearrowright y = \frac{4}{x}$ função de proporcionalidade inversa, onde:

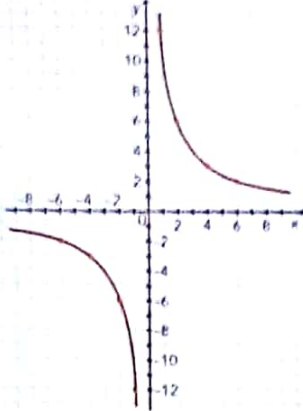
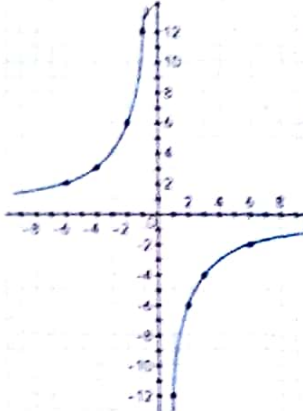
- x – variável independente.
- y – variável dependente.

Vamos definir a função de proporcionalidade inversa, cuja expressão analítica é $y = \frac{4}{x}$, de outras formas:

Por uma tabela							Por um gráfico															
Atribuímos valores a x e calculamos y .							A cada par de números (x, y) da tabela vai corresponder um ponto, num sistema de eixos cartesianos.															
• Se $x = 0,5$ vem $y = \frac{4}{0,5}$							O gráfico da função de proporcionalidade inversa $x \curvearrowright y = \frac{4}{x}$ é um ramo de uma curva chamada hipérbole.															
• Se $x = 1$ vem $y = \frac{4}{1}$.																						
<table border="1"> <tr> <td>x</td> <td>0,5</td> <td>1</td> <td>1,6</td> <td>2,5</td> <td>4</td> <td>...</td> </tr> <tr> <td>y</td> <td>8</td> <td>4</td> <td>2,5</td> <td>1,6</td> <td>1</td> <td>...</td> </tr> </table>							x	0,5	1	1,6	2,5	4	...	y	8	4	2,5	1,6	1	...	As coordenadas (x, y) de qualquer ponto desta curva são soluções de $x \cdot y = 4$.	
x	0,5	1	1,6	2,5	4	...																
y	8	4	2,5	1,6	1	...																

No exemplo que acabaste de estudar, para a função $x \curvearrowright y = \frac{4}{x}$, considerámos apenas valores positivos, tendo em conta o enunciado do problema. No entanto, no estudo de uma função de proporcionalidade inversa, do tipo $x \curvearrowright y = \frac{k}{x}$, podemos atribuir a x qualquer valor positivo ou negativo (excepto zero).

Vamos representar graficamente duas funções:

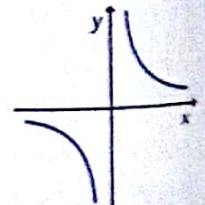
$k > 0$	$k < 0$
$x \curvearrowright y = \frac{12}{x}$ 	$x \curvearrowright y = -\frac{12}{x}$ 
<p>O gráfico desta função é uma hipérbole, que se encontra nos 1.º e 3.º quadrantes e é simétrica em relação a origem do sistema de eixos cartesianos.</p>	<p>O gráfico desta função é uma hipérbole, que se encontra nos 2.º e 4.º quadrantes e é simétrica em relação a origem do sistema de eixos cartesianos.</p>

Uma função de proporcionalidade inversa é do tipo: $x \curvearrowright y = \frac{k}{x}$ onde:

- $k \neq 0$ – constante de proporcionalidade inversa.
- x – variável independente.
- y – variável dependente.

A função de proporcionalidade inversa pode ser definida por:

- Uma expressão algébrica ou analítica $\rightarrow y = \frac{k}{x}$
- Uma tabela.
- Um gráfico – o gráfico de uma função de proporcionalidade inversa é uma curva chamada hipérbole.



Exercício resolvido

1. Quatro automóveis percorrem a mesma distância (entre duas povoações); mas como se deslocam com velocidades diferentes, o tempo que gastam varia...

Velocidade média (em km/h) v	40	60	80	100
Tempo gasto (em horas) t	3	2	1,5	1,2

- a) Qual é a distância?
- b) O tempo e a velocidade média são grandezas directa ou inversamente proporcionais?
- c) Indica uma expressão que defina esta aplicação.

Resolução:

a) 120 km

b) Inversamente proporcionais

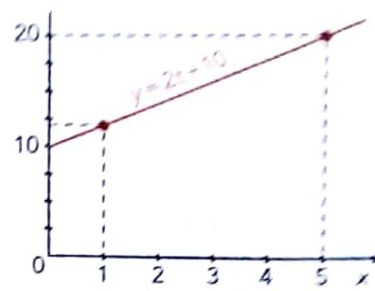
$$c) t = \frac{120}{v}$$

Análise de gráficos

Dada a função $t \mapsto y = 2t + 10$

Vamos representá-la por um gráfico.

t	0	1	5
y	100	120	200



- O quociente $\frac{y}{t}$ não é constante $\frac{100}{0} \neq \frac{120}{1} \neq \frac{200}{5}$. Não é proporcionalidade directa.
- O produto dos valores correspondentes a t e a y não é constante:
 $0 \times 100 \neq 1 \times 120 \neq 5 \times 200$. Não é proporcionalidade inversa.
- O gráfico não é um conjunto de pontos alinhados com a origem, ou seja, não é uma recta que passa pela origem.
- O gráfico não é uma hipérbole.

Conclusão: y em função de t não é função de proporcionalidade directa nem inversa.

Problema 1:

Um camião cisterna que continha 10 000 litros de gasolina, foi esvaziado em 50 minutos. A tabela mostra a quantidade de gasolina, na cisterna, de 10 em 10 minutos.

Tempo (em minutos)	0	10	20	30	40	50
Gasolina na cisterna (em litros)	10 000	6000	3000	1500	500	0

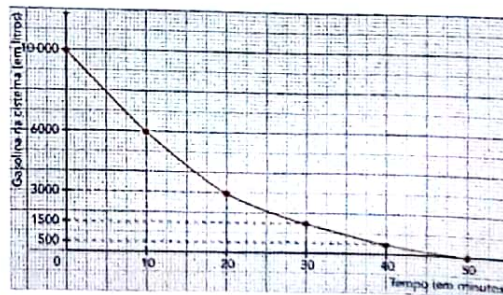
Vamos analisar esta função e representá-la graficamente.

- O quociente de valores correspondentes não é constante, logo, não é proporcionalidade directa.
- À medida que o tempo aumenta, o número de litros de gasolina diminui, mas o produto de valores correspondentes não é constante, logo, não é proporcionalidade inversa.

A informação dada na tabela pode, como já sabes, ser dada por um gráfico, do qual podes tirar as mesmas conclusões.

- O gráfico não é uma recta a passar na origem, logo, não é proporcionalidade directa.
- O gráfico, embora seja uma curva, não é uma hipérbole (xy não é constante) logo, não é proporcionalidade inversa.

Conclusão: A quantidade de gasolina na cisterna em função do tempo não é nem função de proporcionalidade directa nem inversa.





42. Dada a função $g(x) = -\frac{2}{3}x$

a) Calcula:

- $g(3)$ • $g(21)$ • $g(1)$ • $g(-3)$

b) Representa graficamente a função $g(x)$. Trata-se de uma função de proporcionalidade directa?

c) Por leitura gráfica, descobre os valores de x , tais que:

- $g(x) = 0$ • $g(x) = -4$ • $g(x) = 2$

43. Um elevador de uma torre sobe à velocidade constante de 2 m/s.

a) Copia e completa a tabela:

Tempo do trajecto (s)	30	50	90	120
Altura atingida (m)		100		



b) Qual é a função que permite traduzir a situação de proporcionalidade directa acima referida?

c) Quantos segundos demora o elevador a subir 150 m?

44. Dadas as funções:

$$f(x) = -2x \quad g(x) = 3x \quad h(x) = \frac{1}{2}x$$

a) Representa, no mesmo sistema de eixos, f , g e h .

b) Por leitura gráfica, copia e completa:

- i) $f(-2) = \dots$ ii) $g(-1) = \dots$ iii) $h(6) = \dots$

c) A partir dos gráficos, descobre os valores de x que verificam:

- i) $f(x) = -4$ ii) $g(x) = -3$ iii) $h(x) = -1$

45. Escreve de outra forma a função:

i) g , que a cada elemento do domínio faz corresponder a diferença entre o seu dobro e três;

ii) $h: x \mapsto -3x + 1$

a) Sendo $t(x) = -1 - \frac{1}{2}x$, escreve $t(x)$ de outra forma.

b) Copia e completa:

- $t(0) = \dots$ • $t(-1) = \dots$ • $t\left(-\frac{1}{2}\right) = \dots$ • $t(\dots) = -2$ • $t(\dots) = 4$

46. Seja a função $f(x) = 2x - 1$.

a) Copia e completa a tabela:

x	-2	-1	0			
$f(x)$				9	5	0

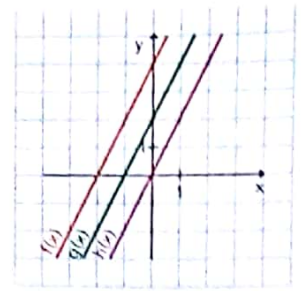
b) Representa graficamente a função.

Exercícios de consolidação



47. Observa o gráfico das funções f , g e h .

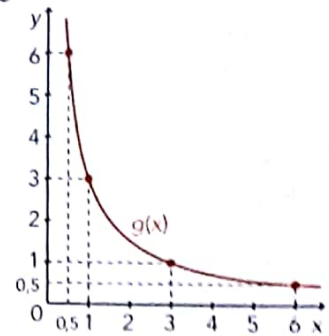
- Para cada uma das rectas, indica a ordenada na origem.
- Escreve a expressão algébrica das funções f , g e h .
- Qual das funções é de proporcionalidade directa?
Indica a constante de proporcionalidade.



48. Observa o gráfico de $g(x)$.

- A função $g(x)$ representada no gráfico é de proporcionalidade inversa? Justifica.
- Indica a constante de proporcionalidade.
- Escreve a expressão analítica de $g(x)$.
- Copia e completa a tabela:

x	0,5	1	3	6
$g(x)$				

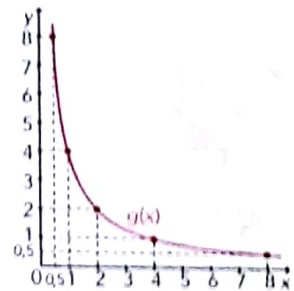
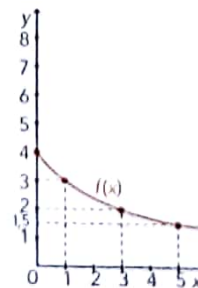


e) Qual é a imagem de 5 por $g(x)$?

49. Observa os gráficos de $f(x)$ e $g(x)$.

- Justifica as afirmações:
 - « $f(x)$ não é função de proporcionalidade inversa».
 - « $g(x)$ é função de proporcionalidade inversa».
- Escreve a expressão analítica de $g(x)$.
- Copia e completa a tabela.

x	0,5	1	4	
$g(x)$		2		0,5



d) Copia e completa:

• $f(3) = \dots$

• $f(\dots) = 4$

• $g(\dots) = 4$

50. O produto de dois números é 12.

- Designando os números por x e y , escreve uma expressão que os relacione.
- Justifica a afirmação: « x e y são inversamente proporcionais».
- Considerando a função de proporcionalidade inversa: $x \curvearrowright y = \frac{12}{x}$, copia e completa a tabela.

x	-3	-2	-1	1,5	2	3
y						

d) Representa graficamente a seguinte função de proporcionalidade inversa $x \curvearrowright y = \frac{12}{x}$

Exercícios propostos

1. Num armazém, esta semana, todos os artigos têm o desconto de 30%. Sendo x o preço do artigo e $f(x)$ o desconto:
- Expressa o desconto em função do preço.
 - O desconto é directamente proporcional ao preço? Se sim, qual a constante de proporcionalidade?
 - Qual o desconto num artigo marcado com o preço de 820 meticais?
 - Quantos meticais marca um artigo em que o desconto é de 9%?

2. Numa livraria, no dia 1 de Janeiro de cada ano, o preço dos livros aumenta 4%. Sendo x o preço inicial e y o preço já com aumento:

x	60	195
y	104	208

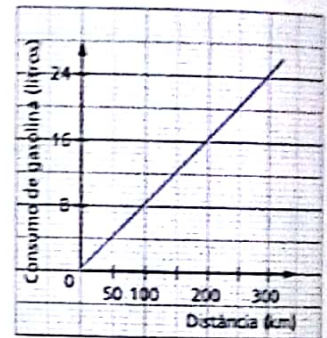
- Copia e completa a tabela:
- Trata-se de uma função de proporcionalidade directa? Qual a constante de proporcionalidade?
- Representa a função por uma expressão algébrica.

3. O gráfico ao lado representa a relação entre os consumos de gasolina de um automóvel e as correspondentes distâncias percorridas.

- Serão os consumos directamente proporcionais às distâncias? Porquê?

- A partir do gráfico, completa a tabela seguinte:

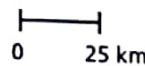
Distância (km)		100	200	
Gasolina consumida (l)	4			20



4. Calcula mentalmente:

- | | | |
|---------------------|------------------------|-------------------------|
| a) 10% de 300 Mt | b) 5% de 300 Mt | c) 50% de 44 alunos |
| d) 25% de 44 alunos | e) 1% de 8000 garrafas | f) 20% de 8000 garrafas |

5. Num mapa de estradas consta a informação



- Explica o seu significado.
- Relativamente ao mapa de estradas, completa a seguinte tabela de proporcionalidade directa:

Distância real (km)		75		225
Distância no mapa (cm)	1		5	

6. Duas cidades distam 260 km. Num mapa feito à escala 1 : 2 500 000, qual a distância entre as cidades?

7. Num mapa desenhado à escala, indica as distâncias reais representadas por:

- 6 cm
- 10 cm
- 2,5 cm

8. Usei uma ampliação de 2000 \times no meu microscópio. Determina os comprimentos observados das células, cujo comprimento real é:

- 0,02 mm
- 0,005 mm

Exercícios propostos



9. Averigua se são inversamente proporcionais as variáveis x e y , cujos valores correspondentes estão registados nas tabelas. Para as variáveis inversamente proporcionais, indica, em cada caso, a constante de proporcionalidade.

a)

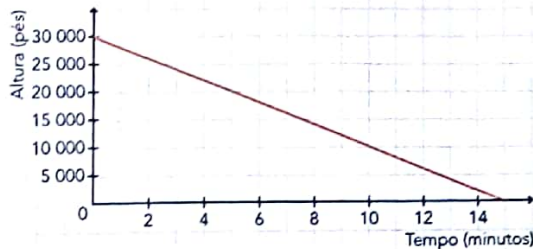
x	6	8	10	12
y	36	27	26	20

b)

x	1	2	3	4	5
y	1,14	0,57	0,38	0,285	0,228

10. Uma avioneta, que voa a 30 000 pés, inicia a descida para a aterragem à velocidade constante de 2000 pés por minuto.

Observa o gráfico:



a) Escreve a expressão algébrica da função que relaciona a altura a que se encontra a avioneta em função do tempo de descida.

b) Quantos minutos demora a descida?

c) Trata-se de uma função afim linear?

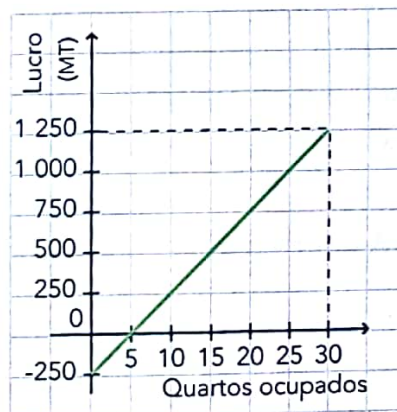
11. No gráfico, o lucro é função do número de quartos ocupados por dia, num hotel com 30 quartos.

a) Nesta situação, explica o significado de $(0, -250)$.

b) Qual é o número mínimo de quartos que devem ser ocupados para não haver prejuízo?

c) Se num dia, a ocupação for de 100%, qual é o lucro?

d) Escreve a expressão algébrica que define esta função.



12. Numa prova de ciclismo, os concorrentes têm de percorrer 60 quilómetros.

O gráfico seguinte representa a velocidade média, em km/h, e o tempo, em horas, gasto por cada ciclista.

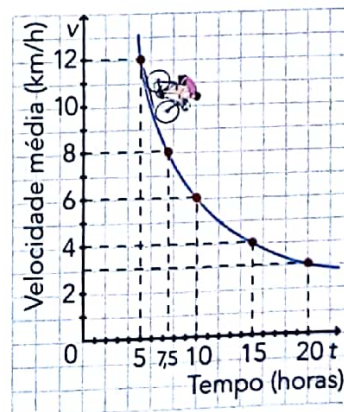
a) Justifica que existe proporcionalidade inversa entre as grandezas v e t .

b) Qual é a constante de proporcionalidade e qual o seu significado?

c) Escreve a expressão analítica da função.

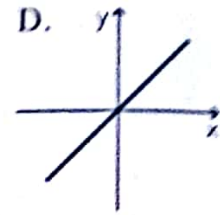
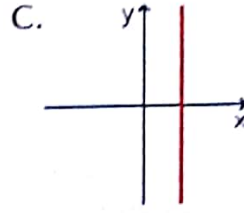
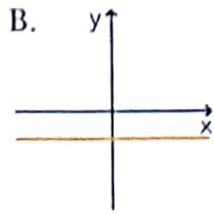
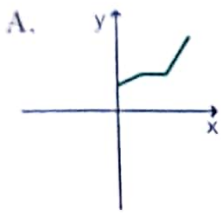
d) Se a velocidade média fosse de 20 km/h, que tempo demorava o ciclista a fazer o percurso?

e) Se o ciclista demorou 12 horas a fazer o percurso, qual é a sua velocidade média?



1.ª Parte

1. O gráfico que não representa uma função é:



2. Sendo $f(x) = 3x$, então a imagem do objecto -5 é:

A. 8

B. -15

C. $-\frac{3}{5}$

D. 15

3. Sendo $g(x) = -0,5x$, então -2 é imagem do objecto:

A.) 4

B. 1

C. $\frac{5}{20}$

D. -4

4. Um automobilista circula a uma velocidade média de 60 km/h, percorrendo a distância entre duas cidades em três horas. Se na viagem de regresso fizer o mesmo trajecto, à velocidade média de 48 km/h, quantas horas vai demorar?

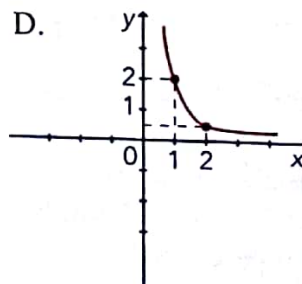
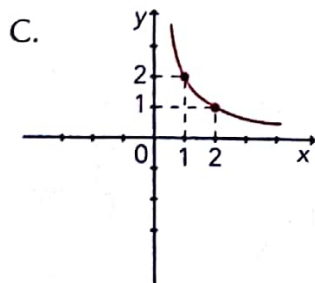
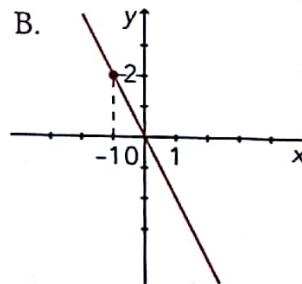
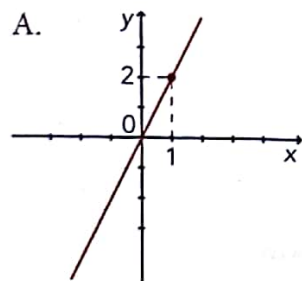
A. 2,5

B. 5,25

C. 3,75

D. 4,5

5. A representação gráfica da função de proporcionalidade inversa que a x associa $\frac{2}{x}$ é:



6. Qual das seguintes funções não é de proporcionalidade directa nem de proporcionalidade inversa?

A. $x \sim \frac{5}{x}$

B. $x \sim \frac{3}{2}x$

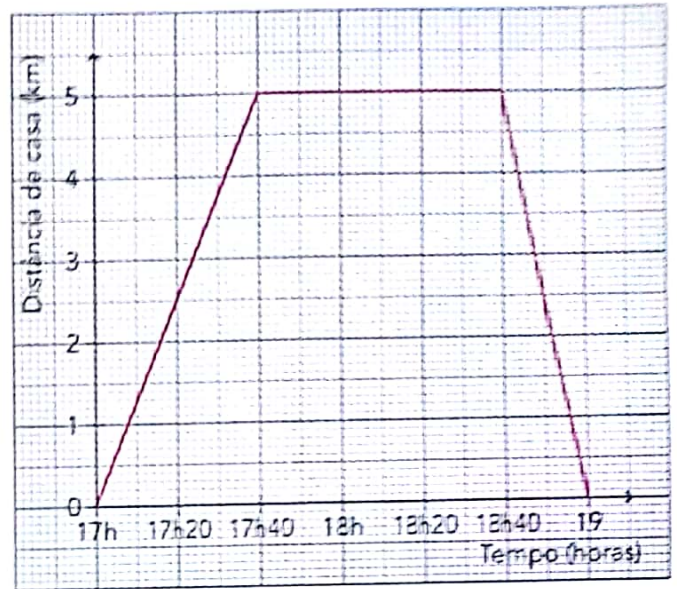
C. $x \sim 5x$

D. $x \sim 2x + 1$

2.ª Parte

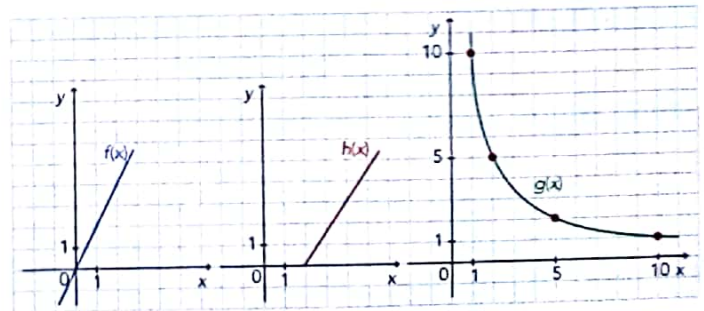
1. O gráfico representa a viagem que a Teresa fez para ir, de bicicleta, à vila mais próxima comprar livros. Observa o gráfico e responde:

- A que distância da vila vive a Teresa?
- Quanto tempo demorou a chegar à vila?
- Quanto tempo gastou nas compras?
- Quanto tempo demorou a viagem?
- A que horas chegou a casa?
- Qual a velocidade da bicicleta, na viagem de regresso a casa?
- Seja $g(t)$ a função representada no gráfico, indica:
 - a variável independente;
 - a variável dependente;
 - o valor de t tal que $g(t) = 2$;
 - a imagem por g do objecto 18.



2. Observa as representações gráficas das funções $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$.

- Justifica as afirmações:
 - « $f(x)$ é função de proporcionalidade directa».
 - « $g(x)$ é função de proporcionalidade inversa».
 - « $h(x)$ é função, mas não é de proporcionalidade directa nem inversa».
- Escreve a expressão analítica de $f(x)$.
- Escreve a expressão analítica de $g(x)$.
- Copia e completa as tabelas para as funções $f(x)$ e $g(x)$:



x	1	2	3
$f(x)$			

x	1	2	5	10
$g(x)$				

- e) Completa:
- $h(2) = \dots$
 - $f(10) = \dots$
 - $g(\dots) = 4$
 - $f(\dots) = 5 \dots$
 - $g\left(\frac{5}{2}\right) = \dots$
 - $h(\dots) = 3$

OBJECTIVOS

O aluno deve ser capaz de:

- Identificar equações literais.
- Verificar se um par ordenado é solução de um sistema.
- Reconhecer sistemas equivalentes.
- Resolver sistemas de duas equações lineares com duas incógnitas pelo método de redução ao mesmo coeficiente, (método de substituição e método de adição ordenada).
- Resolver sistemas de equações lineares pelo método misto.
- Classificar sistemas de duas equações lineares e duas incógnitas, tendo em conta a sua solução.
- Resolver graficamente sistemas de duas equações lineares com duas incógnitas.
- Traduzir situações da vida em linguagem algébrica e vice-versa.
- Traduzir o enunciado de um problema da linguagem corrente para a linguagem matemática.
- Interpretar e resolver problemas conducentes e sistemas de duas equações lineares a duas incógnitas, usando tabelas e gráficos.
- Discutir a solução de um sistema de equações, no contexto do problema.

Sistema de duas equações lineares a duas incógnitas

UNIDADE

4

by-1903

CONTEÚDOS

Sistema de duas equações lineares a duas incógnitas

- Revisão de equações lineares
- Introdução do sistema de duas equações lineares a duas incógnitas a partir de situações da vida real
- Conceito de sistema de duas equações lineares a duas incógnitas
- Resolução de sistema pelo método de redução ao mesmo coeficiente (método de substituição e método de adição ordenada)
- Resolução de sistemas de duas equações lineares com duas incógnitas pelo método misto
- Classificação de sistemas
- Resolução gráfica de sistemas de duas equações lineares com duas incógnitas
- Resolução de problemas conducentes a sistemas de duas equações lineares com duas incógnitas

Págs. 110 a 131

by-1903

Equações do 1.º grau com duas incógnitas

O valor de y depende do valor de x , trata-se de uma função.

Função afim é a função cujo gráfico é uma recta.

Uma forma fácil de encontrar pares de números que sejam solução da equação $x + y = 15$ é representá-la graficamente. Para isso:

$$y = -x + 15$$

-1 é o declive da recta

15 é a ordenada na origem

- Resolve-se a equação em ordem a y :

$$y = -x + 15$$

↑
variável dependente

↑
variável independente

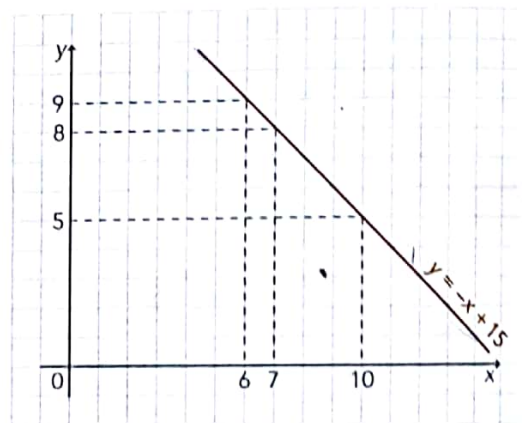
- Atribuiu-se valores a x e calcula-se y :

x	y
6	9
10	5
7	8
...	...

A cada par de números, solução da equação $y = -x + 15$, associa-se um ponto de coordenadas (x, y) representado num sistema de eixos cartesianos.

A equação $y = -x + 15$ tem infinitas soluções. Todos os pontos da recta $y = -x + 15$ são soluções da equação.

Repara, no entanto, que sendo x e y dimensões de um canteiro não podem, neste exemplo, tomar valores nulos nem negativos, logo, nem todas as soluções da equação $y = -x + 15$ são soluções do problema proposto.



- Uma equação do 1.º grau com duas incógnitas, x e y , é uma equação do tipo: $ax + by = c$ ou $y = \frac{-a}{b}x + \frac{c}{b}$ sendo: a, b, c números dados e $a \neq 0, b \neq 0$

- O gráfico é uma recta em que
 - $\frac{-a}{b}$ declive
 - $\frac{c}{b}$ ordenada na origem

- Uma equação do 1.º grau com duas incógnitas tem infinitas soluções.

- Uma solução desta equação é um par ordenado de números que substituídos na equação a transformam numa igualdade numérica verdadeira.

Sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas

- São exemplos de sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas:

$$\begin{cases} 5x + \frac{1}{2}y = 3 \\ 2x + 1,5y = 4 \end{cases}$$

(incógnitas: x e y)

também se escreve: $5x + \frac{1}{2}y = 3 \wedge 2x - 1,5y = 4$

Lê-se: «e».

Indica a conjunção das duas equações

$$\begin{cases} 2(a + b) = 2b + 1 \\ 3b - \frac{1}{2}a = 4 \end{cases}$$

(incógnitas: a e b)

também se escreve: $2(a + b) = 2b + 1 \wedge 3b - \frac{1}{2}a = 4$

- Resolver um sistema**, de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas, é encontrar todos os pares de números (x, y) que verifiquem simultaneamente as equações do sistema, ou seja, é encontrar as **soluções comuns às duas equações**.

Método de substituição

Resolver o sistema pelo método de substituição:

Situação 1:
$$\begin{cases} x + y = 9 \\ 10x + 15y = 110 \end{cases}$$



Este método consiste em:

- Resolver uma das equações do sistema em ordem a uma das incógnitas.
- Substituir o valor dessa incógnita na outra equação.

Obtém-se assim um sistema equivalente ao dado, onde uma das equações passa a ser do 1.º grau com uma só incógnita.

Sistemas equivalentes têm o mesmo conjunto-solução.

UNIDADE 4

Passos a seguir	Resolução
1. Escolher a incógnita (x ou y) numa das equações (é aconselhável escolher a equação e a incógnita que facilite os cálculos).	$\begin{cases} x + y = 9 \\ 10x + 15y = 110 \end{cases}$ <p>Neste sistema vamos escolher a incógnita x, na primeira equação.</p>
2. Resolver a equação em ordem à incógnita escolhida.	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 - y \\ 10x + 15y = 110 \end{cases}$ <p>E observas que x vale $9 - y$.</p>
3. Substituir, na outra equação, x pelo seu valor.	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 - y \\ 10(9 - y) + 15y = 110 \end{cases}$ <p>A segunda equação passou a ser uma equação do 1.º grau com uma só incógnita, que sabes resolver.</p>
4. Resolver a equação do 1.º grau com uma só incógnita e calcular o valor de y .	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 - y \\ 90 - 10y + 15y = 110 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 - y \\ 5y = 20 \end{cases}$ <p>Já sabes que $y = 4$.</p>
5. Substituir o valor de y na equação inicial.	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 - 4 \\ y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \end{cases}$

Para escrever um sistema na forma canónica, deves:

- Desembaraçar de parêntesis.
- Desembaraçar de denominadores.
- Passar todos os termos com incógnita para o 1.º membro e os termos independentes para o 2.º membro.
- Reduzir a termos semelhantes.

Assim, obtivemos um sistema equivalente ao dado mas mais simples; a solução do sistema dado é o par de números (5, 4).

Verificação da solução:

$$\begin{cases} 5 + 4 = 9 \end{cases}$$

Verdadeiro.

$$\begin{cases} 10 \times 5 + 15 \times 4 = 110 \end{cases}$$

Verdadeiro.

Substitui-se, em cada equação do sistema dado, x por 5 e y por 4.

Situação 2:

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x + 3(y - 1) = 2 \\ x + 2(x + y) = -1 \end{cases}$$

Antes de aplicar o **método de substituição**, vamos dar um aspecto mais simples ao sistema, escrevendo-o na **forma canónica**, isto é, na forma:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Método de substituição



$$\begin{cases} \frac{1}{3}x + 3(y - 1) = 2 \\ x + 2(x + y) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}x + 3y - 3 = 2 \\ x + 2x + 2y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 9y - 9 = 6 \\ 3x + 2y = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 9y = 15 \\ 3x + 2y = -1 \end{cases} \rightarrow \text{Sistema na forma canónica.}$$

Passos a seguir	Resolução
1. Escolhe-se x na primeira equação porque tem coeficiente $+1$, o que facilita os cálculos.	$\begin{cases} x + 9y = 15 \\ 3x + 2y = -1 \end{cases}$
2. Resolve-se em ordem a x .	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -9y + 15 \\ 3x + 2y = -1 \end{cases}$
3. Substitui-se x na 2. ^a equação.	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -9y + 15 \\ 3(-9y + 15) + 2y = -1 \end{cases}$
4. Resolve-se a 2. ^a equação e calcula-se o valor de y , que se substitui na equação inicial.	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -9y + 15 \\ -27y + 45 + 2y = -1 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = -9y + 15 \\ -25y = -46 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -9 + 15 \\ y = \frac{46}{25} \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = -9 + \frac{46}{25} + 15 \\ y = \frac{46}{25} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{39}{25} \\ y = \frac{46}{25} \end{cases}$ <p>↓ A solução é o par $\left(\frac{39}{25}, \frac{46}{25}\right)$</p>



Exercícios resolvidos

1. Dado o sistema de equações:
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

Verifica se algum dos pares de números $(0, 1)$ e $(2, -1)$ é solução do sistema.

Resolução:

- Para o par de números $(0, 1)$
Substituir, nas duas equações, x por 0 e y por 1 :

$$\begin{cases} 0 + 1 = 1 \\ 0 + 2 \times 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 1 & \text{Verdadeiro.} \\ 2 = 0 & \text{Falso.} \end{cases}$$

O par $(0, 1)$ não é solução comum as duas equações, logo, não é solução do sistema.

- Para o par de números $(2, -1)$
Substituir, nas duas equações, x por 2 e y por -1 :

$$\begin{cases} 2 - 1 = 1 \\ 2 + 2 \times (-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 1 & \text{Verdadeiro.} \\ 0 = 0 & \text{Verdadeiro.} \end{cases}$$

O par $(2, -1)$ é solução comum as duas equações, logo, é solução do sistema.

2. Resolver o sistema:
$$\begin{cases} 2x = 4 \\ 3x + 2y = 10 \end{cases}$$

Resolução:

$$\begin{cases} 2x = 4 \\ 3x + 2y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 3x + 2y = 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 3 \times 2 + 2y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 2y = 10 - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Observo que a 1.ª equação tem só uma incógnita, x .

Resolvo a 1.ª equação em ordem a x .
Substituo, na 2.ª equação, x por 2 .
Calculo y .

Verificação:

$$\begin{cases} 2 \times 2 = 4 \\ 3 \times 2 + 2 \times 2 = 10 \end{cases}$$

Então o par $(2, 2)$ é a solução do sistema.

3. Resolver, pelo método de substituição, o sistema:
$$\begin{cases} 2x + 5y = 6 \\ 3x + 4y = -5 \end{cases}$$

Resolução:

Escolho a incógnita x na 1.ª equação:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 6 \\ 3x + 4y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 6 - 5y \\ 3x + 4y = -5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{6 - 5y}{2} \\ 3x + 4y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 2,5y \\ 3 \times (3 - 2,5y) + 4y = -5 \end{cases}$$

Resolvo a 1.ª equação em ordem a x .

Na 2.ª equação, substituo x pelo seu valor.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 2,5y \\ 9 - 7,5y + 4y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 2,5y \\ 5y = -5 - 9 \end{cases}$$

Obtenho a 2.ª equação com uma só incógnita, y.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 2,5y \\ -3,5y = -14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 2,5y \\ y = 4 \end{cases}$$

Resolvo-a e determino y.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 2,5 \times 4 \\ y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -7 \\ y = 4 \end{cases}$$

Substituo y por 4 na 1.ª equação.

O par solução do sistema dado é (-7, 4).

Verificação:

$$\begin{cases} 2 \times (-7) + 5 \times 4 = 6 \\ 3 \times (-7) + 4 \times 4 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -14 + 20 = 6 \\ -21 + 16 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 = 6 \\ 5 = -5 \end{cases}$$

O par (-7, 4) é a solução do sistema.

4. Escrever, na forma canónica, o sistema:
$$\begin{cases} 3(x - y) = 1 \\ 5 - 3y = -\frac{1}{2}x \end{cases}$$

Resolução:

Para o sistema dado, vamos:

- Desembaraçar de parêntesis.
- Desembaraçar de denominadores.
- Escrever, no 1.º membro, os termos com incógnita e, no 2.º membro, os termos independentes.
- Reduzir os termos semelhantes.

$$\begin{cases} 3(x - y) = 1 \\ 5 - 3y = -\frac{1}{2}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 3y = 1 \\ 10 - 6y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 3y = 1 \\ x - 6y = -10 \end{cases} \rightarrow \text{Forma canónica}$$

5. Resolver o sistema de equações: $\frac{x}{4} = y + \frac{1}{2} \wedge \frac{x}{3} - \frac{4+y}{2} = \frac{1}{3}$

Resolução:

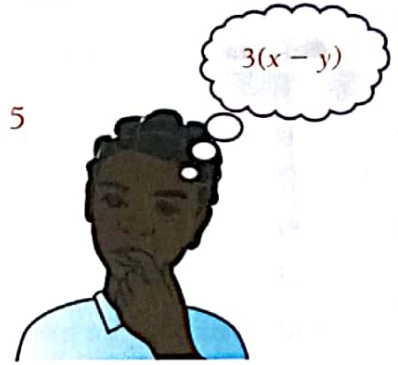
Aplicar o método de substituição:

$$\begin{cases} \frac{x}{4} = y + \frac{1}{2} \quad (1) \\ \frac{x}{3} - \frac{4+y}{2} = \frac{1}{3} \quad (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y + 2 \\ 2x - 3(4+y) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y + 2 \\ 2x - 3y = 14 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y + 2 \\ 2(4y + 2) - 3y = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y + 2 \\ 5y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y + 2 \\ y = \frac{6}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \times \frac{6}{5} + 2 \\ y = \frac{6}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{14}{5} \\ y = \frac{6}{5} \end{cases} \quad S = \Leftrightarrow \left\{ \left(\frac{14}{5}, \frac{6}{5} \right) \right\}$$

O par $\left(\frac{14}{5}, \frac{6}{5}\right)$ é a solução do sistema.





Exercícios de consolidação

1. Quais das seguintes equações são do 1.º grau a duas incógnitas?

A. $2y = 4$ B. $x = 2 - y$ C. $4 - 2x + 3y = 2 - x$ D. $x^2 + 3x = 4$

2. Considera a equação $-3x - y = -1$. Entre os pares ordenados, indica os que são solução da equação.

A. (2, 1) B. (3, -1) C. (0, 1) D. (5, -6) E. $(-\frac{1}{3}, 1)$

3. a) Representa, num sistema de eixos cartesianos, o conjunto de soluções de cada uma das equações seguintes:

I. $2x - y = 8$ II. $4x + 3y = 12$ III. $x + 3y - 9 = 0$

b) Quantas soluções tem cada uma das equações anteriores?

4. A equação $9C = 5F - 160$ relaciona a temperatura em graus Celsius (C) com a temperatura em graus Fahrenheit (F).

a) Resolve a equação:

a.1) em ordem a C.

a.2) em ordem a F.

b) Indica um par de números que seja solução da equação.

5. Verifica se algum dos pares de números: (1, -2), (2, -1) e (0, 2) é solução do sistema:

$$\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ 4x + y = 7 \end{cases}$$

6. Resolve os sistemas:

a) $\begin{cases} 3x = 9 \\ 5y + 7x = 15 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = 0 \\ -5x + 4y = 20 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x = 6 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$

7. Resolve pelo método de substituição os sistemas:

a) $\begin{cases} 3x + 4y = 1 \\ 6x + 2y = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x - 3y = 2 \\ 3x + 4y = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 6x + 7y = -4 \\ -3x + 2y = 5 \end{cases}$

8. Escreve na forma canónica cada um dos sistemas e resolve-os:

a) $\begin{cases} 2 - \frac{x+y}{3} = x - 2 \\ 5(y+2) = x - \frac{1}{3} \end{cases}$

b) $\begin{cases} -4(x-1) = y \\ -2y + 1 = -9x \end{cases}$

9. Resolve os sistemas seguintes pelo método de substituição:

a) $\begin{cases} \frac{y}{2} - \frac{1}{6} = \frac{x}{6} \\ \frac{y}{6} + x = \frac{1}{2} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{4x-y}{6} + \frac{x}{4} = -11 \\ 11(x+y) = 14 \end{cases}$

Método de adição ordenada

Um outro método para resolver sistemas de equações é o **método de adição ordenada**.
Vejam os:

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

• Se adicionarmos as equações membro a membro **desaparece** uma incógnita, y .

• A equação que se obtém é fácil de resolver
 $2x = 14 \Leftrightarrow x = 7$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 12 \\ x - y = 2 \\ \hline 2x + 0 = 14 \end{cases}$$

Para fazer desaparecer o x , basta multiplicar uma das equações por -1 .

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 12 \\ x(-1) \cdot (x - y = 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 12 \\ -x + y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

• Adicionando agora vem:

• A opção obtida é fácil de resolver

$$2y = 10 \Leftrightarrow y = 5 \quad S = \{(7, 5)\}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 12 \\ -x + y = -2 \\ \hline 0 + 2y = 10 \end{cases}$$

A **combinação dos dois métodos** – substituição e adição ordenada – é às vezes mais fácil. Começa-se pela adição ordenada, calcula-se o valor da incógnita e depois substitui-se para calcular a outra incógnita. Vejam os:

$$\begin{cases} x + y = 11 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 11 \\ x - y = 1 \\ \hline 2x + 0 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow x = 6$$

Substituindo agora na equação $x + y = 11$ vem:

$$6 + y = 11 \Leftrightarrow y = 11 - 6 \Leftrightarrow y = 5 \quad S = \{(6, 5)\}$$

Chama-se a este método, o **método misto**.

Exercícios resolvidos

1. Resolva pelo método de adição ordenada os sistemas:

a) $\begin{cases} x + y = 18 \\ 5x - y = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3y - 1 = -x \\ 3(1 - x) = 40 - y \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{x}{4} + \frac{y}{2} = \frac{1}{4} \\ \frac{2x}{3} - \frac{3y}{2} = \frac{2}{3} \end{cases}$

Resolução:

$$a) \begin{cases} x + y = 18 \\ 5x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 18 \\ 5x - y = 0 \\ \hline 6x = 18 \Leftrightarrow x = 3 \end{cases}$$

Eliminando agora a incógnita x , vem:

$$\times (-5) \begin{cases} x + y = 18 \\ 5x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x - 5y = -90 \\ 5x - y = 0 \\ \hline -6y = -90 \Leftrightarrow y = 15 \end{cases}$$

$$S = \{(3, 15)\}$$

$$b) \begin{cases} 3y - 1 = -x \\ 3(1 - x) = 40 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = 1 \\ 3 - 3x + y = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = 1 \\ -3x + y = 37 \end{cases}$$

Eliminando x , vem:

$$\times 3 \begin{cases} x + 3y = 1 \\ -3x + y = 37 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 9y = 3 \\ -3x + y = 37 \\ \hline 10y = 40 \Leftrightarrow y = 4 \end{cases}$$

Eliminando y , vem:

$$\times (-3) \begin{cases} x + 3y = 1 \\ -3x + y = 37 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = 1 \\ 9x - 3y = -111 \\ \hline 10x = -110 \Leftrightarrow x = -11 \end{cases}$$

$$S = \{(-11, 4)\}$$

$$c) \begin{cases} \frac{x}{4} + \frac{y}{2} = \frac{1}{4} \\ \frac{2x}{3} - \frac{3y}{2} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Desembaraçando de denominadores ambas as equações:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 4x - 9y = 4 \end{cases}$$

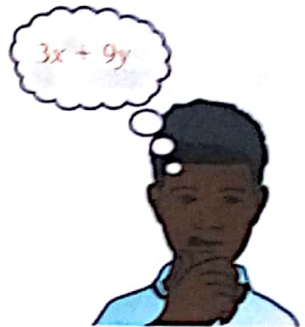
Eliminando x , vem:

$$\times (-4) \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 4x - 9y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x - 8y = -4 \\ 4x - 9y = 4 \\ \hline -17y = 0 \Leftrightarrow y = 0 \end{cases}$$

Eliminando y , vem:

$$\begin{matrix} \times 4 \\ \times 2 \end{matrix} \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 4x - 9y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x + 18y = 9 \\ 8x - 18y = 8 \\ \hline 17x = 17 \Leftrightarrow x = 1 \end{cases}$$

$$S = \{(1, 0)\}$$



2. Resolva, utilizando o método misto, os seguintes sistemas:

$$a) \begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 0,5x + 0,25y = 2 \\ 0,1x + 0,15y = 1 \end{cases}$$

Resolução:

$$a) \begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Convém eliminar y pois o sistema já está pronto para isso:

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - y = 2 \\ \hline 3x = 9 \Leftrightarrow x = 3 \end{cases}$$

Substituindo agora x por 3 numa das equações, por exemplo:

$$x - y = 2, \text{ vem } 3 - y = 2 \Leftrightarrow y = 1$$

$$S = \{(3, 1)\}$$

b) Se tiveres dificuldades em trabalhar com decimais, podes fazer com que desapareçam, multiplicando os membros das equações por 100.

Fica:

$$\begin{cases} 50x + 25y = 200 \\ 10x + 15y = 100 \end{cases}$$

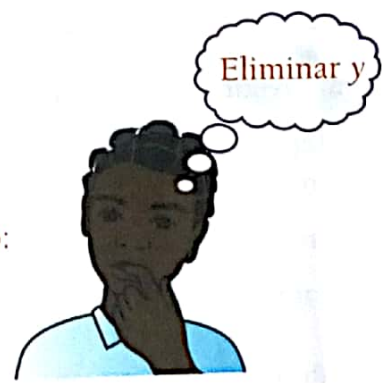
e depois é resolver como se resolveram os outros. Mas é bom também trabalhar com decimais. Vamos então resolver o sistema dado.

$$\begin{aligned} \times(-5) \begin{cases} 0,5x + 0,25y = 2 \\ -0,5x - 0,75y = -5 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 0,5x + 0,25y = 2 \\ -0,5x - 0,75y = -5 \\ \hline -0,5y = -3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow y = \frac{-3}{-0,5} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y = \frac{3}{1/2} \Leftrightarrow y = 6 \end{aligned}$$

Substituindo o valor de y na 1.ª equação:

$$0,5x + 0,25 \times 6 = 2 \Leftrightarrow 0,5x + 1,5 = 2 \Leftrightarrow 0,5x = 2 - 1,5 \Leftrightarrow 0,5x = 0,5 \Leftrightarrow x = 1$$

$$S = \{(1, 6)\}$$



Método gráfico para resolver sistemas de equações

Classificação de sistemas de equações

Para resolver graficamente um sistema:

- Representam-se as rectas associadas a cada uma das equações que formam o sistema dado, no mesmo referencial.
- Procura-se no gráfico, se existirem pontos comuns às duas rectas.

Vejamos:

1. Resolver graficamente o sistema de equações: $\begin{cases} x + y = 3 & (1) \\ x - y = 1 & (2) \end{cases}$

Equação (1): $x + y = 3$

Resolve-se em ordem a y : $y = 3 - x$

Faz-se a representação gráfica da recta associada a esta equação.

x	0	1	-1
$y = -x + 3$	2	1	3

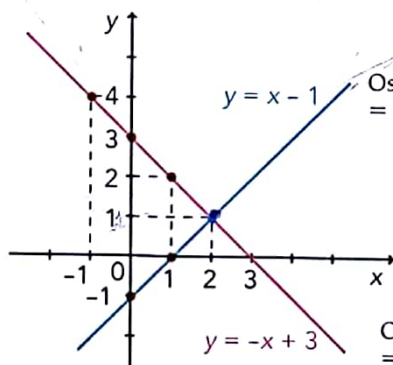
Equação (2): $x - y = 1$

Resolve-se em ordem a y

$$-y = 1 - x \Leftrightarrow y = -1 + x$$

Faz-se a representação gráfica da recta associada a esta equação.

x	0	1	2
$y = x - 1$	-1	1	1



Os pontos desta recta são soluções da equação $y = -1 + x$

Os pontos desta recta são soluções da equação $y = 3 - x$

As rectas $y = x - 1$ e $y = -x + 3$ são **concorrentes** no ponto $(2, 1)$.
 O sistema tem uma única solução – é um sistema **possível e determinado**.
 A solução do sistema é $(2, 1)$.

2. Resolver graficamente o sistema de equações:

$$\begin{cases} x - 2 = -y & (1) \\ x + y = 4 & (2) \end{cases}$$

Equação (1)

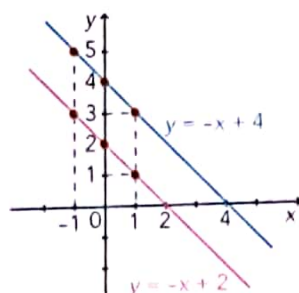
$$x - 2 = -y \Leftrightarrow y = -x + 2$$

x	0	1	-1
y = -x + 2	2	1	3

Equação (2)

$$x + y = 4 \Leftrightarrow y = -x + 4$$

x	0	1	2
y = -x + 4	3	4	5



As rectas $y = -x + 2$ e $y = -x + 4$ são **paralelas** – não têm qualquer ponto em comum. O sistema é **impossível**.

3. Resolver graficamente o sistema de equações:

$$\begin{cases} x + y = 2 & (1) \\ 2x = 4 - 2y & (2) \end{cases}$$

Equação (1)

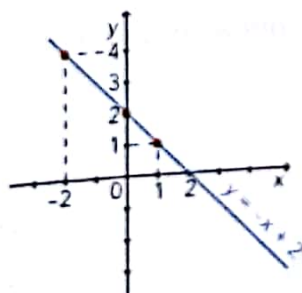
$$x + y = 2 \Leftrightarrow y = -x + 2$$

x	0	-1	1
y = -x + 2	2	4	1

Equação (2)

$$2x = 4 - 2y \Leftrightarrow y = -x + 2$$

x	0	-2	1
y = +x + 2	2	4	1

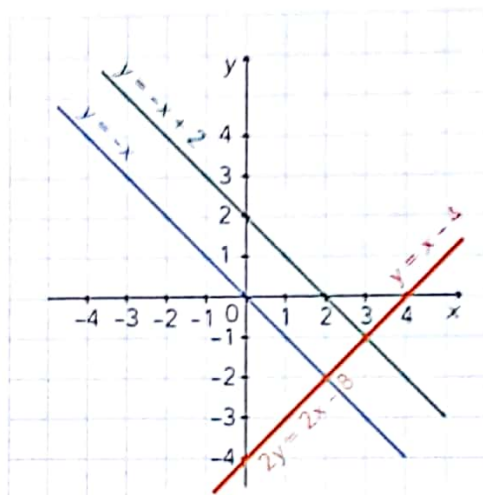


As rectas $x + y = 2$ e $2x = 4 - 2y$ são **coincidentes**.

O sistema dado tem uma infinidade de soluções – todos os pontos da recta.

É um sistema **possível e indeterminado**.

Assim, observando o gráfico seguinte podes concluir que:



- As rectas $y = -x + 2 \wedge y = x - 4$ formam um sistema **possível e determinado**.
- As rectas $y = -x + 2 \wedge y = -x$ formam um sistema **impossível**.
- As rectas $y = x - 4 \wedge 2y = 2x - 8$ formam um sistema **possível e indeterminado**.

Classificação de sistemas de duas equações do 1.º grau com duas incógnita.

Possível { **Determinado:** o sistema tem um par de números como solução.
Indeterminado: o sistema tem infinitos pares de números como solução.

Impossível – não há nenhum par de números que verifique simultaneamente as duas equações.
 O sistema não tem solução.



Exercícios resolvidos

1. Resolver graficamente e classificar o sistema: $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x - y = 1 \end{cases}$

Resolução:

A equação $2x + y = 5$ é equivalente a $y = -2x + 5$.

A equação $4x - y = 1$ é equivalente a $-y = -4x + 1$ e ainda a $y = 4x - 1$.

Traçar a recta r_1
de equação $y = -2x + 5$.

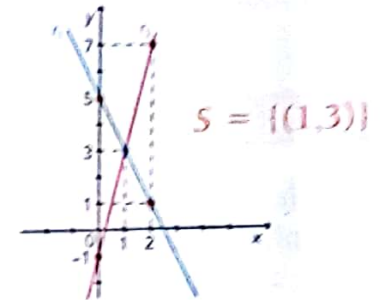
x	0	2
$y = -2x + 5$	5	1

Traçar a recta r_2
de equação $y = 4x - 1$.

x	0	2
$y = -4x - 1$	-1	7

Pelo gráfico, o ponto comum as rectas r_1 e r_2 é $(1, 3)$.
Então, $(1, 3)$ é a solução do sistema dado.

O sistema é possível e determinado.



2. Resolver graficamente e classificar o sistema: $\begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = 4 \end{cases}$

Resolução:

Resolver a equação em ordem a y : $y = -x - 3$.

Resolver a equação em ordem a y : $y = -x + 4$.

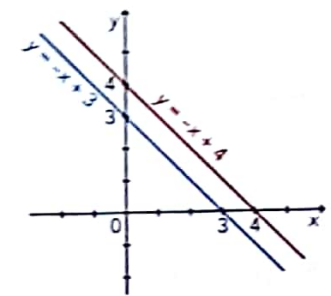
Traçar a recta
de equação $y = -x + 3$.

x	0	3
$y = -x + 3$	3	0

Traçar a recta
de equação $y = -x + 4$.

x	0	4
$y = -x + 4$	4	0

Verifica-se, pelo gráfico, que as rectas $y = -x + 3$ e $y = -x + 4$ são paralelas, não tendo qualquer ponto em comum. Assim, o sistema diz-se impossível.



3. Resolver graficamente o sistema e classificá-lo: $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 6x - 2y = 4 \end{cases}$

Resolução:

Observando o sistema, vemos que podemos dividir ambos os membros da 2.^a equação por 2, obtendo-se um sistema equivalente mais simples:

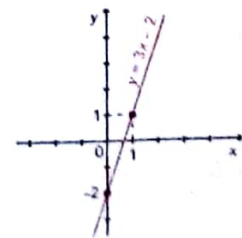
$$(+2) \begin{cases} 3x - y = 2 \\ 6x - 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y = -3x + 2 \\ -y = -3x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 2 \\ y = 3x - 2 \end{cases}$$

x	0	1
$y = 3x - 2$	-2	1

O sistema dado reduziu-se a uma só equação do 1.^o grau com duas incógnitas, que vamos representar graficamente:

O sistema dado tem uma infinidade de soluções, ou seja, todos os pontos da recta $y = 3x - 2$.

O sistema é possível e indeterminado.



Resolução de problemas

Para resolver problemas, utilizando sistemas de duas equações, é aconselhável:

- Escolher as incógnitas.
- Traduzir por equações as informações do enunciado.
- Resolver o sistema obtido.
- Verificar e interpretar a solução do sistema no contexto do problema.

Resolução de problemas



Exercícios resolvidos

1. Hoje, se à idade do meu pai tirar 6 anos, obtenho o triplo da minha idade. Daqui a 15 anos, a minha idade será metade da idade do meu pai. Que idade tenho? E o meu pai?

	Idade do pai	Idade do filho
Presente	x	y
Futuro (daqui a 15 anos)	$x + 15$	$y + 15$

Resolução:

Observa o quadro construído com os dados do enunciado.

«Se à idade do meu pai tirar 6 anos, obtenho o triplo da minha idade.»

$$x - 6 = 3y$$

«Daqui a 15 anos, a minha idade será metade da idade do meu pai.»

$$y + 15 = \frac{x + 15}{2}$$

Obtém-se o sistema: $x - 6 = 3y \wedge y + 15 = \frac{x + 15}{2}$

Resolução pelo método de substituição:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x - 6 = 3y \\ y + 15 = \frac{x + 15}{2} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y = 6 \\ 2y + 30 = x + 15 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y = 6 \\ -x + 2y = -15 \end{cases} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y + 6 \\ -(3y + 6) + 2y = -15 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y + 6 \\ -y = -9 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 33 \\ y = 9 \end{cases} \end{aligned}$$

Verificação:

$$\begin{cases} 33 - 6 = 3 \times 9 \\ 9 + 15 = \frac{33 + 15}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 27 = 27 \\ 24 = 24 \end{cases} \begin{matrix} \text{Verdadeiro} \\ \text{Verdadeiro} \end{matrix}$$

É importante não esquecer que as idades, em anos, têm de ser números inteiros positivos.
R.: A idade do pai é 33 anos e a do filho é 9.

2. A soma de dois números é 22 e um dos números excede o outro em 8 unidades.

Resolução:

- Representar o maior número por x e o menor por y .
- Traduzir em linguagem matemática:
«A soma de dois números é 22...» $\rightarrow x + y = 22$
«... um dos números excede o outro em 8 unidades.» $\rightarrow x - 8 = y$

O sistema será: $\begin{cases} x + y = 22 \\ x - 8 = y \end{cases}$

$$\begin{cases} x + y = 22 \\ x - 8 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 22 \\ x = 8 + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8 + y + y = 22 \\ x = 8 + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 7 \\ x = 15 \end{cases}$$

R.: São os números 7 e 15.

3. Dois amigos encontram-se depois de não se verem durante cinco anos. Diz o mais velho: «A minha idade é o dobro da que tinhas da última vez que estivemos juntos e hoje a soma das nossas idades é trinta e dois anos». Quais são as idades actuais dos amigos?

Resolução:

	Mais velho	Mais novo	Soma
Idades dos amigos	x	y	32

Há cinco anos o mais novo tinha $y - 5$ anos. O mais velho hoje tem o dobro da idade do mais novo há 5 anos, ou seja, $x = 2(y - 5)$

Um sistema para resolver o problema é pois:

$$\begin{cases} x + y = 32 \\ x = 2(y - 5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(y - 5) + y = 32 \\ x = 2(y - 5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y - 10 + y = 32 \\ x = 2(y - 5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y = 42 \\ x = 2(y - 5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 14 \\ x = 2(14 - 5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 14 \\ x = 18 \end{cases}$$

O mais velho tem portanto 18 anos e o mais novo tem 14, somando, pois, 32 anos. Há cinco anos, o mais novo tinha $14 - 5 = 9$, metade da idade actual do mais velho.

4. Na compra de 3 kg de açúcar e 2 l de óleo gastaram-se 160,00 MT. Se se tivessem adquirido 5 kg de açúcar e 4 l de óleo, a despesa teria sido 295,00 MT. Quais os preços unitários daqueles produtos?

Resolução:

$$\times(-2) \begin{cases} 3x + 2y = 160 \\ 5x + 4y = 295 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6x - 4y = -320 \\ 5x + 4y = 295 \\ \hline -x = -25 \end{cases}$$

Açúcar	Óleo	Total
$3x$	$2y$	$3x + 2y = 160$
$5x$	$4y$	$5x + 4y = 295$

Substituindo em $yx + 2y = 160$ vem $\Leftrightarrow x = 25$

$3 \times 25 + 2y = 160 \Leftrightarrow 2y = 160 - 75 \Leftrightarrow y = 42,50$

O preço do açúcar foi de 25,00 MT por quilograma e o do óleo foi 42,50 MT por litro.

10. Resolve pelo método de adição ordenada os sistemas:

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ x - y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 3x + 2y = 15 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ x + 10y = 25 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 2 - (y + 1) = 0 \\ y - 1 - (x - 1) = 1 \end{cases}$

11. Resolve, utilizando o método misto, os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x - 2y = -5 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + 4y = 2 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 4x - 2y = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 4 \\ x + y = -2 \end{cases}$

12. Resolve cada um dos sistemas graficamente e classifica-o:

a) $\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ 4x + y = 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ y - x = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -2x + y = -9 \\ 2y + x = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x = 4 \\ y = 6 \end{cases}$

13. Resolve graficamente cada um dos sistemas e depois resolve-o analiticamente para verificares a solução.

a) $\begin{cases} y = x \\ y = 2x - 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 2 \\ -x - 3y = 8 \end{cases}$

14. a). Resolve graficamente os sistemas:

a.1) $\begin{cases} 5 - y = x \\ y = -2x + 1 \end{cases}$

a.2) $\begin{cases} 3y + 21 = -3x \\ x + y = -7 \end{cases}$

b) Algum dos sistemas anteriores é indeterminado? Justifica.

15. Traduzindo os enunciados para linguagem matemática, resolve os seguintes problemas:

a) No parque de estacionamento fronteiro a uma escola estão cinquenta veículos, entre bicicletas e automóveis. Tendo-se contado cento e quarenta rodas, quantos veículos há de cada tipo?

b) Um negociante vendeu 40 animais, galinhas e cabritos, por 14 720,00 MT. Cada galinha foi vendida por 80,00 MT e cada cabrito por 800,00 MT. Quantos animais de cada espécie vendeu o negociante?

c) Pagou-se a quantia de 1 260,00 MT com quarenta e seis notas, umas de 20,00 MT e outras de 50,00 MT. Quantas notas de cada tipo foram utilizadas?

d) O Zé diz ao João: «Se me deres cinco das tuas amêndoas de caju, ficarei com tantas como tu». O João respondeu: «Se fores tu a dar-me dez, ficarei eu com o dobro das tuas». Quantas amêndoas de caju tem cada um?

16. Resolve agora estes problemas sobre números:

a) A soma de dois números inteiros é vinte e o maior excede o triplo do menor em vinte e oito. Quais são os números?

b) A diferença entre dois números é duzentos e sessenta e oito e o maior dividido pelo menor dá quociente cinco e resto trinta e dois. Quais são os números?

Exercícios propostos



1. Observando a figura, diz se são verdadeiras ou falsas as afirmações:

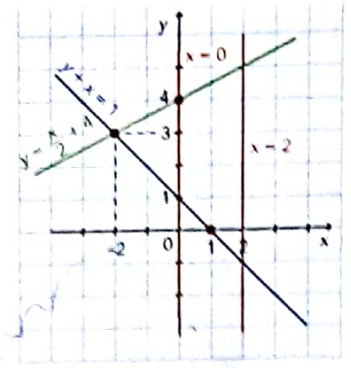
A. O sistema $\begin{cases} y + x = 1 \\ y = \frac{x}{2} + 4 \end{cases}$ é possível e determinado.

B. O sistema formado pelas equações das rectas $x = 0$ e $x = 1$ é indeterminado.

C. O ponto $(2, -1)$ é solução do sistema: $\begin{cases} x = 2 \\ y + x = 1 \end{cases}$

D. O sistema $\begin{cases} 2(y + x) = 2 \\ y + x = 1 \end{cases}$ é possível mas indeterminado.

E. O ponto $(3, 2)$ é a solução do sistema: $\begin{cases} y + x = 1 \\ y = \frac{x}{2} + 4 \end{cases}$



2. Resolve e classifica cada um dos sistemas:

a) $\begin{cases} x + y = 3 \\ 0y = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 8 \\ x = 6 - y \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = 7 \\ 2(x + 5) = 3y \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y = 1 \\ 3x = 2y + 6 \end{cases}$

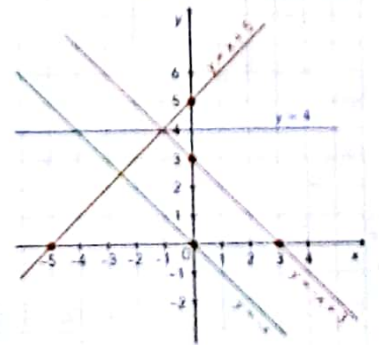
e) $\begin{cases} 3x - 2(y + 1) = 2(x - y) + x \\ 4y = -x \end{cases}$

f) $\begin{cases} 6y + 15 = 3x \\ y = -3x - 6 \end{cases}$

3. Considera o sistema:

$$2x - 3y = 1 \quad \wedge \quad 10x + ay = 4$$

- Determina o valor a atribuir a a para que o sistema seja impossível.
- Classifica o sistema, quando $a = -3$.
- Resolve o sistema, quando $a = 2$.
- Determina, se existir, um valor a atribuir a a , para que o sistema seja possível e indeterminado.



4. Usa o gráfico para determinar as soluções dos seguintes sistemas de equações. Classifica-os.

a) $\begin{cases} x - y = -5 \\ x + y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 3 \\ y + x = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y - 4 = 0 \\ y + x = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y + x = 3 \\ y - 4 = 0 \end{cases}$

5. À porta de uma frutaria estão dois cachos com bananas com um total de 250 bananas. Sabendo que um dos cachos com bananas tem mais 20 bananas do que o outro, pretende-se saber quantas bananas tem cada cacho.

6. Dois números estão entre si como 3 está para 5 e a sua diferença é 30. Quais são os números?

7. A razão entre dois números é $\frac{5}{3}$. Diminuindo dez ao primeiro e somando dez ao segundo, a razão inverte-se. De que números se trata?

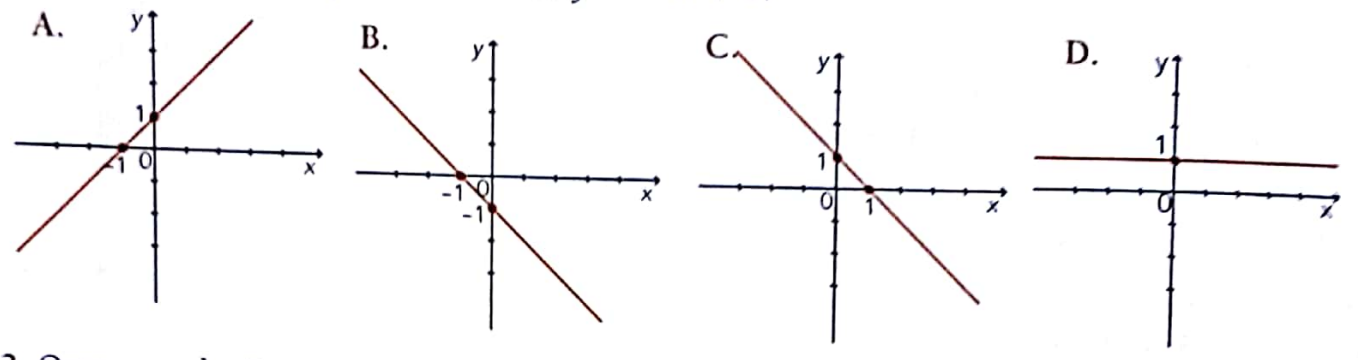
1.ª Parte

Indica a resposta correcta: A, B, C ou D.

1. O par $(-2, 1)$ é solução da equação.

- A. $2x - y = -4$ B. $-2x - y = 4$ C. $x - 2y = -4$ D. $x + 2y = 4$

2. Qual dos gráficos representa a recta $y = -x + 1$?



3. Quantas soluções tem a equação $3x + 3y = 0$, no conjunto dos números naturais?

- A. uma B. duas C. nenhuma D. infinitas

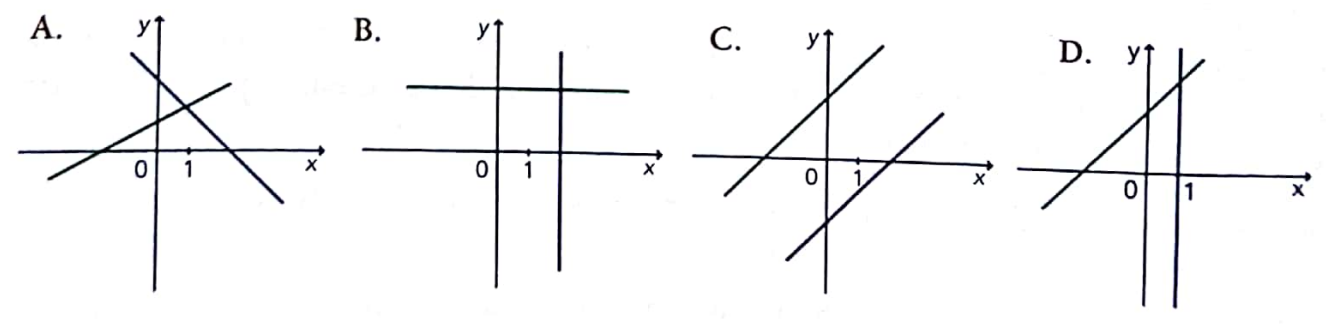
4. A equação $3r + 5t - 1 = 0$ resolvida em ordem a r é equivalente a:

- A. $r = \frac{1-5t}{-3}$ B. $r = 5t - 4$ C. $r = \frac{1-5t}{3}$ D. $r = \frac{5t+1}{3}$

5. O par $(-1, -1)$ é solução do sistema:

- A. $x + y = 2 \wedge -2x = y$ C. $x - y = 0 \wedge -2x = -2y$
 B. $\begin{cases} 2x + 2y = -4 \\ x = -y \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = y - 1 \\ x = y \end{cases}$

6. O gráfico que corresponde a um sistema impossível é:



2.ª Parte

1. O João gravou um programa musical de 11 horas, utilizando cassetes de 60 e de 90 minutos, que encheu completamente.

a) Sabendo que usou x cassetes de 60 minutos e y cassetes de 90 minutos, diz o que representa:

• $60x$

• $90y$

• $60x + 90y$

b) Traduz por uma equação o enunciado do problema.

c) Se gravou completamente 8 cassetes de 60 minutos, quantas gravou de 90 minutos?

d) A Francisca diz que o João podia ter gravado aquele programa musical em 7 cassetes completas de 60 minutos e 2 completas de 90 minutos. Terá razão?

e) Para a equação $60x + 90y = 660$, indica outros pares de números que sejam soluções da equação, mas não soluções do problema.

2. Resolve, pelo método indicado, cada um dos sistemas e classifica-os.

a) Método de substituição

$$\begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{x+y}{3} = \frac{1}{6} \\ -2(x-y) = 0,4 \end{cases}$$

b) Método gráfico

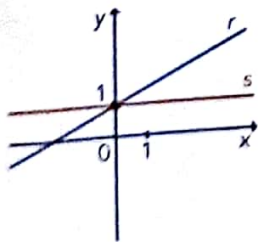
$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -y + x = -1 - x \end{cases}$$

3. A soma das idades da Mariana e do Afonso é 36 anos. Há dois anos, a idade da Mariana era a terça parte da idade do Afonso. Que idades têm o Afonso e a Mariana?

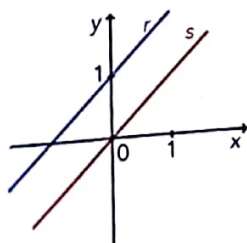
4. O perímetro de um rectângulo é 32 cm. Se duplicarmos o comprimento e reduzirmos a largura a metade, o semiperímetro do rectângulo é 15,5 cm. Quais as dimensões do rectângulo inicial?

5. Qual dos gráficos corresponde a um sistema de duas equações a duas incógnitas, possível e determinado?

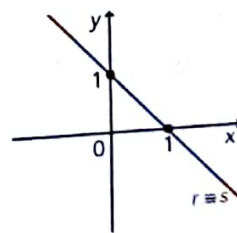
A.



B.



C.



Numa pequena composição explica, para cada um dos outros gráficos a razão pela qual não os escolheste.

A nighttime photograph of a city street with light trails from cars. A hand is visible on the left side of the page, holding it. The background shows a city skyline with many lights.

OBJECTIVOS

O aluno deve ser capaz de:

- Identificar os conceitos de circunferência e círculos.
- Identificar centro de uma circunferência, o raio, corda, diâmetro, arco e semicircunferência.
- Relacionar a recta e a circunferência de acordo com a sua posição.
- Definir ângulo inscrito e ângulo central.
- Caracterizar os ângulos inscritos sobre o diâmetro.
- Transformar a amplitude de um ângulo de sistema sexagesimal para o sistema centesimal e vice-versa.
- Relacionar os ângulos inscritos e central.
- Determinar o perímetro da circunferência.
- Calcular a área do círculo.
- Determinar a área do sector circular e da coroa circular.

Circunferência e círculo

UNIDADE

5

by Igor

Págs. 132 a 147

CONTEÚDOS

Circunferência e círculo. Seus elementos

- Noção de circunferência e círculo
- Noção de centro, raio, corda, diâmetro, arco e semicircunferência
- Posições da recta em relação ao círculo, recta secante, recta tangente e recta exterior

Ângulos na circunferência

- Ângulo central e ângulo inscrito
- Amplitudes de ângulos e de arcos (sistema sexagesimal e centesimal)

Relação entre o arco e o ângulo

- Relações entre ângulo inscrito e ângulo central
- Ângulo inscrito cujo lado passa pelo centro
- Ângulo inscrito que contém o centro
- Ângulo exterior

Cálculos na circunferência e círculo

- Perímetro da circunferência
- Comprimento de um arco
- Área do círculo
- Área do sector circular e coroa circular

Circunferência

Circunferência de centro C e raio r é o lugar geométrico de todos os pontos do plano que estão à mesma distância r de um ponto fixo C .

Círculo de centro C e raio r é o lugar geométrico de todos os pontos do plano que estão a uma distância menor ou igual a r de um ponto fixo C .

Raio é o segmento de recta que une um ponto qualquer da circunferência com o seu centro.

Corda é qualquer segmento de recta cujas extremidades são dois pontos da circunferência.

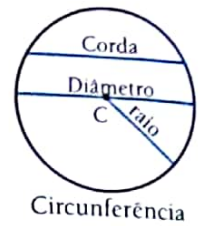
Diâmetro é a corda que passa pelo centro da circunferência. O diâmetro divide a circunferência em duas semicircunferências.

Arco de circunferência é qualquer porção da circunferência compreendida entre dois pontos que se dizem extremidades do arco.

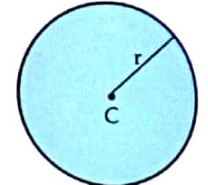
Arco menor é qualquer arco menor do que uma semicircunferência e que se pode designar com duas letras.

Por exemplo, na figura, NP é o arco que vê representado a vermelho na circunferência.

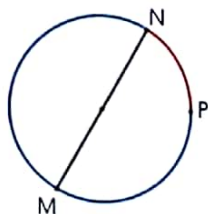
Arco maior é qualquer arco maior do que uma semicircunferência e que se pode designar com três letras. Por exemplo, na figura, NMP é o arco que vê representado a azul na circunferência.



Circunferência



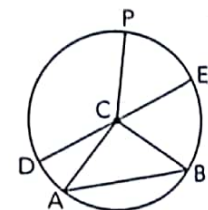
Círculo



Exercícios resolvidos

1. Na figura está desenhada uma circunferência de centro C e alguns segmentos de recta.

- Que relação existe entre os segmentos $[CA]$, $[CB]$, $[CD]$, $[CE]$ e $[CP]$?
- Que nome dás aos segmentos $[CP]$, $[AB]$ e $[DE]$?
- Comenta: «O diâmetro dum círculo é a maior das suas cordas».

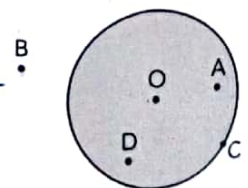


Resolução:

- São geometricamente iguais, pois são todos raios da mesma circunferência.
 - $[CP]$ é um raio da circunferência de centro C .
 $[AB]$ é uma corda da circunferência de centro C .
 $[DE]$ é um diâmetro da circunferência de centro C .
 - $[DE]$ é, de facto, uma corda especial, pois é uma corda que contém o centro e é, portanto, a maior das cordas.
2. Relativamente aos pontos A , B , C , D e O diz se pertencem ou não à circunferência ou ao círculo.

Resolução:

- A pertence ao círculo, mas não à circunferência.
 B não pertence ao círculo nem à circunferência.
 C pertence a ambos pois a circunferência, como fronteira do círculo, também lhe pertence.
 D pertence ao círculo mas não à circunferência.
 O é o centro da circunferência mas só pertence ao círculo.

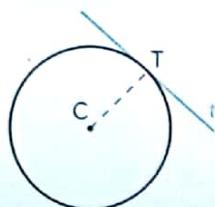


Posição relativa de uma recta e de uma circunferência

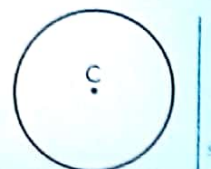
A recta r intersecta a circunferência de centro C , em dois pontos. r é secante à circunferência.



A recta t intersecta a circunferência no ponto T . t é tangente à circunferência em T .

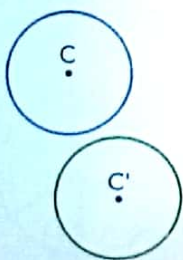


A recta s não intersecta a circunferência de centro C . s é exterior à circunferência.

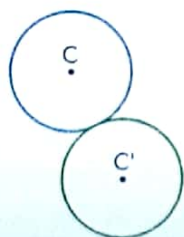


Posição relativa de duas circunferências

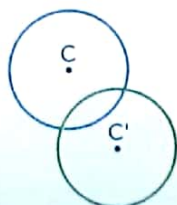
As circunferências são exteriores.



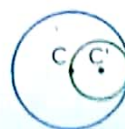
As circunferências são tangentes exteriores.



As circunferências são secantes.



As circunferências são tangentes interiores.



As circunferências são concêntricas.



Exercícios resolvidos

1. Diz se são verdadeiras ou falsas as seguintes proposições:

- Uma recta secante a uma circunferência tem em comum com esta, dois e só dois pontos.
- Por um ponto interior a uma circunferência só é possível traçar uma recta que lhe seja tangente.
- Uma recta exterior a uma circunferência tem pelo menos um ponto em comum com ela.

Resolução:

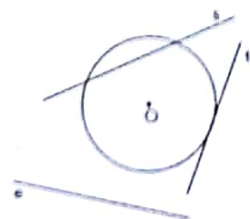
- a) Verdadeiro b) Falso c) Falso

2. Na circunferência de centro O , estabelece uma relação entre a medida do comprimento do raio e a medida da distância do centro O a cada uma das rectas t , s e e .

Resolução:

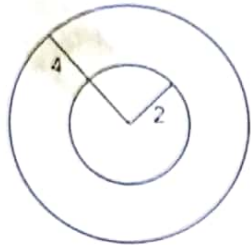
Se o raio for r :

- Distância de O a e é maior que r .
- A distância de O a t é igual a r .
- A distância de O a s é menor que r .

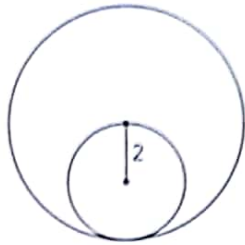


2. Desenha duas circunferências com o mesmo centro em C e de raios 2 e 4 cm respectivamente. Desenha as mesmas circunferências mas deslocando o centro da circunferência interior de 2, 4 e 6 cm, sucessivamente. Qual a posição relativa das circunferências em cada um dos casos?

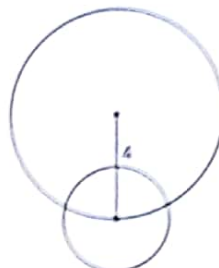
Resolução:



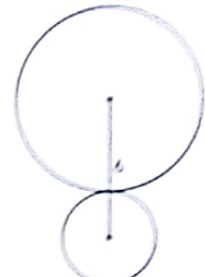
00000



tangentes interiores



secantes



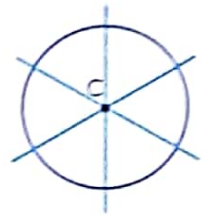
tangentes exteriores

Simetrias numa circunferência

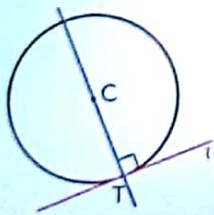
Eixo de simetria de uma figura: divide a figura em duas partes que se sobrepõem ponto por ponto – são geometricamente iguais.

Toda a recta que passa pelo centro da circunferência é eixo de simetria da circunferência.

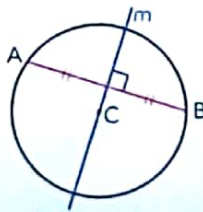
A circunferência tem uma infinidade de eixos de simetria.



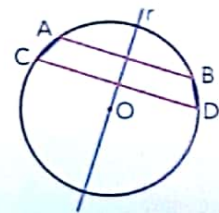
A tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio que passa pelo ponto de tangência.



Numa circunferência a recta perpendicular ao meio de uma corda passa pelo centro da circunferência.

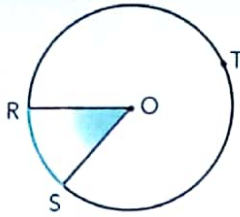


Numa circunferência: arcos ou (cordas) compreendidos entre cordas paralelas são geometricamente iguais.



Ângulo ao centro. Ângulo inscrito

Ângulo ao centro



O \sphericalangle ROS é um **ângulo ao centro** que intersecta o arco de circunferência RS (a azul na figura). O arco RS diz-se **arco correspondente** do ângulo ao centro ROS.

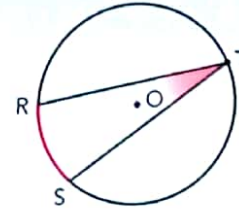
Ângulo ao centro numa circunferência é o que tem o vértice no centro da circunferência e os seus lados contêm raios.

Representando a **amplitude do arco** \widehat{RS} por RS, podemos escrever:

$$\widehat{ROS} = \widehat{RS}$$

A amplitude do ângulo ao centro é igual à amplitude do arco correspondente.

Ângulo inscrito



O \sphericalangle RTS é um **ângulo inscrito** que intersecta o arco de circunferência RS.

Ângulo inscrito numa circunferência é o que tem vértice na circunferência e os lados contêm cordas.

O arco RTS é o arco capaz do ângulo inscrito RTS.

Vejamos agora se o que pensaste sobre as amplitudes dos ângulos RTS e ROS. Será verdadeiro?

Observar e intuir não são suficientes em Matemática, é preciso **demonstrar**.

Demonstração:

- $\widehat{T\hat{O}R} + \widehat{R\hat{O}S} = 180^\circ$ — \sphericalangle TOS é raso.
- $\widehat{T\hat{O}R} + \widehat{O\hat{R}T} + \widehat{R\hat{T}S} = 180^\circ$ — a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° .

Então,

$$\underbrace{\widehat{T\hat{O}R} + \widehat{R\hat{O}S}}_{180^\circ} = \underbrace{\widehat{T\hat{O}R} + \widehat{O\hat{R}T} + \widehat{R\hat{T}S}}_{180^\circ}$$

$$\bullet \widehat{R\hat{O}S} = 2 \times \widehat{R\hat{T}S}$$

$$\bullet \widehat{R\hat{T}S} = \frac{1}{2} \times \widehat{R\hat{O}S}$$

Então, $\triangle RTO$ é isósceles, $\widehat{O\hat{R}T} = \widehat{R\hat{T}S}$ e $\overline{OT} = \overline{OR}$

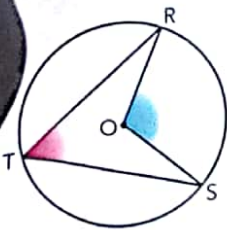
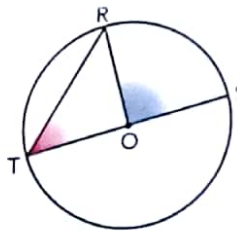
A amplitude de um **ângulo inscrito** numa circunferência é metade da amplitude do **ângulo ao centro** que intersecta o mesmo arco.

Também se pode afirmar que:

$$\widehat{R\hat{T}S} = \frac{1}{2} \widehat{R\hat{O}S}$$

A amplitude do **ângulo inscrito** é igual a metade da amplitude do arco que ele contém.

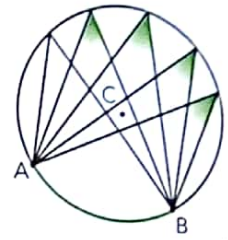
$$\widehat{R\hat{T}S} = \frac{1}{2} \widehat{RS}$$



Propriedade 1:

Observa a figura. Cada ângulo assinalado a verde:

- Está inscrito na circunferência.
- Intersecta o arco AB.
- Tem amplitude igual a $\frac{\widehat{AB}}{2}$.



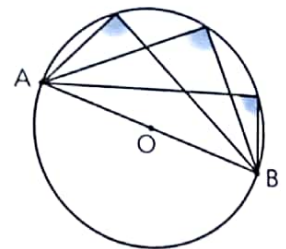
Logo, os ângulos assinalados a verde na figura são todos geometricamente iguais.

Ângulos inscritos numa circunferência, que intersectam o mesmo arco, são ângulos geometricamente iguais.

Propriedade 2:

Observa a figura, onde [AB] é o diâmetro da circunferência. Cada ângulo assinalado a azul:

- Está inscrito numa semicircunferência.
- Intersecta o arco AB de amplitude 180° .
- Tem de amplitude $\frac{\widehat{AB}}{2}$, isto é, $\frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$.



Qualquer ângulo inscrito numa semicircunferência tem de amplitude 90° (é um ângulo recto).

Arcos, cordas e ângulos ao centro

Numa circunferência:

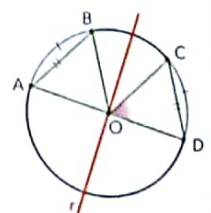
- A arcos iguais correspondem ângulos ao centro e cordas iguais.
- A ângulos ao centro iguais correspondem arcos e cordas iguais.
- A cordas iguais correspondem arcos e ângulos ao centro iguais.

Estas propriedades mantêm-se se, em vez de uma circunferência, utilizares circunferências com o mesmo raio, isto é, geometricamente iguais.

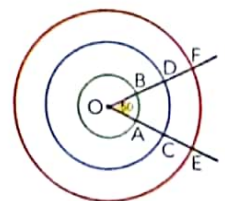
Já sabes que um arco de amplitude 50° corresponde a um ângulo ao centro de amplitude 50° .

Observa a figura, onde:

$$\begin{aligned} \widehat{A\hat{O}B} &= 50^\circ \text{ ângulo ao centro} \\ \widehat{AB} &= \widehat{CD} = \widehat{EF} = 50^\circ \end{aligned}$$



r é eixo de simetria
 $\widehat{A\hat{O}B} = \widehat{C\hat{O}D}$
 $\widehat{AB} = \widehat{CD} \quad \widehat{AB} = \widehat{CD}$



Embora os arcos tenham todos 50° de amplitude, os seus comprimentos são diferentes. O arco EF tem comprimento maior que o arco CD; o arco CD tem comprimento maior que o arco AB. O comprimento de cada um destes arcos depende do raio da circunferência que o contém.

Comprimento de um arco de circunferência é a medida de um segmento de recta de comprimento igual ao do arco, isto é, a medida do arco rectificado.



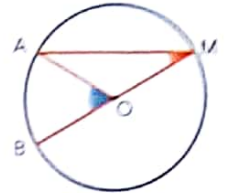
Exercícios resolvidos

1. Vamos calcular o comprimento x do arco EF de amplitude 50° , numa circunferência de raio 2 cm.

Resolução:

Comprimento	Amplitude	
x	_____	50°
$2\pi \times 2$	_____	360°

donde, $x = \frac{4\pi \times 50}{360} \approx 1,75$ cm



2. Na figura, $\widehat{AMB} = 30^\circ$.

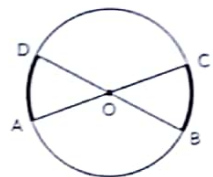
- a) Que nome se dá ao ângulo AMB e ao ângulo AOB, na circunferência de centro O?
- b) Calcular \widehat{AOB} e \widehat{AOM} .

Resolução:

- a) \sphericalangle AMB é ângulo inscrito na circunferência. \sphericalangle AOB é ângulo ao centro.
- b) $\widehat{AMB} = 30^\circ$
 $\widehat{AB} = 2 \times 30^\circ = 60^\circ$
 $\widehat{AOB} = 60^\circ$
 $\widehat{AOM} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

3. Na figura, [AC] e [BD] são diâmetros da circunferência de centro O.

Demonstra que: $\widehat{AD} \approx \widehat{BC}$

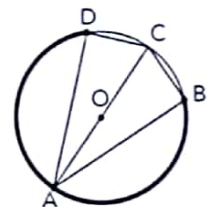


Resolução:

Os ângulos \widehat{AOD} e \widehat{BOC} são verticalmente opostos, logo, iguais. Então os arcos correspondentes também são iguais.

4. Considera a figura junta em que, na circunferência de centro O, $\overline{DC} = \overline{CB}$

Prova que: $\widehat{DA} \approx \widehat{AB}$.



Resolução:

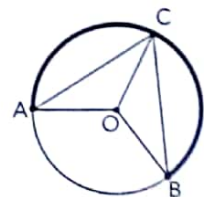
Como $\overline{DC} = \overline{CB}$, também

(1) $\widehat{DC} = \widehat{CB}$. Mas também se sabe que: (2) $\widehat{AB} + \widehat{BC} = \widehat{AD} + \widehat{DC} = 180^\circ$

De (1) e (2) tira-se que $\widehat{AB} = \widehat{AD}$ e portanto que $\widehat{AB} \approx \widehat{DA}$.

5. Na circunferência de centro O da figura, os triângulos [ACO] e [BCO] são isósceles e geometricamente iguais.

Mostra que: $\widehat{AC} \approx \widehat{BC}$.



Resolução:

As bases dos triângulos são também iguais. Então $\overline{AC} = \overline{BC}$ de onde $\widehat{AC} \approx \widehat{BC}$

Amplitude de ângulos e arcos. Sistemas sexagesimal e centesimal

Grau é a amplitude de um ângulo que resulta da divisão de um ângulo recto em noventa partes iguais, por isso, um ângulo recto mede 90° .

$$1^\circ = 60$$

$$1' = 60''$$

Grado é a amplitude de um ângulo que resulta da divisão de um ângulo recto em cem partes geometricamente iguais. Assim, a amplitude de um ângulo recto é 100^g .

$$90^\circ \text{ correspondem a } 100^\text{g}$$

$$1^\circ = 100$$

$$1' = 100''$$



Exercícios resolvidos

1. Reduz ao sistema centesimal:

a) 45°

b) 180°

Resolução:

a) $90^\circ - 100^\text{g}$

$45^\circ - x$

$$x = \frac{45 \times 100}{90} = 50^\text{g}$$

b) $90^\circ - 100^\text{g}$

$180^\circ - x$

$$x = \frac{180 \times 100}{90} = 200^\text{g}$$

2. Reduz ao sistema sexagesimal:

a) 309^g

b) 400^g

Resolução:

a) $90^\circ - 100^\text{g}$

$x - 30^\text{g}$

$$x = \frac{90 \times 30}{100} = 27^\circ$$

b) $90^\circ - 100^\text{g}$

$x - 400^\text{g}$

$$x = \frac{90 \times 400}{100} = 360^\circ$$

Perímetro da circunferência e área do círculo

O perímetro de uma circunferência é dado pela fórmula:

$$P = 2\pi r$$

onde $\pi \approx 3,14$ e r o seu raio:

A área de um círculo de raio r é dada pela fórmula:

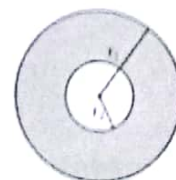
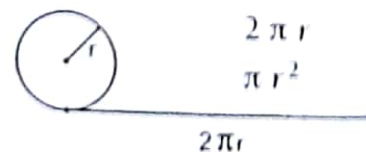
$$A = \pi r^2$$

A área de um sector circular de amplitude α é dada pela fórmula:

$$A_D = \frac{\alpha}{360^\circ} \pi r^2$$

A área de uma coroa circular calcula-se usando a fórmula:

$$\pi (r_1^2 - r_2^2)$$





Exercícios resolvidos

1. Determina o perímetro das circunferências cujos raios medem:

a) 3 cm

b) 7 cm

Resolução:

$$a) P = 2 \times 3 \times 3,14 = 18,84 \text{ cm}$$

$$b) P = 2 \times 7 \times 3,14 = 43,96 \text{ cm}$$

2. Calcula o perímetro das circunferências cujos diâmetros medem:

a) 4 cm

b) 7 cm

Resolução:

$$a) P = 4 \times 3,14 = 12,56 \text{ cm}$$

$$b) P = 7 \times 3,14 = 21,98 \text{ cm}$$

3. Calcula o raio das circunferências cujos perímetros medem:

a) 31,4 cm

b) 14,13 cm

Resolução:

$$a) r = \frac{P}{2\pi} \cdot r = \frac{31,4}{2 \times 3,14} = 5 \text{ cm}$$

$$b) r = \frac{14,13}{2 \times 3,14} = 2,25 \text{ cm}$$

4. Calcula a área dos círculos cujos raios medem:

a) 2 cm

b) 3 cm

Resolução:

$$a) A = 3,14 \times 2^2 = 12,56 \text{ cm}^2$$

$$b) 3,14 \times 3^2 = 28,26 \text{ cm}^2$$

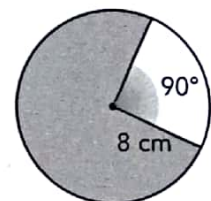
5. Calcula a área da parte tracejada da figura.

Resolução:

$$\text{A área do círculo é } 3,14 \times 8^2 = 200,96 \text{ cm}^2$$

A superfície cinzenta tem $\frac{3}{4}$ da área, ou seja,

$$200,96 \times \frac{3}{4} = 150,72 \text{ cm}^2$$



6. A circunferência de centro O tem 3 cm de raio.

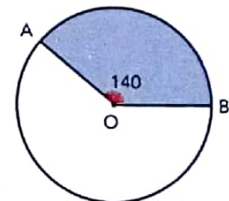
Determinar:

a) O perímetro do círculo.

b) O comprimento do arco AB.

c) A área do círculo.

d) A área do sector circular.



Resolução:

$$a) P = \pi d = \pi \times 6 = 18,8 \text{ cm (1 c.d.)}$$

$$c) A = \pi r^2 = \pi \times 9 = 28,3 \text{ cm}^2 \text{ (1 c.d.)}$$

$$b) \pi d \text{ ——— } 360^\circ$$

$$d) \pi r^2 \text{ ——— } 360^\circ$$

$$x \text{ ——— } 140^\circ$$

$$y \text{ ——— } 140^\circ$$

$$x = \frac{\pi d \times 140}{360} = \frac{6\pi \times 140}{360}$$

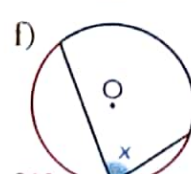
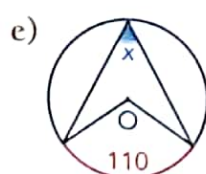
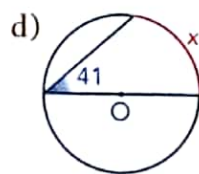
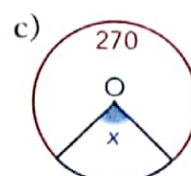
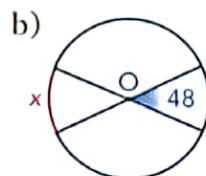
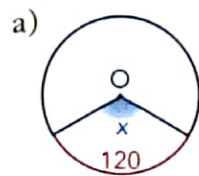
$$y = \frac{\pi r^2 \times 140}{360} = \frac{9\pi \times 140}{360}$$

$$x = 7,3 \text{ cm (1 c.d.)}$$

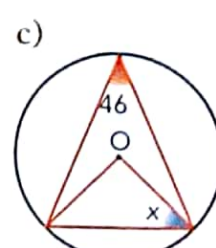
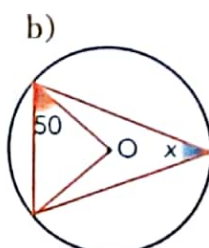
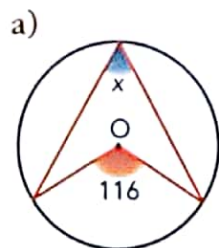
$$y = 11,0 \text{ cm}^2 \text{ (1 c.d.)}$$



1. Desenha uma circunferência com centro num ponto qualquer, que designas por C , e um raio r . No seu interior, desenha um ponto P ; sobre a circunferência, um ponto S ; e no seu exterior, um ponto R .
2. Constrói com o teu compasso uma circunferência de raio igual a 3 cm. Traça uma corda e desenha um diâmetro.
3. Constrói com o compasso uma semicircunferência de raio 4 cm.
4. Diz se são verdadeiras ou falsas as seguintes proposições:
 - a) Duas circunferências tangentes interiores são concêntricas (têm o mesmo centro).
 - b) Se duas circunferências são tangentes exteriores, a distância dos seus centros é igual à soma dos seus raios.
 - c) Duas circunferências podem intersectar-se em exactamente três pontos.
 - d) Se duas circunferências são secantes, a distância entre os seus centros é menor que a soma dos seus raios.
 - e) Se duas circunferências são tangentes interiores, a distância entre os seus centros é igual à diferença entre os seus raios.
5. Constrói com o teu compasso uma circunferência de raio 4 cm; escolhe sobre esta um ponto e desenha correctamente a tangente à circunferência nesse ponto.
6. Constrói duas circunferências tangentes interiores. Escolhe a medida dos raios ao teu gosto.
7. Em cada uma das figuras seguintes, determina x .

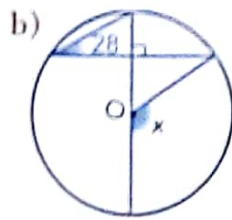
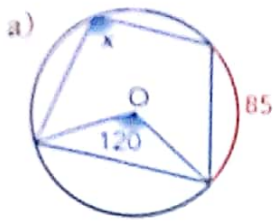


8. Em cada circunferência de centro O , calcula x .

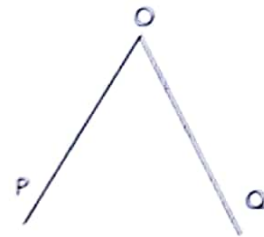
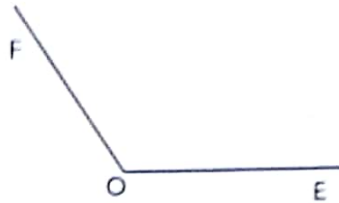
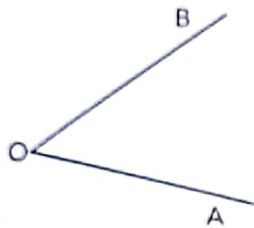




9. Observa as figuras e calcula x .



10. Utiliza um transferidor para medir a amplitude dos seguintes ângulos.



11. Reduz ao sistema centesimal.

a) 60°

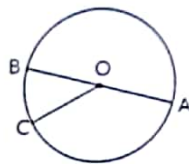
b) $12^\circ 45'$

12. Reduz ao sistema sexagesimal.

a) $100^\circ 40'$

b) $210^\circ 50'$

13. Na figura, $[AB]$ é um diâmetro e $\widehat{BOC} = 35^\circ$. Determina \widehat{AB} e \widehat{AC} .



14. Determina o perímetro das circunferências cujos raios medem:

a) 4 cm

b) 18 cm

15. Calcula o raio das circunferências cujos perímetros medem:

a) 47,1 cm

b) 62,8 cm

16. Qual é o comprimento do arco de uma circunferência de raio 5 cm e amplitude 45° ?

17. Qual é o comprimento do arco de uma circunferência de raio 3 cm e amplitude 300° ?

18. Calcula a área dos círculos cujos raios medem:

a) 5 cm

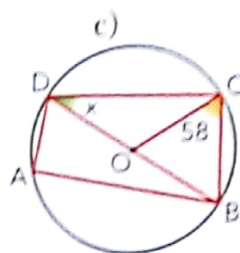
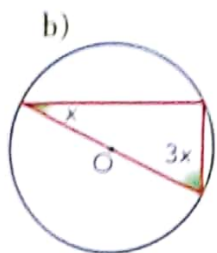
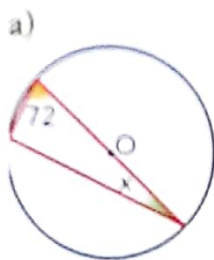
b) 1 cm

19. Determina a área de um sector circular de raio 6 cm e amplitude 18°

20. Determina a área de um sector circular de raio 6 cm e amplitude 45° .

21. Determina a área de um sector circular de raio 8 cm e amplitude 60° .

1. Observa as figuras e calcula x .



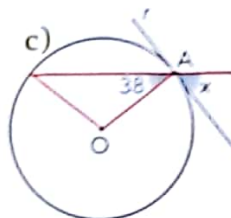
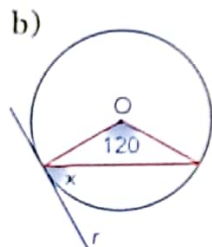
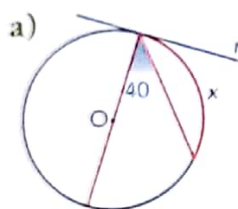
2. Desenha um círculo de centro O. Traça um diâmetro [AD] e constrói a mediatriz de [OD]. Esta mediatriz intersecta a circunferência nos pontos M e N. Desenha o triângulo [AMN].

a) Mostra que os triângulos [OMD] e [OND] são equiláteros.

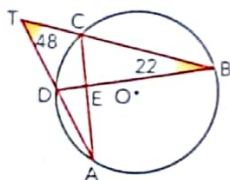
b) Calcula $\hat{M\hat{O}N}$ e $\hat{M\hat{A}N}$.

c) Prova que [AMN] é triângulo equilátero.

3. A recta r é tangente à circunferência de centro O. Determina x .

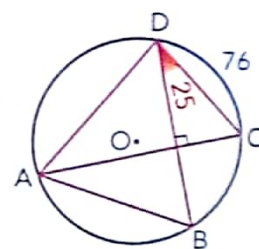


4. Observa a figura e calcula \hat{TDB} , $\hat{B\hat{E}A}$ e $\hat{T\hat{C}E}$.



5. Observa a figura e calcula a amplitude dos ângulos internos do triângulo [BAD].

Sabe-se que $\hat{B\hat{D}C} = 25^\circ$ e $\widehat{DC} = 76^\circ$.



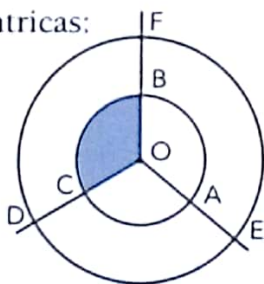
6. As circunferências são concêntricas:

$$\widehat{AB} = 130^\circ$$

$$\widehat{DE} = 110^\circ$$

$$\overline{OB} = 8 \text{ mm}$$

$$\overline{OF} = 15 \text{ mm}$$



a) Calcula \widehat{FE}

b) Calcula o comprimento do arco FE e do arco AB.

c) Serão geometricamente iguais os arcos BA e FE?

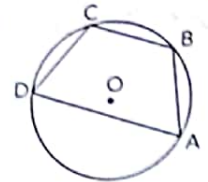
d) Calcula a área do sector circular colorido na figura.

e) Desenha uma circunferência onde assinales um arco geometricamente igual ao arco AB da figura.

Exercícios propostos



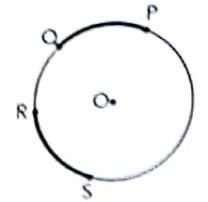
7. Na circunferência de centro O está inscrito um trapézio $[ABCD]$ em que $[DA]$ e $[CB]$ são os lados paralelos. Prova que o trapézio é isósceles.



8. Na figura está desenhada uma circunferência de centro O e verifica-se que:

$\widehat{RS} \cong \widehat{PQ}$

- a) Mostra que as rectas SP e RQ são paralelas.
- b) Qual é a relação entre \overline{RS} e \overline{PQ} ?



9. Determina o perímetro das circunferências cujos raios medem:

- a) 4,5 cm
- b) 3,2 cm
- c) 1,3 cm
- d) 2,5 cm

10. Calcula o perímetro das circunferências cujos diâmetros medem:

- a) 4,2 cm
- b) 10 cm

11. Calcula o raio das circunferências cujos perímetros medem:

- a) 7,85 cm
- b) 15,7 cm
- c) 157 cm
- d) 28,26 cm

12. Qual é o comprimento do arco de uma circunferência de diâmetro 12 cm e amplitude 30° ?

13. Uma circunferência tem 157 cm de perímetro. Qual é o comprimento de um seu arco de amplitude 60° ?

14. Um serralheiro tem que fazer 15 argolas iguais usando varões de ferro. Sabendo que cada argola deve ter 30 cm de raio, verifica se 30 m são suficientes para o trabalho.

15. Calcula a área dos círculos cujos raios medem:

- a) 2,5 cm
- b) 10 cm
- c) 1,5 cm
- d) 0,5 cm

16. No quadro abaixo são indicadas as medidas dos raios de coroas circulares. Calcula a área de cada uma delas.

r_1	5 cm	7,5 cm	12 cm	14 cm	10 cm
r_2	2 cm	2,3 cm	2 cm	9 cm	8 cm

- a)
- b)
- c)
- d)
- e)

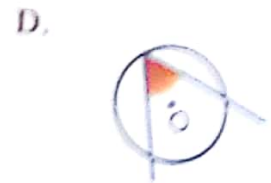
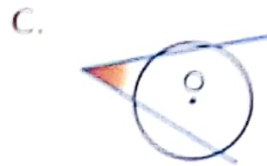
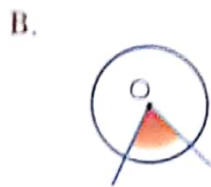
17. Observa a figura. Os raios maior e menor medem 5 cm e 2 cm respectivamente. Determina a área sabendo que a amplitude do sector circular é de 45° .



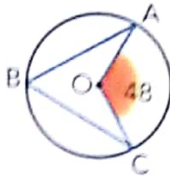
18. Determina, relativamente à figura do exercício anterior, o perímetro.

1.ª Parte

1. Qual dos ângulos é inscrito na circunferência de centro O?



2. Na circunferência de centro O, \hat{ABC} é:



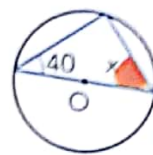
A. 48°

B. 96°

C. 24°

D. 90°

3. Na figura a amplitude do ângulo x é:



A. 40°

B. 90°

C. 50°

D. 120°

4. Numa circunferência com 62,8 cm de comprimento, o comprimento, em centímetros, de um arco de 36° é:

A. 20

B. 6,28

C. 135,6

D. 0,628

5. No quadrilátero [ABCD] inscrito numa circunferência, $\hat{ABC} = (3x - 5)^\circ$ e $\hat{CDA} = (x + 13)^\circ$. Então ABC é:

A. 43°

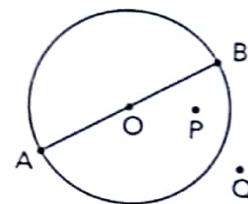
B. 90°

C. 86°

D. 124°

6. Relativamente à figura junta indica qual das alíneas é uma afirmação verdadeira.

- A. O centro O pertence à circunferência.
- B. A distância de P a O é superior ao raio.
- C. [AB] é uma corda da circunferência.
- D. O ponto P pertence à circunferência.



7. Qual das alíneas constitui uma afirmação verdadeira?

- A. Duas circunferências secantes podem ser concêntricas.
- B. Se o centro de uma circunferência pertencer à outra, elas são tangentes.
- C. Se o centro de uma circunferência pertence à outra elas são secantes.
- D. Se a diferença dos raios de duas circunferências for zero, elas são, obrigatoriamente, tangentes.

8. Na figura, $CD \perp AE$ e $\hat{CBE} = 110^\circ$

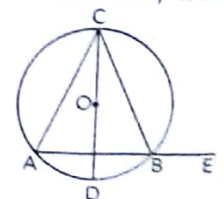
A amplitude do \sphericalangle ACD é:

A. 20°

B. 40°

C. 15°

D. 25°



9. Em unidades do sistema centesimal, a amplitude dum ângulo inscrito num arco de 110° é:

A. $138^\circ 88' 89''$

B. $61^\circ 11' 11''$

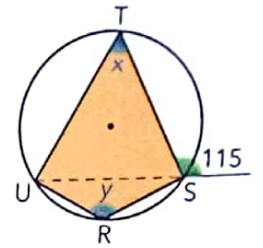
C. $277^\circ 77' 78''$

D. $122^\circ 22' 22''$

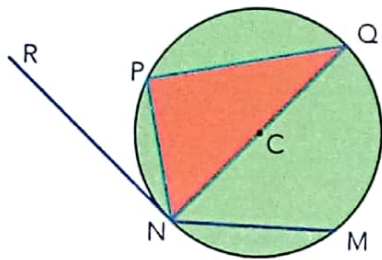


2.ª Parte

1. Observa a figura e determina x e y , sabendo que $[ST]$ é o lado de um triângulo equilátero inscrito na circunferência.



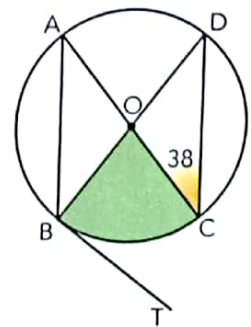
2. Na figura NR é tangente à circunferência de centro C



- $\hat{RNM} = 140^\circ$
- $\widehat{PQ} = 110^\circ$
- $\overline{NQ} = 6 \text{ cm}$

- a) Determina, justificando, \hat{NPQ} , \hat{QNM} e \hat{QNP} .
- b) Calcula, em cm, o comprimento do arco PQ.
- c) Coloca os comprimentos dos lados do triângulo $[PNQ]$ por ordem decrescente.

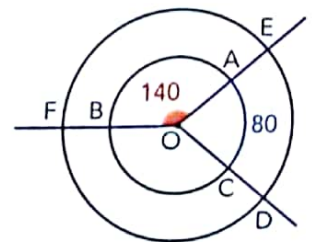
3. Na figura ao lado: $[AB] \parallel [CD]$, BT é tangente em B à circunferência de centro O e raio 1,5 cm.



- a) Determina \hat{ABD} , \hat{ABT} e \widehat{AB}
- b) Justifica que $\widehat{AD} = \widehat{BC}$
- c) Calcula a área do sector circular, a verde na figura.

4. Na figura, as circunferências são concêntricas.

- a) Calcula \widehat{AB} , \widehat{DF} , \widehat{FE} , \widehat{ED} e \widehat{BC} .
- b) Será o arco AC geometricamente igual ao arco ED? Justifica a resposta.
- c) Determina \hat{FOD} e \hat{EOD} .





OBJECTIVOS

O aluno deve ser capaz de:

- Identificar os ângulos verticalmente opostos.
- Identificar os ângulos formados por duas rectas paralelas intersectadas por uma secante.
- Comparar os ângulos formados por duas rectas paralelas intersectadas por uma secante.
- Definir o conceito de congruência de figuras geométricas.
- Definir o conceito de congruência de triângulos.
- Identificar triângulos congruentes a partir dos critérios de congruência.
- Demonstrar a congruência de triângulos utilizando os critérios de congruência.
- Aplicar os critérios de congruência de triângulos na resolução de problemas geométricos e quotidianos.
- Enunciar o Teorema de Pitágoras.
- Determinar o comprimento do lado de um triângulo rectângulo, aplicando o Teorema de Pitágoras.
- Resolver problemas concretos vinculados à vida do aluno, aplicando o Teorema de Pitágoras.

by-1900

CONTEÚDOS

1. Revisão

- Ângulos verticalmente opostos
- Ângulos formados por rectas paralelas intersectadas por uma secante
- Triângulos: elementos de um triângulo
- Ângulos internos e externos de um triângulo
- Classificação de triângulos

2. Congruência de figuras geométricas

- Noção de congruência de segmentos ângulos e polígonos
- Noção de congruência de triângulos

3. Noções de congruência de triângulos

- Critério lado-ângulo-lado
- Critério lado-lado-lado
- Critério ângulo-lado-ângulo
- Aplicação da congruência de triângulos na resolução de problemas
- Introdução do Teorema de Pitágoras a partir de situações da vida
- Demonstração do Teorema de Pitágoras pela gravura
- Aplicação do Teorema de Pitágoras

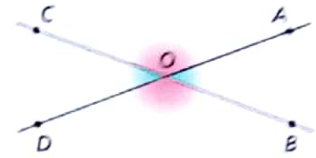
Revisão

Ângulos verticalmente opostos
Ângulos de lados paralelos

Dois ângulos dizem-se verticalmente opostos se têm o mesmo vértice e os lados de um ângulo estão no prolongamento dos lados do outro.

Na figura ao lado:

$\sphericalangle COD$ e $\sphericalangle AOB$ são verticalmente opostos,
 $\sphericalangle COA$ e $\sphericalangle DOB$ são verticalmente opostos.

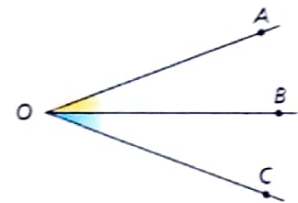


Repara que:

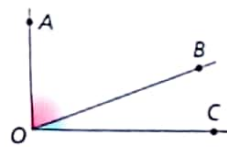
$$\left. \begin{aligned} \hat{C}\hat{O}\hat{D} + \hat{C}\hat{O}\hat{A} &= 180^\circ \\ \hat{C}\hat{O}\hat{D} + \hat{D}\hat{O}\hat{B} &= 180^\circ \end{aligned} \right\} \text{logo } \hat{C}\hat{O}\hat{A} = \hat{D}\hat{O}\hat{B} \quad \left. \begin{aligned} \hat{C}\hat{O}\hat{A} + \hat{C}\hat{O}\hat{D} &= 180^\circ \\ \hat{C}\hat{O}\hat{A} + \hat{A}\hat{O}\hat{B} &= 180^\circ \end{aligned} \right\} \text{logo } \hat{C}\hat{O}\hat{D} = \hat{A}\hat{O}\hat{B}$$

Dois ângulos verticalmente opostos são geometricamente iguais.

Dois ângulos dizem-se adjacentes se têm o mesmo vértice e um lado comum que os separa. Na figura ao lado, $\sphericalangle AOB$ e $\sphericalangle BOC$ são adjacentes, mas $\sphericalangle AOB$ e $\sphericalangle AOC$ não são adjacentes, pois intersectam-se.

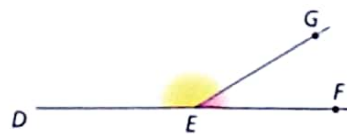


Dois ângulos dizem-se complementares quando a sua soma é um ângulo recto.



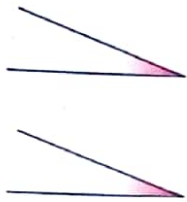
$\hat{A}\hat{O}\hat{B} + \hat{B}\hat{O}\hat{C} = 90^\circ$

Dois ângulos dizem-se suplementares quando a sua soma é um ângulo raso.

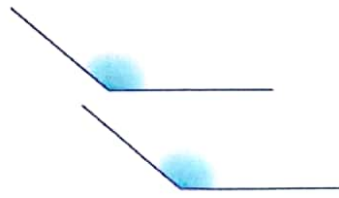


$\hat{D}\hat{E}\hat{G} + \hat{G}\hat{E}\hat{F} = 180^\circ$

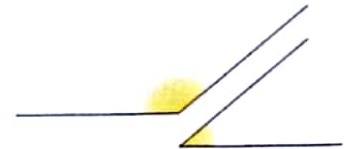
Dois ângulos de lados paralelos } são iguais se forem ambos agudos ou ambos obtusos.
são suplementares se um for agudo e o outro obtuso.



Ângulos agudos de lados paralelos são iguais.



Ângulos obtusos de lados paralelos são iguais.

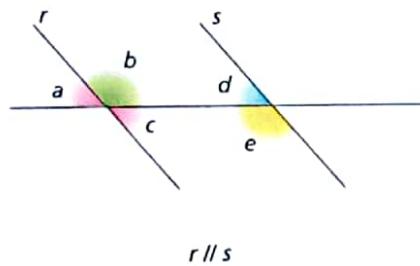


Ângulos de lados paralelos, um ângulo agudo e outro obtuso, são suplementares.



Exercício resolvido

Observa a figura e calcula as amplitudes dos ângulos a , b , d e e , sabendo que $\hat{c} = 48^\circ$.



Resolução:

$\hat{a} = 48^\circ$ porque a e c são verticalmente opostos.

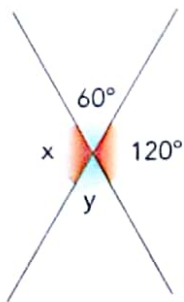
$\hat{b} = 180^\circ - 48^\circ = 132^\circ$, pois b e c são ângulos suplementares.

$\hat{d} = \hat{a} = 48^\circ$ pois a e d são ângulos de lados paralelos e ambos agudos.

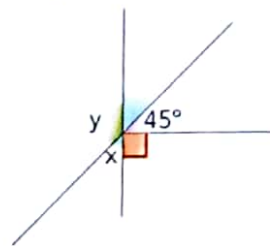
$\hat{e} = 180^\circ - 48^\circ = 132^\circ$, pois e e d são ângulos de lados paralelos, um agudo e outro obtuso, logo, são suplementares.

2. Calcula a amplitude dos ângulos \hat{a} e \hat{b} nas figuras seguintes e justifica:

a)



b)



Resolução:

a) $x = 120^\circ$, ângulos verticalmente opostos

$b = 60^\circ$, ângulos verticalmente opostos

b) $x = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$

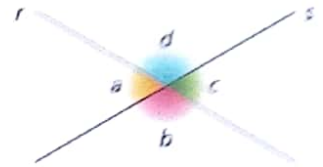
$y = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$



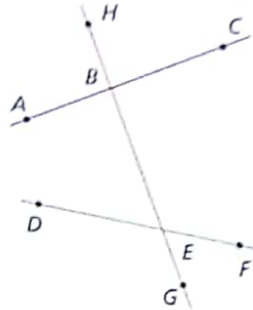
Exercícios de consolidação

1. Na figura em baixo, as rectas r e s são concorrentes.

- a) Indica os pares de ângulos verticalmente opostos.
- b) Indica os pares de ângulos suplementares.
- c) Supondo que $\hat{c} = 35^\circ$, calcula as amplitudes dos outros ângulos indicados na figura.



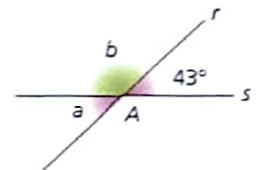
2. Na figura em baixo, as rectas HG , AC e DF intersectam-se duas a duas.



- a) Indica um par de ângulos verticalmente opostos.
- b) Indica um ângulo suplementar ao ângulo DEG .
- c) Indica um ângulo adjacente ao ângulo CBH .
- d) Os ângulos ABE e EBC são adjacentes? Justifica.
- e) Se $\hat{HBC} = 88^\circ$, determina a amplitude do ângulo ABE e do ângulo ABH .

3. Na figura ao lado, as rectas r e s intersectam-se no ponto A .

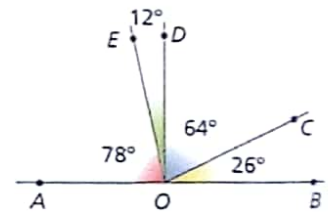
Indica, justificando, a amplitude dos ângulos a e b .



4. Considera a figura ao lado.

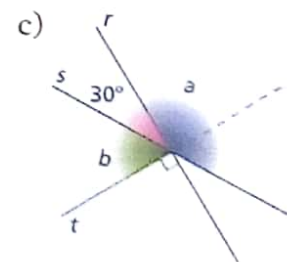
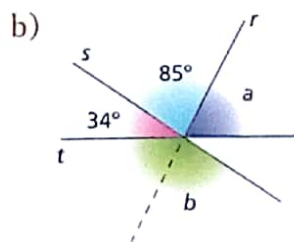
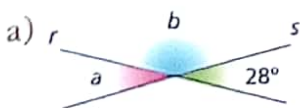
Identifica:

- a) Um par de ângulos complementares.
- b) Um par de ângulos adjacentes não complementares.
- c) Um par de ângulos suplementares.



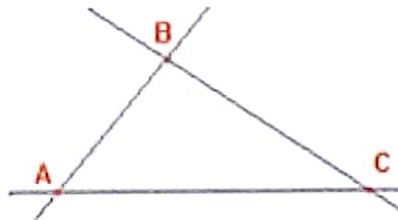
5. Um certo ângulo é complementar do outro com 59° de amplitude. Qual é o seu suplementar?

6. Em cada um dos seguintes casos, determina as amplitudes dos ângulos a e b .



Triângulo

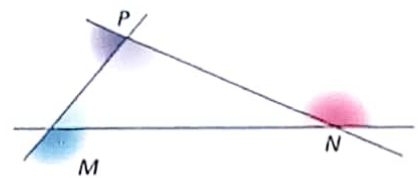
Triângulo é qualquer polígono com três lados e três ângulos.



- Num triângulo, as duas semi-rectas que partem do mesmo vértice e contêm dois lados, limitam um ângulo que se chama ângulo interno ou simplesmente ângulo que se diz adjacente a qualquer desses lados.
- Ângulos externos de um triângulo são os ângulos formados por um dos lados e pelo prolongamento do lado consecutivo.

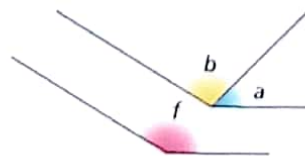
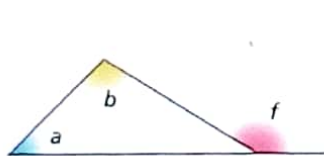
No triângulo $[MNP]$ estão assinalados os ângulos externos e os ângulos internos.

Cada ângulo externo é sempre adjacente a um ângulo interno e a soma das respectivas amplitudes é 180° .



Com a actividade anterior, concluíste que:

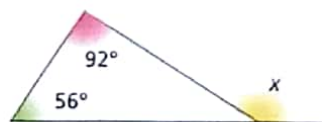
Em qualquer triângulo, a amplitude de um ângulo externo é igual à soma das amplitudes dos ângulos internos não adjacentes.



$$a + b = f$$

Exercício resolvido

Calcular a amplitude do ângulo x , externo do triângulo representado ao lado.



Resolução:

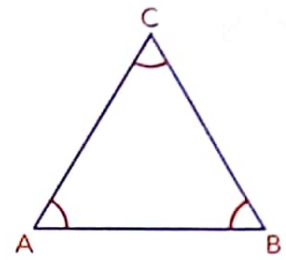
$$\hat{x} = 56^\circ + 92^\circ \text{ logo } \hat{x} = 148^\circ$$

Elementos do triângulo [ABC]

Vértices – A, B, C

Lados – [AB], [BC], [CA]

Ângulos – $\sphericalangle ABC$; $\sphericalangle BCA$; $\sphericalangle CAB$; são os ângulos internos.



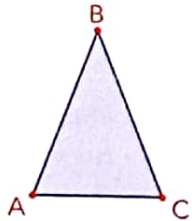
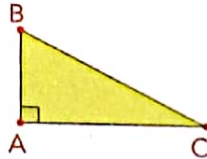
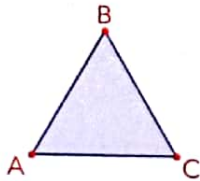
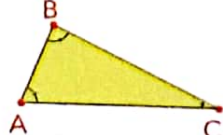
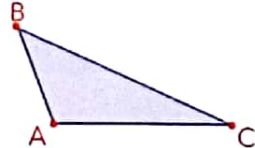
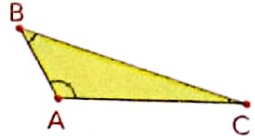
Num triângulo, um lado oposto a um ângulo é aquele que não está contido em nenhum dos lados do ângulo.

[BC] é o lado oposto ao $\sphericalangle CAB$

Classificação dos triângulos

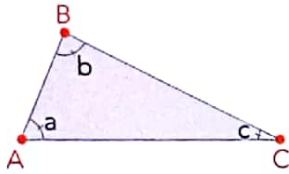
Um triângulo pode ser classificado quanto à grandeza relativa dos seus lados e quanto à amplitude/natureza dos seus ângulos internos.

Quanto à grandeza relativa dos lados, os triângulos classificam-se em:

Grandeza relativa dos lados	Natureza dos seus ângulos
 <p>1. Isósceles – quando têm pelo menos dois lados iguais.</p>	 <p>1. Rectângulos – quando têm um ângulo recto. [AB] e [AC] são catetos; [BC] é a hipotenusa.</p>
 <p>2. Equiláteros – quando têm os três lados iguais.</p>	 <p>2. Acutângulos – quando têm todos os ângulos agudos</p>
 <p>3. Escalenos – quando têm os três lados desiguais.</p>	 <p>3. Obtusângulos – quando têm um ângulo obtuso.</p>

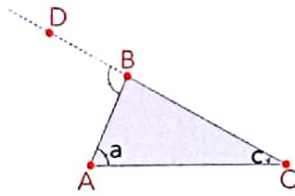
Relações entre os elementos geométricos de um triângulo

Relação entre os ângulos



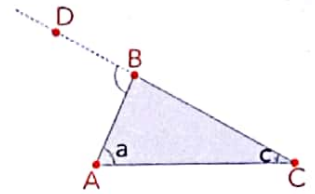
$$\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 180$$

- A soma das amplitudes dos três ângulos internos de um triângulo é igual a 180° .



$$\widehat{A B D} = \hat{a} + \hat{c}$$

- A amplitude de um ângulo externo de um triângulo é igual à soma das amplitudes dos ângulos internos não adjacentes.



$$\widehat{A B D} > \hat{a} \wedge \widehat{A B D} > \hat{c}$$

- A amplitude de um ângulo externo de um triângulo é maior do que a amplitude de qualquer um dos ângulos internos não adjacentes.

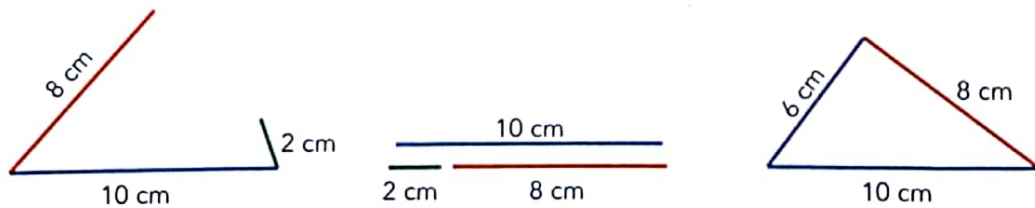
Relação entre os lados

Desigualdade triangular

Tenta construir os triângulos seguintes:

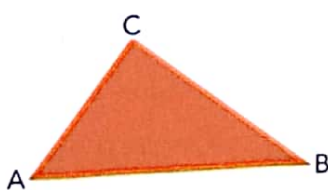
Comprimento dos lados (cm)			Obtiveste um triângulo?
10	8	6	
10	8	2	
10	6	2	

Chegastes a estas situações:



Concluimos que com três segmentos nem sempre é possível construir um triângulo

- Num triângulo, a medida de cada lado é menor que a soma das medidas dos outros dois.



$$\overline{AB} < \overline{AC} + \overline{BC}$$

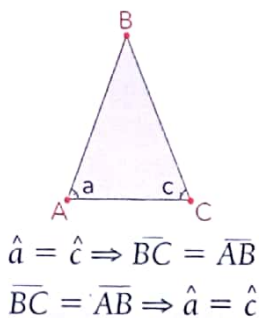
$$\overline{AC} < \overline{AB} + \overline{BC}$$

$$\overline{BC} < \overline{AB} + \overline{AC}$$

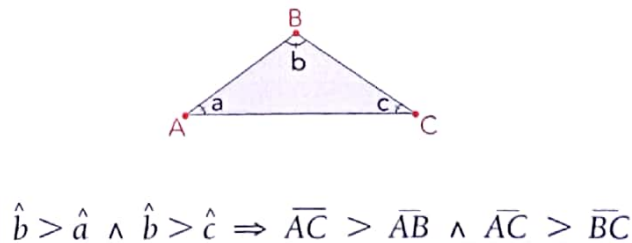
Num triângulo, a medida de cada lado é maior que a diferença das medidas dos outros dois.

Relação entre os lados e ângulos de um triângulo

- Num triângulo, a ângulos iguais opõem-se lados iguais e a lados iguais opõem-se ângulos iguais.



- Num triângulo, ao maior/menor ângulo opõe-se o maior/menor lado e ao maior/menor lado opõe-se o maior/menor ângulo.

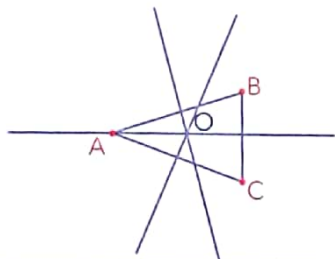


Linhas e pontos notáveis (no plano) do triângulo

Mediatriz

Eixo ou mediatriz de um triângulo é a recta perpendicular ao meio de qualquer dos seus lados.

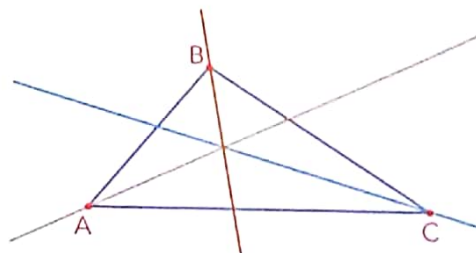
- As mediatrizes de um triângulo encontram-se num ponto que se designa por circuncentro do triângulo ou centro da circunferência circunscrita no triângulo.



Bissetriz

Bissetriz de um triângulo é a bissetriz de qualquer dos seus ângulos.

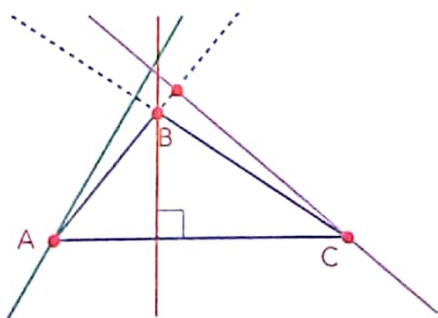
- As bissetrizes de um triângulo encontram-se num ponto que se designa por incentro do triângulo ou centro da circunferência inscrita no triângulo.



Altura

Altura de um triângulo é o segmento da perpendicular baixada de um vértice sobre o lado oposto ou sobre o seu prolongamento.

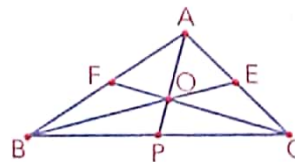
- As alturas de um triângulo ou os seus prolongamentos encontram-se num ponto designado por ortocentro do triângulo.



Mediana

Mediana de um triângulo é o segmento que une um vértice com o ponto médio do lado oposto.

- Ao ponto de encontro das medianas de um triângulo dá-se o nome de baricentro (ou centro de gravidade) do triângulo.



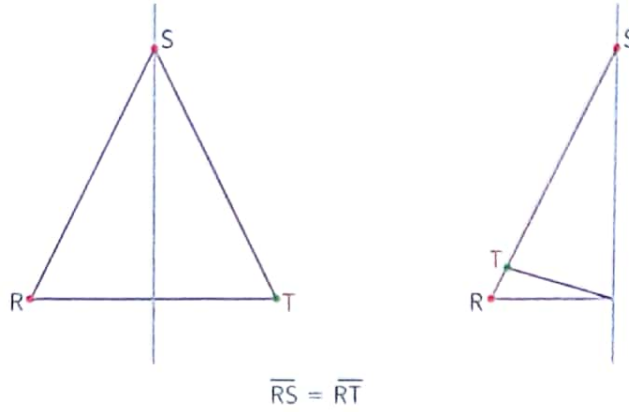
Na figura,

$$\overline{OA} = \frac{2}{3} \overline{AP}, \quad \overline{OC} = \frac{2}{3} \overline{CF}, \quad \overline{OB} = \frac{2}{3} \overline{BE}$$

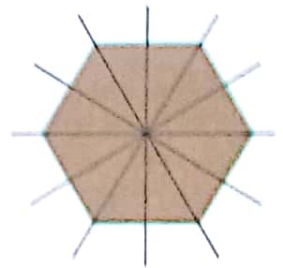
A distância do baricentro de um triângulo a qualquer um dos seus vértices é $\frac{2}{3}$ da mediana respectiva.

Eixos de simetria em triângulos

Uma figura admite um eixo de simetria se, «dobrando» o desenho da figura pelo eixo, as duas partes do desenho coincidem ponto por ponto.



Uma figura pode ter um ou mais eixos de simetria, mas nem todas as figuras têm eixos de simetria.



No caso do triângulo temos:

Triângulo	N.º de eixos de simetria
Equilátero	<p>3 eixos</p>
Isósceles	<p>1 eixo</p>
Escaleno	<p>Não tem eixos</p>



7. Diz, justificando, se é possível construir um triângulo [ABC] em cada um dos casos seguintes:

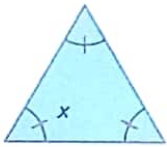
- a) $\overline{AC} = 3$ cm; $\overline{AB} = 7$ cm e $\overline{BC} = 10$ cm
- b) $\overline{AB} = 8$ cm; $\overline{BC} = 5$ cm e $\overline{AC} = 5$ cm
- c) $\overline{AB} = 4$ cm; $\overline{AC} = 8,5$ cm e $\overline{BC} = 7,5$ cm

8. O triângulo [ABC] é isósceles e o vértice A é oposto ao lado que é diferente dos outros lados do triângulo. Sendo $\overline{BC} = 9$ cm, indica se é possível que:

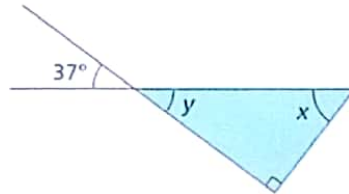
- a) $\overline{AB} = 6$ cm
- b) $\overline{AB} = 2$ cm
- c) $\overline{AB} = 4,5$ cm

9. Calcula as amplitudes dos ângulos internos indicados em cada um dos triângulos:

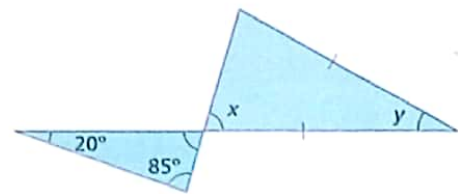
a)



b)

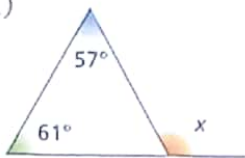


c)



10. Calcula, em cada caso, a amplitude do ângulo desconhecido.

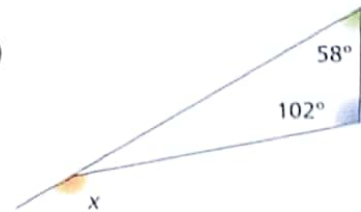
a)



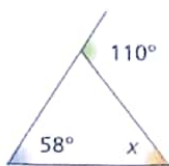
b)



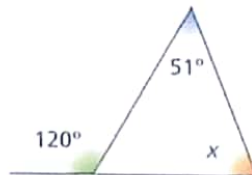
c)



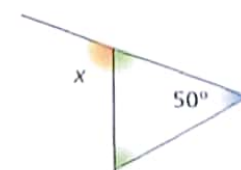
d)



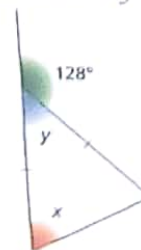
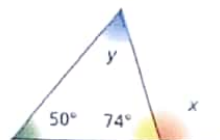
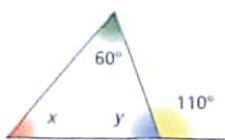
e)



f)



11. Observa as figuras e calcula, em cada caso, as amplitudes de x e y.

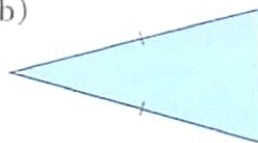


12. Observa os triângulos e, em cada caso, indica o número de eixos de simetria.

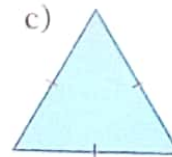
a)



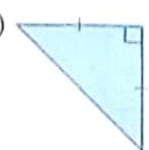
b)



c)



d)



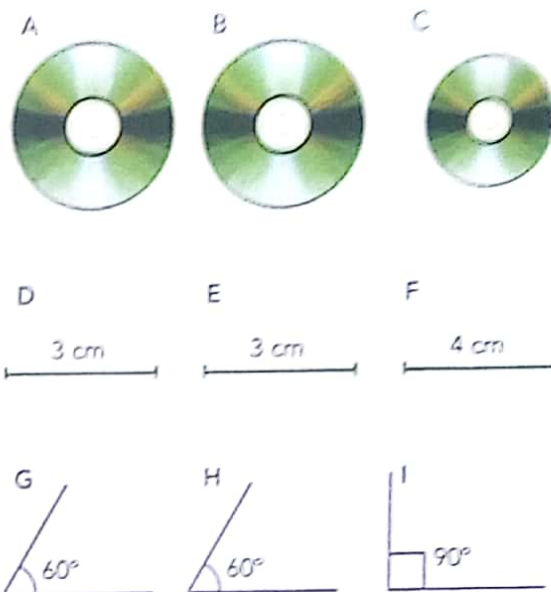
Congruência de figuras geométricas

Observa as figuras seguintes:

- Três CD's sendo 2 iguais e 1 mais pequeno.
- 3 segmentos de recta sendo 2 de 3 cm e 1 de 4 cm
- 3 ângulos sendo 2 de 60 graus e 1 de 90 graus

Em geral os CD's são fabricados com forma circular e 12 cm de diâmetro. Por isso, se tivermos dois CD's deste tipo podemos sobrepô-los e ficamos com a sensação de ter apenas um CD um pouco mais grosso, por exemplo, as figuras A e B. No entanto, também existem CD's com forma circular e 8 cm de diâmetro.

Podemos sobrepor totalmente um CD destes, por exemplo C a um dos anteriores, A ou B? Neste caso, embora a forma seja a mesma, o tamanho é diferente.



Em Matemática, as figuras que têm a mesma forma e as mesmas dimensões chamam-se congruentes. Quer dizer, podemos deslocar uma delas e sobrepô-la à outra, de modo que não conseguimos distingui-las.

Quando é que dois círculos são congruentes? Quando têm o mesmo raio.

E dois segmentos de recta? Quando os seus comprimentos têm a mesma medida, por exemplo, D e E.

E dois ângulos? Quando as suas amplitudes têm a mesma medida, por exemplo G e H. E dois triângulos? Quando forem congruentes os pares de lados correspondentes – ou homólogos – e os pares de ângulos correspondentes – ou homólogos – nos dois triângulos.

Congruência (igualdade) e construção de triângulos

Dois triângulos dizem-se congruentes ou iguais se coincidem ponto por ponto. Em dois triângulos congruentes, aos elementos iguais chamamos elementos correspondentes ou homólogos.

Como foi referido, dois triângulos iguais têm os seis elementos iguais, cada um a cada um. Porém, para afirmar a igualdade de triângulos, é suficiente saber-se que três determinados elementos são iguais. Assim, os casos apresentam-se, de seguida, com as respectivas abreviações,

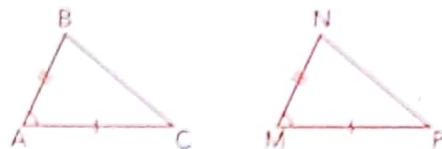
- a.l.a. – um lado (l) e dois ângulos adjacentes (a.a)
- l.a.l. – dois lados (l.l) e o ângulo por eles formado(a)
- l.l.l. – os três lados.



Critérios de congruência de triângulos

1.º Caso de congruência de triângulos (l.a.l)

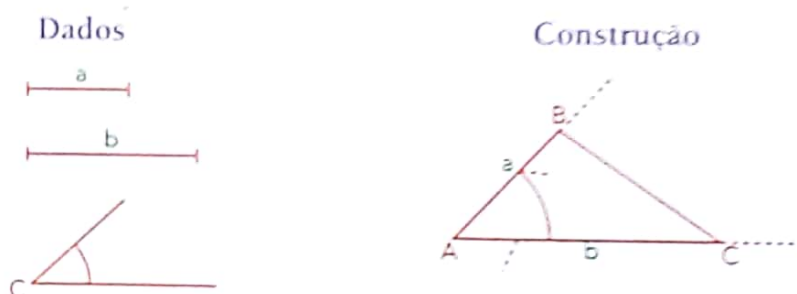
Dois triângulos são congruentes se têm dois lados congruentes (iguais), cada um a cada um e o ângulo por eles formado congruente (igual), (l.a.l = l.a.l.)



$$\overline{AB} = \overline{MN} \quad \overline{AC} = \overline{MP} \quad \widehat{BAC} = \widehat{NMP}$$

Construção:

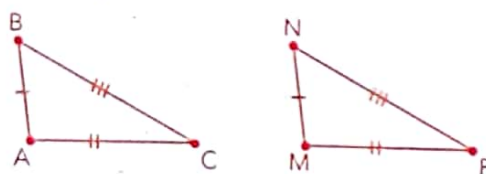
Dados um ângulo e os lados que o formam.



Constrói-se um ângulo geometricamente igual a C e sobre os seus lados consideram-se segmentos geometricamente iguais a a e b. Unem-se os extremos destes dois segmentos.

2.º Caso de congruência de triângulos (l.l.l.)

Dois triângulos são congruentes (iguais) se têm os três lados congruentes (iguais), cada um a cada um, (l.l.l = l.l.l.).



$$\overline{AB} = \overline{MN} \quad \overline{AC} = \overline{MP} \quad \overline{BC} = \overline{NP}$$

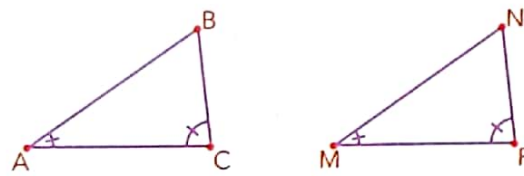
Construção:



Desenha-se um segmento geometricamente igual a a. Com centro nos extremos desse segmento, constroem-se circunferências de raios b e c. O ponto de intersecção dessas circunferências é o terceiro vértice do triângulo.

3.º Caso de congruência (igualdade de triângulos (a.l.a.))

Dois triângulos são congruentes (iguais) se têm um lado congruente (igual) e os dois ângulos adjacentes congruentes (iguais) cada um a cada um. (a.l.a. = a.l.a.)

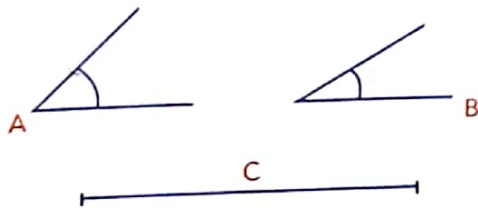


$$\overline{AC} = \overline{MP} \quad \hat{BAC} = \hat{NMP} \quad \hat{BCA} = \hat{NPM}$$

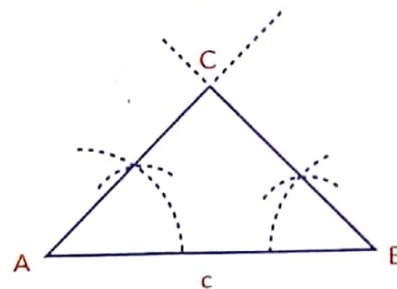
Construção:

Conhecidos dois ângulos, o terceiro também o é pois é o suplementar da soma daqueles.

Dados



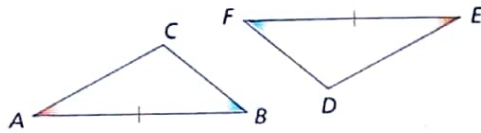
Construção



Desenha-se um segmento geometricamente igual a c e nos seus extremos ângulos geometricamente iguais a A e B .

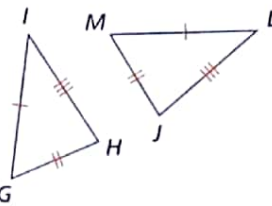
13. Considera os seguintes pares de triângulos:

A.



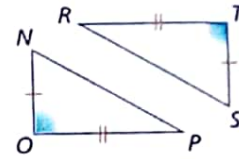
$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \overline{FE} \\ \sphericalangle CAB &\simeq \sphericalangle DEF \\ \sphericalangle ABC &\simeq \sphericalangle EFD \end{aligned}$$

B.



$$\begin{aligned} \overline{GI} &= \overline{ML} \\ \overline{GH} &= \overline{JM} \\ \overline{HI} &= \overline{JL} \end{aligned}$$

C.



$$\begin{aligned} \overline{NO} &= \overline{TS} \\ \overline{OP} &= \overline{TR} \\ \sphericalangle NOP &\simeq \sphericalangle STR \end{aligned}$$

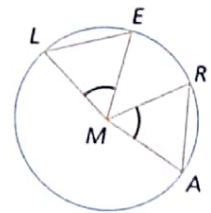
- a) Qual o caso de igualdade de triângulos que, em cada caso, atendendo às condições dadas, te permite afirmar que os triângulos são geometricamente iguais?
 b) Para cada par de triângulos, indica os outros elementos que são iguais.

14. Observa a figura ao lado, em que as duas cordas traçadas são geometricamente iguais.

Indica, justificando, se cada uma das afirmações é verdadeira ou falsa.

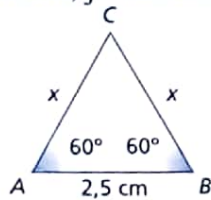
A. O triângulo [MAR] é geometricamente igual ao triângulo [MEL].

B. $\widehat{LME} = \widehat{RMA}$

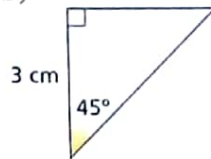


15. Calcula, justificando, os comprimentos desconhecidos.

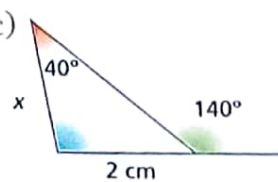
a)



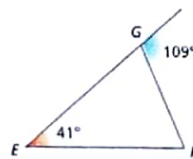
b)



c)

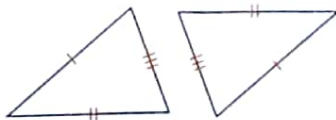


16. Coloca por ordem decrescente os comprimentos dos lados do triângulo [EFG].

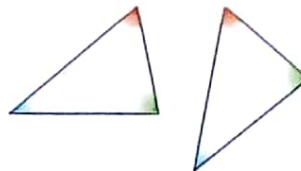


17. Justifica, recorrendo aos critérios, que cada um dos seguintes pares de triângulos são geometricamente iguais.

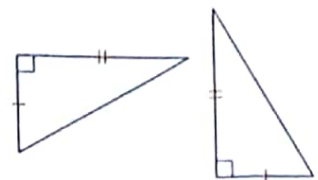
a)



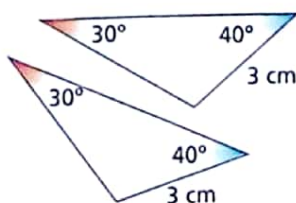
b)



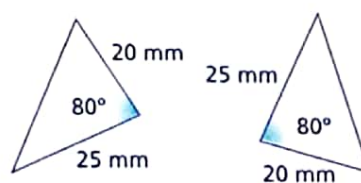
c)



d)



e)





1.ª Parte

Indica a resposta correcta: A, B, C ou D.

1. Numa pirâmide com 14 arestas, o seu número de vértices é:

- A. 7 B. 14 C. 8 D. 15

2. Os três comprimentos, em centímetros, que não podem corresponder aos lados de um triângulo são:

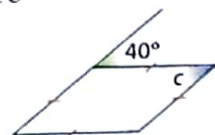
- A. 3; 4; 5 B. 7; 7; 7 C. 4; 8; 10 D. 6; 6; 12

3. As amplitudes dos ângulos internos de um triângulo podem ser:

- A. 120° ; 90° ; 30° B. 90° ; 90° ; 20° C. 60° ; 25° ; 95° D. 50° ; 30° ; 10°

4. No paralelogramo representado ao lado, a amplitude do ângulo c é:

- A. 140° B. 40° C. 80° D. 20°



5. A amplitude do ângulo externo do triângulo representado ao lado é:

- A. 60° B. 110° C. 120° D. 80°



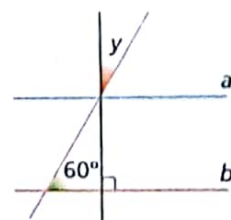
6. Sendo r e s rectas paralelas, a amplitude do ângulo x é:

- A. 68° B. 86° C. 154° D. 26°



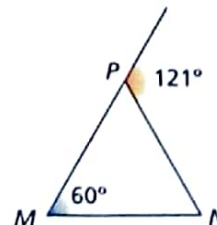
7. Sendo a e b rectas paralelas, a amplitude do ângulo y é:

- A. 60° B. 90° C. 30° D. 100°



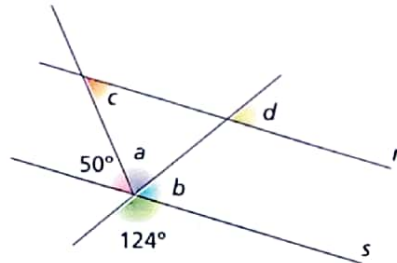
8. O menor lado do $\triangle MNP$ representado ao lado é:

- A. $[PN]$ B. $[MN]$ C. $[MP]$ D. Não existe.



2.ª Parte

1. Na figura ao lado, as rectas r e s são paralelas. Calcula as amplitudes dos ângulos a , b , c e d .

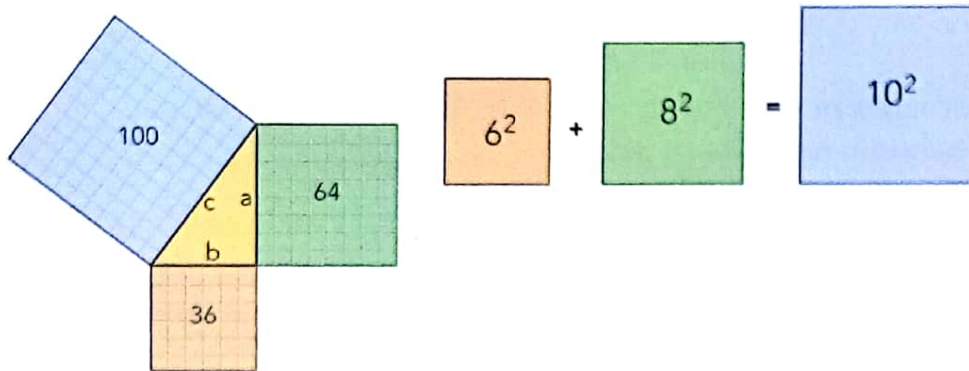


2. Averigua se é possível construir um triângulo isósceles com 60 cm de perímetro e com os lados que são geometricamente iguais de 15 cm cada um. Explica a resposta.
3. Desenha em papel quadriculado um triângulo de base 2 cm e área 4 cm^2 .
Desenha um quadrado e um paralelogramo não rectângulo equivalentes ao triângulo.
(Polígonos são equivalentes quando têm a mesma área.)
4. Desenha o triângulo $[ABC]$ isósceles, tal que: $AB = BC = 3 \text{ cm}$ e $\hat{ABC} = 50^\circ$. Constrói o simétrico do triângulo $[ABC]$ relativamente a AC . Chama D ao simétrico de B .
 - a) Que quadrilátero obtiveste? Justifica a tua resposta.
 - b) Justifica as igualdades: $\hat{ACD} = \hat{CAD}$ e $\hat{BAC} = \hat{DCA}$.
 - c) Será AC a bissetriz do ângulo BAD ? Porquê?

Teorema de Pitágoras

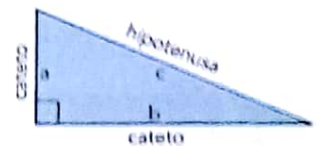
Num triângulo rectângulo, a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os dois catetos.

Teorema é uma proposição enunciando uma verdade que, por não ser evidente, precisa de ser demonstrada.



E, assim, acabaste de verificar o teorema de Pitágoras.

- Teorema de Pitágoras: num triângulo rectângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.



$$c^2 = a^2 + b^2$$



Exercícios resolvidos

1. Recorta em papel, ou cartolina, quatro triângulos rectângulos iguais ao da figura.

Desenha depois um quadrado cujos lados meçam $a + b$, ou seja, a soma das medidas dos catetos do triângulo.

Arruma agora os 4 triângulos dentro do mesmo quadrado, mas de outra maneira.

Resolução:

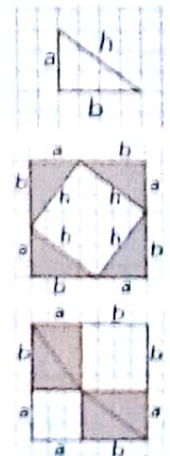
Na figura, o quadrado de lado $a + b$ está decomposto em 4 triângulos iguais e um quadrado de área h^2 .

Na 2.ª figura, o mesmo quadrado está decomposto nos mesmos 4 triângulos mais dois quadrados, um de área a^2 e outro de área b^2 .

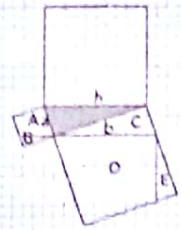
Portanto,

$$h^2 = a^2 + b^2$$

Com estas figuras mostra que, de facto, se tem sempre $h^2 = a^2 + b^2$



2. Desenha uma figura igual à figura apresentada e, depois, recorta os dois quadrados mais pequenos de acordo com o que se sugere. Arrumando as figuras obtidas (A, B, C, D e E) sobre o quadrado grande, mostra que $h^2 = a^2 + b^2$



Resolução:

Para provar também aqui que $h^2 = a^2 + b^2$, basta arrumar as figuras como indicado na figura ao lado.



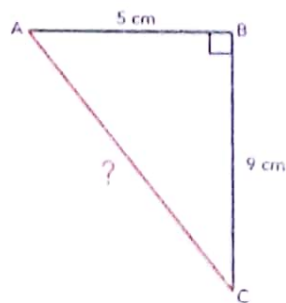
Aplicações do teorema de Pitágoras

O teorema de Pitágoras permite resolver muitos problemas práticos do dia a dia.



Exercícios resolvidos

1. No triângulo [ABC], calcula \overline{AC}



Resolução:

- Verifica-se que [AC] é a hipotenusa, porque é o lado oposto ao ângulo recto.

- Pelo Teorema de Pitágoras:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$$

$$\overline{AC}^2 = 5^2 + 9^2$$

$$\overline{AC}^2 = 25 + 81$$

$$\overline{AC}^2 = 106$$

$$\overline{AC} = \sqrt{106}$$

$$AC = 10,3 \text{ (1 c.d.)}$$

2. No triângulo $[ABC]$: $\overline{AB} = 7 \text{ cm}$, $\overline{AC} = 8 \text{ cm}$ e $\overline{BC} = 4 \text{ cm}$.
Será que o triângulo é rectângulo?

Resolução:

Se o triângulo for rectângulo, o maior lado é a hipotenusa e verificar-se-á o teorema de Pitágoras.

Então:

$$8^2 = 7^2 + 4^2$$

$$64 = 49 + 16$$

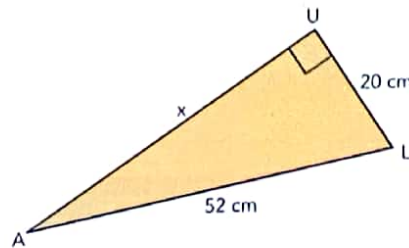
$$64 = 65$$

Falso, não se verifica o teorema de Pitágoras.

Logo, o triângulo $[ABC]$ não é triângulo rectângulo.

3. No $\Delta[LUA]$: $\widehat{LUA} = 90^\circ$
 $\overline{LU} = 20 \text{ cm}$
 $\overline{AL} = 52 \text{ cm}$

Calcula \overline{AU} .



Resolução:

Pelo Teorema de Pitágoras:

$$\overline{AL}^2 = \overline{LU}^2 + \overline{AU}^2$$

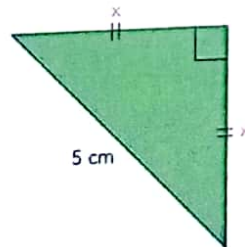
$$52^2 = 20^2 + x^2$$

$$2704 = 400 + x^2$$

$$2704 - 400 = x^2$$

$$2304 = x^2 \quad \text{logo} \quad x = \sqrt{2304} \quad \overline{AU} = 48 \text{ cm}$$

4. Calcular x .



Resolução:

$$5^2 = x^2 + x^2$$

$$25 = 2x^2$$

$$x^2 = 12,5$$

$$x = 3,54 \text{ cm (2 c.d.)}$$

Diagonal de um paralelepípedo rectângulo

Diagonal de um paralelepípedo rectângulo é o segmento de recta que une dois vértices opostos não pertencentes à mesma face.

São quatro as diagonais do paralelepípedo rectângulo.

Observa a figura ao lado.

- $\Delta[RMP]$ é rectângulo em M e, pelo teorema de Pitágoras,

$$D^2 = d^2 + c^2$$

- $\Delta[MNP]$ é rectângulo em N e, pelo teorema de Pitágoras,

$$d^2 = a^2 + b^2$$

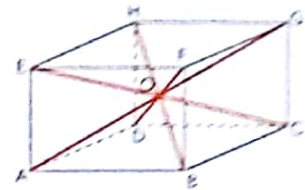
Logo,

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

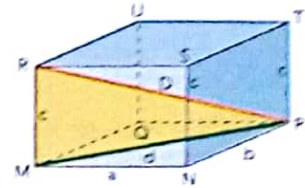
- No caso do cubo, como as arestas são todas iguais:

$$D^2 = a^2 + a^2 + a^2 \quad \text{isto é}$$

$$D^2 = 3a^2$$



Diagonais do paralelepípedo rectangular (4).

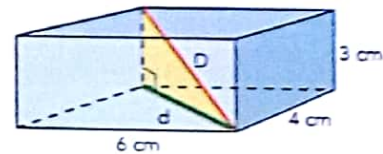


Paralelepípedo rectângulo de dimensões a , b e c , em que: D - diagonal do paralelepípedo; d - diagonal de uma face.



Exercícios resolvidos

Calcula a diagonal do paralelepípedo rectângulo com as dimensões indicadas na figura.



Resolução:

Pelo teorema de Pitágoras:

$$D^2 = 6^2 + 4^2 + 3^2 \quad \text{ou} \quad d^2 = 6^2 + 4^2$$

$$D^2 = 61$$

$$D = \sqrt{61}$$

$$D = 7,8 \text{ cm (1 c.d.)}$$

$$d^2 = 36 + 16$$

$$d^2 = 52$$

$$D^2 = d^2 + 3^2$$

$$D^2 = 52 + 9$$

$$D^2 = 61$$

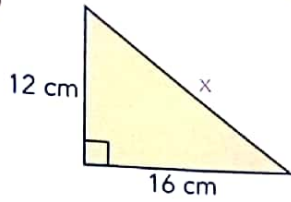
$$D = 7,8 \text{ cm (1 c.d.)}$$

Exercícios de consolidação

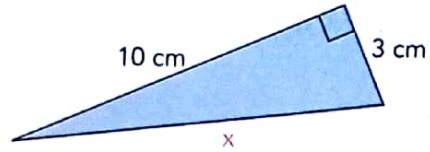


18. Calcula a hipotenusa (x) em cada um dos triângulos:

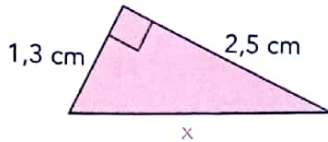
a)



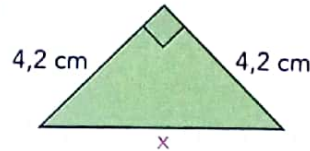
b)



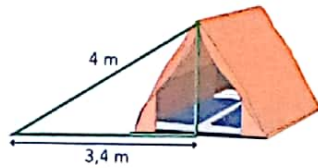
c)



d)

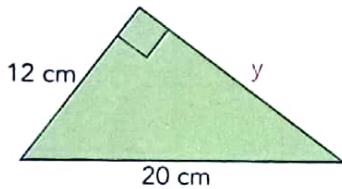


19. Qual é a altura da tenda?

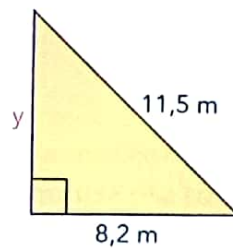


20. Calcula y em cada uma das figuras.

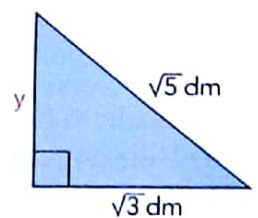
a)



b)



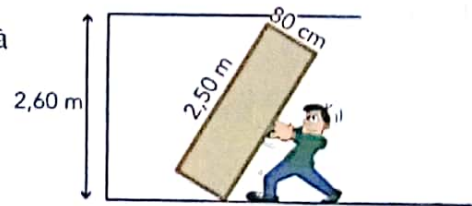
c)



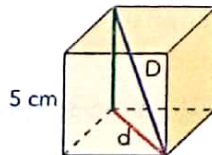
21. A diagonal do relvado rectangular de um estádio tem 125 m e uma das dimensões do campo é 105 m.

- Calcula, com 1 c.d., a outra dimensão do campo.
- Calcula, aproximada às décimas, a área de meio-campo.

22. Será que o Bernardo consegue encostar o armário à parede (de 2,60 m)? Justifica a resposta.

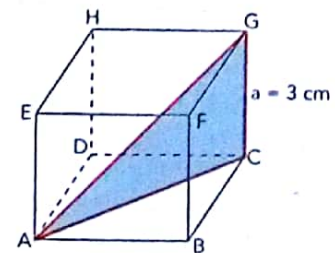


23. No cubo em baixo, de aresta 5 cm, determina o comprimento da diagonal D .



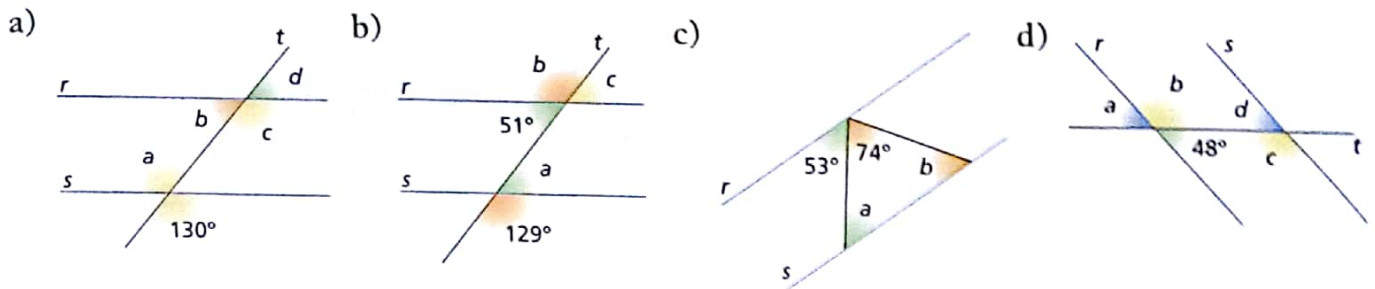
24. Observa atentamente o cubo representado na figura e responde às questões.

- Qual é a posição da aresta $[GC]$ relativamente ao plano que contém a face $[ABCD]$?
- Calcula \overline{AG}

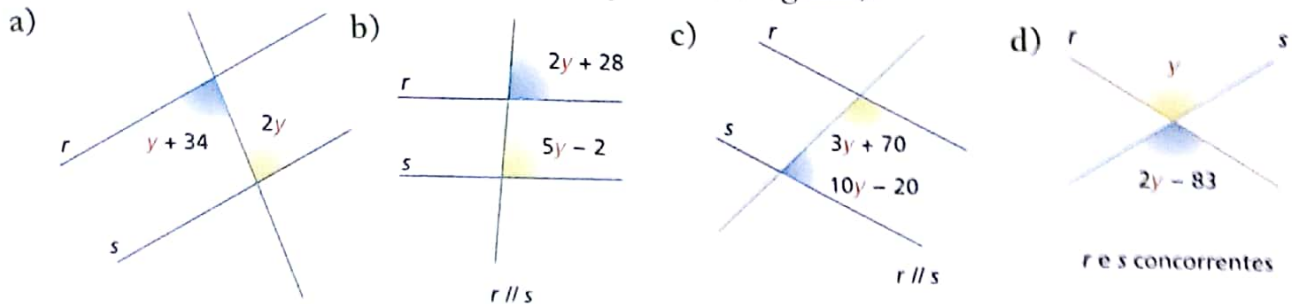


Exercícios propostos

1. Calcula a amplitude dos ângulos desconhecidos, sabendo que em cada caso as rectas r e s são paralelas.



2. Em cada caso, determina o valor de y (amplitudes em graus).

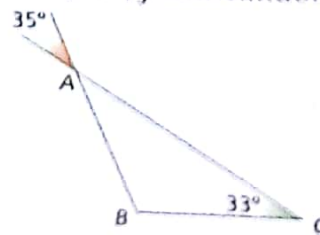


3. Verdadeiro ou falso?

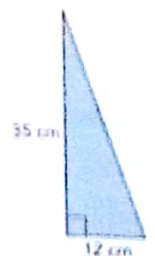
- Dois ângulos verticalmente opostos têm a mesma amplitude.
- Dois ângulos de lados paralelos são sempre geometricamente iguais.
- Dois ângulos adjacentes quaisquer são sempre suplementares.
- A amplitude do ângulo complementar do ângulo de amplitude 13° é 87° .

4. Observa a figura e diz se são verdadeiras ou falsas as afirmações, justificando.

- $\widehat{ABC} = 110^\circ$
- $\overline{BC} > \overline{AC}$
- $\overline{AB} < \overline{BC}$
- O triângulo $[ABC]$ é isósceles.



5. Um Austin 1 100 de 1968 tem as janelas em forma de triângulo rectângulo como a que vês na figura. A borracha à volta do vidro deteriorou-se. Que comprimento de borracha é necessário para vedar os dois vidros iguais?



6. Acerca dos triângulos $[MAR]$, $[LUA]$ e $[SOL]$ sabe-se que:

- $\Delta[MAR]$ $MA = 30 \text{ cm}$ $AR = 16 \text{ cm}$ $MR = 34 \text{ cm}$
- $\Delta[SOL]$ $SO = 7 \text{ cm}$ $OL = 9 \text{ cm}$ $LS = 11 \text{ cm}$
- $\Delta[LUA]$ $LU = 3,5 \text{ cm}$ $UA = 1,2 \text{ cm}$ $AL = 3,7 \text{ cm}$

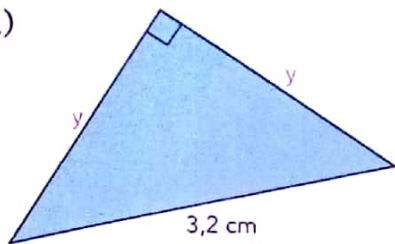
Averigua se são triângulos rectângulos...

Exercícios propostos

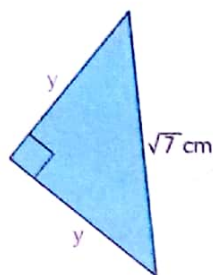


7. Determina y em cada um dos triângulos rectângulos isósceles.

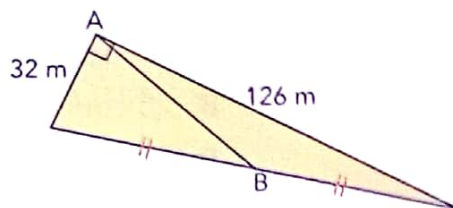
a)



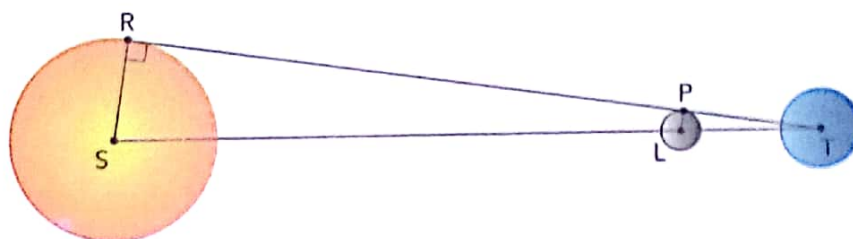
b)



8. Observa a figura e calcula AB



9. Diz-se que ocorre um eclipse quando um astro oculta outro, total ou parcialmente. Observa:



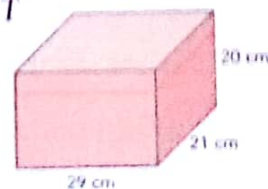
S – Sol
L – Lua
T – Terra

a) De que eclipse se trata?

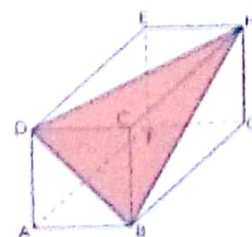
b) Se $\overline{ST} = 150\,000\,000$ km e o raio do Sol é igual a 695 000 km, calcula \overline{RT}

c) Se $\overline{LT} = 385\,000$ km e o raio da Lua é igual a 1 736 km, calcula \overline{PT}

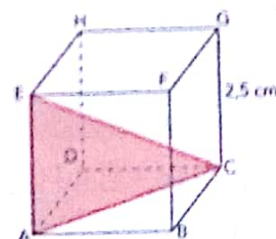
10. A Teresa guarda numa caixa os espetos de fazer as espetadas.
Será que um espeto com 42 cm cabe na caixa?



11. No prisma quadrangular da figura, a base $[ABCD]$ é um quadrado de lado 5 cm e $DE = 9$ cm.
Calcula o perímetro do triângulo $[DBH]$.



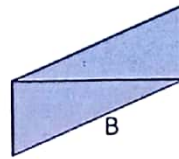
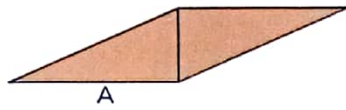
12. Qual a posição da aresta $[EA]$ do cubo relativamente ao plano que contém a face $[ABCD]$?
Calcula a área e o perímetro do triângulo $[EAC]$.



1.ª Parte

Indica a resposta correcta: A, B, C ou D.

1. As figuras A e B:



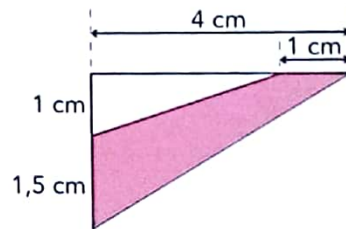
- A. são semelhantes.
C. são equivalentes.

- B. são geometricamente iguais.
D. têm igual perímetro.

2. A área da zona colorida é:

- A. $1,5 \text{ cm}^2$
C. 7 cm^2

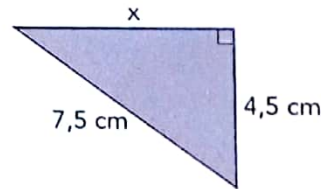
- B. $3,5 \text{ cm}^2$
D. $6,5 \text{ cm}^2$



3. No triângulo, o cateto x mede, em centímetros:

- A. 3
C. 6

- B. 12
D. 36



4. Um triângulo rectângulo, de hipotenusa 5 cm e um dos catetos 3 cm, é equivalente a um rectângulo cujas dimensões são, em centímetros:

A. $6 \times 0,5$

B. 3×4

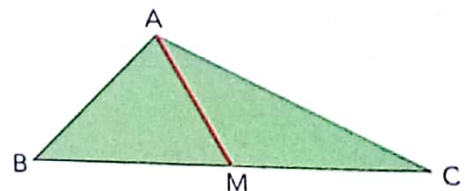
C. 6×1

D. 3×5

5. $[AM]$ é uma mediana e a área do triângulo $[ABM]$ é 4 cm^2 . Então, a área do triângulo $[ABC]$ é, em cm^2 :

- A. 2
C. 6

- B. 4
D. 8



6. Um triângulo rectângulo isósceles tem de hipotenusa 10 cm. Então, a sua área é, em cm^2 :

A. 100

B. 12,5

C. 50

D. 25

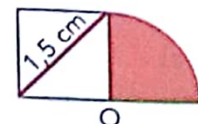
7. A área do quarto de círculo de centro O é, em cm^2 :

A. $0,28125\pi$

B. $2,25\pi$

C. $1,125\pi$

D. $1,25\pi$



8. A diagonal de um cubo de 4 cm de aresta \bar{e} , em cm:

A. 8

B. $\sqrt{48}$

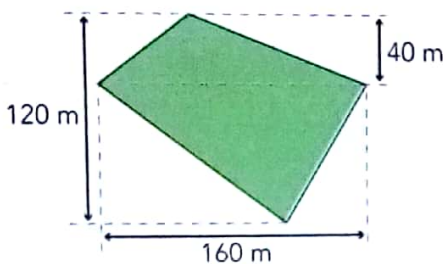
C. $\sqrt{64}$

D. 6



2.ª Parte

1. Observa a figura que representa um terreno agrícola.

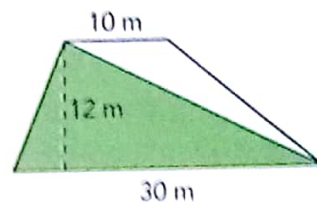


a) Qual a área do terreno?

b) Se um hectare leva 300 kg de semente, a 50 meticais o quilograma, quanto se gastará só na compra da semente?

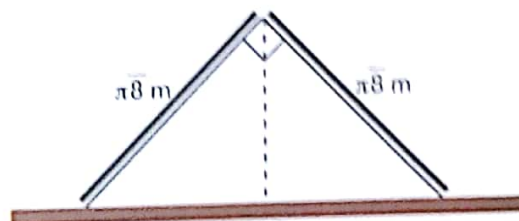
2. Cortou-se a relva da zona colorida em 3 horas.

À mesma velocidade, quanto tempo leva a cortar a relva da zona não colorida?



3. Duas vigas metálicas, com o mesmo comprimento e apoiadas no solo, estão colocadas perpendicularmente.

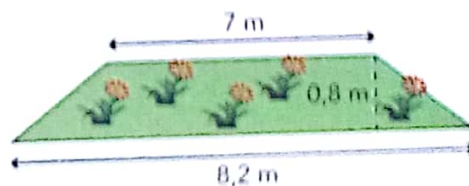
A que altura do solo se tocam as vigas? Explica o teu raciocínio.



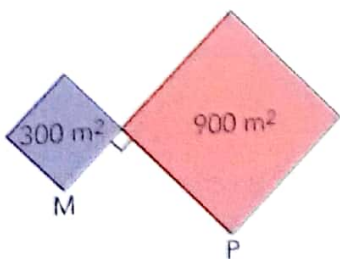
4. Um canteiro florido do jardim de uma escola é um trapézio isósceles, como vês na figura ao lado.

a) Pretendemos vedar o canteiro com rede. Que quantidade vai ser necessária?

b) Pretendemos fazer outro canteiro, rectangular, equivalente e com a mesma altura que o da figura. Que comprimento vai ter esse canteiro?



5.



Quanto mede, em metros, um cano que uma M com P, vértices dos quadrados (com 1 c.d.)?

6. Nos jardins do Museu do Louvre, em Paris, foi construída uma pirâmide quadrangular regular cujas faces laterais são em vidro. O lado da base tem 34 m e a altura da pirâmide é de 22 m. Que área de vidro foi necessária à sua construção?

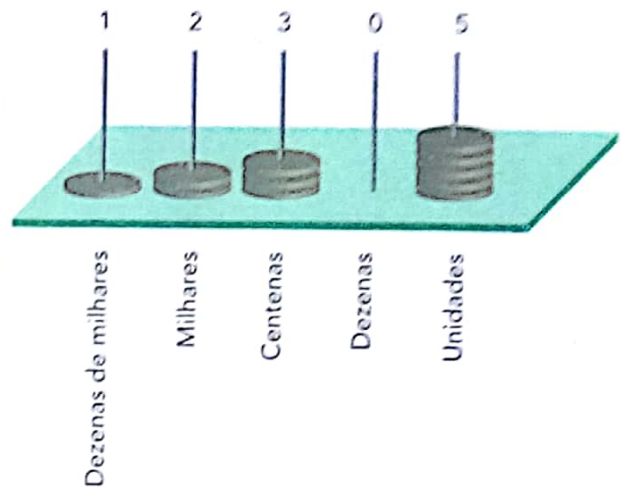


Museu do Louvre, Paris

Unidade 1: Números racionais

A introdução da *numeração árabe*, isto é, uma numeração na qual se tem em conta a posição dos algarismos, é um facto histórico relativamente recente. Podemos situá-lo em 1202 com o aparecimento do *Livro do Ábaco* (em latim *Liber Abaci*) do matemático e mercador italiano Fibonacci.

Assim, para escrever 12 305 utilizava-se o ábaco do seguinte modo:



$$12\ 305 = 1 \times 10^4 + 2 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 5 \times 10^0$$

Observação: a notação dizia-se de base dez porque quando se atingiam 10 contas numa vara do ábaco estas eram substituídas por uma só conta na vara da posição seguinte.

Unidade 2: Equações lineares

A Regra da Falsa Posição

A Matemática egípcia era fundamentalmente geométrica e aritmética. No entanto, foram encontrados exemplos de resolução algébrica de problemas, como é o caso do problema 24 do Papiro de Ahmes, onde se pede o valor de *aha* (incógnita) sabendo que *aha* mais um sétimo de *aha* dá 19.

A solução de Ahmes não é a dos livros modernos, mas é característica de um processo conhecido como «método da falsa posição». Um dado valor, possivelmente falso, é atribuído a *aha* e as operações indicadas à esquerda do sinal de igualdade são efectuadas sobre esse suposto número. O resultado é então comparado com o resultado que se pretende e, usando proporções, chega-se à resposta correcta.

No problema 24, o valor tentado para a incógnita é 7, de modo que $x + \frac{1}{7}x$ é 8 em vez de 19, como se queria. Como $8(2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}) = 19$, deve-se multiplicar 7 por $(2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8})$ para obter a resposta. Ahmes achou $(16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8})$. Então conferiu a sua resposta mostrando que se a $16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$ somarmos um sétimo disso, obtemos 19.



Unidade 3: Proporcionalidade e funções lineares

A origem da noção de função remonta à Antiguidade.

Podemos dizer que os registos dos fenómenos de astronomia feitos pelos Babilónios revelavam já a noção de variação simultânea de dois valores.

No século XIV, Nicolas Oresme, num dos seus livros, utiliza segmentos de recta para representar «tudo o que varia». Por exemplo, para representar a velocidade de um móvel ao longo do tempo, Oresme traça um segmento horizontal e, para cada instante, traça um segmento perpendicular cujo comprimento representa a velocidade do móvel naquele instante.

No caso exemplificado na figura, os extremos superiores determinam uma recta.

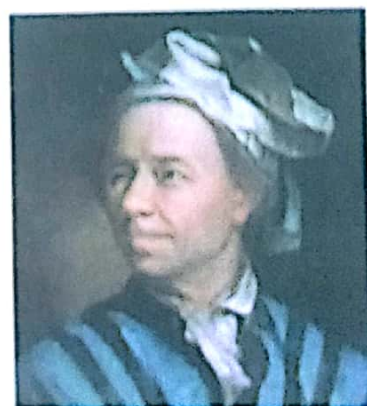
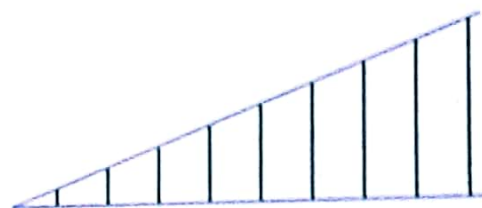
Esta representação recorda-nos a representação gráfica de uma função utilizando eixos cartesianos, que, no entanto, apenas surgiu no século XVII com o matemático e filósofo Réne Descartes. Com efeito, a criação do sistema de eixos cartesianos permitiu, pela primeira vez, falar em correspondência entre pares de elementos, cada um pertencendo a um conjunto e tomando valores variáveis.

No século XVIII, com o desenvolvimento da Análise Matemática por Leibniz, surge o termo «função».

A definição de função, no entanto, só é dada mais tarde, por Leonhard Euler, matemático suíço (1707-1783), que escreveu:

«Se x é uma quantidade variável, então toda a quantidade que depende de x de qualquer maneira, ou que esteja determinada por aquela, chama-se função da dita variável.»

Depois de Euler, o conceito de função tem evoluído cada vez mais na Matemática, servindo como uma das noções base do desenvolvimento desta Ciência.



Unidade 5: Circunferência e círculo

Uma recta é tangente a uma circunferência quando tem com a circunferência um e um só ponto comum.

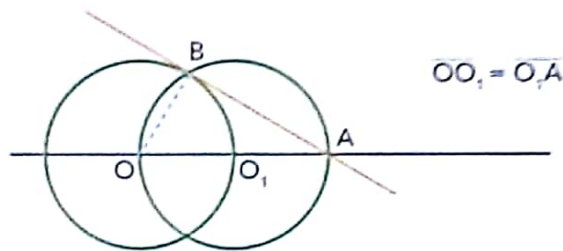
No livro III de *Os elementos*, de Euclides, a proposição 91 sugere a seguinte construção:

Traçar a circunferência de centro O e raio r .

Traçar uma segunda circunferência de diâmetro $[OA]$ (ver figura).

Esta segunda circunferência intersecta a primeira em B .

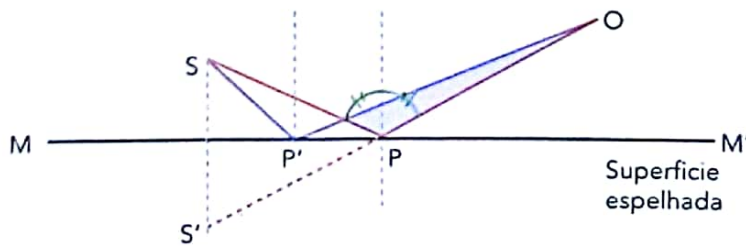
A recta AB é tangente à primeira circunferência no ponto B .



(Nota: observa que $\triangle OBA$ é rectângulo em B , o que te permite construir um triângulo qualquer apenas com a ajuda de um compasso e de uma régua não graduada.)

Já falámos em Heron e na sua fórmula para calcular a área de qualquer triângulo a partir da medida dos seus três lados.

A lei da reflexão da luz já tinha sido descoberta por Euclides e Aristóteles, mas foi Heron quem demonstrou (por via geométrica) que o percurso mais curto de um raio de luz é quando o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão (ver figura):



O percurso menor está assinalado a vermelho.



Unidade 6: Congruência de triângulos e Teorema de Pitágoras

Certo dia, no século VI a.C, dois exércitos encontravam-se preparados para uma batalha que decidiria a sorte da Ásia Menor quando, de repente, o Sol desapareceu e se fez noite, provocando o pânico nos soldados.

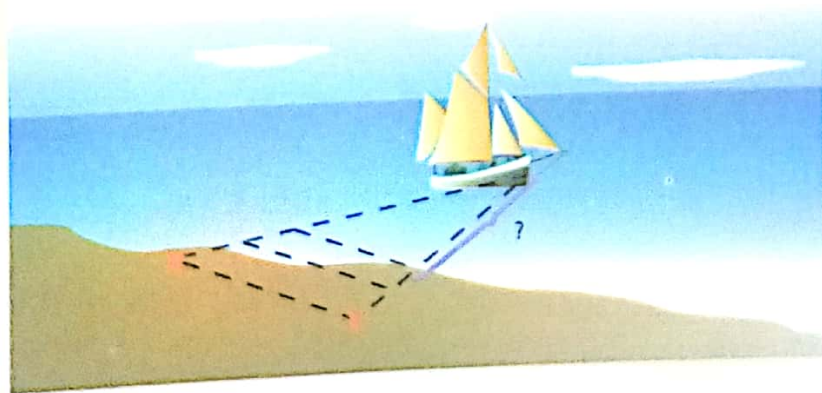
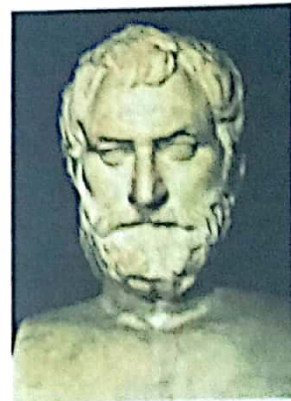
A batalha não se chegou a travar, pois os homens pensaram tratar-se de um aviso dos deuses. Na verdade, era apenas um eclipse do Sol. O mais extraordinário é que houvera um homem, chamado Tales, que previra o que ia acontecer. Ele previra o eclipse com toda a precisão!

Não foi em vão que Tales foi considerado o primeiro dos sete grandes sábios da Antiguidade.

Tales (624-548 a.C), nascido na Grécia, e contemporâneo de Pitágoras, manifestou desde muito jovem a sua aptidão para a Matemática. Consta que, além disso, era um extraordinário negociante...

A ele se atribui a proeza de calcular a altura da pirâmide de Quéops apenas com uma vara sua.

A história segundo a qual Tales calculou a distância de um navio através da proporcionalidade de lados de triângulos semelhantes também é conhecida.



Sobre a sua vida pouco se sabe; calcula-se que tenha morrido com 78 anos. A ele se deve o sentido dedutivo da Geometria. Não bastava a descoberta, mas a estrutura lógica que conduziu a ela. Já dizia Aristóteles a seu respeito:
«Para Tales... a questão primordial não era o que sabemos, mas como o sabemos.»

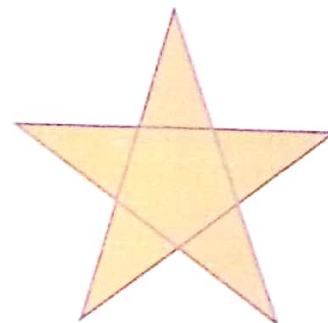
Unidade 6: Congruência de triângulos e Teorema de Pitágoras

Pitágoras, matemático e filósofo grego, nasceu em Samos no século VI a.C. Passou parte da sua vida viajando pelo Egípto e Babilónia e possivelmente terá chegado mesmo a ir à Índia, absorvendo assim os conhecimentos matemáticos dessas civilizações. Quando regressou à Grécia, fundou na cidade de Crotona uma sociedade secreta baseada na Matemática e na Filosofia.

O pentagrama (ver figura) era para os membros dessa escola o sinal de reconhecimento, pois atribuíam-lhe propriedades estranhas e curiosas.



O lema da escola pitagórica era «Tudo é número», ligando a um número todas as coisas que os cercavam. Defendiam a ideia de que o número (número natural) correspondia à ideia de Deus, visto que os números serviam para compreender, determinar e definir os fenómenos da Natureza, as actividades humanas, numa palavra, o Universo. Diziam, por exemplo, que os números ímpares tinham atributos masculinos e os números pares atributos femininos. Vejamos, por exemplo, os significados de alguns números:



- 1 – gerador dos números, número da razão
- 2 – primeiro número feminino, número da opinião
- 3 – número da justiça
- 5 – número do casamento
- 6 – número da criação

O número 7 era tido como especial (7 estrelas errantes, 7 planetas, 7 dias da semana) Foi Pitágoras quem dividiu a Matemática em quatro ramos: Aritmética, Música, Geometria e Astronomia.

O teorema que tem o seu nome pode ter tido origem na Babilónia, mas foi Pitágoras quem primeiro o demonstrou.

No entanto, não existem nos dias de hoje escritos pitagóricos contendo a demonstração do teorema, que surge pela primeira vez por escrito no livro *Os elementos*, de Euclides (século III a.C.).

A teoria da Escola Pitagórica sofreu porém um rude golpe quando tentaram «medir» a hipotenusa de um triângulo rectângulo isosceles. O número que surgiu não era par nem ímpar. Os pitagóricos tinham encontrado um número dito irracional, pelo que diziam que tal hipotenusa era impossível de medir.

Abriu-se assim o caminho para a criação dos números irracionais.



Unidade 1: Números racionais

Exercícios de consolidação pp. 20 e 21

1. a) $2^3 \times 3$ b) $2^2 \times 3^2$ c) $2^4 \times 3$
 d) 3×5^2 e) $2^4 \times 3^2$ f) $2^4 \times 3 \times 5^2$
2. a) m.d.c.(21, 49) = 7
 b) m.d.c.(35, 70) = 35
 c) m.d.c.(28, 40) = 4
3. a) m.d.c.(900, 1 500) = 300
 b) O número de machambas é de 15.
4. a) m.m.c.(6, 8) = 24 b) m.m.c.(8, 12) = 24
 c) m.m.c.(12, 16) = 48 d) m.m.c.(16, 32) = 32
5. a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{6}{7}$ d) $\frac{3}{5}$
6. a) $\frac{5}{6}$ b) $\frac{5}{12}$ c) $\frac{9}{6}$
7. a) V b) F c) V d) V
 e) V f) F g) V h) F
8. a) < b) > c) = d) >
 e) < f) >
9. a) +4 b) +3 c) +2
 d) -5 e) -3 f) -5
10. A temperatura exterior em Nampula era de 30° C positivos.
11. a) -2 b) +5 c) -3
12. a) $[-7 + (+16)] + (-16) = +9 + (-16) = -7$
 ou $-7 + [(+16) + (-16)] = -7 + 0 = -7$
 Neste caso é evidente que a 2.ª maneira é mais favorável pois (+16) e (-16) são números simétricos e a sua soma é 0.
 b) $[-38 + [(-189)] + (+89)] =$
 $= -227 + (+89) =$
 $= -138 - 38 + [(-189) + (+89)] =$
 $= -38 + (-100) = -138$
 O cálculo é mais fácil se associarmos as suas últimas parcelas.
13. a) -2 b) 0 c) -2 d) -100 e) 0 f) +10
14. a) $+13 + (-3) = +10$ e $-3 + (+3) = +10$
 pelo que $+13 + (-3) = -3 + (+13)$
 b) $+15 + (+13) = +28$ e $+13 + (+15) = +28$
 pelo que $+15 + (+13) = +13 + (+15)$
15. a) Se associarmos as duas parcelas do meio e as trocarmos, vem:
 $-17 + [(+17) + (+38)] + (-8)$

Se associarmos agora as duas primeiras (simétricas) e as duas últimas, vem:

$$[-17 + (+17)] + [(+38) + (-8)]$$

$$\text{Ou seja } 0 + (+30) = +30$$

$$\begin{aligned} & b) +11 + [(+109) + (+39)] + (-9) = \\ & = + [(+39) + (+109)] + (-9) = \\ & = [+11 + (+39)] + [(+109) + (-9)] = \\ & = +50 + (+100) = +150 \end{aligned}$$

16. a) Comutativa

b) Comutativa e elemento neutro da adição

c) Associativa

17. a) -27 b) -5 c) +26
 d) +3 e) -5 f) -6

18. a) $-5 + (+7) + (-2) + (+5) + (-2) + (+1)$
 b) $+2 + (+7) + (-2) + (+5) + (-7) + (+6)$

19. a) -10 b) +19

20. a) $-8 + 3 - 4 + 1 + 5 - 7 + 2$

b) $3 + 5 - 8 + 4 - 3 - 7 + 2$

c) $-2 - 5 - (-3 + 1) - 5 - 1$

$$= -2 - 5 + 3 - 1 - 5 - 1$$

21. a) 8 b) -32

22. a) 0 b) 6 c) -20 d) -5 e) 0

23. a) $-36 \times (-4) = +144$ ou

$$+12 \times (+12) = +144$$

b) $+24 \times (-2) = -48$ ou

$$-3 \times (+16) = -48$$

24. a) $+13 \times (-3) = -39$ e $-3 \times (+13) = -39$

pelo que $+13 \times (-3) = -3 \times (+13)$

b) $+15 \times (+13) = +195$ e

$$+13 \times (+15) = +195$$

pelo que $+15 \times (+13) = +13 \times (+15)$

25. a) -3 b) -12 c) 7 d) 5

26. a) Comutativa

b) Comutativa e elemento neutro da multiplicação

c) Comutativa

27. a) -4 b) -7

28. a) Não há nenhum número inteiro que seja resultado da divisão de (-36) por (-5).

b) -4 c) 8 d) 0

Exercícios de consolidação pp. 33 e 34

29. a) ∈ b) ∉ c) ∈ d) ∈ e) ∈ f) ∉

30. a) V b) F c) F d) F e) F

f) V g) V h) F i) F



31. a) $-\frac{1}{2}$ b) $-\frac{1}{5}$ c) $-\frac{5}{4}$

33. a) ...18 b) ...-0,6 c) 0 d) $\frac{5}{8}$

34. a) -8 b) -3,2; $\frac{1}{2}$; -1,5; -0,5; -8
c) $\frac{1}{2}$ e -0,5 e 8 e -8 d) -3,2; -1,5; 8

35. a) -4; -3; -2; -1; 0; 1
b) São cinco.
c) -2,5, por exemplo.

36. a) $\frac{3}{10}$, por exemplo. b) -2, por exemplo.
c) -1, por exemplo. d) 2, por exemplo.

37. a) F b) F c) F d) V

38. a) $-1 < -0,75 < -\frac{1}{3} < 0 < +2 < +2,3$
b) $2,3 > +2, > 0 > -\frac{1}{3} > -0,75 > -1$

39. $-\frac{1}{2} = -0,5$

$\frac{7}{3} = 2,33...$

$-\frac{1}{3} = -0,33...$

$2 = 2$

$\frac{1}{3} = 0,33...$

$\frac{3}{4} = 0,75$

$-\frac{5}{2} = -2,5$

Pondo as dízimas por ordem crescente, vem:

$-2,5 < -0,5 < -0,33... < 0,33... < 0,75 < 2 < 2,33...$

↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓

$-\frac{5}{2} < -\frac{1}{2} < -\frac{1}{3} < \frac{1}{3} < \frac{3}{4} < 2 < \frac{7}{3}$

40. As dízimas correspondentes aos números

$-\frac{1}{2}$, 2 , $\frac{3}{4}$ e $-\frac{5}{2}$ são finitas.

As outras são infinitas periódicas e nos três casos, o período é 3.

0,33... pode representar-se por 0,(3)

2,33... pode representar-se por 2,(3)

ficando o período entre parêntesis.

41. a) Elementos de adição em \mathbb{Q} .
b) Comutativa de adição em \mathbb{Q} .
c) Associativa de adição em \mathbb{Q} .
d) Elemento simétrico em \mathbb{Q} .

42. a) $-\frac{1}{2}$ b) 0,67 c) -1 d) $\frac{3}{10}$
e) $-\frac{11}{12}$ f) 0 g) $-\frac{1}{2}$ h) $-\frac{29}{20}$
i) $-\frac{31}{30}$ j) $-\frac{5}{4}$ k) 0 l) 0

Exercícios de consolidação pp. 45 e 46

43. a) 1 b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{3}{2}$ d) -5

e) $\frac{2}{3}$ f) $\frac{1}{2}$ g) 4 h) 0

44. a) 1 b) 3,7

45. a) $-2 \times \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right)$ b) $\frac{3}{2} \times (-1 + 1)$

46. a) 1 b) 18 c) $-\frac{1}{5}$ d) 7

47. a) $\frac{9}{25}$ b) $\frac{4}{9}$ c) $-\frac{4}{3}$ d) $\frac{8}{9}$

e) $\frac{81}{256}$ f) $\frac{1}{9}$ g) 1 h) 0

i) $\frac{27}{8}$ j) $-\frac{1}{5,2}$ k) 0,027 l) 0,01

48. a) $-\frac{1}{32}$ b) 729 c) 9

49. a) -3 b) $-\frac{5}{3}$ c) 1 d) $-\frac{2}{15}$

e) $-\frac{5}{6}$ f) $-\frac{3}{2}$ g) -1 h) $\frac{1}{4}$ i) $\frac{9}{25}$

50. a) 0 b) 4 c) $\frac{16}{9}$ d) 5

e) 5,992 f) $\frac{257}{64}$ g) $\frac{36}{25}$

h) $-\frac{6}{5}$ i) 1 j) $\frac{1}{3}$

51. a) $\frac{1}{2^3}$ b) 3^1 c) $\left(\frac{2}{3}\right)^1$ d) 1 e) 4^1

52. a) $\left[(-5) - \left(+\frac{2}{5}\right)^2\right]$ b) $\frac{1}{[(+4) + (-3)]^2}$



c) $(-2)^2 + \left(+\frac{1}{4}\right)^2$ d) $-\frac{1}{3} - (-2)$

53. a) $7,2215 \times 10$ b) $1,45002 \times 10^2$
 c) $1,002504 \times 10^{-4}$ d) 3×10^3
 e) $2,5 \times 10^2$ f) 2×10^{-4}
 g) $1,625 \times 10^{-3}$ h) 2×10^{-1}
 i) $2,34 \times 10^5$

54. a) 10^5 b) 10^{-4} c) 10^1
 d) 10^0 e) 10^{-1} f) 10^7

55. a) 6×10^8 b) 3×10^{-5}
 c) $2,33 \times 10^5$ d) $5,1 \times 10^4$

Exercícios propostos p. 47

1. a) +65 b) -180 c) +78 d) -2
 e) +20 f) +1 000 g) -5 000
 2. a) V b) V c) F d) V
 e) V f) V g) V h) V
 3. a) $\frac{3}{4}$ b) 216 c) 1 d) 25
 e) 1 f) 81 g) 1 h) $\frac{71}{9}$

4. a) e d)

5. a) $2,5 \times 10$ b) $2,4 \times 10^{-3}$ c) 2×10^2
 d) $5,4321 \times 10^2$ e) $1,25 \times 10^2$ f) $1,254 \times 10^3$

Teste final pp.48 e 49

1.ª parte

1. C 3. B 5. D 7. D 9. C 11. A
 2. D 4. B 6. D 8. B 10. A

2.ª parte

1. 624 a.C.
 2. -10 ou 4
 3. a) $-\frac{3}{2}$ b) -6
 4. -0,8
 5. 250; p. associativa e p. comutativa.
 6. a) $\frac{19}{9}$ b) $-\frac{11}{12}$
 7. ÷ ; + ; -
 8. 0,92 h
 9. $\frac{-4}{-1} = \frac{-10}{-2,5} = \frac{-12}{-3} \neq \frac{-8}{2}$, Não.
 10. a) -1 b) Tiago 4; Francisco 11.

Unidade 2: Equações lineares

Exercícios de consolidação p. 55

1. $x = 3$; $x^2 = 3$; $|x| = 25$; $6a - 2a = 4$; $x + 2y = 3$, porque uma equação é uma igualdade em que surge pelo menos uma variável.

2. a) {0} b) {4} c) {1}

3. a) $4y = 200$ b) $4 \times 50 = 200$

4. a; $-2a + 3$; $a + 1$; $-2a$ e 3 ; a e 1 ;

y; $-5y$; 0; $-5y$; 0;

t; $-\frac{3}{2} + t$; $\frac{t}{2} + 3$; $-\frac{3}{2}$ e t; $\frac{t}{2}$ e 3;

c; $1 + 9c + 3$; $-6 + c$; $1, 9c$ e 3 ; -6 e c;

$3x - 1 = 5x - \frac{1}{2}$; x; $3x - 1$; $5x - \frac{1}{2}$.

5. Quando têm a mesma parte literal. $\frac{1}{3}x$ e $2x$.

6. a) $8x$ b) $7a$ c) $2 - \frac{1}{2}x$ d) $-\frac{5}{2}x + 4$

7. a) É solução de $-\frac{1}{2}x = \frac{25}{100}$

b) Não, porque não admitem o mesmo conjunto solução.

Exercícios de consolidação p. 61

8. a) {0} b) {0} c) {-2} d) {1}
 e) {1} f) $\left\{\frac{11}{2}\right\}$ g) {-2, 2} h) {-3, 3}

9. a) {-28} b) {26} c) {49}

10. a) {4} b) {-9} c) {-12}

11. a) {10} b) {-5} c) {-2}

d) {-9} e) {-5,5} f) {-1}

12. a) $S = \{-9\}$ b) $S = \{-2\}$ c) $S = \left\{-\frac{4}{3}\right\}$

13. Sim.

a) d) e f) são possíveis.

b) c) e g) são impossíveis. h) indeterminada.

14. a) Impossível b) Indeterminada c) $\left\{\frac{5}{4}\right\}$

15. Comprimento: 180 m; largura: 60 m.

16. 136; 138; 140

17. 15 e 17

Exercícios de consolidação p.66

18. a) $x = 3$ b) $y = 40$ c) $x = 15$

d) $t = \frac{360}{17}$ e) $x = 12$ f) $x = 4,5$

19.a) $x = 8$ b) $x = -\frac{2}{3}$ c) $x = 12$

20. 81

21. 70

22.a) $8x + 8y$ b) $y = \frac{P - 8x}{8}$ c) $y = 2,5 \text{ cm}$

23.a) $y = \frac{7 - c - ax}{2}$ b) $x = \frac{2b + 8c}{5a}$ c) $x = \frac{d - b}{a - b}$

24.a) $C = \frac{5F - 160}{9}$ b) -5°C

25. $t = \frac{j}{cr}$ ☾

Exercícios propostos p. 67

1.a) $5y = 0$ b) $|x| = 6$

c) $0 = a - 2$ d) Não

2.a) $S = \left\{\frac{1}{4}\right\}$ b) $S = \{-3, 5\}$ c) $S = \{-31\}$

d) $S = \{-1, 1\}$ e) $S = \left\{\frac{31}{6}\right\}$ f) $S = \left\{\frac{1}{30}\right\}$

3.a) $x = 8$ b) $b = -7$ c) $x = -0,25$

4.a) $t = -5$ b) $y = 6$ c) $a = -99$

d) $c = \frac{29}{18}$

5.a) Indeterminada b) Impossível

6. 240 litros

7. 26 e 27 anos

8.a) $h = \frac{30 - i}{2}$ b) 8 horas

9.a) $c = \frac{d - a - 2b}{3}$ b) $b = \frac{c - d + 3a}{2}$

c) $b = \frac{10x}{9}$

Teste final pp. 68 e 69

1.ª Parte

1. C 2. C 3. D 4. B 5. C 6. A 7. C 8. D 9. D

2.ª Parte

1.a) $-1 + 3x = 1 + x$

b) $-1 + 3 \times 1 = 2$ e $1 + 1 = 2$

2.a) $\{-5\}$ b) $\{0\}$ c) $\{-4, 4\}$

3.a) Impossível b) Indeterminada

4.a) $\{-12\}$ b) $\{-2\}$

5. Daqui a 18 anos

6. Para qualquer valor de $x > 6$.

7. 12,5 cm

9. Ana 4,5 Mt; Maria 9,00 Mt; Joana 13,5 Mt.

10. $x = 20,25$

Unidade 3 - Proporcionalidade e funções lineares

Exercícios de consolidação p. 77

1.a) Casa $- (-5, -4)$

Academia de dança $- (4, -2)$

Escola $- (5, 2)$

Parque da cidade $- (-5, 3)$

Clube de vídeos $- (-6, -2)$

b) Casa \rightarrow Centro comercial \rightarrow Supermercado \rightarrow
 \rightarrow Cinema

2. A

x	0	1	2	3
y	2	3	4	5

B

x	0	1	2
y	0	3	6

3. 5,6 g de proteínas e 10,8 g de fibras para 40 g de cereais.

4.a)

Volume (cm ³)	1	10	40	1 300
Massa (g)	7,9	79	316	10 270

b) Aproximadamente 126,6 cm³.

5.

l (cm)	0,5	2	3,5	6
P (cm)	2	8	14	24
A (cm ²)	0,25	4	12,25	36

a) Sim. Pois é constante a razão, $k = 4$.

b) Não. Não é constante a razão.

6. B. Recta que começa pela origem.

Exercícios de consolidação p. 80

7. a) 85 mm b) 33 linhas

8. 7 ovos, 17,5 cl de leite; 7 colheres de sopa de manteiga; 3,5 colheres de chá de açúcar

9. Altura da água (cm): 10, 25, 75

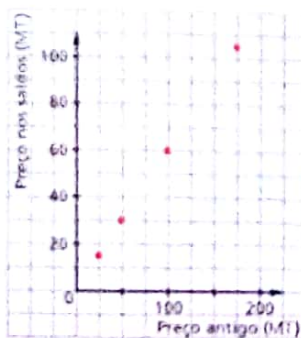
10. 25%; 55%; 12%; 8%

11. a) Desconto (MT): 10, 20, 40, 70

Preço em saldo (MT): 15, 30, 60, 105

b) Sim

c)



Sim, pois os pontos estão alinhados em recta com a origem.



Exercícios de consolidação p. 83

12. A. É totalmente linho
 B. Em 100 g de iogurte, 20 g são de gordura
 C. Metade do stock está em saldo e, por exemplo, uma peça de 100 meticais custa 75 meticais em saldo.

13. A.

	$\frac{7}{100}$	0,07
	$\frac{135}{100}$	1,35
39%		0,39

B.

	$\frac{1}{5}$	0,20
	$\frac{1}{20}$	0,05
	$\frac{6}{5}$	1,20

14. a) 2075 MT b) 92 m c) 11,84 kg
 15. Sim. 30% de 18 é 5,4; 18% de 30 é 5,4;
 16. 515 MT 17. 800 MT 18. 210,60 MT
 19. 120 dias 20. 30 linhas
 21. a) $k = 10$ 22. $k = 1,5$

Exercícios de consolidação p. 87

23. a) 40%; b) $25\% \times 60 = 15$;
 c) 24 vitórias e 21 empates
 24. a) 62 MT b) 31 MT c) 80,5 g d) 8,05 g
 e) 120 ovos f) 48 ovos
 25. Na escola com 125 alunos, pois nessa escola 64% são raparigas, enquanto na outra só existe 60% de rapargas.
 26. 3%
 27. a) 125 cm e 75 cm
 b) Comprimento real (cm): 125, 75, 50
 Comprimento no desenho (cm): 2,5; 1,5; 1
 28. $\frac{1}{250}$ 29. $\frac{1}{200}$ 30. $\frac{1}{300}$
 31. 3,75 km

Teste final

1.ª Parte pp. 88 e 89

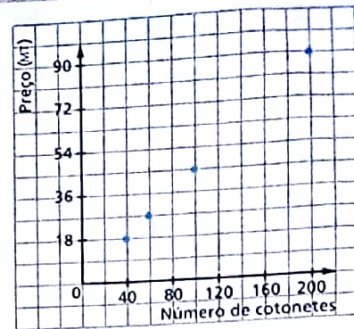
1. D 2.a) B b) C
 3. B 4. B 5. C 6. B

2.ª Parte

1.a) Sim.

$$\frac{18}{40} = \frac{27}{60} = \frac{45}{100} = \frac{90}{200} = 0,45$$

b)



- c) Os pontos estão alinhados em recta com a origem do sistema de eixos.
 d) 0,45 MT. Representa o preço de cada cotonete.
 e) 36 f) 120

2.a)

Preço inicial (MT)	50	100	175
Desconto (MT)	20	40	70

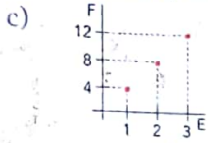
- b) Sim, pois os pontos estão sobre uma recta que passa na origem.
 c) 102 MT d) 225 MT
 3. 2 584 MT; 17 784 MT 4. 62 km

Exercícios de consolidação pp. 95 e 96

32. a) Não. Porque há seres humanos que não têm irmãos (elementos de H sem imagem) e há outros com mais do que um irmão (elementos de H com várias imagens).
 b) É. Porque todo o ser humano tem uma determinada idade (em anos).
 33. a) 4 b) 2 c) A d) D' {3, 4, 5}
 34. a) Não sobrejectiva, pois o contradomínio é {1, 3, 5}.
 b) Injectiva pois a objectos diferentes correspondem imagens diferentes.
 35. B, C, D, F, G, porque são correspondências que a cada elemento do conjunto de partida fazem corresponder um e um só elemento no conjunto de chegada.
 36. a) C, porque a cada objecto corresponde uma e uma só imagem.
 b.1) $D = \{1, 2, 3, 4\}$; $D' = \{10, 20\}$ b.2) 1 e 4; 2 e 3
 37. a) -116°C b) Éter, oxigénio.
 c) D = {oxigénio, dióxido de carbono, éter, água, mercúrio, ferro}
 $D' = \{-218^\circ; -78^\circ; -116^\circ; 0^\circ; -39^\circ; 1535^\circ\}$
 d) Ferro – sólido; oxigénio – gasoso; outras substâncias – líquido.
 e) Dióxido de carbono.

- 38.a) Tempo (s), temperatura (°C)
 b) -20; 0 c) 4 s
 d) A água passa do estado líquido a gasoso.

- 39.a) $l = \{4, 8, 12\}$
 b) (1,4), (2,8), (3,12)



40.a) $h(0) = -\frac{1}{2}$ b) $h(-2) = -\frac{9}{2}$

c) $h(3) = \frac{11}{2}$ d) $h\left(\frac{1}{5}\right) = -\frac{1}{10}$

e) $h(x) = 0 \rightarrow 2x - \frac{1}{2} = 0 \rightarrow x = \frac{1}{4}$

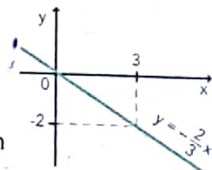
f) $h(x) = -1 \rightarrow 2x - \frac{1}{2} = -1 \rightarrow x = -\frac{1}{4}$

- 41.a) Injectiva, pois a objectos diferentes correspondem imagens diferentes.
 b) Não injectiva, porque, por exemplo, $b(1) = b(4) = 3$.
 c) É o conjunto^o pois, sendo sobrejectiva, o conjunto de chegada coincide com o contradomínio.

Exercícios de consolidação pp. 104 e 105

42.a) -2; -14; $-\frac{2}{3}$; 2

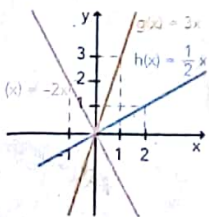
- b) Sim, porque o gráfico é uma recta que passa na origem do sistema de eixos.



c) 0; 6; -3

43.a) 60; 180; 240 b) $a(t) = 2t$ c) 75 s

44. a)



- b.1) 4 b.2) -3 b.3) 3
 c.1) 2 c.2) -1 c.3) -2

45. a) $g(x) = 2x - 3$
 b) $y = -3x + 1$ ou $h(x) = -3x + 1$
 c) $y = -1 - \frac{1}{2}x$ ou $y = -1 - \frac{1}{2}x$
 d) -1; $-\frac{1}{2}$; $-\frac{3}{4}$; 2; -10

46.a) 5; 3; $\frac{1}{2}$; -5; -3; -1 b)

47.a) 4; 2; 0

b) $f(x) = 2x + 4$; $g(x) = 2x + 2$; $h(x) = 2x$
 c) h ; $k = 2$

48.a) Sim. Porque a constante de proporcionalidade

é $3 \cdot \left(g(x) = \frac{3}{x}\right)$

b) $k = 3$ c) $g(x) = \frac{3}{x}$

d)

x				
g(x)	6	3	1	0,5

e) $\frac{3}{5}$

49.a) $f(x)$: o produto das variáveis não é constante.
 $g(x)$: o produto das variáveis é constante ($k = 4$)

b) $y = \frac{4}{x}$

c)

x			2		8
g(x)	8	4		1	

$f(3) = 2 \cdot f(0) = 4 \cdot f(1) = 4$

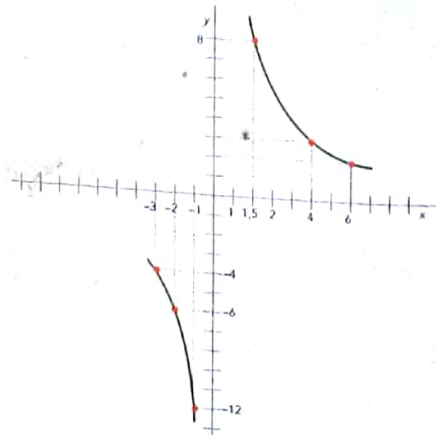
50.a) $y = \frac{12}{x}$

b) É constante o produto entre x e y . As variáveis são inversamente proporcionais. Quando x cresce y diminui e vice-versa.

c)

x						
y	-4	-6	-12	8	6	4

d)



Exercícios de consolidação pp. 106 e 107

- 1.a) $f(x) = 0,3x$ b) $k = 0,3$
 c) 246 MT d) 746,20 MT

2.a)

x	60	100	195	200
y	62,4	104	2 048	208

- b) Sim. $k = 1,04$
 b) $y = 1,04x$