Exame de Matemática I de 2021

Correcção do exame de Matemática I de 2021

1. A fórmula de passagem da escala Celcius (C) apara a escala Fahrenheit (F) para medir a temperatura num ambiente, tem uma forma linear $F = aC + b$, $(a, b$ são coeficientes constantes). Sabe-se que $0°C$ coresponde a $32°\,F$ e $100°\,C$ corresponde a $212°\,F$. Qual é a temperatura de um ambiente na escala em Fahrenheit se na escala em Celcius o seu valor é $50°C$?

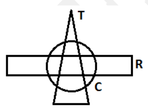
   A: 87 B: 98 C: 118 D: 122 E: 147

   Resolução: Temos $F = aC + b$. Sabe-se que $0°C$ coresponde a $32°\,F$, então $32 = b$. Mais, $100°\,C$ corresponde a $212°\,F$, então, $212 = 100a + c$. Temos:

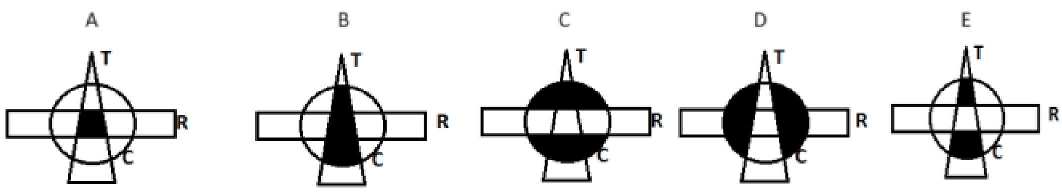
$$212 = 100a + 32 \Longrightarrow a = \frac{180}{100} = \frac{9}{5}.$$

   Assim, $F = \frac{9a}{5} + 32$. Logo, $50°C$ corresponde à: $F = \frac{9}{5} \cdot 50 + 32 = 122°F$. A resposta certa é **D**.

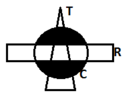
2. O conjunto $(C \setminus R) \cap T$ corresponde ao diagrama de Venn, na figura à abaixo,



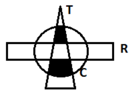
   onde T é o triângulo, R é o rectângulo, C é o círculo, é:



   Resolução : O conjunto $C \setminus R$ é:



Assim, quando intersectamos com T (o triângulo), obtemos:



A resposta certa é **E**.

- As outras alternativas não estão certas pois incluem elementos que não fazem parte do conjunto pretendido.

3. O intervalo de tempo médio estatístico de reacção de um motorista dum carro para começar a travagem extra, encontrando de repente um obstáculo no caminho, é de aproximadamente $[1,5;1,8]$ segundos. Qual é o intervalo de distância (em metros) que o percorre carro durante esse intervalo do tempo, se a sua velocidade for 60 kilómetros por hora?

   A: $[7,10]$ B: $[11,17]$ C: $[18,24]$ D: $[25,30]$ E: $[31,43]$

   Resolução : Considerando que neste momento a velocidade é constante, teremos:

   $$S(t) = v \cdot t,$$

   onde $v = 60km/h = \frac{60000m}{3600s} \approx 16,67m/s$ é a velocidade. Assim,

   $$S(1,5) = 16,67m/s \cdot 1,5s = 25m, \quad S(1,8) = 16,67m/s \cdot 1,8s = 30m.$$

   A resposta certa é **D**.

4. Sejam $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$ dois números do conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$. Então $z_1 > z_2$ se:

   A: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, y_1 > y_2$
   B: $\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}, x_1 > x_2$
   C: $(x_1 = x_2, y_1 > y_2) \vee (y_1 = y_2, x_1 > x_2)$
   D: $x_1 > x_2, y_1 > y_2$
   E: A operação é impossivel em $\mathbb{C}$.

   Resolução : Não existe uma definição padrão da operação $z_1 > z_2$ no conjunto dos números complexos. A resposta mais próxima desta é **E**.

5. Qual é o quinquagésimo termo da sucessão numérica $1, 4, 7, 10, \ldots$?

   A: 157 B: 151 C: 150 D: 149 E: 148

   Resolução : Temos: $a_{n+1} - a_n = 3,\ n = 1, 2, \ldots$ Ou seja, a_n é uma progressão aritmética de razão 3. Temos: $a_1 = 1,\ d = 3 \Longrightarrow a_n = a_1 + (n-1)d = 1 + 3(n-1) = 3n - 2,\ n \in \mathbb{N}$. O quinquagésimo termo é: $a_{50} = 3 \cdot 50 - 2 = 148$. A resposta certa é **E**.

6. A soma se todos os números da sucessão numérica $3; 1; \frac{1}{3}; \frac{1}{9}; \ldots$ é:

   A: 4 B: $4,5$ C: $4,75$ D: 5 E: ∞

   Resolução : Temos:

   $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{3},\ n = 1, 2, \ldots$$

Ou seja, a_n é uma progressão geométrica de razão 1/3. Temos:

$$a_3 = 1,\ q = 1/3 \Longrightarrow s_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{3(1-\frac{1}{3^n})}{1-\frac{1}{3}} = \frac{9}{2}(1-\frac{1}{3^n}),\ n \in \mathbb{N}.$$

A soma de todos os termos é o limite de s_n quando $n \to \infty$ é:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{9}{2}(1-\frac{1}{3^n}) = \frac{9}{2} = 4,5.$$

A resposta certa é **B**.

7. Da cidade A para cidade B há m diferentes caminhos. Da cidade B para cidade C há n diferentes caminhos. Que número de variantes Q existem para viajar pelo itinerário A-B-C? Qual é a probabilidade P que um viajante vai escolher uma destas variantes?

A: $Q = m+n,\ P = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$
B: $Q = m \cdot n,\ P = \frac{1}{m \cdot n}$
C: $Q = 0,5(m \cdot n),\ P = 0,5(\frac{1}{m} + \frac{1}{n})$
D: $Q = 2(m+n),\ P = \frac{2}{m} + \frac{2}{n}$
E: $Q = 2m \cdot n,\ P = \frac{2m \cdot n}{m+n}$

Resolução : Seja $C_1 = \{c_{1j}\},\ j = 1,\ldots,m$, o conjunto de caminhos de A para B e $C_2 = \{c_{2k}\}$, $k = 1,\ldots,n$, o conjunto de caminhos de B para C. Assim, um trajecto A-B-C é um par ordenado (c_{1j}, c_{2k}), para algum $1 \leq j \leq m$ e algum $1 \leq k \leq n$. O conjunto de todos os trajectos A-B-C é o produto cartesiano $C_1 \times C_2$ e o número de elementos deste conjunto é

$$Q = \#(C_1 \times C_2) = \#(C_1) \cdot \#(C_2) = m \cdot n.$$

A probabilidade de selecionar-se um caminho (por exemplo (c_{13}, c_{22})) é

$$P = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}} = \frac{1}{m \cdot n}.$$

A resposta certa é **B**.

- As outras alternativas não estão certas, pois, por exemplo se $m = n = 1$ temos uma única possibilidade de percorrer A-B-C. Contudo em A, $Q = 2$, em C, $Q = 0,5$ (deveria ser número inteiro), em D $Q = 4$ em E $Q = 2$.

8. O domínio da definição *Dom* da função $f(x) = \sqrt{x-1}\ln(1-x^2)$ é:

A: $Dom = \emptyset$ B: $Dom =]-1,1[$ C: $Dom = [1,\infty[$ D: $Dom = \{1\}$ E: $Dom = \mathbb{R}$

Resolução : Temos:

$$\begin{gathered} x-1 \geq 0 \wedge 1-x^2 > 0 \\ x \geq 1 \wedge x^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow (x \geq 1 \wedge (x-1)(x+1) < 0) \\ \Leftrightarrow x \geq 1 \wedge \{(x-1 > 0 \wedge x+1 < 0) \text{ ou } (x-1 < 0 \wedge x+1 > 0)\} \\ \Leftrightarrow x \geq 1 \wedge \{(x > 1 \wedge x < -1) \text{ ou } (x < 1 \wedge x > -1)\} \\ \Leftrightarrow x \in [1,\infty[\wedge \{x \in \emptyset \text{ ou } x \in]-1,1[\} \end{gathered}$$

que é impossível, ou seja $x \in \emptyset$. A resposta certa é **A.**

- As outras alternativas não estão certas, pois, por exemplo, em B, para $x = 0$, $f(0) = \sqrt{-1}\ln(1-0)$ e $\sqrt{-1}$ não existe em $\mathbb{R}$, em C, para $x = 2$, $f(2) = \sqrt{2-1}\ln(1-4)$ e $\ln(-3)$ não existe em $\mathbb{R}$, em D $x = 1$, $f(1) = \sqrt{1-1}\ln(1-1)$ e $\ln 0$ não existe em $\mathbb{R}$.

9. Usando a álgebra de proposições formalize e negue a frase "João joga xadrez e não pratica futebol, e não pratica natação". O resultado da negação desta frase é a frase seguinte:

A. João não joga xadrez ou pratica futebol ou pratica natação.
B. João não joga xadrez e pratica futebol e pratica natação.
C. João não joga xadrez e pratica futebol e não pratica natação.
D. João não joga xadrez e pratica futebol ou não pratica natação.
E. João joga xadrez e pratica futebol e pratica natação.

Resolução: Sejam p : "João joga xadrez ", q : "João pratica futebol" e r " João pratica natação ". As letras p, q e r representam duas proposições. A proposição composta, "João joga xadrez e não pratica futebol, e não pratica natação". é dada por $p \wedge \neg q \wedge \neg r$. A negação desta proposição é $\neg(p \wedge \neg \wedge q \neg r)$. Usando as leis de Morgan, teremos:

$$\neg(p \wedge \neg q \wedge \neg r) \Leftrightarrow \neg p \vee q \vee r.$$

Colocando em linguagem corrente, teremos: "João não joga xadrez ou pratica futebol ou pratica natação". A resposta certa é **A**.

10. O valor do $\lim\limits_{x \to 0^+} (1+\sin x)^{P(x)}$, onde $P(x) = \frac{2}{x}$, é igual a:

A: 2 B: 0 C: e^2 D: e E: ∞

Resolução : Temos $\lim\limits_{x \to 0^+} (1+\sin x)^{P(x)} = 1^{\infty}$ que é uma indeterminação. Usando o limite notável

$$\lim_{x \to 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

teremos:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0^+} (1+\sin x)^{\frac{2}{x}} &= \lim_{x \to 0^+} (1+\sin x)^{\frac{1}{\sin(x)} \cdot \frac{2\sin(x)}{x}} = \lim_{x \to 0^+} \left((1+\sin(x))^{\frac{1}{\sin(x)}} \right)^{\frac{2\sin x}{x}} \\
&= e^{\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{2\sin(x)}{x}} = e^2.
\end{aligned}$$

A resposta certa é **C**.

11. A solução da inequação $y_1 \geq y_2$ sendo y_1 função não negativa definida sob a forma implícita satisfazendo a expressão $x^2 + y_1^2 - 4 = 0$, $y_2(x) = x$, é o intervalo de variação da variável x seguinte:

A: $[-\infty, \infty]$ B: $[0, \infty]$ C: $[-2, 2]$ D: $[-2, \sqrt{2}]$ E: $\emptyset$

Resolução: Temos $x^2 + y_1^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow y_1^2 = 4 - x^2$, que implica $y_1 = \sqrt{4-x^2}$, pois, $y_1 \geq 0$. Tendo em conta as condições de existência de raíz quadrada, temos $y_1 \geq y_2$ se $4 - x^2 \geq 0$ e $\sqrt{4-x^2} \geq x$. Visto $\sqrt{4-x^2}$ é sempre positiva no seu domínio, então, se $x < 0$, $y_1 \geq y_2$. Assim, resta analizar quando $x \geq 0$.

$$\begin{aligned}
&\left\{ \begin{array}{c} \sqrt{4-x^2} \geq x \text{ se } x \geq 0 \\ 4 - x^2 \geq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 4 - x^2 \geq x^2 \\ x^2 - 4 \leq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 4 - 2x^2 \geq 0 \text{ se } x \geq 0 \\ x^2 - 4 \leq 0 \end{array} \right. \\
&\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2x^2 - 4 \leq 0 \text{ se } x \geq 0 \\ (x-2)(x+2) \leq 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) \leq 0 \text{ se } x \geq 0 \\ (x-2)(x+2) \leq 0 \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} ((x-\sqrt{2} \geq 0 \wedge x + \sqrt{2} \leq 0) \text{ ou } (x - \sqrt{2} \leq 0 \wedge x + 2 \geq 0)) \text{ se } x \geq 0 \\ (x - 2 \geq 0 \wedge x + 2 \leq 0) \text{ ou } (x - 2 \leq 0 \wedge x + 2 \geq 0) \end{array} \right.
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ((x \geq \sqrt{2} \wedge x \leq -\sqrt{2}) \text{ ou } (x \leq \sqrt{2} \wedge x \geq -\sqrt{2})) \text{ se } x \geq 0 \\ (x \geq 2 \wedge x \leq -2) \text{ ou } (x \leq 2 \wedge x \geq -2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x \in \emptyset \text{ ou } x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]) \text{ se } x \geq 0 \\ (x \in \emptyset) \text{ ou } (x \in [-2, 2]) \end{cases} \Longrightarrow x \in [0, \sqrt{2}].$$

Tendo em conta que o domínio de $\sqrt{4-x^2}$ é $[-2;2]$ e que $\sqrt{4-x^2} \geq x$ quando $x < 0$, então, intersectando estas condições, temos $\sqrt{4-x^2} \geq x$ quando $x \in [-2, 0[$. Assim, juntando com o caso $x \geq 0$, temos:

$$\sqrt{4-x^2} \geq x \text{ se e somente se } x \in [-2, \sqrt{2}].$$

A resposta certa é **D**.

- Pode-se resolver graficamente, esboçando os gráficos de y_1, y_2 e resolver $y_1 \geq y_2$.

12. A lei de desintegração da massa m do Rádio em função do tempo é $m = m_0 e^{-kt}$, onde m_0 é a massa inicial, k ($k > 0$) é o coeficiente de proporcionalidade, t é o tempo em anos. Qual o período T de desintegração do rádio, isto é o período de tempo t, durante o qual se desintegra metade da massa inicial do Rádio?

A: $T = \frac{k}{\ln 2}$ B: $T = k\ln 2$ C: $T = \frac{\ln 2}{T}$ D: $T = -\frac{\ln 2}{k}$ E: $T = 2\ln k$

Resolução : Vamos procurar t que corresponde a $m = \frac{m_0}{2}$. Temos:

$$\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-kt} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = e^{-kt} \Leftrightarrow 2 = e^{kt} \Leftrightarrow \ln 2 = \ln e^{kt} \Leftrightarrow \ln 2 = kt \Leftrightarrow t = \frac{\ln 2}{k}.$$

Desta forma, $T = \frac{\ln 2}{k}$. A resposta certa é **C**.

13. Quais são o período T e o contradomínio C_f da função $y = (\sin x - \cos x)^2$?

A: $T = 2\pi$, $C_f = [-1, 0]$ B: $T = \pi$, $C_f = [-1, 1]$ C: $T = 2\pi$, $C_f = [0, 1]$
D: $T = \pi$, $C_f = [0, 2]$ E: $T = \pi$, $C_f = [-2, 0]$

Resolução : Temos:

$$y = (\sin x - \cos x)^2 = \sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x = 1 - \sin(2x).$$

Assim, para qualquer $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x+T) = f(x) \Rightarrow 1 - \sin(2(x+T)) = 1 - \sin(2x)$$
$$\Rightarrow \sin(2x + 2T) = \sin(2x).$$

Visto que a função $\sin(\cdot)$ tem período 2π, teremos $2T = 2\pi$. Desta forma, a função $y = 1 - \sin(2x)$ tem período $T = \pi$.

Para determinarmos o contradomínio, tomamos em consideração que $-1 \leq \sin(2x) \leq 1$. Assim, adicionando 1 em ambos os membros, obtemos:

$$0 \leq 1 - \sin(2x) \leq 2, \ \forall x.$$

Desta forma, o contradomínio é $C_f = [0, 2]$. A resposta certa é **D**.

- As alternativas A, B e E não estão certas, pois, entre outros motivos, o contradomínio de y contém apenas números não negativos (o quadrado de um número real é sempre não negativo). A alternativa C não está certa, pois, por exemplo, para $x = -\pi/4$, $y = 2$ mas este valor não consta do contradomínio.

14. Em que domínio D_f de variação do argumento x a função $f(x) = x^2$ admite a sua inversa $f^{-1}(x)$ tal que os gráficos destas funções intersectam-se em dois pontos?

A: $D_f : x \in]-\infty, 0]$ B: $D_f : x \in \mathbb{R}$ C: $D_f : x \in [0, \infty[$
D: $D_f : x \in]-1, 0]$ E: $\emptyset$

Resolução : A função $f(x) = x^2$ é injectiva nos domínios $]-\infty, 0]$ e $[0, \infty[$. Portanto, $f(x) = x^2$ é inversível nestes intervalos. As inversas são, $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$ e $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, respectivamente. Intersectando cada uma das inversas com $f(x) = x^2$, temos:

$$x^2 = -\sqrt{x},\ x \geq 0 \Rightarrow x = 0$$
$$x^2 = \sqrt{x},\ x \geq 0 \Rightarrow x^4 = x^2,\ x \geq 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 1) = 0,\ x \geq 0$$
$$x = 0 \vee x = 1.$$

Assim, o domínio D_f de variação do argumento x a função $f(x) = x^2$ admite a sua inversa $f^{-1}(x)$ tal que os gráficos destas funções intersectam-se em dois pontos é $x \in [0, \infty[$. A resposta certa é **C**.

- As alternativas A e D não estão certas, pois, a inversa de $f(x)$ nestes conjuntos toma valores negativos, dai que intersecta $f(x) = x^2$ num único ponto $(x = 0)$. A alternativa B não está certa, pois, a função $f(x)$ não é inversível em $\mathbb{R}$, pois, ela não é injectiva.

15. Calcule $\lim\limits_{x \to A} \log_2^{\frac{\sin(x^2)}{x^2}}$, sendo $A = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

A: $\frac{\pi}{2}$ B: $\frac{2}{\pi}$ C: $1 - \log_2^{\pi}$ D: $1 + \log_2^{\pi}$ E: 0

Resolução : Temos:

$$\lim_{x \to A} \log_2^{\frac{\sin(x^2)}{x^2}} = \log_2^{\frac{\sin(A^2)}{A^2}} = \log_2^{\frac{\sin(\pi/2)}{\pi/2}} = \log_2^{\frac{2}{\pi}} = \log_2^2 - \log_2^{\pi} = 1 - \log_2^{\pi}.$$

A resposta certa é **C**.

- Note que o limite quando existe é único.

16. Qual é o valor da função $A = f(2)$ para que seja contínua a função $f(x)$ definida de modo seguinte:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & \text{quando } x \neq 2 \\ A, & \text{quando } x = 2. \end{cases}$$

A: 4 B: 0 C: 2 D: -2 E: $\emptyset$

Resolução : A condição de condinuidade no ponto x_0 é:

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x).$$

Analizemos esta condição nos pontos que suscitam dúvida. Para $x = 2$, temos

$$f(2) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2} f(x)$$
$$A = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} (x + 2) = 4.$$

A resposta certa é **A**.

17. Em que intervalo fica(m) o(s) zero(s) da função $f(z) = 2^T - z - 6$, sendo $T = 2\log_2^z$?

A: $[0, 3[$ B: $[1, 4]$ C: $]-2, 0]$ D: $[-2, 3[$ E: $\emptyset$

Resolução : Tendo em conta o domínio da função $\log_2^z$, $z > 0$, temos:

$$f(z) = 0 \Leftrightarrow 2^{2\log_2^z} - z - 6 = 0 \Leftrightarrow 2^{\log_2^{z^2}} - z - 6 = 0 \;\Leftrightarrow z^2 - z - 6 = 0 \Leftrightarrow (z-3)(z+2) = 0$$
$$\Rightarrow z - 3 = 0 \vee z + 2 = 0 \Rightarrow z = 3 \vee z = -2.$$

Tendo em conta que $z > 0$, $f(z) = 0$ se e somente se $z = 3$. A resposta certa é **B**.

18. Para que valores do parâmetro λ a equação $4^x - 2^{x+1} + \lambda = 0$ tem raizes reais?

A: $\lambda \in [2, 3[$ B: $\lambda \in]1, \infty[$ C: $\lambda = 2$ D: $\lambda \in]-\infty, 1]$ E: $\lambda \in [4, \infty[$

Resolução : Temos:

$$4^x - 2^{x+1} + \lambda = 0 \Leftrightarrow 2^{2x} - 2^x \cdot 2 + \lambda = 0 \Leftrightarrow (2^x)^2 - 2 \cdot 2^x + \lambda = 0.$$

Fazendo $t = 2^x$, teremos $t^2 - 2t + \lambda = 0$ que tem raizes reais quando $4 - 4\lambda \geq 0$. Assim,

$$t_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4\lambda}}{2} = 1 \pm \sqrt{1 - \lambda}.$$

Dest forma, $2^x = t$ tem soluções reais se $t > 0$, ou seja, $1 \pm \sqrt{1 - \lambda} > 0$ e $1 - \lambda \geq 0$. Temos:

$$(1 + \sqrt{1 - \lambda} > 0 \wedge 1 - \lambda \geq 0) \text{ ou } (1 - \sqrt{1 - \lambda} > 0 \wedge 1 - \lambda \geq 0)$$
$$(1 + \sqrt{1 - \lambda} > 0 \wedge -\lambda \geq -1)\text{ou}(-\sqrt{1 - \lambda} > -1 \wedge -\lambda \geq -1)$$
$$(1 + \sqrt{1 - \lambda} > 0 \wedge \lambda \leq 1) \text{ ou } (\sqrt{1 - \lambda} < 1 \wedge \lambda \leq 1)$$
$$(\lambda \leq 1) \text{ ou } (1 - \lambda < 1 \wedge \lambda \leq 1)$$
$$\lambda \leq 1 \text{ ou } (\lambda > 0 \wedge \lambda \leq 1)$$
$$\Longrightarrow \lambda \leq 1.$$

A resposta certa é **D**.

- Note que as outras alternativas leva a raizas não reiais.

19. Resolvendo a equação $\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}) = 1$ a resposta, sendo $k \in \mathbb{Z}$ é:

A: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ B: $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ C: $x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$
D: $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ E: $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$

Resolução : Temos:

$$\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}) = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + k\pi \;\Leftrightarrow \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{12} + k\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi.$$

A resposta certa é **E**.

- Note que as outras alternativas não satsfazem a equação .

20. A solução da inequação $|x| - x \leq 2$ é:

A: $x \in [-1, \infty[$ B: $x \in [-6, -4[$ C: $x \in [-4, -2[$
D: $x \in]-\infty, -1[$ E: $\emptyset$

Resolução : Usando a definição de módulo e sintectizando numa tabela, teremos:

x	$]-\infty,0[$	$[0,\infty[$
$\lvert x\rvert$	$-x$	x
$-x$	$-x$	$-x$
Soma	$-2x$	0

Assim,

$$|x|-x\leq 2 \Leftrightarrow \{(-2x\leq 2,\ \text{ se } x<0) \text{ ou } (0\leq 2,\ \text{ se } x\geq 0)\}$$
$$|x|-x\leq 2 \Leftrightarrow \{(x\geq -1,\ \text{ se } x<0) \text{ ou } (x\geq 0)\}$$
$$|x|-x\leq 2 \Leftrightarrow \{-1\leq x<0 \text{ ou } x\geq 0\}$$

A resposta certa é **A**.

- As outras alternativas não estão certas, pois, ou incluem valores que não satisfazem a inequação ou excluem valores que atisfazem a inequação. Por exemplo, em B, tomando $x=-5$ e substituirmos na inequação, obtemos $10\leq 2$.

21. Resolvendo a inequação $\sqrt{2-x}<\sqrt{x-4}$ a resposta é:

A: $x\in]2,4[$ B: $x\in[2,4]$ C: $x\in[3,\infty]$ D: $x\in[0,4]$ E: $\emptyset$

Resolução : Usando domínio de existência de raiz quadrada, temos:

$$2-x\geq 0\wedge x-4\geq 0\wedge\sqrt{2-x}<\sqrt{x-4}$$
$$\Leftrightarrow -x\geq -2\wedge x\geq 4\wedge 2-x<x-4\ \Rightarrow x\leq 2\wedge x\geq 4\wedge -2x<-6$$
$$\Rightarrow x\leq 2\wedge x\geq 4\wedge x>3\ \Leftrightarrow x\in\emptyset.$$

A resposta certa é **E**.

- As outras alternativas não estão certas, pois, ou não satisfazem a inequação. Por exemplo, em B, tomando $x=2$ e substituirmos na inequação, obtemos $0<\sqrt{-2}$ que não tem sentdo em $\mathbb{R}$.

22. Sejam os gráficos das funções $f_1(t)=\log^t_{\frac{1}{2}}$ e $f_1(t)=\log^t_2$. Para que valores de argumento t será $f_1(t)\geq f_2(t)$?

A: $t\in]0,\infty[$ B: $t\in]1,\infty[$ C: $t\in]-\infty,1[$ D: $t\in]0,1]$ E: $\emptyset$

Resolução : Temos:

$$f_1(t)\geq f_2(t)\Leftrightarrow \log^t_{\frac{1}{2}}\geq\log^t_2 \Longrightarrow \frac{\log^t_2}{\log^{\frac{1}{2}}_2}\geq\log^t_2\Rightarrow -\log^t_2\geq\log^t_2,\ t>0\ \Rightarrow -2\log^t_2\geq 0\Rightarrow\log^t_2\leq 0$$
$$\log^t_2\leq\log^1_2,\ t>0\Rightarrow t\leq 1\wedge t>0\ \Rightarrow 0<t\leq 1.$$

A resposta certa é **D**.

23. Para que o produto da matriz $A=\begin{pmatrix}-1&1\\0&2\end{pmatrix}$ por vector $\begin{pmatrix}x\\y+1\end{pmatrix}$ seja igual ao vector $\begin{pmatrix}y\\2\end{pmatrix}$ os números x e y devem ser iguais aos valores?

A: 4 e 0 B: 1 e 0 C: 0 e 4 D: 2 e 2 E: 3 e 1

Resolução : Temos:

$$\begin{pmatrix}-1&1\\0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}-x+y+1\\2y+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x+y+1=y \\ 2y+2=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0. \end{cases}$$

A resposta certa é **B**.

24. Considere o sistema linear $\begin{cases} \beta x+2y=\beta+4 \\ 2x+\beta y=-2. \end{cases}$ Segundo o parâmetro β a afirmação é verdadeira:

A: se $\beta=2$ o sistema tem uma e única solução
B: se $\beta=-2$ o sistema tem mais do que uma solução
C: se $\beta\neq 2$ e $\beta\neq -2$ o sistema tem mais do que uma solução
D: se $\beta=-2$ o sistema não tem solução
E: Nenhuma das alternativas anteriores.

Resolução : Aplicando o método de Cramer, temos:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \beta & 2 \\ 2 & \beta \end{vmatrix} = \beta^2-4.$$

Se $\Delta\neq 0$, ou seja, $\beta\neq -2$ e $\beta\neq 2$, o sistema tem uma e única solução .

- se $\beta=2$, obtemos

$$\begin{cases} 2x+2y=6 \\ 2x+2y=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x-2y=-6 \\ 2x+2y=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0=-8 \\ 2x+2y=-2 \end{cases}$$

o que é impossível, ou seja, o sistema não tem solução.

- se $\beta=-2$, obtemos

$$\begin{cases} -2x+2y=2 \\ 2x-2y=-2 \end{cases} \Rightarrow \{\ 2x-2y=-2$$

o que significa que o sistema tem mais do que uma solução. A resposta certa é **B**.

25. A solução da inequação $\frac{(x+2)(x-1)}{x-3}\geq 0$ é o intervalo:

A: $\emptyset$ B: $]-\infty,-2]$ C: $[1,3[$ D: $[-2,1]\cup[3,\infty[$ E: $]-\infty,-2[\cup[1,3[$

Resolução : Temos:

x	$]-\infty,-2[$	-2	$]-2,1[$	1	$]1,3[$	3	$]3,\infty[$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
Produto	$-$	0	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$

Assim, $\frac{(x+2)(x-1)}{x-3}\geq 0 \Leftrightarrow [-2;1]\cup]3,\infty[$. A resposta certa é **D**.

- As outras alternativas não estão certas, pois, ou não incluem todos valores do conjunto solução ou incluem valores que não fazem parte da solução. Por exemplo, em C, tomando $x=2$ e substituirmos na inequação, obtemos $-4\geq 0$.

26. As assintotas verticais A_V, horizontais A_H, oblíqua A_O da função $f(x)=e^T$, $T=\frac{1}{x}$ são:

A: $A_V: x=1, A_H: y=e, A_O: y=x+1$
B: $A_V: x=0, A_H: y=1, A_O:$ não existe

C: $A_V: x=0, A_H: y=0, A_O:$ não existe
D: $A_V: x=1, A_H: y=1, A_O: y=x$
E: A função não tem assímptotas.

Resolução : Temos:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

logo, a recta $y=0$ é assímptota horizontal. Assímptota oblíqua é a recta $= mx+b$, onde

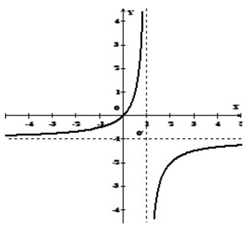
$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

Assim, não existe assímptota oblíqua. Mais, $x=0$ não pertenção domínio de $f(x)$ e

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

A resposta certa é **C**.

27. A curva, cujo gráfico está apresentado na figura, tem a equação:



A: $y=\frac{2-x}{x-1}$ B: $y=\frac{-x}{x+1}$ C: $y=\frac{x+2}{x+1}$ D: $y=\frac{x}{1-x}$ E: $y=\frac{2-x}{1-x}$

Resolução : O gráfico é uma função do tipo, $y=f(x)=\frac{Ax+B}{Cx+D}$, $C\neq 0$. Do gráfico, vemos que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-1$. Então, $\frac{A}{C}=-1$. De outro lado, do gráfico $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-\infty$, então, a recta $x=1$ é assímptota vertical. Assim, $-\frac{D}{C}=1$. Logo,

$$y=f(x)=\frac{Ax+B}{Cx+D}=\frac{-Cx+B}{Cx-C}=\frac{-x+\frac{B}{C}}{x-1}$$

Do gráfico, vemos que o zero da função é zero, então $\frac{B}{C}=0$. A única expressão que satisfaz as condições descritas é $y=-\frac{x}{x-1}$, ou seja, a alternativa **D**.

- As outras alternativas estão erradas pois, ou pelo menos uma das assímptotas ou o zero da função não corresponde às do gráfico apresentado .

28. As rectas no plano cartesiano $y=\frac{1}{2}x+5$ e $y=kx-b$ são perpendiculares quando:

A: $k=2,\ b=5$ B: $k=2,\ b=-5$ C: $k=-2,\ b\in\mathbb{R}$
D: $k=1,\ b\in\mathbb{R}$ E: $k=-0,5,\ b\in\mathbb{R}$

Resolução : Os declives das rectas são $a_1=\frac{1}{2}$ e $a_2=k$, respectivamente. Usando a condição de perpendicularidade de rectas no plano, teremos:

$$a_1\cdot a_2=-1 \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot k=-1 \Rightarrow k=-2.$$

A resposta certa é **D**.

- As outras alternativas estão erradas pois, esboçando os gráficos não teremos rectas perpendiulares.

29. As abcissas dos pontos da inflexão do gráfico da função $f(x) = x^4\left(\frac{x}{20} - \frac{1}{6}\right)$ são:

A: $x = 0$ B: $x = 2$ C: $x = 1,\ x = \frac{10}{3}$ D: $x = 0$ e $x = \frac{10}{3}$ E: Não existem

Resolução : Temos:

$$f(x) = f(x) = x^4\left(\frac{x}{20} - \frac{1}{6}\right) = f(x) = \frac{x^5}{20} - \frac{x^4}{6} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3}$$
$$\Rightarrow f''(x) = x^3 - 2x^2 \Rightarrow f''(x) = 0 \ \Rightarrow x^3 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 2.$$

Verifiquemos as condições suficientes para que $x = 0,\ x = 2$ sejam pontos de inflexão. Temos:

$$f'''(x) = 3x^2 - 2x \Rightarrow f'''(0) = 0 \ \Rightarrow f'''(2) = 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 \Rightarrow f'''(2) = 8.$$

Desta forma, o ponto de inflexão é $x = 2$. A resposta certa é **B**.

30. Simplificando a expressão $\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$ obtém-se:

A: 1 B: $\tan\alpha$ C: -1 D: $\sin(2\alpha)$ E: $\cos(2\alpha)$

Resolução : Temos:

$$\frac{1 - \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{1 + \tan^2\alpha} = \frac{1 - \tan^2\alpha}{1 + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{\frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = \frac{\cos(2\alpha)}{1} = \cos(2\alpha).$$

A resposta certa é **E**.

31. Os estremos (máximo ou/e mínimo) locais da função $f(x) = 3x^4 - 4x^3$ são:

A: $f_{\text{máx.}} = 1,\ f_{\text{min.}} = 0$ B: $f_{\text{min.}} = -1$ C: $f_{\text{máx.}} = 2, f_{\text{min.}} = 1$
D: $f_{\text{máx.}} = 1$ E: Não há extremos

Resolução : Determinemos os pontos críticos. Temos:

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 12x^3 - 12x^2 = 0$$
$$\Rightarrow 12x^2(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 1.$$

Estudando o sinal da derivada, teremos:

x	$]-\infty, 0[$	0	$]0, 1[$	1	$]1, \infty[$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$

Desta forma, $f_{\text{min}} = -1$. A resposta certa é **B**.

32. As rectas tangentes ao gráfico da curva definida pela equação $f(x) = \frac{x-4}{x-2}$ nos pontos de intersecção deste gráfico com os eixos coordenados caracterizam-se como:

A. Intersectadas uma com outra na origem do sistema de coordenadas.
B. Perpendiculares uma em relação a outra.
C. Paralelas e horizontais.
D: Paralelas e verticais.
E. Paralelas.

Resolução : Os pontos de intersecção do gráfico de $f(x)$ com os eixos coordenada são os que tem ordenada $y=0$ e abcissa $x=0$, respectivamenete. Temos A$(4,0)$ e $B(0,2)$. A recta tangente que passa pelo ponto (x_0,y_0) ao gráfico de $f(x)$ tem a forma $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$. Para o ponto $A(4,0)$, temos:

$$f(x)=\frac{x-4}{x-2}=\frac{x-2-2}{x-2}=\frac{x-2}{x-2}+\frac{-2}{x-2}=1-\frac{2}{x-2}$$
$$\Rightarrow f'(x)=\frac{2}{(x-2)^2}\Rightarrow f'(4)=\frac{1}{2}\Rightarrow y-0=\frac{1}{2}(x-4)\Rightarrow y=\frac{1}{2}x-2.$$

Para o ponto $B(0,2)$, temos:

$$f'(x)=\frac{2}{(x-2)^2}\Rightarrow f'(0)=\frac{1}{2}\Rightarrow y-2=\frac{1}{2}x\Rightarrow y=\frac{1}{2}x+2.$$

Visto que o declive destas rectas é igual, as rectas são paralelas e ambas são oblíquas. A resposta certa é **E**.

33. Um ponto material move-se pelo eixo recto segundo a lei $R(t)=-\frac{t^3}{6}+3t^2-5$ ($t-$ segundos, $R-$metros). A velocidade de movimento $v(t)$ em (m/s) e o instante de tempo T em (s) quando aceleração de movimento é nula são:

A: $v(6)=18,\ T=6$ B: $v(5)=16,\ T=5$ C: $v(4)=12,\ T=4$
D: $v(3)=9,\ T=3$ E: $v(1)=3,\ T=1$

Resolução : Temos:

$$v(t)=R'(t)=-\frac{t^2}{2}+6t,\ a(t)=v'(t)=R''(t)=-t+6,\ a(t)=0$$
$$\Rightarrow -t+6=0\Rightarrow t=6s,\ v(6)=R'(6)=-\frac{6^2}{2}+6\cdot 6=18.$$

A resposta certa é **A**.

34. Um ponto material é deslocado do ponto inicial $A(2,1)$ de um sistema de coordenadas cartesianas segundo o vector $\vec{a}=\frac{1}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$ numa distância igual à $4|\vec{a}|$. Então o ponto da sua nova posição é:

A: $(4,2\sqrt{3}+1)$ B: $(2,2\sqrt{3})$ C: $(6,4)$ D: $(4,2)$ E: $(-4,2)$

Resolução : Seja $P(x,y)$ a nova posição do ponto material. Assim, o vector $\vec{AP}=(x-2,y-1)$ é paralelo ao vector $\vec{a}$. Temos:

$$\vec{AP}=k\vec{a}\Rightarrow(x-2,y-1)=k(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})\Rightarrow x-2=\frac{k}{2}\Rightarrow y-1=\frac{k\sqrt{3}}{2}.$$

Assim,

$$|\vec{AP}|=4|\vec{a}|\Rightarrow\sqrt{k^2(\frac{1}{4}+\frac{3}{4})}=4\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}\Rightarrow|k|=4.$$

Tomamos $k=4$ pois P situa-se mais à direita de A segundo a direcção e sentido do vector $\vec{a}$. Assim,

$$x=2+\frac{k}{2}=4,\ y=1+\frac{k\sqrt{3}}{2}=1+2\sqrt{3}.$$

Desta forma, a nova posição do ponto material é $P(4,1+2\sqrt{3})$. A resposta certa é **A**.

35. O limite da expressão $\frac{\tan(-3x)}{\sin(5x)}$ quando $x \to 0$ é o valor (ou não existe):

A: 0 B: $0,6$ C: -1 D: $-0,6$ E: Não existe

Resolução : Temos:

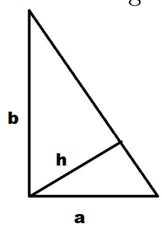
$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(-3x)}{\sin(5x)} = \frac{0}{0} \text{ indeterminação }.$$

Usando o limite notável $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, teremos:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\tan(-3x)}{\sin(5x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(-3x)}{\cos(-3x)\sin(5x)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(-3x)5x\sin(-3x)}{(5x)(-3x)\cos(-3x)\sin(5x)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(-3x)}{(-3x)\cos(-3x)(5x)}\cdot\frac{(-3x)5x}{\sin(5x)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{5x\cos(-3x)}\cdot\frac{-3x}{1} = -\frac{3}{5}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(-3x)} = -0,6.
\end{aligned}$$

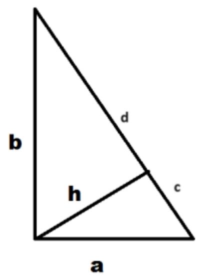
A resposta certa é **D**.

36. Qual é a medida da altura h no triângulo rectangular de catetos a e b, se $b = a\sqrt{3}$?



A: $a\sqrt{3}$ B: $\frac{a}{\sqrt{3}}$ C: $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ D: $\frac{3a^2}{2}$ E: $\frac{a^2}{3}$

Resolução : Consideremos os catetos c e d, como mostra a figura



Assim, usando teorema de Pitágoras para os três triângulos rectângulos, temos:

$$\begin{cases}(d+c)^2 = a^2+b^2\\ a^2 = h^2+c^2\\ b^2 = h^2+d^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(d+c)^2 = a^2+3a^2\\ a^2-b^2 = c^2-d^2\\ a^2 = h^2+c^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}d+c = 2a\\ a^2-3a^2 = (2a-d)^2-d^2\\ a^2 = h^2+c^2\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}c = 2a-d\\ -2a^2 = 4a^2-4ad\\ a^2 = h^2+c^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}c = 2a-d = \frac{a}{2}\\ d = \frac{3a}{2}\\ a^2 = h^2+c^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}c = \frac{a}{2}\\ d = \frac{3a}{2}\\ h = \sqrt{a^2-c^2} = \frac{\sqrt{3}a}{2}.\end{cases}$$

A resposta certa é **C**.

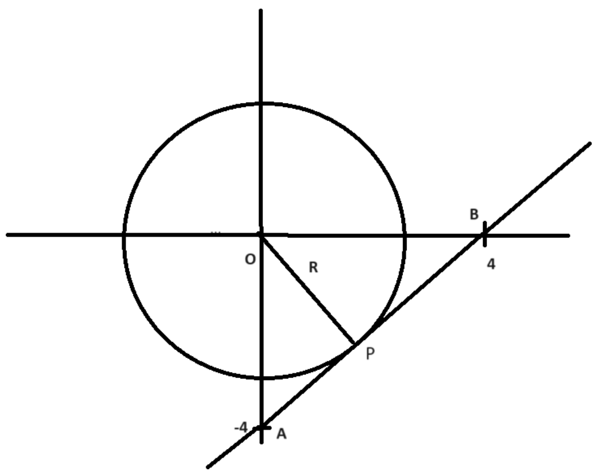
37. Seja a recta $y = x - 4$ tangente a uma circunferência centrada na origem de um sistema de coordenadas cartesianas. Então a sua equação $\rho = \rho(\theta)$ num sistema polar conjugado ao sistema cartesiano dado (isto é quando $x = \rho\cos(\theta),\ y = \rho\sin(\theta),\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$) será:

A: $\rho = 2\sqrt{2}$ B: $\rho = 2\pi\sqrt{2}$ C: $\rho = \pi\sqrt{2}$ D: $\rho = 2\pi$ E: $\rho = \pi^2$

Resolução : A equação a circunfência é $x^2 + y^2 = R^2$, onde $R > 0$ é o raio. Assim, em coordenadas polares, teremos:

$$x^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow (\rho\cos\theta)^2 + (\rho\cos\theta)^2 = \rho^2$$
$$\Rightarrow \rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin\theta^2 = R^2 \Rightarrow \rho^2 = R^2 \Rightarrow \rho = R.$$

Vamos determinar R. Esboçando a figura, vemos o possível caso em que a recta $y = x - 4$ seja tangente à uma circunferência comcntro na origem.



Determinemos as coordenadas do ponto de tangência. Tendo em conta o gráfico, temos:

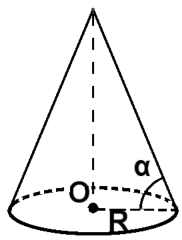
$$x^2 + y^2 = R^2,\ R > 0, y < 0,\ y = -\sqrt{R^2 - x^2},\ y' = \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}} = 1.$$
$$\Rightarrow x^2 = R^2 - x^2 \Rightarrow x = \frac{R}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = -\sqrt{R^2 - \frac{R^2}{2}} = -\frac{R}{\sqrt{2}}.$$

Assim, o ponto de tangência é $P(\frac{R}{\sqrt{2}}, -\frac{R}{\sqrt{2}})$. O segmento OP pertence à recta $y = -x$, logo, divide o triângulo isósceles AOB em dois triângulos iguais e rectângulos. Visto o triângulo AOB é rectângulo e isósceles, o ângulo $PAO = 45°$. Logo,

$$\sin(\angle PAO) = \frac{|OP|}{|OA|} \Rightarrow \sin(45°) = \frac{R}{4} \Rightarrow R = 4\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}.$$

Assim, a equação da circunferência em coordenadas polares é $\rho = 2\sqrt{2}$. A resposta certa é **A**.

39. Seja o raio de base dum cone circular é igual a R, a geratriz faz um ângulo $\alpha = 60°$ com a base. Seja o ângulo α diminuido por $15°$. Em quantas vezes diminuirá o volume V do cone.



A: $6\sqrt{3}$ vezes B: $4\sqrt{3}$ vezes C: $2\sqrt{3}$ vezes D: $\sqrt{3}$ vezes E: $0,5\sqrt{3}$ vezes

Resolução : O volume do cone é $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$, h altura. Quando α diminui $15°$, $\alpha = 45°$, teremos $\frac{h_f}{R} = \tan(45°)$ ou seja $h_f = R$. Assim, quando $\alpha = 60°$, teremos $h_0 = R\tan(60°)$. Desta forma,

$$\frac{V_f}{V_0} = \frac{1/3\pi R^2 \cdot R\tan(45°)}{1/3\pi R^2 \cdot R\tan(60°)} = \frac{1}{\tan(60°)} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Assim $V_f = \frac{1}{\sqrt{3}} V_0$. Logo, V_0 diminui $\sqrt{3}$ vezes. A resposta certa é **D**.

40 A primitiva $F(x)$ da função $f(x) = \sin(3x)$, sendo c uma constante arbitrária é:

A: $F(x) = -\cos(3x) + c$
B: $F(x) = \frac{1}{3}\cos(3x) + c$
C: $F(x) = 3\cos(3x) + c$
D: $F(x) = -\frac{1}{3}\cos(3x) + c$
E: $F(x) = 3\cos(3x) + c$

Rsolução : Temos:

$$F(x) = \int f'(x)dx = \int \sin(3x)dx = -\frac{1}{3}\cos(3x) + c,$$

onde c é uma constante arbitrária. A resposta é **D**.