Exame de Matemática I de 2023

Correcção do exame de Matemática I de 2023

1. Simplificando a expressão $\dfrac{2(a^2-1)+(a+1)}{(a+1)-2(a+1)^2}$ tem-se:

   A: -1 B: $\dfrac{2a-1}{2a-3}$ C: $\dfrac{2a-1}{1+2a}$ D: $-\dfrac{2a-1}{1+2a}$ E: $-\dfrac{2a-1}{3+2a}$

   Resolução: A expressão dada existe para valores de "a" para os quais $(a+1)-2(a+1)^2 \neq 0 \Longrightarrow (a+1)[1-2(a+1)] \neq 0 \Rightarrow a \neq -1, \wedge a \neq \dfrac{3}{2}$. Agora simplifiquemos a expressão,

$$\begin{aligned}\frac{2(a^2-1)+(a+1)}{(a+1)-2(a+1)^2} &= \frac{2(a-1)(a+1)+(a+1)}{(a+1)-2(a+1)^2} = \frac{(a+1)[2(a-1)+1]}{(a+1)[1-2(a+1)]}\\ &= \frac{2(a-1)+1}{1-2(a+1)} = -\frac{2(a-1)+1}{2(a+1)-1} = -\frac{2a-1}{2a+1}.\end{aligned}$$

   Logo, a resposta certa é **D**.

2. A expressão $|\sqrt{3}-2|$ é equivalente a:

   A: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ B: $\sqrt{3}-2$ C: $2\sqrt{3}$ D: $-2\sqrt{3}$ E: $2-\sqrt{3}$

   Resolução: Visto que $\sqrt{3}<2$ e o módulo de um número nunca é negativo então, $|\sqrt{3}-2| = |2-\sqrt{3}| = 2-\sqrt{3}$. A resposta certa é **E**.

3. A solução da equação $|x+4|<6$ é:

   A: $x>2$ B: $x>-10$ C: $-10<x<2$ D: $x>-10, \vee x>2$ E: $x<2$

   Solução: Usando a definição $|y|<a \Rightarrow -a<y<a$, temos

$$|x+4|<6 \Longrightarrow -6<x+4<6 \Longrightarrow -10<x<2.$$

   A resposta certa é **C**. As alternativas **A** e **D** não estão correcta pois contêm valores de x que não satisfam a inequação dada, por exemplo $x=4$ pertence às duas soluções, mas $|4+4|<6$ não é verdadeira. A Para a alternativa **E**, $x=-14$ pertence ao conjunto dado e a afirmação $|-14+4|<6$ também não verdadeira.

4. Um número x dista 5 unidades de 4. Na forma simbolica escreve-se:

   A: $|x+4|=5$ B: $|x-5|=4$ C: $|x+5|=4$ D: $|x-4|=5$ E: $x-4=5$

UEM - DRA

Solução: A distância entre dois pontos em $\mathbb{R}$ é igual ao módulo da diferença entre esses números e no nosso casso essa distância é igual à 5, deste mod temos $|x-4|=5$. Logo, a resposta certa é **D**.

5. O(s) valor(es) de x que satisfaz(em) a condição da questão anterior é(são):

   A: $x=9$ B: $x=-1$ C: $x=1$ D: $x=-1 \vee x=9$ E: $x=1 \vee x=9$

   Resolução: Usando a definição $|y|=a \Leftrightarrow y=-a \vee y=a$, temos

   $$|x-4|=5 \Leftrightarrow x-4=-5 \vee x-4=5 \Rightarrow x=-1 \vee x=9.$$

   Assim, a resposta certa é **D**.

6. QA expressão $\dfrac{|x-2|}{x-2}$ para valores de $x<2$ é equivalente a:

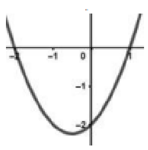
   A: 1 B: $\dfrac{x+2}{x-2}$ C: $\dfrac{x-2}{x+2}$ D: -1 E: $\dfrac{-1}{x-2}$

   Resolução: Por definição de módulo $|x-2|=\begin{cases} x-2, & x\geq 2 \\ -(x-2), & x<2 \end{cases}$ temos

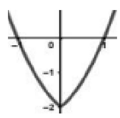
   $$\frac{|x-2|}{x-2}=\frac{-(x-2)}{x-2}=-1.$$

   A resposta certa é **D**.

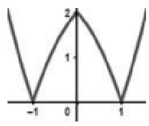
7. O gráfico abaixo represente a função $y=g(x)$. O gráfico que representa $f(x)=|g(x)|$ é:



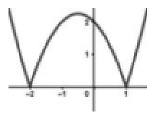
A.



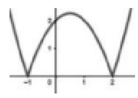
B.



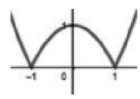
C.



D.



E.



Resolução: Note que o gráfico pretendido é da função modular, neste caso as partes negativas da função dada passam a ser positivas para os mesmos valores de x e tem os mesmos zeros de função com $g(x)$ i.e., $x_1 = -2$ e $x_2 = 1$. O gráfico com estas características é da figura C. Logo, a resposta certa é **C**.

8. $\dfrac{5! - 3!}{4!}$ é equivalente a:

A: $\dfrac{1}{2!}$ B: $\dfrac{5}{4}$ C: $\dfrac{21}{4}$ D: $\dfrac{3}{4}$ E: $\dfrac{19}{4}$

Resolução: Usando a definição de factorial de um número i.e, $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$, temos:

$$\frac{5! - 3!}{4!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3! - 3!}{4 \cdot 3!} = \frac{3! \cdot (5 \cdot 4 - 1)}{4 \cdot 3!} = \frac{19}{4}.$$

Então, a resposta certa é **E**.

9. A solução da equação $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!} = 6$ é:

A: $n = 2 \vee n = -3$ B: $n = -2 \vee n = 3$ C: $n = 3$ D: $n = 2$ E: $-n = -2 \vee n = 3$

Resolução: Como no exercício anterior, usando a definição de factorial temos:

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 6 \Rightarrow \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} = 6 \Rightarrow (n+1) \cdot n = 6 \Rightarrow n^2 + n - 6 = 0.$$

Esta última é uma equação quadratica com $a = 1$, $b = 1$, $c = -6$. Assim $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25$. Dete modo,

$$n_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} \Rightarrow n_1 = \frac{-1+5}{2} = 2, \quad n_2 = \frac{-1-5}{2} = -3.$$

Pelo facto de que factorial opera apenas sobre números naturais incluindo zero, temos como ,solução $n = 2$. Logo, a resposta certa é **D**.

- A alternativa A não é correcta pois inclui $n = -3$ que não faz parte da solução;
- A alternativa E não está certa porque contém $n = 3$ que não satisfaz a equação dada.

UEM - DRA

10. Com três calças e cinco camisas, de quantas maneiras diferentes é possível compor um traje?

A: 15 B: 20 C: 125 D: 12 E: 243

Resolução: Note que temos 3 formas diferentes de escolher uma calça e 5 maneiras diferentes de escolher uma camisa. Deste modo teremos $3 \cdot 5 = 15$ maneiras diferen tes possíves para escolher um traje. Portanto, a resposta certa é **A**.

11. Quantas palavras, com ou sem sentido, é possível escrever usando todas as letras da palavra PINCEL, sem repetir nenhuma?

A: 36 B: 720 C: 6 D: 120 E: 50

Resolução: Visto que a palavra PINCEL é formada por todas as 6 letras diferentes, basta neste caso permutá-las para obter diferentes palavras i.e., $6! = 720$. Logo, a alternativa certa é **B**.

12. Quantos números de três algarísmos é possível escrever usando os algarísmos $2, 4, 7, 8, 9$ sem repetir nenhum?

A: 60 B: 20 C: 13 D: 50 E. 21

Resolução: Notemos que para um número de três algarísmos, temos três espaços $- - -$ por preencher. Com os 5 algariísmos dados, temos 5 possibilidades para o primeiro espaço. Visto que não podemos repetir os algarímos, teremos 4 possibilidades para o segundo algarísmo do número pretendido e 3 possibilidade para o último algariísmo. Deste modo, podemos formar $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ números diferente. Logo, a resposta certa é **A**.

13. A solução da equação $C_2^n = 6$ é

A: $n = 4 \vee n = -3$ B: $n = -4 \vee n = 3$ C: $n = 3$ D: $n = 4$ E: $n = 6$

Resolução : Pela definição de combinação de n objectos tomados k à k i.e., $C_k^n = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, temos:

$$C_2^n = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2} = 6 \Rightarrow n^2 - n - 12 = 0.$$

Resolvendo esta última equação, temos $n^2 - n - 12 = (n+3)(n-4) = 0 \Rightarrow n = -3 \vee n = 4$. Visto que não podemos ter um número negativo de objectos, então $n = 4$. A resposta certa é **D**.

Considere a função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ para responder as questões de 14 a 19.

14. A função anula em:

A: $x = -2 \vee x = -1 \vee x = 0$ B: $x = -2 \vee x = 1 \vee x = 0$ C: $x = 2 \vee x = 1 \vee x = 0$
D: $x = 2 \vee x = -1 \vee x = 0$ E: $x = 2 \vee x = 1$

Resolução : A função anula quando $f(x) = 0$, então

$$x^3 - 3x^2 + 2x = x(x^2 - 3x + 2) = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \vee x = 0 \Rightarrow (x-2)(x-1) = 0 \vee x = 0$$

Logo, $x = 2 \vee x = 1 \vee x = 0$. Então, a resposta certa é **C**.

15. Os extremos relativos da função são:

A: $x_{max} = \dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$ e $x_{min} = \frac{3-\sqrt{3}}{3}$
B: $x_{min} = \frac{3+\sqrt{3}}{3}$ e $x_{max} = \frac{3-\sqrt{3}}{3}$
C: $x_{max} = \frac{-3+\sqrt{3}}{3}$ e $x_{min} = \frac{-3-\sqrt{3}}{3}$
D: $x_{min} = \frac{-3+\sqrt{3}}{3}$ e $x_{max} = \frac{-3-\sqrt{3}}{3}$
E: $x_{min} = \frac{3+\sqrt{3}}{3}$ e $x_{max} = \frac{-3-\sqrt{3}}{3}$

Resolução : A função atinge extremos relativos nos pontos onde a derivada é nula ou não existe. Visto que o domínio da função dada é $\mathbb{R}$, a sua derivada tambem tem o mesmo domínio. Então bastão os pontos onde a derivada é nula i.e., $f'(x) = 0$. Assim, temos $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2 = 0$. Usando a fórmula resolvente, temos $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 12$. Então,

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{2 \cdot 3} = \frac{3 \cdot 2 \pm 2\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}.$$

Pelo teste da segunda derivada temos: $f''(x) = 6x - 6$.

UEM - DRA

(a) para $x = \frac{3+\sqrt{3}}{3} \Rightarrow f''\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right) = 2(3+\sqrt{3}) - 6 = 2\sqrt{3} > 0$, logo $x = \frac{3+\sqrt{3}}{3}$ é ponto de mínimo local i.e., $x_{min} = \frac{3+\sqrt{3}}{3}$

(b) para $x = \frac{3-\sqrt{3}}{3} \Rightarrow f''\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right) = 2(3-\sqrt{3}) - 6 = -2\sqrt{3} < 0$, logo $x = \frac{3-\sqrt{3}}{3}$ é ponto de máximo local i.e., $x_{max} = \frac{3-\sqrt{3}}{3}$

Desta forma, a resposta certa é alternativa **B**.

16. A função é monótona:

A: crescente em $\left]-\infty, \dfrac{3-\sqrt{3}}{3}\right[\cup \left]\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}, +\infty\right[$ e decrescente em $\left]\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}, \dfrac{3+\sqrt{3}}{3}\right[$

B: crescente em $\left]\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}, \dfrac{3+\sqrt{3}}{3}\right[$ e decrescente em $\left]-\infty, \dfrac{3-\sqrt{3}}{3}\right[\cup \left]\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}, +\infty\right[$

C: crescente em $\left]-\infty, \dfrac{-3-\sqrt{3}}{3}\right[\cup \left]\dfrac{-3+\sqrt{3}}{3}, +\infty\right[$ e decrescente em $\left]\dfrac{-3-\sqrt{3}}{3}, \dfrac{-3+\sqrt{3}}{3}\right[$

D: crescente em $\left]\dfrac{-3-\sqrt{3}}{3}, \dfrac{-3+\sqrt{3}}{3}\right[$ e decrescente em $\left]-\infty, \dfrac{-3-\sqrt{3}}{3}\right[\cup \left]\dfrac{-3+\sqrt{3}}{3}, +\infty\right[$

E: Nenhuma das alternativas anteriores

Reolução : Pelo exercício anterior, $f'(x) = 0$ nos pontos $x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$. Construindo a tabela de monotonia temos:

x	$\left]-\infty, \dfrac{3-\sqrt{3}}{3}\right[$	$\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}$	$\left]\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}, \dfrac{3+\sqrt{3}}{3}\right[$	$\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$	$\left]\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}, +\infty\right[$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	crescente	$f\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)$	decrescente	$f\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)$	crescente

Pela tabela, temos que $f(x)$ é crescente em $\left]-\infty, \dfrac{3-\sqrt{3}}{3}\right[\cup \left]\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}, +\infty\right[$ e decrescente em $\left]\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}, \dfrac{3+\sqrt{3}}{3}\right[$. Logo, a resposta certa é **A**.

17. O ponto de inflexão da função é:

A: $x = 2$ **B**: $x = -1$ C: $x = 0$ D: $x = -2$ E: $x = 1$

Resolução: Pontos de inflexão são os pontos onde a segunda derivada é nula ou não existe. Neste caso temos $f''(x) = 6x - 6 \Rightarrow f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$. Logo, a resposta certa é **E**.

• Visto que a segunda derivada tem domínio $\mathbb{R}$, os valores das outras alternativas não anulam a segunda derivada, por exemplo, da alternativa A temos $f''(2) = 6 \cdot 2 - 6 = 6 \neq 0$.

18. A concavidade da função é:

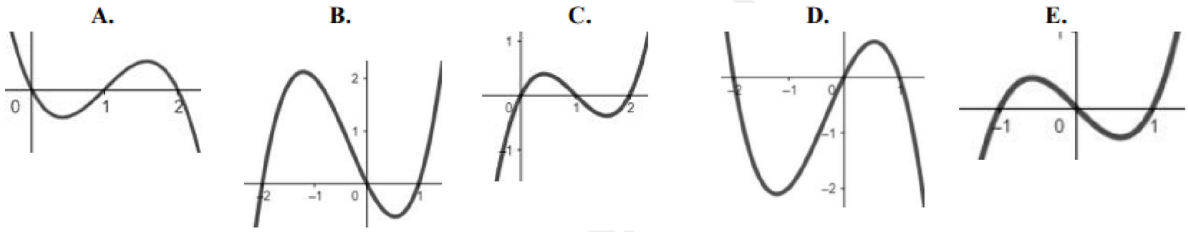
A: Voltada para cima em $]-\infty, 2[$ e voltada para baixo em $]2, +\infty[$
B: Voltada para cima em $]-\infty, -2[$ e voltada para baixo em $]-2, +\infty[$
C: Voltada para cima em $]-\infty, 1[$ e voltada para baixo em $]1, +\infty[$
D: Voltada para cima em $]1, +\infty[$ e voltada para baixo em $]-\infty, 1[$
E: Nenhuma das alternativas anteriores

Resolução: Dado o ponto de inflexão determinado no exercício anterior temos a seguinte tabela:

x	$]-\infty, 1[$	1	$]1, +\infty[$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cap$	0	$\cup$

De acordo com a tabela acima, $f(x)$ possui concavidade voltada para cima em $]1, +\infty$ e voltada para baixo em $]-\infty, 1[$. Então a resposta certa é **D**.

19. O gráfico da função é:



Resolução : De acordo com as informações dos exercícios 14 a 18, o único gráfico com as características obtidas nesses exercícios é o gráfico C, i.e., a resposta certa é **C**.

• A alternativa A não está certa pois o gráfico tem concavidade voltada para cima em $]-\infty, 1[$ o que contradiz o exercício 18.

• A alternativa B não está certa pois o gráfico intersecta o eixo dos x no ponto $x = -2$, o que contradiz o exercício 14 e o mesmo acontece com as alternativas D e E.

20. As assímptotas vertical e horizontal da função $f(x) = \dfrac{1-x}{x^2-1}$ é (são) respectivamente:

A: $x = 1$ e $y = 0$ B: $x = 1 \vee x = -1$ e $y = 0$ C: $x = -1$ e $y = 0$
D: $x = 0$ e $y = -1$ E: $x = 2$ e $y = 0$

Resolução: $x = 1$ diz-se assímptota vertical se pelomenos um dos limites $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ ou $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ é igual a $+\infty$ ou $-\infty$. Os pontos de x onde a função pode ter problemas de definição são os valores que anulam o denominador, i.e., os pontos para os quais $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$.

(a) Para $x = 1$ temos $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1-x}{x^2-1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{-(x-1)}{(x-1)(x+1)} = -\dfrac{1}{2}$ o que quer dizer que todos os limites laterais são iguais a $-1/2$, então $x = 1$ não é assíptota vertical

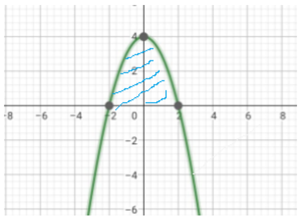
(b) Para $x = -1$ temos $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{1-x}{x^2-1} = \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{-(x-1)}{(x-1)(x+1)} = -\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{1}{x+1} = -\infty$, logo $x = -1$é assíptota vertical.

Por outro lado, $y = b$ é assímptota horizontal se $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$. Assim, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-x}{x^2-1} = -\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. Portanto, $y = 0$ é assímptota horizontal. Então, a resposta certa é **C**.

21. O domínio da função $y = \sqrt{4-x^2}$ é:

A. $-2 < x < 2$ B. $x \leq 2$ C. $-2 \leq x \leq 2$ D. $x \leq -2 \vee x \geq 2$ E. $x < -2 \vee x > 2$

Resolução: O radicando de uma raiz com índice par deve ser não negativo i.e., $4 - x^2 \geq 0 \Rightarrow (2-x)(2+x) \geq 0$. Resolvendo graficamente esta desigualdade temos:



Com base no gráfico acima temos que o domínio da função dada é $-2 \leq x \leq 2$. Logo, a resposta certa é **C**.

22. $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{2(x^2-4)}{2-x}$ é:

A. 8 B. 0 C. 6 D. -6 **E.** -8

Resolução: $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{2(x^2-4)}{2-x} = 2\lim\limits_{x\to2} \dfrac{(x-2)(x+2)}{-(x-2)} = -2\lim\limits_{x\to2}(x+2) = -8$. A resposta certa é **E**.

23. $u_n = \dfrac{n^2+1}{n+3}$ é o termo geral de uma sucessão. Um dos termos desta sucessão é:

A. 0 B. 2 C. 1 D. -3 E. -1

Resolução: Primeiramente vemos que para quaisquer valores naturais de n, os termos desta sucessão nunca serão negativos e nem zero, portanto as alternativas A, D e E não são correctas. Para a alternativa B temos

$$u_n = \frac{n^2+1}{n+3} = 2 \Rightarrow n^2+1 = 2n+6 \Rightarrow n^2-2n-5 = 0 \Rightarrow \Delta = (-2)^2 - 4\cdot1\cdot(-5) = 24,$$

então $n_{1,2} = \dfrac{2\pm\sqrt{24}}{2}$ em que nenhum deles é números natural, pois $\sqrt{24}$ não é inteiro. Logo a alternativa B não é correcta. Para alternativa C temos

$$u_n = \frac{n^2+1}{n+3} = 1 \Rightarrow n^2+1 = n+3 \Rightarrow n^2-n-2 = 0 \Rightarrow (n+1)(n-2) = 0 \Rightarrow n = 2 \vee n = -1.$$

Apenas $n = 2$ é natural e visto que $u_2 = \frac{2^2+1}{2+3} = 1$, então, a resposta certa é alternativa **C**.

24. O nono termo da sucessão $u_n = \dfrac{n^2+1}{2n+3}$ é:

A: $\frac{19}{21}$ B: $\frac{65}{21}$ C: $\frac{80}{21}$ D: $\frac{82}{21}$ E: $\frac{10}{21}$

UEM - DRA

Resolução: Para obter o nono termo basta subistituir o valor de n por 9, i.e., $u_9 = \frac{9^2+1}{2\cdot 9+3} = \frac{82}{21}$. Assim, a resposta certa é **D**.

Considere a sucessão $\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \ldots$ **para responder as questões** $25, 26$ **e** 27**.**

25. A sucessão é:

A. Decrescente B. Finita C. Progressão aritmética D. Progressão geométrica E. Crescente

Resolução: Seja u_n o termo geral da sucessão dada. Vejamos que $\frac{u_2}{u_1} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{3}{2}} = \frac{8}{9} \neq \frac{u_3}{u_2} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{4}{3}} = \frac{15}{16}$, logo não é ua progressão geométrica. Também vemos que $u_2 - u_1 = \frac{4}{3} - \frac{3}{2} = -\frac{1}{6} \neq u_3 - u_2 = \frac{5}{4} - \frac{4}{3} = -\frac{1}{12}$, logo não é uma progressão aritmética. Por outro lado, a sucessão dada não é finita, pois temos infinitos termos indicados pelas reticências. Para determinar a monotonia, achemos primeiro o termo geral. Para o numerador temos $3, 4, 5, 6, \ldots$ que são números naturais iniciando de 3, isto quer dizer que o termo geral do numerador é $n + 2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. De um modo similar temos o termo geral $n + 1, n = 1, 2, 3, \ldots$, para o denominador . Assim, $u_n = \dfrac{n+2}{n+1}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n = \frac{n+3}{n+2} - \frac{n+2}{n+1} &= \frac{(n+3)(n+1) - (n+2)^2}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n^2 + 4n + 3 - n^2 - 4n - 4}{(n+1)(n+2)} = -\frac{1}{(n+1)(n+2)} < 0. \end{aligned}$$

Isto quer dizer que a sucessão é decrescente, logo, a resposta certa é **A**.

26. O termo geral da sucessão é:

A. $\dfrac{n}{n+2}$ B. $\dfrac{n+2}{n+1}$ C. $\dfrac{n+1}{n+2}$ D. $\dfrac{n+2}{n}$ E. $\dfrac{n}{n+1}$

Resolução: Com base no exercício anterior temos que o termo geral é $u_n = \dfrac{n+2}{n+1}$. Deste modo, a resposta certa é **B**.

27. O vigésimo quinto termo é:

A: $u_{25} = \dfrac{25}{27}$ B: $u_{25} = \dfrac{27}{26}$ C: $u_{25} = \dfrac{26}{27}$ D: $u_{25} = \dfrac{27}{25}$ E: $u_{25} = \dfrac{25}{26}$

Resolução: $u_{25} = \dfrac{25+2}{25+1} = \dfrac{27}{26}$. Logo, a resposta certa é **B**.

28. A soma dos 9 primeiros termos de uma progressão aritmética é 63 e o segundo termo é -2 o primeiro termo e a diferença são:

A: $a_1 = -5 \wedge d = -3$ B: $a_1 = 5 \wedge d = -2$ C: $a_1 = -5 \wedge d = 3$
D: $a_1 = 5 \wedge d = 3$ E: $a_1 = 2 \wedge d = -3$

Resolução: A soma dos primeiros n termos de uma PA é dada por $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$, então $\frac{(a_1+a_9)\cdot 9}{2} = 63$ e o termo geral de uma PA é $a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_1 + d = -2$ e $a_9 = a_1 + 8d \Rightarrow \frac{(a_1+a_1+8d)\cdot 9}{2} = 7 \Rightarrow$ $a_1 + 4d = 7$ Resolvendo o sistema de equações formado pelas equações acima temos:

UEM - DRA

$$\begin{cases} a_1 + 4d = 7 \\ a_1 + d = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 4d = 7 \\ d = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = -5 \\ d = 3. \end{cases}$$

A resposta certa é alternativa **C**.

29. O terceiro e o oitavo termos de uma progressão geométrica são respectivamente 2 e $\frac{1}{16}$. A razão da progressão é:

A: $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$ B: $q = -\frac{1}{2}$ C: $q = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ D: $q = \frac{1}{2}$ E: $q = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Resolução: O termo geral de uma progressão geométrica é $u_n = a_1 \cdot q^{n-1}$. Então,

$$\begin{cases} u_1 \cdot q^2 = u_3 \\ u_1 \cdot q^7 = u_8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 \cdot q^2 = 2 \\ u_1 \cdot q^7 = \frac{1}{16} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 \cdot q^2 = 2 \\ q^5 = \frac{1}{32} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 8 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Neste caso temos **D** como alternativa certa.

30. A função $y = g(x)$ tem um máximo local (relativo) em $x = 3$, então:

A: $y = g(x)$ não é derivável em $x = 3$

B: A concavidade da função em $x = 3$ é virada para cima

C: A função é decrescente em $]-\infty, 3[$

D: $g'(3) = -1$

E: O coeficiente angular da recta tangente à curva em $x = 3$ é $a = 0$ ou $y = g(x)$ não é derivável nesse ponto.

Resolução: Quando uma função atinge um extremo local num ponto e ela é derivável nesse ponto, então a derivada da função nesse ponto é nula (coeficiente angular da recta tangente neste ponto é igual a zero) ou não existe. Logo, a resposta certa é **E**.

31. O coeficiente angular da recta r, tangente à uma curva, no ponto de abcissa x_0, é $a = 0$. É falso afirmar que:

A: A recta r não é paralela ao eixo das ordenadas

B: A recta r é paralela ao eixo das abcissas

C: A primeira derivada da função é nula no ponto de abcissa x_0

D: A função não tem um ponto crítico em x_0

E: O sinal da primeira derivada muda em x_0

Resolução: O ponto onde a recta tangente à curva tem coeficiente angular nulo, a primeira derivada da função é nula nesse ponto e os pontos onde a primeira derivada é nula ou não existe chamam-se pontos críticos. Portanto, o ponto em questão é um ponto crítico para a função em questão. Deste modo é falso afirmar que "a função não um ponto crítico em x_0". Logo, a resposta certa é **D**.

32. A primeira derivada da função $y = \frac{(x^2+2)^2}{2x+3}$ é:

A: $\frac{2(x^2+2)(3x^2+6x+2)}{(2x+3)^2}$ B: $\frac{2(x^2+2)(3x^2+6x-2)}{(2x+3)^2}$ C: $\frac{2(x^2+2)(-x^2+2x+1)}{(2x+3)^2}$

UEM - DRA

D: $\dfrac{2(x^2+2)(3x^2+1)}{(2x+3)^2}$ E: $\dfrac{2(x^2+2)(-x^2+2x+5)}{(2x+3)^2}$

Resolução: Sabe-se que a derivada do quociente $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{f'(x)g(x-f(x)g'(x))}{[g(x)]^2}$, temos:

$$\begin{aligned} y' &= \left[\frac{(x^2+2)^2}{2x+3}\right]' = \frac{2(x^2+2)(2x+3)-(x^2+2)^2\cdot 2}{(2x+3)^2} \\ &= \frac{2(x^2+2)(2x+3-x^2-2)}{(2x+3)^2} = \frac{2(x^2+2)(-x^2+2x+1)}{(2x+3)^2}. \end{aligned}$$

Deste modo, a resposta certa é **C**.

33. A segunda derivada de $y = xe^{x^2+1}$ é:

A: $e^{x^2+1}(1+x)$ B: $e^{x^2+1}(1+2x)$ C: $e^{x^2+1}(1+2x^2)$ D: $2xe^{x^2+1}(3+2x^2)$ E: $-xe^{x^2+1}(1+x^2)$

Resolução: Derivando a função dada temos:

$$\begin{aligned} y' &= \left(xe^{x^2+1}\right)' = e^{x^2+1} + 2x^2e^{x^2+1} = e^{x^2+1}(1+2x^2) \\ y'' &= 2xe^{x^2+1}(1+2x^2) + 4xe^{x^2+1} = 2xe^{x^2+1}(3+2x^2). \end{aligned}$$

Então, a resposta certa é **D**.

34. O valor de k que torna a função $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{1-x}, & x \geq -2 \\ k - x^2, & x < -2 \end{cases}$ contínua no ponto $x = -2$ é:

A: 5 B: 3 C: 2 D: -3 E: -5

Resolução: Uma função $f(x)$ é contínua no ponto $x = a$ se $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$. Deste modo,

- $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2}(k - x^2) = k - 4$
- $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{3}{1-x} = 1$
- $f(-2) = 1.$

Assim temos, $k - 4 = 1 \Rightarrow k = 5$. Então, a resposta certa é **A**.

Dada a função $y = f(x)$ **sabe-se que** $f(4) = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = -\infty$. **Com base na informação responda às questões de** 35 **a** 37.

35. O $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ é:

A: $+\infty$ B: $-\infty$ C: $\pm\infty$ D: 0 E: Não existe

Resolução: Se o limite de uma função num ponto existe, então ele é único. Por outro lado, se o limite existe então os limites laterais nesse ponto são iguais. No nosso caso, os limites laterais não iguais, logo o limite da função no ponto $x = 3$ não existe. Assim, a resposta certa é **E**.

UEM - DRA

36. A função tem uma assímptota vertical em:

A: $x = 3$ B: $y = 3$ C: $x = -1$ D: $y = 1$ E: $x = 0$

Resolução: A abcissa $x = a$ diz-se assímptota vertical se pelomenos um dos limites $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ é igual a $+\infty$ ou $-\infty$. No nosso exercício isso acontece com $x = 3$. Portanto, a alternativa certa é **A**.

37. Se $g(x) = \dfrac{1}{x}$, então $g(f(4))$ é:

A: $+\infty$ B: $-\infty$ C: $\pm\infty$ D: Não existe E: 0

Resolução: Sabe-se que $f(4) = 0$, então $g(f(4)) = g(0) = \frac{1}{0}$ que simplesmente não existe. Portanto, a alternativa certa é **D**.

38. A integral $\displaystyle\int \left(3x^5 + e^x - \frac{1}{x}\right) dx$ é:

A: $15x^4 + e^x + \dfrac{1}{x^2} + c$ B: $\dfrac{1}{2}x^6 + e^x - \ln|x| + c$ C: $\dfrac{1}{2}x^6 + xe^x - \ln|x| + c$
D: $\dfrac{1}{2}x^6 + xe^x - 1 + c$ E: $\dfrac{1}{2}x^6 + xe^x + \ln|x| + c$

Resolução: Calculando o integral temos:

$$\begin{aligned}\int \left(3x^5 + e^x - \frac{1}{x}\right) dx &= 3\int x^5 dx + \int e^x dx - \int \frac{dx}{x}\\ &= \frac{3x^{5+1}}{5+1} + e^x - \ln|x| + c = \frac{x^6}{2} + e^x - \ln|x| + c.\end{aligned}$$

Logo, a resposta certa é **B**. As outras alternativas não estão correctas porque ao derivar as funções dadas não se obtém a função integrando, por exemplo, derivando a função da opção A temos, $\left(15x^4 + e^x + \frac{1}{x^2} + c\right)' = 60x^3 + e^x - \frac{2}{x^3}$. Claramente esta função é diferente do integrando.

39. A expressão $4i^3 + 3i^2 + 2i + 1$ é equivalente a:

A: $4i + 6$ B: $1 + 2i$ C: $2i - 2$ D: $2 + 2i$ E: $-2i - 2$

Resolução: Sabe-se que $i = \sqrt{-1} \Rightarrow i^2 = -1$, então

$$4i^3 + 3i^2 + 2i + 1 = 4i \cdot i^2 + 3i^2 + 2i + 1 = -4i - 3 + 2i + 1 = -2i - 2.$$

Logo, a alternativa certa é **E**.

40. A condição para que o número complexo $z = (a-3) + (b-5)i$, onde a e b são números reais, seja um número real não nulo é:

A: $a \neq 3$ B: $b = 5$ C: $b \neq 5 \wedge a \neq 3$ D: $b \neq 5 \wedge a = 3$ E: $b = 5 \wedge a \neq 3$

Resolução: Para que um número complexo seja real e não nulo, a parte real deve ser diferente de zero e a parte imaginária nula i.e., $a - 3 \neq 0 \wedge b - 5 = 0 \Rightarrow a \neq 3 \wedge b = 5$. Logo, a alternativa certa é **E**.

UEM - DRA