Exame de Matemática de 2020A

Correcção do exame de Matemática de 2020A

1. O conjunto das soluções da equação $\sqrt{(1-|1-x|)^2}=4$ é:

   A: $\emptyset$ B: $\{-4,-2\}$ C: $\{-4,6\}$ D: $\{-2,4\}$ E: $\{-4,-2,4,6\}$

   Resolução:

   Tendo em conta que $\sqrt{x^2}=|x|$, temos:

$$\sqrt{(1-|1-x|)^2}=4 \Leftrightarrow |1-|1-x||=4$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-|1-x|=4, \text{ se } 1-|1-x|\geq 0 \\ -1+|1-x|=4, \text{ se } 1-|1-x|<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-|1-x|=4, \text{ se } |1-x|\leq 1 \\ -1+|1-x|=4, \text{ se } |1-x|>1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-(1-x)=4, \text{ se } 1-x\leq 1 \wedge 1-x\geq 0 \\ 1+1-x=4, \text{ se } -(1-x)\leq 1 \wedge 1-x<0 \\ -1+1-x=4, \text{ se } 1-x>1 \wedge 1-x\geq 0 \\ -1-(1-x)=4, \text{ se } -(1-x)>1 \wedge 1-x<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4, \text{ se } x\geq 0 \wedge x\leq 1 \\ x=-2, \text{ se } x\geq 2 \wedge x>1 \\ x=-4, \text{ se } x<0 \wedge x\leq 1 \\ x=6, \text{ se } x>2 \wedge x>1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-4 \\ \vee \\ x=6. \end{cases}$$

   A resposta certa é **C**.

   - Note que pelo menos um elemento de cada conjunto não vazio dado nas restantes alternativas não satisfaz a equação.

2. O conjunto das soluções da inequação $|x^2+x-4|<2$ é:

   A: $]-3;2[$ B: $]-2;-1[\cup[2;3]$ C: $]-\infty;-3[\cup]-2;-1[\cup]2;\infty[$
   D: $]-3;-2[\cup]1;2[$ E: $]-2;3[$

   Resolução : Temos:

$$|x^2+x-4|<2 \Rightarrow \begin{cases} x^2+x-4<2 \text{ se } x^2+x-4\geq 0 \\ -(x^2+x-4)<2 \text{ se } x^2+x-4<0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2+x-6<0 \text{ se } x^2+x-4\geq 0 \\ x^2+x-4>-2 \text{ se } x^2+x-4<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+3)(x-2)<0 \text{ se } x^2+x-4\geq 0 \\ x^2+x-2>0 \text{ se } x^2+x-4<0 \end{cases}$$

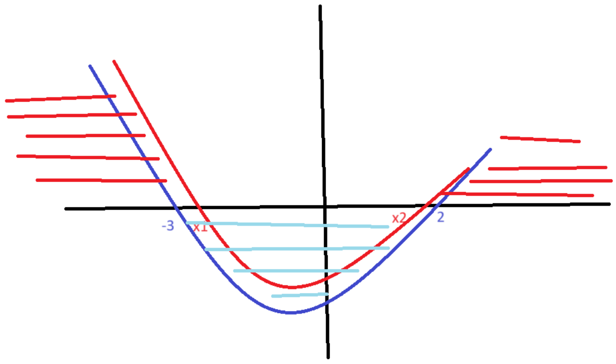
$$\Rightarrow \begin{cases} (x+3)(x-2)<0 \text{ se } (x-x_1)(x-x_2)\geq 0 \\ (x+2)(x-1)>0 \text{ se } (x-x_1)(x-x_2)<0, \end{cases}$$

   onde

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4\cdot(-4)}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2},$$

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2},\ x_2 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}.$$

Resolvendo graficamente a inequação $(x+3)(x-2)<0$ sendo que $(x-x_1)(x-x_2)\geq 0$, temos:

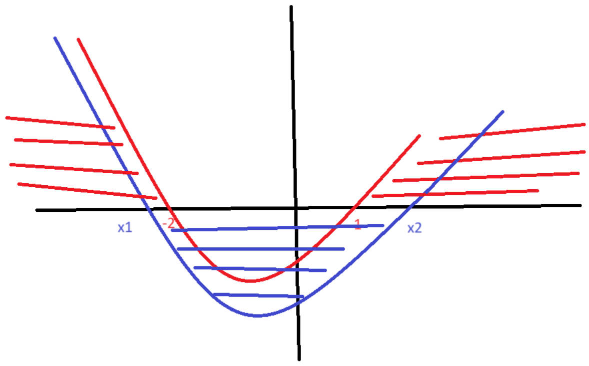


Assim, o conjunto

$$\left(]-\infty,\frac{-1-\sqrt{17}}{2}]\cup[\frac{-1+\sqrt{17}}{2},+\infty[\right)\cap]-3;2[\tag{1}$$
$$=]-3;\frac{-1-\sqrt{17}}{2}]\cup[\frac{-1+\sqrt{17}}{2};2[\tag{2}$$

é a intersecção dos conjuntos solução de cada inequação.

Resolvendo graficamente a inequação $(x+2)(x-1)>0$ sendo que $(x-x_1)(x-x_2)<0$, temos:



Temos

$$\left(]-\infty,-2[\cup]1,+\infty[\right)\cap]\frac{-1-\sqrt{17}}{2};\frac{-1+\sqrt{17}}{2}[=]\frac{-1+\sqrt{17}}{2},-2[\cup]1,\frac{-1+\sqrt{17}}{2}[\tag{3}$$

Unindo os conjuntos (1) e (3), obtemos $]-3;-2[\cup]1,2[$.

A resposta certa é **D**.

- Note que os números $x = 0,\ x = 2,1$ não satisfazem a inequação .

3. O preço de um produto subiu de 20,00 MT para 25,00 MT. Neste caso, o preço subiu em:

   A: 15% B: 20% C: 25% D: 30% E: 10%

   Resolução : Temos:

$$\text{Aumento em } \% = \frac{\text{valor final} - \text{ valor inicial}}{\text{valor inicial}} \cdot 100\% = \frac{25-20}{20} \cdot 100\% = 25\%.$$

   A resposta certa é **C**.

4. Entre os vinte alunos duma turma é preciso escolher dois que vão participar numa Olimpíada em Matemática. De quantas maneiras diferentes é possível fazer esta escolha?

   A. de 190 maneiras B. de 400 maneiras C. de 40 maneiras
   D. de 200 maneiras E. de 380 maneiras

   Resolução : Precisamos formar grupos de pessoas. Desta forma, não há reptição e a ordem não interessa. Logo, o número total de possibilidades é

$$C_{20}^{2} = \frac{20!}{2!(20-2)!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18!}{2! \cdot 18!} = 190.$$

   A resposta certa é **A**.

5. Previa-se distribuir 1200 garrafas de refrescos a um certo número de pessoas. Afinal apareceram 4 pessoas a menos e assim cada uma das presentes recebeu mais 10 garrafas. Quantas pessoas eram?

   A: 24 pessoas B: 30 pessoas C: 20 pessoas
   D: 15 pessoas E: 4 pessoas

   Resolução : Seja x o número de pessoas e cada pessoa receberia y garrafas de refrescos. Então,

$$\begin{cases} \frac{1200}{x} = y \\ \\ \frac{1200}{x-4} = y + 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 1200 \\ \frac{1200x}{x-4} = xy + 10x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 1200 \\ 1200x = (1200+10x)(x-4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 1200 \\ 1200x = 1200x + 10x^2 - 4800 - 40x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 1200 \\ 10x^2 - 40x - 4800 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 1200 \\ x^2 - 4x - 480 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 1200 \\ x^2 - 4x - 480 = 0 \end{cases}$$

   Calculando $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-480) = 1936$, então

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{1936}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 44}{2} \Longrightarrow x = 24 \vee x = -20.$$

   Visto que o número de pessoas nunca é negativo então $x = 24$ pessoas. Então, a resposta certa é **A**.

6. Um teste consiste em quatro perguntas, cada uma das quais contém cinco alternativas de respostas, sendo uma delas é correcta. A condição de aprovação no teste é, no mínimo, quatro respostas correctas. Um aluno, não sabendo a matéria do teste, marcou as respostas aleatoriamente. Qual é a probabilidade do aluno ser aprovado?

A. 1,75% B. 0,16 % C. 6,25 % D. 2,56% E. 0,8%

Resolução : A probabilidade de acertar uma pergunta é

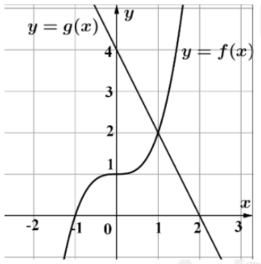
$$P(A) = \frac{\text{número de alternativas certas}}{\text{número de alternativas de resposta}} = \frac{1}{5}.$$

Seja E o evento: "acertar quatro perguntas num total de quatro". Desta forma,

$$P(E) = P(A) \cdot P(A) \cdot P(A) \cdot P(A) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{625}$$

A probalidade em % é $\frac{1}{625} \cdot 100\% = 0,16\%$. A resposta certa é **B**.

Para as perguntas 7,8,9,10,11,12 use a figura:



7. O valor de x para $f(x) = g(x)$ é:

   A: -1 B: 4 C: 4 D: 1 E: 0

   Resolução : Graficamente $f(x) = g(x)$ é o conjunto dos pontos x tais que $(x, f(x))$ é ponto de intersecção dos gráficos de f e g. Da figura vemos que os gráficos se intersectam em um único pont (1;2). Assim, $f(1) = 2 = g(1)$. Desta forma, $f(x) = g(x)$ quando $x = 1$. A resposta certa é **D**.

8. O limite $\lim\limits_{x \to -1^-} \frac{2}{f(x)}$ é igual a:

   A: $-\infty$ B: $+\infty$ C: 0 D: -1 E: -2

   Resolução : Da figura temos:

   $$\lim_{x \to -1^-} \frac{2}{f(x)} = \lim_{x \to -1^-} \frac{2}{0^-} = -\infty.$$

   A resposta certa é **A**.

9. O valor de x para $f(g(x)) = 1$ é :

   A: -1 B: 4 C: 0 D: 1 E: 2

   Resolução : Primeiro resolvemos $f(x) = 1$. Do gráfico, $f(x) = 1$ quando $x = 0$. Assim, $f(g(x)) = 1$ quando $g(x) = 0$. No gráfico de g, $g(x) = 0$ quando $x = 2$. A resposta certa é **E**.

10. A área do triângulo formado pela recta definida por $y = g(x)$ e pelos eixos das coordenadas é:

    A: $2un^2$ B: $6un^2$ C: $4un^2$ D: $1un^2$ E: $8un^2$

    Resolução: O triângulo é recto, tem catetos com medidas $4cm$ e $2cm$. Assim, a área deste triângulo é:

    $$\text{Área do triângulo} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{4\,cm \cdot 2\,cm}{2} = 4cm^2$$

    A resposta certa é **C**.

11. A expressão analítica da função $y = f(x)$ é:

    A: $f(x) = x^3$ B: $f(x) = (x-1)^3$ C: $f(x) = (x+1)^3$ D: $f(x) = x^3 + 1$ E: $f(x) = x^3 - 1$

    Resolução: O gráfico de $f(x)$ passa pelos pontos $(-1;0)$, $(0,1)$ e (1;2). A função é crescente em todo o seu domínio, tem um ponto de inflexão em (0,1) e não tem extremos. Usando estes dados vamos procurar das opções apresentadas qual das opções apresentadas pode representar o gráfico de f:

    - $f(x) = x^3$, não é, pois, $f(0) \neq 1$;
    - $f(x) = (x-1)^3$, não é, pois, $f(0) \neq 1$;
    - $f(x) = (x+1)^3$, não é, pois, $f(1) \neq 2$;
    - $f(x) = x^3 + 1$, sim, pois, $f(0) = 1$, $f(-1) = 0$, $f(1) = 2$, $f'(x) = 3x^2 > 0$ quando $x \neq 0$, logo f é crescente neste conjunto; e $x = 0$ é ponto e inflexão, o seja, $f''(0) = 0$ e a função $f''(x)$ muda de sinal ao passar pelo ponto de abcissa $x = 0$.
    - $f(x) = x^3 - 1$, não é, pois, $f(0) \neq 1$.

    A resposta certa é **D**.

12. O coeficiente angular da recta $y = g(x)$ é:

    A: 2 B: 4 C: -2 D: -4 E: 1

    Resolução : Tendo em conta que o coeficiente angular da recta é o declive da mesma e que esta recta passa pelos pontos (0,4) e (2,0), temos :

    $$\tan\varphi = a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0-4}{2-0} = -2.$$

    A resposta certa é **C**.

13. Dada a função $f(x) = \frac{x-3}{9-x^2}$. O ponto de abcissa $x = 3$...

    A. é ponto de descontinuidade não eliminável de 1a espécie

    B. não é ponto de descontinuidade

    C. é ponto de descontinuidade não eliminável de 2a espécie

    D. é ponto de descontinuidade eliminável

    E. nenhuma das alternativas anteriores.

    Resolução : A condição de continuidade de uma função num ponto $x = x_0$ é:

    $$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

    Temos: $f(3)$ não existe, pois não existe divisão por zero. Mais,

    $$\begin{aligned}\lim_{x \to 3^-} f(x) &= \lim_{x \to 3^-} \frac{x-3}{9-x^2} = \lim_{x \to 3^-} \frac{x-3}{(3-x)(3+x)} \\ &= \lim_{x \to 3^-} \frac{x-3}{-(x-3)(x+3)} = -\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

    Analogamente,

    $$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} \frac{x-3}{9-x^2} = \lim_{x \to 3^+} \frac{x-3}{(3-x)(3+x)} = \lim_{x \to 3^+} \frac{x-3}{-(x-3)(x+3)} = -\frac{1}{6}.$$

Assim,

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^-} f(x) = -\frac{1}{6},\ f(3) \neq \lim_{x\to 3^+} f(x).$$

A função tem descontinuidade no ponto $x = 3$, da primeira espécie e eliminável. A resposta certa é **D**.

14. Qual é o cento e vigésimo primeiro membro da sucessão $5, 2, -1, -4, -7, \ldots$?

A: -55 B: -21175 C: -4342 D: -21178 E: -358

Resolução : Temos: $a_{n+1} - a_n = -3,\ n = 1, 2, \ldots$. Assim, a_n é uma progressão aritmética de razão $d = -3,\ a_1 = 5$. O termo geral tem a forma
$a_n = a_1 + d(n-1)$. O vigésimo primeiro termo é:

$$a_{21} = a_1 + 20d = 5 + 20 \cdot (-3) = -55.$$

A resposta certa é **A**.

15. A partir do ano 2000, o preço de um produto aumenta anualmente em 11%. Denotemos por a_n preço do produto no ano 2000$+n$. A sucessão a_1, a_2, a_3,... é:

A. uma progressão aritmética com razão 11

B. uma progressão aritmética com razão 0,11

C. uma progressão geométrica com razão 11

D. uma progressão geométrica com razão 1,11

E. uma sucessão que não é progressão aritmética nem progressão geométrica

Resolução : O preço do produto no ano 2001 é $a_1 = a_0 + 11\% a_0 = a_0 + 0,11a_0 = 1,11a_0$, $a_2 = a_1 + 11\% a_1 = a_1 + 0,11a_1 = 1,11a_1 = 1,11(1,11)a_0 = (1,11)^2 a_0$, $a_n = (1,11)^n a_0$. Assim,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(1,11)^{n+1}a_0}{(1,11)^n \cdot a_0} = 1,11.$$

Assim, a_n é uma progressão geométrica com razão 1,11.

A resposta certa é **D**.

16. PASSE PARA A PERGUNTA SEGUINTE.

17. Qual é o valor do parâmetro real h para o qual a função $f(x) = \begin{cases} 3x + h, & \text{se } x > 2 \\ x^2, & \text{se } x \leq 2 \end{cases}$ seja contínua no ponto $x = 2$?

A: -2 B: 1 C: 0 D: -1 E: 2

Resolução : A condição de continuidade de uma função num ponto $x = x_0$ é:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

As funções $3x + h$ e x^2 são contínuas nos conjuntos de definição , pois são polinômios. O ponto que suscita dúvida quanto à continuidade de $f(x)$ é o ponto de abcissa $x = 2$. Verifiquemos a condição de condinuidade neste ponto. Temos:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$$
$$4 = 6 + h = 4 \Rightarrow h = -2.$$

A resposta certa é **A**.

18. A derivada da função $f(x) = \ln(1 - \cos(x))$ é:

A: $\cot \frac{x}{2}$ B: $\frac{\sin(x)}{1-\cos^2 x}$ C: $-\frac{\sin(x)}{1-\cos^2 x}$ D: 0 E: $\frac{\sin(x)}{1-\cos x}$

Resolução : Usando as regras

$$(\ln u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)},\ (\cos x)' = -\sin(x),$$

temos:

$$f'(x) = (\ln(1 - \cos(x)))' = \frac{(1 - \cos(x))'}{1 - \cos(x)} = \frac{\sin(x)}{1 - \cos x}.$$

A resposta certa é **E**.

19. Os pontos de máximo da função $f(x) = 3x^4 - 4x^3$ são:

A: só $x = -1$ B: $x = 0$ e $x = 1$ C: só $x = -1$ D: não existem E: só $x = 1$

Resolução : Derivando a função $f(x)$ temos:

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 12x^3 - 12x^2 = 0$$
$$\Rightarrow 12x^2(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 1.$$

Vamos estudar o sinal da derivada, temos:

x	$]-\infty, 0[$	0	$]0, 1[$	1	$]1, \infty[$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$

A função $f'(x)$ muda de sinal negativo para positivo ao passar pelo ponto de abcissa $x = 1$, então f atinge um mínimo quando $x = 1$ e não tem máximo. A resposta certa é **D**.

20. A solução da integral $\int \frac{3x+1}{x} dx$ é:

A: $x^2 + 3x + c$ B: $3x + \ln|x| + c$ C: $3x^2 + \ln|x| + c$
D: $\frac{3x^2+x}{x^2} + c$ E: Nenhuma de A-D

Resolução : Usando as propriedades

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx,\ \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c,\ n \neq -1$$
$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c,$$

temos:

$$\int \frac{3x+1}{x} dx = \int \left(\frac{3x}{x} + \frac{1}{x}\right) dx = \int \left(3 + \frac{1}{x}\right) dx = 3x + \ln|x| + c,$$

onde c é constante arbitrária. A resposta certa é **B**.

- Note a derivada de $\frac{3x+1}{x}$ não coincide com nenhuma das funções dadas nas restantes alternativas.

21. A parte real do número complexo $z = i \cdot (3 - 4i)$ é igual a:

    A: -4 B: -3 C: 3 D: 4 E: 5

    Resolução : Um número complexo z admite a representação $z = a + ib$, onde $a, b \in \mathbb{R}$, são a perte real e imaginária de z, respectivamente, $i = \sqrt{-1}$. Assim,

    $$z = i \cdot (3 - 4i) = 3i - 4i^2 = 3i + 4 = 4 + 3i.$$

    A parte real é 4. A resposta certa é **D**.

22. PASSE PARA A PERGUNTA SEGUINTE.

23. Entre as cinco proposições apresentadas, a proposição falsa é:

    A: $\forall x \in \mathbb{R} :\ x^2 > -4$ B: $\exists x \in \mathbb{R} :\ \cos x = 2$ C: $\forall x \in \mathbb{R} :\ -|x| \leq 0$
    D: $\exists x \in \mathbb{R} :\ |x| = \pi$ E: $\forall x \in \mathbb{R} :\ e^x > 0$

    Resolução : Temos:

    - $\forall x \in \mathbb{R} :\ x^2 > -4$, é verdadeira, pois o quadrado de um número real é sempre não negativo.
    - $\exists x \in \mathbb{R} :\ \cos x = 2$, é falso, pois a imagem da função $\cos(x)$ é $[-1; 1]$. Assim, não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\cos x = 2$.
    - $\forall x \in \mathbb{R} :\ -|x| \leq 0$ é verdadeira, pois o módulo de um número real é sempre não negativo ($|x| \geq 0$). Multiplicando por -1 obtemos a inequação dada que é válida para quer x em $\mathbb{R}$. $\exists x \in \mathbb{R} : |x| = \pi$, é verdade, pois, por exemplo $x = \pi$ satisfaz a equação .
    - $\forall x \in \mathbb{R} :\ e^x > 0$ é verdade, pois, a função exponencial é sempre positiva em $\mathbb{R}$.

    A resposta certa é **B**.

24. O domínio de definição da função $f(x) = \sqrt{5 - x} \cdot \log_3^{(x-3)}$ é:

    A: $\emptyset$ B: $[5, \infty[$ C: $[-\infty, 3[$ D: $]3, 5]$ E: $]-\infty, 3[\cup]5, \infty[$

    Resolução : Tendo em conta o domínio de $\sqrt{\cdot}$ e de logarítmo, temos:

    $$\begin{aligned} &5 - x \geq 0 \wedge x - 3 > 0 \Rightarrow -x \geq -5 \wedge x > 3 \\ &\Rightarrow x \leq 5 \wedge x > 3 \Rightarrow 3 < x \leq 5 \Rightarrow x \in]3, 5]. \end{aligned}$$

    A resposta certa é **D**.

    - Note que $x = 0$ e $x = 6$ não pertencem ao domínio de existência de $f(x)$, pois $\log_3^{(0-3)}$ não existe em $\mathbb{R}$ e $\sqrt{5-6}$ não existe em $\mathbb{R}$.

25. Qual é a expressão equivalente à expressão $(1 - a^2)(a^{1/2} + 1)^{-1}(a + 1)^{-1} + a^{1/2} + a$, se $a > 0$?

    A. $a + 1$ B. $(1 - \sqrt{a})^2$ C. 1 D. $(1 + \sqrt{a})^2$ E. $a - 1$

    Resolução : Se $a \neq 1$, temos:

    $$\begin{aligned} (1 - a^2)(a^{1/2} + 1)^{-1}(a + 1)^{-1} + a^{1/2} + a &\Leftrightarrow \frac{1 - a^2}{\sqrt{a} + 1} \cdot \frac{1}{a + 1} + \sqrt{a} + a \\ &\Leftrightarrow \frac{(1 - a^2)(\sqrt{a} - 1)}{(\sqrt{a} + 1)(\sqrt{a} - 1)} \cdot \frac{1}{a + 1} + \sqrt{a} + a \\ \Leftrightarrow \frac{(1 - a^2)(\sqrt{a} - 1)}{(a - 1)} \cdot \frac{1}{a + 1} + \sqrt{a} + a &\Leftrightarrow \frac{(1 - a^2)(\sqrt{a} - 1)}{a^2 - 1} + \sqrt{a} + a \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{a}+1+\sqrt{a}+a=a+1.$$

Se $a=1$, teremos $1-a^2=0$, logo, $(1-a^2)(a^{1/2}+1)^{-1}(a+1)^{-1}+a^{1/2}+a=0+1+1=2=a+1$. A resposta certa é **A**.

26. Se $\frac{y}{x}=\frac{3}{2}$, então o valor da fração $\frac{6x-3y}{3x+2y}$ é igual a:

A. 4 B. 1 C. 0, 25 D. 3 E. 0

Resolução : Temos:

$$\frac{y}{x}=\frac{3}{2}\Rightarrow 2y=3x\Rightarrow \frac{6x-3y}{3x+2y}=\frac{2\cdot 3x-3y}{3x+2y}=\frac{4y-2y}{2y+2y}=\frac{y}{4y}=0,25.$$

A resposta certa é **C**.

- Note que fazendo $x=2$ e $y=3$, obtemos $\frac{y}{x}=\frac{3}{2}$ e $\frac{6x-3y}{3x+2y}=\frac{1}{4}$.

27. A população P de uma cidade aumenta de acordo com a função $P(t)=4^{0,05t+9}$, onde t é o tempo medido em anos. Depois de quantos anos a população da cidade dobrará?

A. 4 anos B. 10 anos C. 8 anos D. 16 anos E. 9 anos

Resolução : No instante inicial, $t=0$ e $P_0=4^9$. Qunado $P=2P_0$, teremos:

$$\frac{P_0}{2P_0}=\frac{4^9}{4^{0,05t+9}}\Rightarrow \frac{1}{2}=4^{-0,05t}$$
$$\Rightarrow 2^{-1}=2^{-0,1t}\Rightarrow 1=-0,1t\Rightarrow t=10.$$

A resposta certa é **B**.

28. PASSE PARA A PERGUNTA SEGUINTE.

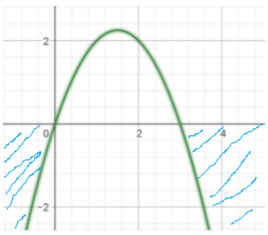
29. O conjunto de soluções da inequação $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-x^2}>1$ é:

A. $]-\infty,0]$ B. $]-\infty,0[\cup]3,\infty[$ C. $]0,3[$ D. $]-\infty,-3[\cup]0,\infty[$ E. $]-3,\infty[$

Resolução : Temos:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-x^2}>1\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-x^2}>\left(\frac{1}{2}\right)^{0}$$
$$3x-x^2<0\Leftrightarrow x(3-x)<0.$$

Resolvendo graficamente, teremos:



A solução é $]-\infty,0[\cup]3,\infty[$. A resposta certa é B.

30. A única raíz da equação $100^x = 3 \cdot 10^x + 10$ é igual a:

A. $-\log_{10}^{2}$ B. $\log_{10}^{2}$ C. 10 D. $\log_{10}^{5}$ E. $-\log_{10}^{5}$

Resolução : Temos:

$$100^x = 3 \cdot 10^x + 10 \Leftrightarrow 10^{2x} = 3 \cdot 10^x + 10.$$

Fazemos a substituição $t = 10^x > 0$. Teremos:

$$10^{2x} = 3 \cdot 10^x + 10 \Leftrightarrow t^2 = 3 \cdot t + 10$$
$$\Leftrightarrow t^2 - 3t - 10 = 0 \Leftrightarrow (t-5)(t+2) = 0$$
$$t = 5 \vee t = -2.$$

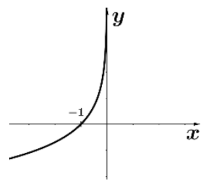
Visto que $t > 0$, teremos $t = 5$. Assim,

$$5 = 10^x \Rightarrow x = \log_{10}^{5}.$$

A resposta certa é **D**.

- As restantes alternativas não satisfazem a equação .

31. Qual é a função cujo gráfico está apresentado na figura?



A: $y = \ln(-x)$ B: $y = -e^x$ C: $y = -\ln(-x)$
D: $y = e^{-x}$ E: $y = -\ln x$

Resolução: A função satisfaz as seguntes condições : $f(-1) = 0$, $f(x) \to -\infty$ quando $x \to -\infty$ e $f(x) \to +\infty$ quando $x \to 0^-$ e a única expressão com essas características é $y = -\ln(-x)$. Logo, a resposta certa é **C**.

32. O número real $\log_{0.125} 5 \cdot \log_{125} 2$ é igual a:

A: $1/9$ B: 9 C: $\log_2 5$ D: -9 E: $-1/9$

Resolução: Temos:

$$\log_{0.125} 5 \cdot \log_{125} 2 = \log_{1/8} 5 \cdot \log_{125} 2 = \log_{2^{-3}} 5 \cdot \log_{5^3} 2 = -\frac{1}{9}\frac{\log_5 5}{\log_5 2} \cdot \log_5 2 = -\frac{1}{9}.$$

A resposta certa é **E**.

33. A solução da equação logarítmica $\log_3 x + \dfrac{1}{(\log_3 x) - 3} = 5$ é:

A: $x = 27$ B: $x = 243$ C: $x = 9$ D: $x = 81$ E: $x = 729$

Solução: Para a existência da expressão $x > 0 \wedge \log_3 x - 3 \neq 0 \Longrightarrow x > 0 \wedge \log_3 x \neq \log_3 3^3 \Longrightarrow x > 0 \wedge x \neq 27$. Resolvendo a equação dada e fazendo a substituição $\log_3 x = z$, teremos:

$$\log_3 x + \frac{1}{(\log_3 x) - 3} = 5 \Longrightarrow z + \frac{1}{z-3} = 5 \Longrightarrow z(z-3) + 1 = 5(z-3)$$
$$\Longrightarrow z^2 - 8z + 16 = 0 \Longrightarrow (z-4)^2 = 0 \Longrightarrow z = 4 \Longrightarrow \log_3 x = 4 \Longrightarrow$$
$$\log_3 x = 4\log_3 3 \Longrightarrow x = 3^4 = 81.$$

A resposta certa é **D**.

34. O conjunto de soluções da inequação $\log_{0,5}(-x) + \log_{0,5}(-1-x) < -1$ é:

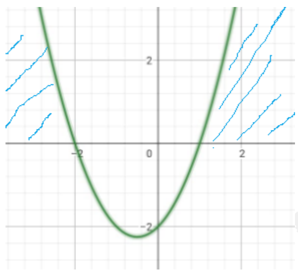
A: $\emptyset$ B: $]-\infty; -2[$ C: $]-2; 1[$ D: $]-\infty; -1[$ E: $]-\infty; -2[\cup]1; +\infty[$

Solução: Para a existência da expressão dada $(-x > 0 \wedge -1-x > 0) \Longrightarrow x < -1$. Resolvendo a inequação temos:

$$\log_{0,5}(-x) + \log_{0,5}(-1-x) < -1 \Longrightarrow \log_{0,5}[-x(-1-x)] < \log_{0,5} 0,5^{-1}$$

$$x(1+x) > \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \Longrightarrow x(1+x) > 2 \Longrightarrow x^2 + x - 2 > 0 \Longrightarrow (x-1)(x+2) > 0$$

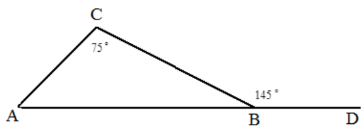
Resolvendo graficamente, temos:



Assim, a solução da inequação quadratica será $x \in]-\infty, -2[\cup]1, +\infty[$. Intersectando com o domínio da expressão temos $x \in]-\infty, -2[$. Logo, a resposta certa é **B**.

35. A figura ao lado mostra um triângulo ABC com segmento AB prolongado até o ponto D, o ângulo externo CBD medindo 145^o e o ângulo C medindo 75^o. A medida do ângulo CAB é:

A: 35^o B: 70^o C: 110^o D: 220^o E: Nenhuma das alternativas anteriores



Resolução: É sabido que $A\hat{B}C + C\hat{B}D = 180^o \Longrightarrow A\hat{B}C = 180^o - 145^o = 35^o$ e por outro lado, a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180^o. Então, $C\hat{A}B + 75^o + A\hat{B}C = 180^o \Longrightarrow C\hat{A}B = 180^o - 110^o = 70^o$. Assim, a resposta certa é **B**.

36. Qual é o raio do círculo cuja área mede metade da área do círculo limitado pela circunferência dada pela equação $(x-2)^2 + (x+2)^2 = 4$?

A: $0.5\,un$ B: $1\,un$ C: $\sqrt{2}\,un$ D: $2\,un$ E: $2\sqrt{2}\,un$

Resolução: A equação da circunferência de raio R e centro em (x_0, y_0) é dada por $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$. A circunferência dada tem como raio $R_0 = 2$, então a sua área será $A = \pi R_0^2 = 4\pi$, assim a área do círculo menor será $A_1 = \frac{A_0}{2} = 2\pi$. Então o raio do círculo menor é $R_1 = \sqrt{2}$.

A resposta certa é **C**.

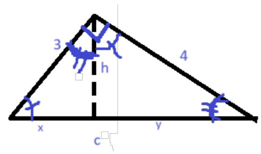
37. Determine o valor do parêmetro h para o qual as rectas no plano dadas pelas equações $x + hy - 5h = 0$ e $4x - 3y - 9 = 0$ bsejam paralelas.

A: $-3/4$ B: $4/3$ C: tal h não existe D: $-4/3$ E: $3/4$

Resolução: Para que duas rectas sejam paralelas é suficiente que tenham o mesmo declive. A recta $4x - 3y - 9 = 0$ pode ser escrita na forma $y = \frac{4}{3}x - 3$ e a recta $x + hy - 5h = 0$ pode ser escrita na forma $y = -\frac{x}{h} + 5$. Então, para que elas sejam paralela $-\dfrac{1}{h} = \dfrac{4}{3} \Longrightarrow h = -\dfrac{3}{4}$.

Logo, a resposta certa é **A**.

38. Determine a altura dum triângulo rectângulo traçada do vértice do ângulo recto se os catetos do triângulo medem 3 cm e 4 cm.



A: $6\,cm$ B: $\sqrt{7}cm$ C: $2,5cm$ D: $8/3cm$ E: $2,4cm$

Da figura ao lado, vemos que a altura h divide o triângulo em dois triângulos rectângulos semelhantes. Temos primeiro que $c^2 = 3^2 + 4^3 \Longrightarrow c = 5$. Pela semelhança de triângulos temos, $\frac{4}{3} = \frac{y}{h}$ e $\frac{y}{h} = \frac{h}{x}$ então $y = \frac{4}{3}h$ $h^2 = xy \Longrightarrow x = \frac{3}{4}h$.

$c = x + y = 5 \Longrightarrow \dfrac{4}{3}h + \dfrac{3}{4}h = 5 \Longrightarrow 5h = 12 \Longrightarrow h = \dfrac{12}{5} = 2,4$. Então, a resposta certa é **E**.

39. Todos os valores de m, tais que $2\cos x = m + 1$, para algum valor de x definem-se pela condição :

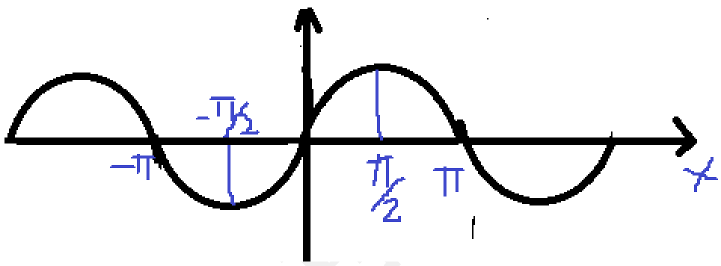
A: $-3 \leq m \leq 1$ B: $-1 \leq m \leq 1$ C: $m \geq -1$ D: $-1 \leq m \leq 3$ E: $m \geq -3$

Resolução: $2\cos x = m + 1 \Longrightarrow \cos x = \frac{m+1}{2}$. Sabe-se que $-1 \leq \cos x \leq 1 \Longrightarrow -1 \leq \frac{m+1}{2} \leq 1 \Longrightarrow -2 \leq m + 1 \leq 2 \Longrightarrow -3 \leq m \leq 1$. Logo, a resposta certa é **A**.

40. A função $y = senx - 1$ é monótona crescente no intervalo:

A: $[-\frac{3\pi}{2}; 0]$ B: $[0; \pi]$ C: $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ D: $[-\pi, 0]$ E: Em nenhum dos intervalos

Resolução:



A figura acima representa a função $y = senx$ e é monótona crescente no intevalo $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$. Visto que a função $y = senx - 1$ é deslocação da função $y = senx$, ao longo do eixo Oy uma unidade para baixo, o intervalo de monotonia não se altera. Portanto, a resposta certa é **C**.

41. Qual é o conjunto das soluções da equação $\cos^2\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right) = \cos^2(\pi + x)$.

A: $\left\{\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right\}$ B: $\left\{\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right\}$ C: $\left\{\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right\}$ D: $\left\{\frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}\right\}$ E: $\left\{\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right\}$

Resolução: Temos:

$$\cos^2\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \cos^2(\pi + x) \Longrightarrow$$
$$\left(\cos\frac{3\pi}{2}\cos x - sen\frac{3\pi}{2}senx\right)^2 = (\cos\pi\cos x - sen\pi senx)^2 \Longrightarrow$$
$$sen^2x = \cos^2 x \Longrightarrow tg^2x = 1 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \frac{3\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

A resposta certa é **B**.

42. Qual é a função ímpar que tem o período mínimo positivo $T = 4$?

A: $y = \cos\frac{\pi x}{4}+2$ B: $y = sen\frac{\pi x}{2}-3$ C: $y = tg\frac{\pi x}{2}-1$ D: $y = \cos\frac{\pi x}{2}+3$ E. $y = sen\frac{\pi x}{4}-2$

Resolução: A função $\cos x$ é par, portanto ficam de fora as opções A e D, as restantes funções são ímpares. O período da função tgx é π, então $\frac{\pi T}{2} = \pi \Longrightarrow T = 2 \neq 4$, então C também não é correcta. O período da função $senx$ é 2π, então para alternativa B temos $\frac{\pi T}{2} = 2\pi \Longrightarrow T = 4$. Esta alternativa está certa. Para a alternativa E temos $\frac{\pi T}{4} = 2\pi \Longrightarrow T = 8 \neq 4$. Logo, a resposta certa é **B**.

43. A produção P das camisas numa fábrica (em milhares de unidades por ano) depende do número de máquinas x de um determinado tipo (em unidades) de acordo com a função $P(x) = 2x^2 + x$. Que número mínimo de máquinas fornece a produção não inferior a 45 mil camisas por ano?

A: 3 máquinas B: 4 máquinas C: 5 máquinas D: 6 máquinas E: 7 máquinas

Resolução : O número mínimo de máquinas fornece a produção não inferior a 45 mil camisas corresponde a solução da inequação $P(x) \geq 45 \Longrightarrow 2x^2 + x \geq 45 \Longrightarrow 2x^2 + x - 45 \geq 0 \Longrightarrow \Delta = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-45) = 361 \Longrightarrow x_1 = \frac{-1-19}{2\cdot 2} = -5 \vee x = \frac{-1+19}{2\cdot 2} = 4,5$. Então, $2x^2 + x - 45 \geq 0 \Longrightarrow (x+5)(x-9,5) \geq 0 \Longrightarrow x \in]-\infty; -5] \cup [4,5; +\infty]$. Visto que o número de máquinas não pode ser um negativo, então a solução da inequação é $x \in [4,5; +\infty]$. Logo, número mínimo de máquinas fornece a produção não inferior a 45 mil é 5 máquinas. A resposta certa é **C**.

44. Qual é o conjunto de soluções da inequação $2x < x^2 - 3 < -2x$?

A: $]-3;-1[\cup]1;3[$ B: $]-1;3[$ C: $]-\infty;-3[\cup]1;+\infty[$ D: $]-3;-1[$ E: $-\infty;-1[\cup]1;3[$

Resolução : As inequações acima podem ser escritas da seguinte forma:

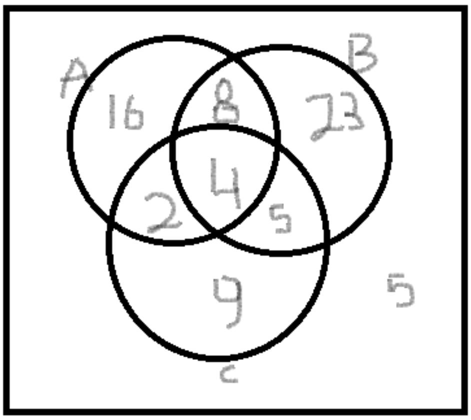
$$\begin{cases} x^2 - 3 < -2x \\ x^2 - 3 > 2x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 3 < 0 \\ x^2 - 2x - 3 > 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+3) < 0 \\ (x+1)(x-3) > 0 \end{cases}$$

Os gráficos abaixo correspondem a primeira e segunda inequações, respectivamente, cujas soluções são os intervalos indicados à tracejado. A solução do sistema é a intersecção das soluções parciais, i.e., $x \in]-3;1[\cap(]-\infty;-1[\cup]3;+\infty[) =]-3;-1[$. Então, a resposta certa é **D**.

45. Num prédio foi efectuada uma pesquisa sobre os frequentadores das lanchonetes A, B e C e constatou-se que 30, 40 e 20 indivíduos frequentavam A, B e C, respectivamente; 12 frequentavam A e B; 9 frequentavam B e C; 6 frequentavam A e C; 4 frequentavam A, B e C; 5 não frequentavam nenhuma lanchonete. O número de moradores do prédio é:

A: 90 B: 80 C: 72 D: 92 E: 62

Resolução : Sejam A, B e C os conjuntos de moradores que frequentam lanchonete A, B e C, reespectivamete. Usando peoperações de conjuntos, temos: $|A| = 30$, $|B| = 40$, $|C| = 20$, $|A\cap B| = 12$, $|A\cap C| = 6$, $|B\cap C| = 9$ e $|(A\cup B\cup C)^c| = 5$. $|(A\cap B)\setminus(A\cap B\cap C)| = 12-4 = 8$, $|(B\cap C)\setminus(A\cap B\cap C)| = 9-4 = 5$, $|(A\cap C)\setminus(A\cap B\cap C)| = 6-4 = 2$. Assim $|A\setminus(B\cup C)| = 30-8-2-4 = 16$, $|B\setminus(A\cup C)| = 40-8-5-4 = 23$ e $|C\setminus(B\cup A)| = 20-2-5-4 = 9$. Usando o diagrama de Venn, temos:



Com base nesse diagrama temo que o número total de moradores é $16 + 8 + 23 + 5 + 9 + 2 + 4 + 5 = 72$. Desta forma, a resposta certa é alternativa **C**.

46. Seja $X = \{1; 7\}$ e $Y = \{3; 9\}$. O conjunto $\mathbb{Z} \cap ((X \cup Y) \setminus (X \cap Y))$ é:

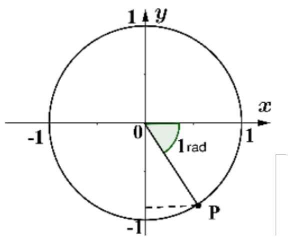
A: $\{2; 3; 7; 8\}$ **B**: $\{1; 3; 7; 9\}$ C: $\{3; 4; 5; 6\}$ D: $\{1; 2; 3; 7; 8; 9\}$ E: $\{1; 2; 8; 9\}$

Reolução : Temos: $X \cup Y = \{1; 3; 7; 9\}$ $X \cap Y = \emptyset \Longrightarrow (X \cup Y) \setminus (X \cap Y) = X \cup Y = \{1; 3; 7; 9\}$. Então, $\mathbb{Z} \cap ((X \cup Y) \setminus (X \cap Y)) = \mathbb{Z} \cap \{1; 3; 7; 9\} = \{1; 3; 7; 9\}$.

Logo, a resposta certa é **B**.

47. Qual é a ordenada do ponto P na figura?

A: $\cos 1$ **B**: $sen 1$ C: $-tg1$ D: $-sen1$ E: $-\cos 1$



Resolução: Ordenada de um ponto corresponde ao valor de y e no círculo trigonométrico, y representa a função seno e x a função cosseno. Então , $y = sen(-1) = -sen1$. Logo, a resposta certa é **D**.

48. Simplificando a expressão $\dfrac{sen\,\alpha}{1+\cos\alpha} + \dfrac{1+\cos\alpha}{sen\,\alpha}$ obtém-se:

A: $\dfrac{2}{sen\alpha}$ B: $\dfrac{sen\alpha}{2}$ C: $\dfrac{\cos^2\alpha}{2}$ D: $\dfrac{2}{\cos\alpha}$ E: 2

Resolução: Vamos simplificar a expressão:

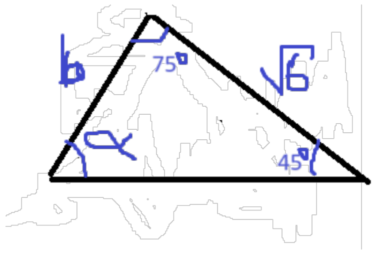
$$\begin{aligned}\frac{sen\,\alpha}{1+\cos\alpha} + \frac{1+\cos\alpha}{sen\,\alpha} &= \frac{sen^2\alpha + (1+\cos\alpha)^2}{sen\alpha(1+\cos\alpha)} = \frac{sen^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\cos\alpha + 1}{sen\alpha(1+\cos\alpha)}\\ &= \frac{1 + 2\cos\alpha + 1}{sen\alpha(1+\cos\alpha)} = \frac{2+2\cos\alpha}{sen\alpha(1+\cos\alpha)} = \frac{2(1+\cos\alpha)}{sen\alpha(1+\cos\alpha)} = \frac{2}{sen\alpha}.\end{aligned}$$

A resposta certa é **A**.

49. Um dos lados dum triângulo mede $\sqrt{6}$ cm, e os dois ângulos adjacentes a este lado medem 45^o e 75^o. Qual é a medida do menor lado do triângulo?:

A: $2\sqrt{3}\,cm$ B: $2(\sqrt{3}-1)\,cm$ C: $2\,cm$ D: $6(\sqrt{3}+1)\,cm$ E: $3-\sqrt{3}\,cm$

Resolução: A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180^o, então $75^o+45^o+\alpha=180^o \Longrightarrow \alpha=60^o$. Usando o teorema dos senos para o triângulo ao lado, temos
$$\frac{\sqrt{6}}{sen60^o}=\frac{b}{sen45^o} \Longrightarrow \frac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{b}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Longrightarrow b=2\,cm.$$



A resposta certa é **C**.

50. Determine $sen(x)$ sabendo que $tg(x)=-0,75$ e $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

A: -0.8 B: -0.6 C: ±0.5 D: 0.6 E: 0.8

Resolução: Sendo $tgx=-0.75=-\frac{3}{4} \Longrightarrow senx=-\frac{3}{4}\cos x$ e por outro lado, temos a fórmula fundamental da trigomometria $sen^2x+\cos^2x=1 \Longrightarrow \left(-\frac{3}{4}\cos x\right)^2+\cos^2x=1 \Longrightarrow \frac{25}{16}\cos^2x=1 \Longrightarrow \cos x=\pm\frac{4}{5}$. Assim, quand $\cos x=\frac{4}{5}$, temos $senx=-\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}=\frac{3}{5}=-0.6$ e para $\cos x=-\frac{4}{5}$, temos $senx=-\frac{3}{4}\cdot(-\frac{4}{5})=\frac{3}{5}=0.6$. As funções seno e cosseno tem sinais contrários nom segundo e quarto quadrantes, mas segundo quadrante não faz parte do domínio de x, logo $x\in[-\frac{\pi}{2},0]$ e $senx=-0.6$. Então, a resposta certa é **B**.

51. A velocidade do carro em uma determinada secção do caminho foi aumentada de $100km/h$ para $125km/h$. O tempo gasto nesta secção diminuiu em relação ao anterior em:

A. 20% B. 25% C. 30% D. 100/3% E. 35%

Resolução: Supomos que o espaço percorrido inicialmente é S em t_1 horas(h) a uma velocidade constante de $100\,km/h$. Depois de aumentar a velocidade, o veículo percorre o mesmo espaço S em t_2 horas (h) a uma velocidade constante de $125\,km/h$. Temos:

$$t_1=\frac{\Delta S}{v_1}=\frac{S}{100}h, \quad t_2=\frac{\Delta S}{v_2}=\frac{S}{125}h.$$

Assim, a variação do tempo em percentagem é:

$$\frac{t_2-t_1}{t_1}\cdot100\%=\frac{S/125-S/100}{S/100}\cdot100\%=-\frac{25}{125}\cdot100\%=-20\%.$$

A resposta certa é **A**.

52. O valor $\sqrt{2^3}+\sqrt{32}$ é igual a:

A. $\sqrt{40}$ B. $2\sqrt{20}$ C. $6\sqrt{2}$ D. $5\sqrt{8}$ E. $2^{3/2}+5\cdot2^{1/2}$

Resolução: Temos:

$$\sqrt{2^3}+\sqrt{32}=\sqrt{2^3}+\sqrt{2^5}=2^{3/2}+4\sqrt{2}=2\sqrt{2}+4\cdot\sqrt{2}=6\sqrt{2}.$$

A resposta certa é **C**.

53. Simplificando a expressão $2\sqrt{12}-2\sqrt{8}+\dfrac{12}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}$ obtemos:

A. $2\sqrt{2}$ B. $8\sqrt{3}-10\sqrt{2}$ C. $\sqrt{12}$ D. $\sqrt{27}$ E. $2\sqrt{3}$

Resolução: Temos:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{12}-2\sqrt{8}+\frac{12}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}} &= 2\sqrt{4\cdot 3}-2\sqrt{4\cdot 2}+\frac{12(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})}{(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})} \\ &= 4\sqrt{3}-4\sqrt{2}+\frac{12(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})}{4\cdot 3-9\cdot 2} \\ &= 4\sqrt{3}-4\sqrt{2}-4\sqrt{3}+6\sqrt{2}=2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Logo, a resposta certa é alternativa **A**.

54. A solução da inequação linear $3\sqrt{11}(6-3x)>10(6-3x)$ é:

A: $]0,5;+\infty[$ B: $]-\infty;0,5[$ C: $]-\infty;2[$ D: $]2;+\infty[$ E: $\emptyset$

Resolução: Se $6-3x\neq 0 \Longrightarrow 3\sqrt{11}>10$ que é falso. Se $6-3x=0 \Longrightarrow 0>0$ o que também é falso. Então, não existe x que satisfaça a equação dada. Assim, a resposta certa é **E**.

55. O resultado da decomposição do polinómio $P(x)=2x^5(x-1)^2+x^3(x-1)^3$ em factores é:
A. $x^3(x-1)^2(2x+1)(2x-1)$
B. $x^3(x-1)^2(x+1)(2x-1)$
C. $x^5(x-1)^4(2x+1)$
D. $x^{5/3}(x-1)^{3/2}(x+1)(2x-1)$
E. $x^3(x-1)^3(2x+1)$

Resolução:

$$\begin{aligned} P(x)&=2x^5(x-1)^2+x^3(x-1)^3=x^3(x-1)^2(2x^2+x-1) \\ &=x^3(x-1)^2(2(x-\frac{1}{2})(x+1))=x^3(x-1)^2(2x-1)(x+1) \end{aligned}$$

Logo, a resposta certa é **B**.

56. O resultado da divisão do polinómio $P_1(x)=x^6-2x^4+x^2$ por polinómio $P_2(x)=(x^2+x)^2$ é o polinómio:

A. x^2 B. x^2+1 C. $(x-1)^2$ D. x^2-1 E. $(x+1)^2$

Resolução: $P_1(x)=x^6-2x^4+x^2=x^2(x^4-2x^2+1)=x^2(x^2-1)^2=x^2(x+1)^2(x-1)^2$ e $P_2(x)=(x^2+x)^2=x^2(x+1)^2$, então $P_1(x)=P_2(x)(x-1)^2 \Longrightarrow \frac{P_1(x)}{p_2(x)}=(x-1)^2$. Deste modo, a resposta certa é **C**.

57. Determine o conjunto dos valores do parâmetro a para os quais a equação $x^2+ax+1=0$ não tenha raizes reais:

A: $]-2;2[$ B: $]-\infty;2[$ C: $]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$ D: $]-2;+\infty[$ E: $\emptyset$

Resolução: Para que a equação não tenha raizes reais basta $\Delta=a^2-4<0 \Longrightarrow (a-2)(a+2)<0 \Longrightarrow a>-2 \wedge a<2$, i.e., $-2<a<2$. Logo, a resposta certa é **A**.

58. Sejam t e s raízes diferentes da equação quadrática $x^2 + 2x - \dfrac{1}{239} = 0$. Então $t^{-1} + s^{-1}$ é igual a:

A: 2/239 B: -478 C: $\sqrt{240/239}$ D: 478 E: 2/239

Resolução: Resolvendo a equação dada temos:

$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{239}\right) = \frac{960}{239}$. Sejam $t = x_1$ e $s = t_2$, então

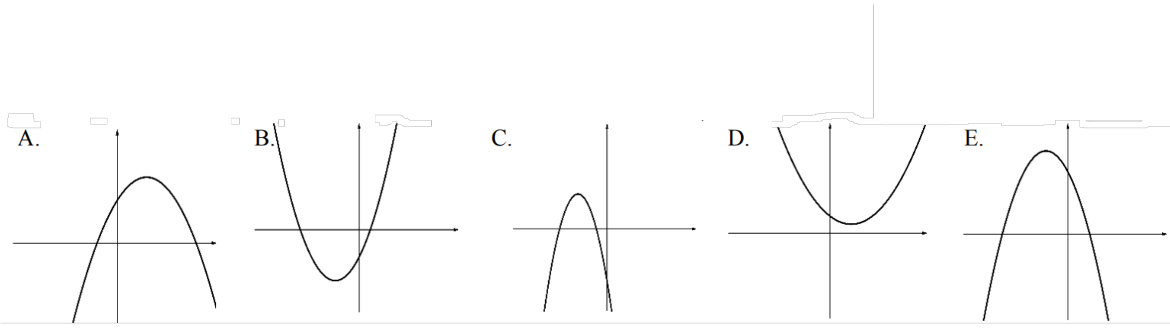
$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{\frac{960}{239}}}{2} = -1 \pm \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \frac{960}{239}} = -1 \pm \sqrt{\frac{240}{239}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} t^{-1} + s^{-1} &= \frac{1}{-1 + \sqrt{\frac{240}{239}}} + \frac{1}{-1 - \sqrt{\frac{240}{239}}} = \frac{1}{\frac{-\sqrt{239}+\sqrt{240}}{\sqrt{239}}} - \frac{1}{\frac{\sqrt{239}+\sqrt{240}}{\sqrt{239}}} \\ &= \frac{\sqrt{239}}{-\sqrt{239} + \sqrt{240}} - \frac{\sqrt{239}}{\sqrt{239} + \sqrt{240}} \\ &= \frac{\sqrt{239}\left(\sqrt{239} + \sqrt{240}\right) - \sqrt{239}\left(-\sqrt{239} + \sqrt{240}\right)}{\left(-\sqrt{239} + \sqrt{240}\right)\left(\sqrt{239} + \sqrt{240}\right)} \\ &= \frac{\sqrt{239} \cdot 2 \cdot \sqrt{239}}{240 - 239} = 478. \end{aligned}$$

A resposta certa é alternativa **D**.

59. Qual é o gráfico da função quadrática da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a > 0$, $b < 0$ e $c > 0$?



Resolução: Função quadrática com $a > 0$ possui concavidade voltada para cima, alternativas B e D. O gráfico que corresponde à uma expressão analítica que tem $c > 0$ é a função na qual ordenada na origem é positiva, que é o caso da alternativa D e $b < 0$ nos indica o sinal do $x_v > 0$, neste caso temos como alternativa certa **D**.

60. Quais são as coordenadas do vértice da parábola que é o gráfico da função $f(x) = 49 + 54x + 27x^2$

A: $(-2; 49)$ B: $(2; 265)$ C: $(0; 49)$ D: $(1; 130)$ E: $(-1; 22)$

Resolução: As coordenadas do vértice são dadas por; $x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{54}{2\cdot 27} = -1$ e $y_v = f(x_v) = 49 - 54 + 27 \cdot (-1)^2 = 22$. Logo a resposta certa é **E**.