Exame de Matemática I de 2022

Correcção do exame de Matemática I de 2022

1. O valor de $|-\sqrt{5}+2|$ corresponde a seguinte opção:

   A: $\sqrt{5}+2$ B: $\sqrt{7}$ C: $2/5$ D: $\sqrt{5}-2$ E: $|\sqrt{5}|+|2|$

   Resolução: Temos: $\sqrt{5} > 2$, então $-\sqrt{5}+2 < 0$. Utilizando a definição de módulo, $|-\sqrt{5}+2| = -(-\sqrt{5}+2) = \sqrt{5}-2$. A resposta certa é **D**.

2. Qual é a solução da equação $\left|\frac{4}{x-1}\right| = 2$?

   A: -4 B: 2 C: 3 e -5 D: -1 e 3 E: 4

   Resolução : Temos:

$$\left|\frac{4}{x-1}\right| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{x-1} = 2, & \text{se } x-1 \geq 0 \\ -\frac{4}{x-1} = 2, & \text{se } x-1 < 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 4 = 2(x-1), & \text{se } x \geq 1 \\ -4 = 2(x-1), & \text{se } x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3, & \text{se } x \geq -2 \\ x = -1, & \text{se } x < -2. \end{cases}$$

   A resposta certa é **D**.

   - Note que as restantes alternativas não satisfazem a equação .

3. Qual é o conjunto que representa a solução de $|x-2| \geq 3$?

   A: $x \leq -1 \vee x \geq 5$ B: $x = 5$ C: $x \leq -5 \vee x \geq 1$
   D: $-5 \leq x \leq 5$ E: $-1 \leq x \leq 5$

   Resolução : Temos:

$$|x-2| \geq 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \geq 3, & \text{se } x-2 \geq 0 \\ -(x-2) \geq 3, & \text{se } x-2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 5, & \text{se } x \geq 2 \\ x-2 \leq -3, & \text{se } x < 2 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq 5, & \text{se } x-2 \geq 0 \\ x \leq -1, & \text{se } x < 2 \end{cases} \Rightarrow x \geq 5 \vee x \leq -1.$$

   A resposta certa é **A**.

4. Tendo em conta a relação $-|x| < x$ é correcto afirmar que:

   A. $\mathbb{R}$ B. $x = 0$ C. $x < 0$ D. $x > 0$ E. $\emptyset$

Resolução : Tendo em conta definição de módulo,

$$-|x| < x \Leftrightarrow \begin{cases} -x < x, & \text{se } x > 0 \\ -(-x) < x, & \text{se } x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x < 0, & \text{se } x > 0 \\ x < x, & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > 0, & \text{se } x > 0 \\ 0 < 0(\text{ impossível }), & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

A resposta certa é **D**.

- Note que as outras alternativas ou contém números que não fazem parte da solução ou não contém números que fazem parte da olução . Por exemplo, $x = -1$, $x = 0$ não satisfazem a inequação.

5. Qual é o conjunto de soluções da inequação $|x|^2 - 4|x| + 3 \leq 0$?

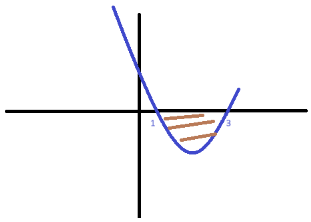
A: $\{1, 3\}$ B: $[-3, -1] \cup [1, 3]$ C: $[1, 3]$
D: $]-\infty, -1[\cup]3, \infty[$ E: $[-1, 3]$

Resolução : Temos:

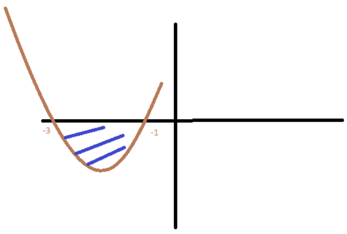
$$|x|^2 - 4|x| + 3 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - 4|x| + 3 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 \leq 0, & \text{se } x \geq 0 \\ x^2 + 4x + 3 \leq 0, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x-1)(x-3) \leq 0, & \text{se } x \geq 0 \\ (x+1)(x+3) \leq 0, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Resolvendo graficamente, temos para $x \geq 0$:



Para $x < 0$, temos:



Assim, a solução é $[-3, -1] \cup [1, 3]$.

- Note que as outras alternativas ou contém números que não fazem parte da solução ou não contém números que fazem parte da solução . Por exemplo, $x = 0$, $x = 4$ não satisfazem a inequação, e $x = -3$ satisfaz a inequação mas não percence aos conjuntos das alternativas A e C.

6. Um jogador utiliza um dado não equilibrado com as faces numeradas de 1 a 6. A probabilidade de obter 4 das faces é dada pela tabela abaixo. Qual é a probabilidade de obter um número par?

Número	1	2	3	4	5	6
Probabilidade	0,1	?	0,1	0,15	0,15	?

A: 1 B: $3/10$ C: $0,35$ D: $1/2$ E: $0,65$

Resolução : Seja E o evento "saida de número par". Temos:

$$P(E) = 1 - P(E^c) = 1 - (P(E1) + P(E3) + P(E5)) = 1 - (0,1 + 0,1 + 0,15) = 1 - 0,35 = 0,65.$$

A resposta certa é **E**.

7. A Inocência selecciona aleatoriamente uma variante de um trabalho individual a partir de 40 variantes diferentes, numeradas de 1 a 40. Qual é a probabilidade do número da variante da Inocência ser ímpar e menor que 12?

A: $1/8$ B: $11/40$ C: $3/20$ D: $1/4$ E: $3/10$

Resolução : Seja E o evento "saida do número ímpar e menor que 12". Tendo em conta que os números ímpares e menores que 12 são 1,3,5,7,9 e 11, teremos:

$$P(E) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}} = \frac{6}{40} = 3/20.$$

A resposta certa é **C**.

8. Quantos jogos m de um campeonato de xadrez devem ser realizados num torneio com 20 pessoas e qual é a probabilidade p de uma pessoa ser a vencedora dessa prova?

A: $m = 10,\ p = 1/10$ B: $m = 190,\ p = 1/20$ C: $m = 400,\ p = 1/40$
D: $m = 200,\ p = 1/20$ E: $m = 120,\ p = 1/40$

Resolução : Assumindo que o campeonato é todos contra todos, no final vence o que tiver a melhor classificação e que todos participantes tem igual chance de ganhar, teremos:

$$m = C_2^{20} = \frac{20!}{2! \cdot (20-2)!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18!}{2 \cdot 18!} = 190$$

$$p = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}} = \frac{1}{20}.$$

A resposta certa é **B**.

9. Os 18 participantes de uma festa são divididos em 2 grupos de 11 e 7 pessoas. O número de modos desta divisão é:

A: $\frac{18!}{11!\cdot 7!}$ B: $\frac{18!}{11!} + \frac{18!}{7!}$ C: $\frac{18!18!}{7!\cdot 11!}$ D: $11!7!2!$ E: $\frac{18!}{11!} \cdot 7$

Resolução : Para o número de grupos de 11 pessoas e 7 pessoas num total de 18 pessoas fazemos:

$$C_{11}^{18} \cdot C_7^7,$$

pois, depois de agruparmos 11 pesssoas das 18, restam 7 pessoas que devemos também agrupá-las em 7 elementos. Obtemos:

$$C_{11}^{18} \cdot C_7^7 = \frac{18!}{11!(18-11)!} \cdot \frac{7!}{7!(7-7)!} = \frac{18!}{11!7!}.$$

A resposta certa é **A**.

- Note que uma possibilidade de obter $\frac{18!}{\cdot 7!} + \frac{18!}{\cdot 7!}$ é $A_{11}^{18} + A_7^{18}$, onde A_p^n significa arranjo de n elementos tomados p a p. Se for o caso, corresponde ao total de agrupamentos de 7 ou de 11 que podemos ter de 18 elementos em que trocando a ordem dos mesmos é considerado um caso novo. Esta alternativa não está certa pois o mesmo grupo de pessoas é contado mais de uma vez.

- Note que uma possibilidade de obter $\frac{18!18!}{11!7!}$ é $A_{11}^{18} \cdot A_{7}^{18}$, onde A_p^n significa arranjo de n elementos tomados p a p. Se for o caso, corresponde ao total de agrupamentos de 7 e de 11 que podemos ter de 18 elementos em que trocando a ordem dos mesmos é considerado um caso novo. Esta alternativa não está certa pois o mesmo grupo de pessoas é contado mais de uma vez.
- Note que uma possibilidade de obter 11!7!2! é $P_{11}P_7P_2$, onde P_n significa permutação de n elementos. Se for o caso, corresponde ao total de permutações de dois blocos de 7 e 11 elementos, respectivaente, sendo que dentro destes blocos os elementos permutam entre si. Esta alternativa não está certa pois o mesmo grupo de pessoas é contado mais de uma vez.
- Note que uma possibilidade de obter $\frac{18!}{11!} \cdot 7$ é $A_{11}^{18} \cdot 7$, onde A_p^n significa arranjo de n elementos tomados p a p. Se for o caso, corresponde ao total de agrupamentos de 12 que podemos ter de 18 elementos em que trocando a ordem dos mesmos é considerado um caso novo, dos quais, um de 7 possíveis elementos deve fazer parte do grupo. Esta alternativa não está certa pois o mesmo grupo de pessoas é contado mais de uma vez.

10. A família do Carlos é formada por 5 pessoas: ele, a sua esposa e 3 filhos. Indique o número de possibilidades dos membros da família se organizarem para tirar uma foto, sendo que o Carlos e a esposa pretendem ficar lado-a-lado.

    A: 120 B: 15 C: 98 D: 24 E: 48

    Resolução: Atendendo ao facto de que se duas pessoas trocam de posição na foto, temos uma nova forma de organização , então estamos perante a uma permutação de 5 elementos. No entanto, dois deles devem estar juntos. Assim, consideramos estes dois como se fosse uma pessoa. Teremos P_4. Mas estas pessoas podem permutar entre si, P_2. Multiplicamos estas possibilidades e obtemos $P_4 \cdot P_2 = 4! \cdot 2! = 24 \cdot 2 = 48$.

    A resposta certa é E.

11. O coeficiente de x^2 no desenvolvimento do binómio $(2x-3)^5$ é igual a:

    A: 1080 B: 540 C: -10 D: -540 E: -1080

    Resolução : Usando o binómio de Newton, temos:

$$(a+b)^5 = \sum_{k=0}^{5} C_k^5 a^{5-k} b^k.$$

    Fazendo $a = 2x$ e $b = -3$, o termo corresponde a x^2 obtém-se quando $k = 3$. O correspondente termo é

$$C_3^5 \cdot (2x)^2(-3)^3 = \frac{5!}{3!2!} 4x^2(-27) = 10 \cdot (-27) \cdot 4x^2 = -1080x^2.$$

    Assim, o coeficiente de x^2 é -1080. A resposta certa é **E**.

12. A soma dos três primeiros elementos de uma certa linha do triângulo de Pascal é 121. Qual é o terceiro elemento da linha seguinte?

    A: 3 B: 84 C: 120 D: 124 E: 232

    Resolução: Usando o binómio de Newton, temos:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n a^{n-k} b^k.$$

    Cada linha do triângulo de Pascal corresponde aos coeficientes binomiais C_k^n para o desenvolvimento de $(a+b)^n$. Assim, a soma dos primeiros três elementos da linha do triângulo de Pascal é:

$$C_0^n + C_1^n + C_2^n = 121.$$

Vamos determnar n. Temos:

$$C_0^n + C_1^n + C_2^n = 121 \Rightarrow 1 + n + \frac{n!}{2!(n-2)!} = 121$$

$$\Rightarrow 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} = 121 \Rightarrow 2 + 2n + n(n-1) = 242$$

$$\Rightarrow n^2 + n - 240 = 0 \Rightarrow (n+16)(n-15) = 0 \Rightarrow n = -16 \vee n = 15.$$

Visto que n é não negativo, $n = 15$. Assim, o terceiro elemento da linha seguinte é:

$$C_2^{n+1} = C_2^{16} = \frac{16!}{2!(16-2)!} = \frac{16 \cdot 15}{2} = 120.$$

A resposta certa é **C**.

13. Qual dos seguintes conjuntos descreve o domínio da função real de variável real $f(x) = \frac{\sqrt{4-x}}{(2x-5)^2}$?

A: $]-5/2, 5/2[$ B: $]-\infty, 4[$ C: $]-\infty, 5/2[\cup]5/2, 4]$
D: $\mathbb{R} \setminus \{-5/2\}$ E: $\mathbb{R} \setminus \{5/2, 4\}$

Resolução : Tendo em conta o domínio da função $\sqrt{\cdot}$, temos:

$$4 - x \geq 0 \wedge (2x-5)^2 \neq 0 \Rightarrow -x \geq -4 \wedge 2x - 5 \neq 0 \ \Rightarrow x \leq 4 \wedge x \neq \frac{5}{2}.$$

A solução é $]-\infty, 5/2[\cup]5/2, 4]$. A resposta certa é **C**.

14. Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções reais de variável real tais que $f(-x) = -f(x)$ e $g(x) = g(-x)$. **Indique a opção errada.**

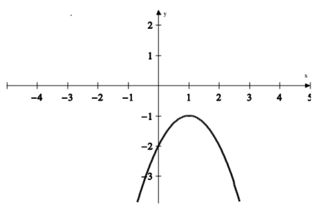
A: $f(0) = 0$
B: $f(x)$ é ímpar
C: $g(x)$ é par
D: O gráfco de $f(x)$ é simétrico em relação ao eixo das abcissas
E: O gráfico de $g(x)$ é simétrico em relação ao eixo das ordenadas.

Resolução : Temos:

- $f(0) = 0$ é verdade, pois, se $x = 0$ teremos $f(0) = -f(0)$, logo $2f(0) = 0$ de onde obtemos $f(0) = 0$.
- $f(x)$ é ímpar, é verdade, pois, satisfaz as condições de função ímpar.
- $g(x)$ é par, é verdade, pois, satisfaz as condições de função par.
- O gráfco de $f(x)$ é simétrico em relação ao eixo das abcissas. **Não está correcto.** Pois, isso implica $f(a) = \pm b$, o que contradiz com a definição de função.
- O gráfico de $g(x)$ é simétrico em relação ao eixo das ordenadas. É verdade, pois, se fixamos $x > 0$ obtemos um gráfico a direita do eixo OY e para $x < 0$, usando a propriedade $g(-x) = g(x)$ obtemos um reflexo do gráfico anterior em relação ao eixo OY.

A resposta certa é **D**.

15. A parábola cujo gráfico está representado na figura ao lado tem equação:



A: $y(x) = (x-1)^2 - 1$ B: $y(x) = (x-1)^2 + 1$ C: $y(x) = -(x-1)^2 + 1$
D: $y(x) = -(x-1)^2 - 1$ E: $y(x) = -(x+1)^2 - 1$

Resolução : A expressão analítica da parábola tem a forma $y(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$, onde (x_v, y_v) são as coordenadas do vértice. Temos $x_v = 1,\ y_v = -1$ e a ordenada na origem é -2, ou seja, a parábola passa pelo ponto $(0, -2)$. Assim,

$$y(x) = a(x - x_v)^2 + y_v \Rightarrow y(x) = a(x-1)^2 - 1$$
$$\Rightarrow -2 = a(0-1)^2 - 1 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow y(x) = -(x-1)^2 - 1$$

A resposta certa é **D**.

- Note que as expressões analíticas dadas nas restantes alternativas ou não passam do ponto (0,-2) ou não tem o vértice em (1,-1).

16. Quais os valores que α deve assumir para que a função $f(x) = \alpha x^2 - (2\alpha - 2)x + \alpha - 1,\ \alpha \in \mathbb{R}$, tenha 2 zeros distintos?

A: $\alpha < 1,\ \alpha \neq 0$ B: $\alpha > 0$ C: $-1 < \alpha < 1$ D: $\alpha > 1/4$ E: $\alpha = 1$

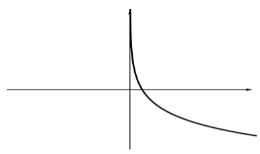
Resolução : Vamos supor que $\alpha \neq 0$ pois caso contrário $f(x)$ torna-se função linear. Para que uma função quadrática tenha dois zeros distintos é necessário e suficiente que o descriminante seja estritamente positivo, ou seja,

$$\Delta = (2\alpha - 2)^2 - 4 \cdot \alpha \cdot (\alpha - 1) > 0 \Leftrightarrow 4\alpha^2 - 8\alpha + 4 - 4\alpha^2 + 4\alpha > 0$$
$$\Leftrightarrow -4\alpha + 4 > 0 \Leftrightarrow \alpha < 1,\ \alpha \neq 0.$$

A resposta certa é **A**.

- Note que as outras alternativas ou contém números que não fazem parte da solução ou não contém números que fazem parte da solução. Por exemplo, $\alpha = 1$ implica $f(x) = x^2$ que tem um zero com multiplicidade dois, $\alpha = 2$ implica $f(x) = 2x^2 + 2x - 1$ que não tem zeros em $\mathbb{R}$ e $\alpha = -2$ implica $f(x) = -2x^2 + 6x - 3$ que tem dois zeros distintos.

17. Qual é a função cujo gráfico está representado na figura ao lado?



A: $f(x) = a^x$ com $a > 1$
B: $f(x) = a^x$ com $0 < a < 1$
C: $f(x) = 1/x$ com $x > 0$
D: $f(x) = \log_a^x$ com $0 < a < 1$
E: $f(x) = \log_a^x$ com $a > 1$

Resolução : Temos:

- $f(x) = a^x$ com $a > 1$ é uma função tal que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Mas isto está em contradição com o gráfico apresentado que tende para menos infinito quando x tende para o infinito. Esta alternativa não é correcta.

- $f(x) = a^x$ com $0 < a < 1$ é uma função tal que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Mas isto está em contradição com o gráfico apresentado que tende para menos infinito quando x tende para o infinito. Esta alternativa não é correcta.
- $f(x) = 1/x$ com $x > 0$ é uma função tal que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Mas isto está em contradição com o gráfico apresentado que tende para menos infinito quando x tende para o infinito. Esta alternativa não é correcta.
- $f(x) = \log_a^x$ com $0 < a < 1$ é uma função tal que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, é decrescente, zero da função é $x = 1$ e $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$. Estas propriedades correspondem com o gráfico apresentado. **Esta alternativa é correcta.**
- $f(x) = \log_a^x$ com $a > 1$ é uma função tal que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Mas isto está em contradição com o gráfico apresentado que tende para menos infinito quando x tende para o infinito. Esta alternativa não é correcta.

A resposta certa é **D**.

18. Qual das seguintes funções é crescente em todo o seu domínio?

A: $f(x) = \sin(x - \pi)$ B: $f(x) = (\frac{2}{5})^x$ C: $f(x) = -2x^2 + 4x - 2$
D: $f(x) = -\log_{10}^{(x-5)}$ E: $f(x) = e^{\ln(x+2)}$

Resolução : Temos:

- $f(x) = \sin(x - \pi)$ é uma função periódica, não constante, logo não é crescente em todo seu domínio. Esta alternativa não é correcta.
- $f(x) = (\frac{2}{5})^x$ é uma função decrescente e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Esta alternativa não é correcta.
- o gráfico correspondente à função $f(x) = -2x^2 + 4x - 2$ é uma parábola, e consequentemente, não é crescente em todo seu domínio. Esta alternativa não é correcta.
- $f(x) = -\log_{10}^{x-5}$ não é crescente, pois, $f(6) = 0$ e $f(15) = -1$. Esta alternativa não é correcta.
- $f(x) = e^{\ln(x+2)} = x + 2$, que tem domínio $x + 2 > 0$ ou seja, $x > -2$. Neste conjunto, a função $f(x) = x + 2$ é uma recta crescente. **Esta alternativa é correcta**

A resposta certa é **E**.

19. Considere as sucessões de termos gerais $u_n = 2 - \frac{n-1}{10}$, $v_n = -4n^2 + 9$ e $w_n = \frac{1}{2n}$. Quais das sucessões são crescentes?

A: u_n e v_n B: u_n e w_n C: v_n e w_n
D: u_n, v_n e w_n E: Nenhuma das anteriores

Resolução : Temos:

$$u_{n+1} - u_n = 2 - \frac{n}{10} - \left(2 - \frac{n-1}{10}\right) = -\frac{n}{10} + \frac{n-1}{10} = -\frac{1}{10} < 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Então, u_n é decrescente. Para v_n temos:

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= -4(n+1)^2 + 9 - (-4n^2 + 9) = 4n^2 - 4(n+1)^2 \\ &= 4(n - n - 1)(n + n + 1) = -4(2n + 1) < 0, \ n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Então, v_n é decrescente. Para w_n temos:

$$w_{n+1} - w_n = \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2n} = \frac{n - (n+1)}{2n(n+1)} = -\frac{1}{2n(n+1)} < 0, \ n = 1, 2, 3, \dots$$

Então, w_n é decrescente. Nenhuma das sucessões dadas é crescente. A resposta certa é **E**.

20. Os três primeiros termos de uma progressão aritmética são $a_1 = 1+x$, $a_2 = 6x$ e $a_3 = 2x^2+4$. Determine os seus valores.

A: $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 7$
B: $a_1 = \frac{3}{2}$, $a_2 = 3$, $a_3 = \frac{9}{2}$ ou $a_1 = 6$, $a_2 = 30$, $a_3 = 54$
C: $a_1 = \frac{6}{5}$, $a_2 = \frac{36}{25}$, $a_3 = \frac{216}{125}$
D: $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = 1$, $a_3 = \frac{3}{2}$
E: $a_1 = -1$, $a_2 = -12$, $a_3 = -23$ ou $a_1 = \frac{3}{2}$, $a_2 = 9$, $a_3 = \frac{33}{9}$

Resolução : Temos:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 \Rightarrow 6x - (1+x) = 2x^2 + 4 - 6x \Rightarrow 2x^2 - 11x + 5 = 0$$
$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{11^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5}}{2 \cdot 2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{11 \pm 9}{4} \Rightarrow x_1 = 5,\ x_2 = \frac{1}{2}.$$

Substituindo estes valores nas expressões de a_1, a_2 e a_3, obtemos:

$$a_1 = \frac{3}{2},\ a_2 = 3,\ a_3 = \frac{9}{2} \text{ ou } a_1 = 6,\ a_2 = 30,\ a_3 = 54.$$

A resposta certa é **B**.

- Nas alternativas A, C e D não é possível encontrar um valor de x que corresponde aos valores de a_1, a_2 e a_3.
- Note que a_3 é positivo, portanto a alternativa E está errada.

21. Na progressão 1, 3, 9, 27, 81,... a soma dos n primeiros termos é 364. Qual é o valor de n?

A: 6 B: 72 C: 4 D: 16 E: 7

Resolução : Temos $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 3$, $n = 1, 2, \ldots$ Assim, a_n é uma progressão geométrica de razão $q = 3$. O termo geral é $a_n = a_1 q^{n-1} = 1 \cdot 3^{n-1}$. A soma dos primeiros n termos é: $s_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$, $q \neq 1$. Assim,

$$s_n = \frac{1-3^n}{1-3} \Rightarrow 364 = \frac{1-3^n}{-2} \quad -728 = 1 - 3^n \Rightarrow 3^n = 3^6 \Rightarrow n = 6.$$

A resposta certa é **A**.

- Note que somando os primeiros 4 ou 7 termos não obtemos 364. Para $n = 7$ obtemos a soma dos primeiros 7 termos é maior que 364. Visto que a sucessão é crescente e positiva, a soma dos primeiros 16 ou 72 termos é muito superior a 364.

22. Qual é o número de termos de uma progressão geométrica onde $a_1 = \frac{1}{32}$, $a_n = 2$, e a razão $r = 2$.

A: 1/8 B: 7 C: 6 D: 1/2 E: 16

Resolução : O termo geral é:

$$a_n = a_1 r^{n-1} \Rightarrow 2 = \frac{1}{32} \cdot 2^{n-1} \Rightarrow 64 = 2^{n-1} \Rightarrow 2^6 = 2^{n-1} \Rightarrow n - 1 = 6 \Rightarrow n = 7.$$

A resposta certa é **B**.

- Note que n é um número natural. Logo 1/8 e 1/2 não estão correctos.
- Substituindo $n = 6$ ou $n = 16$ no termo geral não obtemos 2.

23. Os termos de uma progressão geométrica entre $a_1 = 36$ e $a_7 = \frac{4}{81}$ são:

A: 36, 12, 4, $\frac{4}{3}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{4}{27}$, $\frac{4}{81}$, B: 36, 12, 6, $\frac{4}{9}$, $\frac{4}{18}$, $\frac{4}{27}$, $\frac{4}{81}$ C: 12, 4, $\frac{4}{3}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{4}{27}$
D: 36, 12, 3, $\frac{4}{3}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{4}{27}$, $\frac{4}{81}$ E: 36, 12, 4, 2, $\frac{4}{9}$, $\frac{4}{27}$, $\frac{4}{81}$

Resolução : Temos:

$$a_m = a_n q^{m-k} \Rightarrow a_7 = a_1 q^6 \Rightarrow \frac{4}{81 \cdot 36} = q^6 \Rightarrow \frac{1}{3^6} = q^6 \Rightarrow q = \pm\frac{1}{3}.$$

Para $q = \frac{1}{3}$, teremos: 36, 12, 4, $\frac{4}{3}$, $\frac{4}{9}$ $\frac{4}{27}$, $\frac{4}{81}$ ou para $q = -\frac{1}{3}$, teremos: 36, -12, 4, $-\frac{4}{3}$, $\frac{4}{9}$ $-$ $\frac{4}{27}$, $\frac{4}{81}$. A resposta certa é **A**.

- As alternativas B e D não formam uma progressão geométrica. O primeiro termo na alternativa C é diferente de 36.

24. Determine o $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$?

A: $+\infty$ B: 1 C: 0 D: e^2 E: e

Resolução : Temos:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = 1^{\infty} \text{ é indeterminação .}$$

Aplicando o limite notável $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, temos:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1+1}{n+1}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = e.$$

A resposta certa é **E**.

25. Encontre o $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(9n^3+2n+1)^4}{(3n^2+7)^6}$, $n \in \mathbb{N}$.

A: 1/7 B: 3 C: 9 D: 0 E: 2/3

Resolução : Temos: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(9n^3+2n+1)^4}{(3n^2+7)^6} = \frac{\infty}{\infty}$ é indeterminação. Levantando a indeterminação, teremos:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \frac{(9n^3+2n+1)^4}{(3n^2+7)^6} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{(9n^3(1+\frac{2}{9n^2}+\frac{1}{9n^3}))^4}{(3n^2(1+\frac{1}{3n^2}))^6} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{9^4 n^{12}(1+\frac{2}{9n^2}+\frac{1}{9n^3})^4}{3^6 n^{12}(1+\frac{7}{3n^2})^6} = \frac{9^4}{3^6} = \frac{3^8}{3^6} = 3^2 = 9, \end{aligned}$$

pois, $\frac{1}{n^2} \to 0$, $\frac{1}{n^3} \to 0$ quando $n \to \infty$. A resposta certa é **C**.

26. Considere a função real $f(x) = 2^{-x}$. O valor da expressão $S = f(0) + f(1) + f(2) \ldots + f(100)$ é igual a:

A. $S = 2 - 2^{-101}$ B. $S = 2^{50} - 2^{-50}$ C. $S = 2 + 2^{-101}$
D. $S = 2 + 2^{-100}$ E. $S = 2 - 2^{-100}$

Resolução : Temos:

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{100}}$$

Esta corresponde a soma dos primeiros termos duma progressão geométrica de razão:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q = \frac{1}{2}.$$

Temos:

$$s_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{101}\right)}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\frac{1}{2^{101}}\right) = 2\cdot\frac{(2^{101}-1)}{2\cdot 2^{100}} = 2-2^{-100}.$$

Assim, $S = 2-2^{-100}$. A resposta certa é **E**.

27. Indique o valor do $\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)^2}{x^2-3x+2}$.

A. 0 B. 1 C. 2 D. $-\infty$ E. $+\infty$

Resolução : Temos $\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)^2}{x^2-3x+2} = \frac{0}{0}$ é indeterminação. Assim,

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x-1} = 0.$$

A resposta certa é **A**.

28. Calcule o limite, quando $x\to 8$ da função $\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$

A. $+\infty$ B. 12 C. 4 D. 0 E. -8

Resolução : Temos:

$$\lim_{x\to 8}\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2} = \frac{0}{0} \text{ é indeterminação .}$$

Tendo em conta que $a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$, teremos:

$$\lim_{x\to 8}\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2} = \lim_{x\to 8}\frac{(x-8)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}$$

$$= \lim_{x\to 8}\frac{(x-8)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{x-8} = \lim_{x\to 8}(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4) = 4+4+4 = 12.$$

A resposta certa é **B**.

29. Determine $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2+2x-3}{3x^4+1}$:

A. 0 B. 4/3 C. -3 D. 1 E. $+\infty$

Resolução : Temos:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+2x-3}{3x^4+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{4x^2(1+\frac{1}{2x}-\frac{3}{4x^2})}{3x^4(1+\frac{1}{3x^4})} = \lim_{x\to\infty}\frac{4(1+\frac{1}{2x}-\frac{3}{4x^2})}{3x^2(1+\frac{1}{3x^4})} = 0,$$

pois $1/x^2\to 0$, $1/x^4\to 0$, $1/x\to 0$ quando $x\to\infty$. A resposta certa é **A**.

30. Indique o limite, quando $x\to 0$, da função $\frac{x-\sin(3x)}{3x^2-\sin(5x)}$:

A: 0 B: 1/3 C: 2/5 D: 3/5 E: 1

Resolução : Temos $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin(3x)}{3x^2-\sin(5x)} = \frac{0}{0}$ é indeterminação. Usando o limite notável $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, temos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin(3x)}{3x^2-\sin(5x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x(1-\frac{\sin(3x)}{x})}{x(3x-\frac{\sin(5x)}{x})} \lim_{x\to 0} \frac{1-\frac{3\sin(3x)}{3x}}{3x-\frac{5\sin(5x)}{5x}} = \frac{1-3}{-5} = \frac{2}{5}.$$

A resposta certa é **C**.

31. PASSE PARA A PERGUNTA SEGUINTE.

32. Qual o valor do parâmetro $\beta \in \mathbb{R}$ para o qual a função $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(3x)}{x}, & x > 0 \\ 5^x - \beta, & x \leq 0 \end{cases}$ é contínua em $\mathbb{R}$:

A: 0 B: 1 C: 2 D: -2 E: -3

Resolução : A condição de continuidade de $f(x)$ no ponto $x = x_0$ é:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

Assim, claramente que f é contínua em $\mathbb{R}$ com excepção talvez do ponto $x = 0$, que é um ponto que suscita dúvida quanto à continuidade de $f(x)$. Vamos verificar as condições continuidade de f neste ponto, temos:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$$
$$\lim_{x\to 0^-} (5^x - \beta) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(3x)}{x} \Rightarrow 1-\beta = 3 \Rightarrow \beta = -2.$$

A resposta certa é **D**.

33. Indique qual a derivada de $f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x}}$:

A: $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$ B: $f'(x) = \frac{2x+1}{2x^{3/2}}$ C: $f'(x) = 4x^{1/2}$ D: $f'(x) = \frac{2\sqrt{x}}{(2x-1)^2}$ E: $f'(x) = -\frac{1}{x}$

Resolução : Temos:

$$f'(x) = \frac{(2x-1)'\sqrt{x} - (\sqrt{x})'(2x-1)}{(\sqrt{x})^2} = \frac{2\sqrt{x} - \frac{2x-1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{4x-(2x-1)}{2x\sqrt{x}} = \frac{2x+1}{2x\sqrt{x}} = \frac{2x+1}{2x^{\frac{3}{2}}}.$$

A resposta certa é **B**.

34. Considere a função $f(x) = xe^{-x}$. Indique os seus intervalos de monotonia:

A: Crescente: $]-\infty, 1[$ e decrescente $]1, \infty[$;
B: Crescente: $\mathbb{R}$;
C: Decrescente: $\mathbb{R}$;
D: Crescente: $]-\infty, 0[\cup]1, \infty[$ e decrescente $]0, 1[$;
E: Crescente: $[0, 1[$ e decrescente $]1, \infty[$.

Resolução : Usando as seguintes propriedades de derivada, temos:

$$f'(x) = x'e^{-x} + (e^{-x})'x = e^{-x} - xe^{-x}.$$
$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^{-x}(1-x) = 0 \Rightarrow x = 1.$$

Estudando o sinal da primeira derivada, teremos:

x	$]-\infty, 1[$	1	$]1, \infty[$
$f'(x)$	$+$	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$

A resposta certa é **A**.

35. Seja a função $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Qual das seguintes afirmações é correcta?

A: $f(x)$ tem um mínimo e um máximo.
B: $f(x)$ tem um mínimo e não tem máximo.
C: $f(x)$ tem um máximo e não tem mínimo.
D: $f(x)$ é crescente na recta numérica.
E: $f(x)$ é decrescente na recta numérica

Resolução : Esstudando os extremos e montonia de f teremos:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \ \Rightarrow 3(x^2-1) = 0 \Rightarrow x = \pm 1.$$

Analisando o sinal da primeira derivada, teremos:

x	$]-\infty, -1[$	-1	$]-1, 1[$	1	$]1, \infty[$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$

Desta forma, a função $f(x)$ tem um máximo no ponto $(-1, 3)$ e um mínimo no ponto $(1, -1)$. A resposta certa é **A**.

36. A recta $y = 8x - 5$ é tangente ao gráfico da função $f(x)$ em $x = 1$. Determine a equação da recta tangente ao gráfico de $g(x) = f(x) - 2$ em $x = 1$.

A. $y = -5x + 8$ B. $y = 6x - 3$ C. $y = 8x - 7$ D. $y = 6x - 7$ E. $y = 8x + 2$

Resolução : A função $f(x)$ tem um ponto em comum no ponto de tangência, $x = 1$, $y = f(1) = 3$. Assim, $g(1) = f(1) - 2 = 1$ e a recta tangente à função $g(x)$ no ponto $x = 1$ é paralela à recta tangente à função $f(x)$ no ponto $x = 1$. Desta forma, o declive da recta tangente à função $g(x)$ no ponto $x = 1$ é $a = 8$. Assim, a equação desta recta é

$$y - y_0 = a(x - x_0) \Rightarrow y - 1 = 8(x - 1) \Rightarrow y = 8x - 7.$$

A resposta certa é **C**.

- Note que equações de rectas dadas nas restantes alternativas não passam do ponto (1,1).

37. A que função corresponde o integral $\int x^2 \left(\frac{x^3}{3} + 2\right)^2 dx$

A. $F(x) = \left(\frac{x^3}{9} + 2\right)^3 + c,\ c \in \mathbb{R}$

B. $F(x) = \frac{x^3}{3}\left(\frac{x^4}{4} + 2\right)^2 + c,\ c \in \mathbb{R}$

C. $F(x) = \left(\frac{x^4}{4} + 2\right)^2 + c,\ c \in \mathbb{R}$

D. $F(x) = x^2\left(\frac{x^3}{3} + 2\right)^3 + c,\ c \in \mathbb{R}$

E. $F(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{3} + 2\right)^3 + c,\ c \in \mathbb{R}$

Resolução : Fazendo a substituição $t = \frac{x^3}{3} + 2$, temos: $dt = x^2dx$. Assim,

$$\int x^2\big(\frac{x^3}{3}+2\big)^2dx = \int t^2dt = \frac{1}{3}\cdot t^3 + c = \frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{3}+2\right)^3 + c,$$

onde c é uma constante arbritrária. A resposta certa é **E**.

- Note que a derivada das funções nas outras alternativas é diferente de $x^2\left(\frac{x^3}{3}+2\right)^2$.

38. Determine a primitiva de $f(x) = \sin^2 x \cos x$:

A. $\frac{\sin^3(x)}{3} + c,\ c \in \mathbb{R}$
B. $\frac{\sin^3(x)}{3}\frac{\cos^2(x)}{2} + c,\ c \in \mathbb{R}$
C. $\frac{\sin^2(x)\cos^2(x)}{2} + c,\ c \in \mathbb{R}$
D. $-2\cos(x)\sin(x) + c,\ c \in \mathbb{R}$
E. $\sin^2(x) + c,\ c \in \mathbb{R}$

Resolução : Temos:

$$\int f(x)dx = \int \sin^2 x \cos x dx.$$

Tendo em conta que a deriva de $\sin(x)$ é $\cos(x)$, fazemos a substituição $t = \sin(x)$, então $dt = \cos(x)dx$. Assim,

$$\int f(x)dx = \int \sin^2 x \cos x dx = \int t^2dt = \frac{t^3}{3} + c = \frac{\sin^3 x}{3} + c = \frac{\sin^3(x)}{3} + c,$$

onde c é uma constante arbitrária. A resposta certa é **A**.

- Note que a derivada das funções nas outras alternativas é diferente de $f(x)$.

39. Uma das funções que cumprem a condição $f'(x) = 4x^3 + x^2$ é:

A. $f(x) = x^4 + x^3$ B. $f(x) = x^4 + \frac{1}{3}x^3 + 4$ C. $f(x) = x^3 + \frac{1}{3}x^2 + 3$
D. $f(x) = 4x^4 + x^3 + 4$ E. $f(x) = -4x^4 + \frac{1}{3}x^3 + 4$

Resolução : Temos:

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int (4x^3 + x^2)dx = \frac{4x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + c,$$

onde c é contante arbitrária. A função $f(x) = x^4 + \frac{1}{3}x^3 + 4$ corresponde a esta quando $c = 4$. A resposta é **B**.

- Note que a derivada das funções nas outras alternativas é diferente de $f(x)$.

40. Qual é o valor de $(3-4i)(2-i)(i)$?

A: $5 - 11i$ B: $2 + 5i$ C: $6 - 11i$ D: $11 + 2i$ E: $5 - 2i$

Resolução : Tendo em conta que $i^2 = -1$, temos:

$$(3-4i)(2-i)(i) = (6 - 3i - 8i - 4)i = (2 - 11i)i = 2i + 11.$$

A resposta certa é **D**.