

# Exame de Matemática I de 2024

## Correcção do exame de Matemática I de 2024

1. Indique as soluções da inequação :  $|x - 2| \geq 6$

A:  $x \in ] - \infty, 0]$       B:  $x = 2$  ou  $x = 6$     C:  $x \in ] - \infty, -4] \cup [8, +\infty[$     D:  $x \in [2, 6]$     E:  $[1, 2] \cup [5, +\infty[$ .

**Resolução:** Para  $d > 0$  temos:

$$|x - a| \geq d \Leftrightarrow x - a \geq d \vee x - a \leq -d \Rightarrow x \in ] - \infty, a - d] \cup [a + d, +\infty[.$$

Assim,

$$|x - 2| \geq 6 \Rightarrow x \in ] - \infty, -4] \cup [8, +\infty[.$$

A resposta certa é **C**.

- Note que a solução da inequação  $|x - 2| \geq 6$  é o conjunto de números reais cuja distância até 2 é maior ou igual a 6. A distância de 0 até 2 é 2, a distância de 2 até 2, é 0. Estes números servem de contra-exemplo para provar que as restantes alternativas não estão correctas.

2. Indique as soluções da equação  $|x^2 - x + 1| = 2x - 1$ :

A:  $x = -1 \vee x = 1$     B:  $x = 0 \vee x = 2$     C:  $x = -1 \vee x = 2$     D:  $x = 1 \vee x = 2$     E:  $x = -2 \vee x = 2$ .

**Resolução :** A expressão dada tem sentido se  $2x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}$ . Por outro lado, temos:

$$|x^2 - x + 1| = \begin{cases} x^2 - x + 1, & \text{se } x^2 - x + 1 \geq 0 \\ -(x^2 - x + 1), & \text{se } x^2 - x + 1 < 0. \end{cases}$$

Assim,

$$|x^2 - x + 1| = 2x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + 1 = 2x - 1, & \text{se } x^2 - x + 1 \geq 0 \\ -(x^2 - x + 1) = 2x - 1, & \text{se } x^2 - x + 1 < 0. \end{cases}$$
$$x^2 - 3x + 2 = 0, \text{ se } x \in \mathbb{R}$$
$$(x - 2)(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 1 \vee x = 2.$$

Ambas soluções são maiores que  $1/2$ , então a resposta certa é **D**.

- Note que  $x^2 - x + 1 > 0$  para qualquer  $x \in \mathbb{R}$ , pois,  $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 < 0$  e  $y_v = -\frac{\Delta}{4 \cdot 1} = \frac{3}{4} > 0$ , logo,  $|x^2 - x + 1| = x^2 - x + 1$ .

- O módulo de um número é sempre não negativo, logo, o segundo membro da equação deve ser não negativo. Assim,  $x = -2$ ,  $x = -1$  e  $x = 0$  não satisfazem a equação.

3. A igualdade  $-x = |-x|$  é válida para:

A:  $x \in ]-\infty, 0]$       B:  $x \in ]0, +\infty[$       C:  $\forall x \in \mathbb{R}$       D:  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$       E:  $\emptyset$

**Resolução :** Pela propriedade de módulo,  $|-x| = |x|$  que por definição,  $|x| = -x$  se  $x \leq 0$ . Então, a resposta certa é **A**.

- Note que  $x = 1$  não satisfaz a equação  $-x = |-x|$  mas  $x = -1$  satisfaz.

4. Seja  $f(x) = |x - 2|$  e  $g(x) = x - 2$ . Para que valores  $f(x) - g(x) = 0$ ?

A.  $x = -4$ ,  $x = 4$       B.  $x = 0$       C.  $x \in [-2, 2]$       D.  $x \in [2, +\infty[$       E.  $x = -2$

**Resolução :** Temos,  $f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x) \Leftrightarrow |x - 2| = x - 2 \Leftrightarrow x - 2 = x - 2 \Leftrightarrow x \geq 2$ , pois,  $|x - 2| = x - 2$  se e somente se  $x - 2 \geq 0$  pela definição de módulo. A resposta certa é **D**.

- Note que  $x = -4$ ,  $x = -2$  e  $x = 0$  não são soluções da inequação dada.

5. Seja  $|x - 2| \leq 5$  e  $|y - 1| = 1$ . Determine o valor máximo de  $|x - y|$  se  $x$  e  $y$  são soluções das expressões acima.

A. 4                      B. 5                      C. 3                      D. 6                      E. 7

**Resolução :** Temos:

$$\begin{aligned} |x - 2| \leq 5 &\Rightarrow -5 + 2 \leq x \leq 5 + 2 \Rightarrow -3 \leq x \leq 7 \\ |y - 1| = 1 &\Rightarrow y - 1 = 1 \vee y - 1 = -1 \Rightarrow y = 2 \vee y = 0. \end{aligned}$$

Desta forma, o máximo procurado  $\max\{|x - y|, x \in [-3, 7], y = 0 \vee y = 1\} = 7$ , pois, fixando  $y = 0$  teremos  $|x - 0| = |x| \leq 7$  e se fixarmos  $y = 1$ , teremos  $|x - 1| \leq 6$ . O máximo é obtido quando  $x = 7$  e  $y = 0$ . A resposta certa é **E**.

6. Considere a função  $f(x) = |x^2 - 4|$ . Para que valores de  $x$  a função é crescente?

A.  $x \in ]-2, 0[ \cup ]2, +\infty[$       B.  $x \in ]0, +\infty[$       C.  $\forall x \in \mathbb{R}$       D.  $x \in [0, 2]$       E.  $x \in ]-\infty, -2[ \cup ]2, +\infty[$

**Resolução :** Temos:

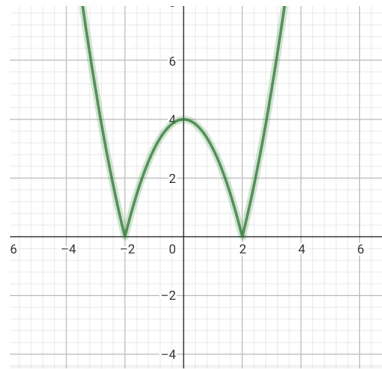
$$f(x) = |x^2 - 4| = \begin{cases} x^2 - 4, & \text{se } x^2 - 4 \geq 0 \\ 4 - x^2, & \text{se } x^2 - 4 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2 - 4, & \text{se } x \in ]-\infty, -2[ \cup ]2, +\infty[ \\ 4 - x^2, & \text{se } x \in ]-2, 2[. \end{cases}$$

Vamos estudar o sinal da derivada. Temos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \begin{cases} 2x, & \text{se } x \in ]-\infty, -2[ \cup ]2, +\infty[ \\ -2x, & \text{se } x \in ]-2, 2[. \end{cases} \\ f'(x) > 0 &\Rightarrow x \in ]-2, 0[ \cup ]2, +\infty[. \end{aligned}$$

A resposta certa é **A**.

Este resultado pode também ser obtido através do esboço do gráfico de  $f(x) = |x^2 - 4|$  e posteriormente uma leitura gráfica. O gráfico é:



7. O Paulo e a Luísa vão a um teatro com quatro amigos. Os seis amigos se sentam um ao lado de outro. Qual a probabilidade do Paulo e da Luísa se sentarem juntos:

A.  $\frac{2 \times 4!}{6!}$       B.  $\frac{4!}{6!}$       C.  $\frac{1}{3}$       D.  $\frac{2}{3}$       E.  $4! \times 2!$

**Resolução :** Supomos que Paulo e Luísa se sentam juntos, então eles podem permutar entre si. Desta forma, Paulo e Luísa formam uma figura e juntamente com os restantes 4 colegas, ficando 5 figuras que podem permutar entre si. Assim, o número de casos favoráveis é igual a  $2! \cdot 5!$  e o número de casos possíveis é  $6!$ . Assim, a probabilidade de Paulo e Luísa se sentarem juntos é:  $\frac{2! \times 5!}{6!} = \frac{1}{3}$ . Logo, a resposta certa é **C**.

8. Numa caixa com 12 compartimentos, vão arrumar-se 10 copos: 7 amarelos, 1 verde, 1 azul e 1 roxo. Em cada compartimento cabe apenas um copo. De quantas maneiras diferentes se podem arrumar os 10 copos nessa caixa?

A.  $A_7^{12} \times 3!$       B.  $C_7^{12} \times A_3^5$       C.  $A_7^{12} \times C_3^5$       D.  $A_3^{35}$       E.  $A_3^{35} \times C_{32}^{35}$

**Resolução :** Não interessa a ordem dos copos amarelos entre si, daí o número de possibilidades de arrumar os 7 copos amarelos na caixa é  $C_7^{12}$ . Restam 5 espaços vazios para arrumar os 3 copos de cores diferentes. A ordem interessa pois, sempre que trocamos a posição de dois copos será uma arrumação diferente. O total de possibilidades é  $A_3^5$ . Assim, o número de possibilidades pretendido é  $C_7^{12} \times A_3^5$ . A resposta certa é **B**.

9. De quantas maneiras podem ser escolhidos um presidente e um vice-presidente de entre um grupo de 20 pessoas?

A: 190      B: 40      C: 400      D: 380      E: 480

**Resolução :** Temos,  $A_{20}^2 = \frac{20!}{18!} = 20 \cdot 19 = 380$ . pois, é um agrupamento em que a ordem importa e é sem reposição. Por exemplo, João presidente e António vice presidente é diferente de António presidente e João vice-presidente. A resposta certa é **D**.

10. Uma empresa pretende oferecer 3 telefones aos seus funcionários, escolhendo aleatoriamente duas mulheres e um homem. Sabendo que na empresa trabalham 50 mulheres e 20 homens de quantas formas podem ser dados os telefones?

A:  $C_3^{70} - C_2^{50}$       B:  $C_3^{70} - 20$       C:  $C_2^{50}$       D:  $C_2^{50} \times 20$       E:  $C_3^{70}$

**Resolução :** Temos que contar o número de possibilidades de oferecer telefones a um homem e a duas mulheres. Por fim, devemos multiplicar estes números. Temos,  $C_2^{50} \cdot C_1^{20} = C_2^{50} \times 20$ . A resposta certa é **D**.

11. Uma linha do Triângulo de Pascal é constituída por todos os elementos da forma  $C_p^{14}$ . Escolhido, ao acaso, um elemento dessa linha, qual a probabilidade de ele ser o número 14?

A:  $\frac{1}{15}$                       B:  $\frac{1}{14}$                       C:  $\frac{2}{15}$                       D:  $\frac{4}{15}$                       E:  $\frac{3}{14}$

**Resolução:** Seja  $E$  o evento “saída do número 14”. Temos o seguinte espaço de resultados

$$\Omega = \{C_p^{14} : p = 0, 1, \dots, 14\} \implies |\Omega| = 15.$$

$$\text{Probabilidade}(E) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}} = \frac{2}{15},$$

pois, o número 14 aparece duas vezes,  $C_1^{14}$  e  $C_{13}^{14}$ , pois  $C_1^{14} = C_{13}^{14} = 14$ . A resposta certa é **C**.

12. No desenvolvimento do binómio  $(x - \frac{a}{x})^6$ , o coeficiente do termo  $x^4$  é 12. Qual o valor de  $a$ ?

A:  $\sqrt{15}$                       B: 3                      C: 1                      D: 6                      E: -2

**Resolução:** O termo  $x^4$  é produto de  $x^5$  e  $-\frac{a}{x}$ , cujo coeficiente é  $C_1^6 \cdot (-a) = 12 \implies -6a = 12 \implies a = -2$ . A resposta certa é **E**.

13. Seja  $U$  espaço de resultados de uma experiência aleatória e  $A$  e  $B$  dois acontecimentos. Sabendo que  $P(A) = 0,3$ ,  $P(A \cup B) = 0,7$  e que  $A$  e  $B$  são incompatíveis, qual o valor de  $P(B)$ ?

A: 0,21                      B: 0,4                      C: 0,6                      D: 0,61                      E: 1

**Resolução :** Temos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B),$$

pois,  $A$  e  $B$  são incompatíveis ( $P(A \cap B) = 0$ ). Assim,

$$P(B) = P(A \cup B) - P(A) = 0,7 - 0,3 = 0,4.$$

A resposta certa é **B**.

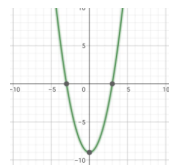
14. Qual dos seguintes conjuntos descreve o domínio da função real de variável real  $f(x) = \frac{\sqrt{18-2x^2}}{x^3}$ ?

A:  $[-3, 3]$                       B:  $[-3, 0[$                       C:  $] -\infty, -3] \cup [3, +\infty[$                       D:  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$                       E:  $[-3, 0[ \cup ]0, 3]$

**Resolução :** Temos:

$$\begin{aligned} \text{Dom}(f) &= \{x \in \mathbb{R} : 18 - 2x^2 \geq 0 \wedge x^3 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : 9 - x^2 \geq 0 \wedge x \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 9 \leq 0 \wedge x \neq 0\} = [-3, 0[ \cup ]0, 3], \end{aligned}$$

pois, o gráfico de  $g(x) = x^2 - 9$  é:



A resposta certa é **E**.

15. O contradomínio da função  $f(x) = \frac{1}{2} \cos(x)$  é:

A:  $[-2, 2]$                       B:  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$                       C:  $] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$                       D:  $[-1, 1]$                       E:  $\mathbb{R}$

**Resolução :** Temos,  $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ ,  $\forall x \in \mathbb{R} \implies -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \cos(x) \leq \frac{1}{2}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

Na última desigualdade, usamos a propriedade para números reais  $a, b$ , se  $a < b$  implica para qualquer  $c > 0$ ,  $ac < bc$ . Desta forma, o contradomínio de  $f(x) = \frac{1}{2} \cos(x)$  é  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ . A resposta certa é **B**.

- Note que, por exemplo  $y = 1$  não pertence ao contradomínio de  $f$ , pois,  $1 = \frac{1}{2} \cos x$  implica  $\cos x = 2$  que não tem solução em  $\mathbb{R}$ . Desta forma, as alternativas A, D e E não estão correctas.
- Note que  $f(\pi) = \frac{1}{2} \cos(\pi) = -\frac{1}{2}$ , logo,  $y = -\frac{1}{2}$  pertence ao contradomínio. Desta forma, alternativa C não está certa.

16. Seja  $f$  uma função de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = e^{x+1}$ . Qual dos pontos pertence ao gráfico de  $f$ ?

- A.  $(-1, 0)$       B.  $(\ln 2, 2e)$       C.  $(\ln 5, 6)$       D.  $(-2, e)$       E.  $(0, 1)$

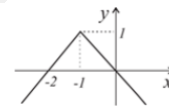
**Resolução :** Tendo em conta a definição de função, isto é,  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é função se  $\forall x \in D, \exists ! y \in \mathbb{R} : y = f(x)$ , teremos:

- $x = -1, f(-1) = e^{(-1+1)} = e^0 = 1$ , então,  $(-1, 0)$  não pertence ao gráfico de  $f(x)$ ;
- $x = \ln 2, f(\ln 2) = e^{(\ln 2 + 1)} = e^{\ln 2} e = 2e$ , então,  $(\ln 2, 2e)$  **pertence ao gráfico de  $f(x)$** ;
- $x = \ln 5, f(\ln 5) = e^{(\ln 5 + 1)} = e^{\ln 5} e = 5e$ , então,  $(\ln 5, 6)$  não pertence ao gráfico de  $f(x)$ ;
- $x = -2, f(-2) = e^{-1} = \frac{1}{e}$ , então,  $(-2, e)$  não pertence ao gráfico de  $f(x)$ ;
- $x = 0, f(0) = e^1 = e$ , então,  $(0, 1)$  não pertence ao gráfico de  $f(x)$ .

A resposta certa é **B**.

17. O gráfico ao lado representa a função ?

- A:  $y = 1 - |x - 1|$       B:  $y = 1 - |x + 1|$       C:  $y = -1 + |x + 1|$   
 D:  $y = -1 + |x - 1|$       E:  $y = -1 - |x - 1|$



**Resolução :** Verifiquemos as principais características. Temos:

- quando  $x = -1$ , a função  $y = 1 - |x - 1|$  toma valor  $-1$ , o que contradiz com o gráfico dado, logo, esta não é a função do gráfico dado;
- quando  $x = -1$ , a função  $y = 1 - |x + 1|$  toma valor  $1$ , os zeros da função são  $x = -2$  e  $x = 0$ , e este gráfico pode ser obtido uma translação de  $y_1 = |x|$ , com os seguintes passos:  $y_2 = -|x|$  (o simétrico de  $y_1$ ),  $y_3 = -|x + 1|$  (transladar o gráfico de  $y_2$  uma unidade para a esquerda) e  $y = 1 - |x + 1|$  (transladar o gráfico de  $y_3$  uma unidade para cima). **Esta função corresponde ao gráfico dado;**
- quando  $x = -1$ , a função  $y = -1 + |x + 1|$  toma valor  $-1$ , o que contradiz com o gráfico dado, logo, esta não é a função do gráfico dado;
- quando  $x = -1$ , a função  $y = -1 + |x - 1|$  toma valor  $-1$ , o que contradiz com o gráfico dado, logo, esta não é a função do gráfico dado;
- quando  $x = -1$ , a função  $y = -1 - |x - 1|$  toma valor  $-3$ , o que contradiz com o gráfico dado, logo, esta não é a função do gráfico dado.

A resposta certa é **B**.

18. Indique a opção que representa todas as soluções da equação  $4x^2 - 4x + 1 = 0$  é:

- A:  $\frac{1}{2}$       B:  $0, \frac{1}{2}$       C:  $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$       D:  $1$  e  $4$       E: Não existem soluções válidas

**Resolução :** Temos,  $4x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow (2x - 1)^2 = 0 \Rightarrow 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ . A resposta certa é **A**.

- Note que  $x = 0, x = 1, x = 4$  e  $x = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$  não satisfazem a equação dada.

19. De entre as seguintes funções, qual aquela que não é injectiva (onde não se encontra indicado  $x \in \mathbb{R}$ ):

A:  $y = e^x$       B:  $y = \ln(x), x > 0$       C:  $y = \sin(x)$       D:  $y = \frac{1}{x}, x \neq 0$       E:  $y = x^3$ .

**Resolução :** Uma função  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é injectiva se  $\forall x_1, x_2 \in D, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ , ou de forma equivalente,  $\forall x_1, x_2 \in D, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ . Verifiquemos para cada função. Temos:

- Para  $f(x) = e^x$ ,  $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow e^{x_1} = e^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$ , logo,  $f(x) = e^x$  é uma função injectiva;
- Para  $f(x) = \ln(x)$ , tomemos  $x_1, x_2 > 0$ ,  $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \ln(x_1) = \ln(x_2) \Rightarrow \ln(x_1) - \ln(x_2) = 0 \Rightarrow \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \ln 1, \Rightarrow \frac{x_1}{x_2} = 1 \Rightarrow x_1 = x_2$  logo,  $f(x) = \ln(x)$  é uma função injectiva;
- $f(x) = \sin(x)$  não é injectiva, pois,  $0 \neq \pi$  mas  $\sin(0) = \sin(\pi) = 0$ ;
- Para  $f(x) = \frac{1}{x}$ , sejam  $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0$ , tais que  $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$ , logo,  $f(x) = \frac{1}{x}$  é uma função injectiva;
- Para  $f(x) = x^3$ , temos  $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow x_1^3 - x_2^3 = 0 \Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$ , logo,  $f(x) = x^3$  é uma função injectiva.

A resposta certa é **C**.

20. Considere as funções  $f(x) = x^2 - 2$  e  $g(x) = x + 1$ . A composição  $(f \circ g)(x)$  resulta na função:

A:  $y = x^2 + 2x - 1$     B:  $y = x^2 - 1$     C:  $y = x^2 - 2x + 1$     D:  $y = x^2$     E:  $y = x^2 - x - 1$ .

**Resolução :** Usando a definição de composição de funções, temos:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (x + 1)^2 - 2 = x^2 + 2x + 1 - 2 = x^2 + 2x - 1.$$

A resposta certa é **A**.

21. A soma de todos os números naturais ímpares menores que 100 é:

A: 50      B: 495      C: 2450      D: 2500      E: 5500

**Resolução :** A sucessão em causa é uma progressão aritmética de razão  $d = 2$ , pois:

$$3 - 1 = 5 - 3 = 7 - 5 = \dots = 2 = d.$$

Visto que o primeiro termo é 1, o termo geral  $a_n = 1 + 2(n - 1) = 2n - 1$ , então a soma pretendida é  $s_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ . O número de termos a somar é a ordem  $n$  do termo 99,

$$99 = 2n - 1 \Rightarrow n = 50 \implies s_{50} = \frac{a_1 + a_{50}}{2} \cdot 50 = 25(1 + 99) = 2500.$$

A resposta certa é **D**.

22. A soma dos 5 primeiros termos de uma progressão geométrica de razão  $\frac{2}{3}$  é 211. Indique o 5º termo da progressão:

A: 16      B: 20      C: 15      D: 105      E: 48

**Resolução :** Designando a razão por  $q$ , o termo geral por  $a_n$  e a soma dos primeiros  $n$  termos por  $s_n$ , teremos:

$$s_5 = a_1 \cdot \frac{1 - q^5}{1 - q} \Leftrightarrow 211 = a_1 \cdot \frac{1 - \frac{2^5}{3^5}}{1 - \frac{2}{3}} \Leftrightarrow a_1 = 3^4 = 81 \implies a_5 = a_1 q^4 = 81 \cdot \frac{2^4}{3^4} = 16.$$

A resposta certa é **A**.

23. A progressão de termo geral  $u_n = 2^{-2n}$  é uma progressão:

- A: Aritmética de razão 2  
 B: Aritmética de razão  $1/4$   
 C: Geométrica de razão 2  
 D: Geométrica de razão  $1/4$   
 E: Nenhuma das anteriores

**Resolução :** Temos  $u_n = 2^{-2n} = \left(\frac{1}{4}\right)^n$ . Assim, para qualquer  $n \in \mathbb{N}$  teremos:  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{4^{n+1}}}{\frac{1}{4^n}} = \frac{1}{4}$ .

Desta forma,  $u_n$  é uma progressão geométrica de razão  $q = \frac{1}{4}$ . A resposta certa é **D**.

24. Seja  $(u_n)$  uma sucessão definida por  $u_n = 2 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ . Quantos termos de ordem ímpar pertencem ao intervalo  $[\frac{83}{41}, \frac{67}{33}]$ ?

- A: 1                      B: 3                      C: 4                      D: 5                      E: 8

**Resolução :** Seja  $n$  um número ímpar. Então,  $n + 1$  é par,  $(-1)^{n+1} = 1$  e

$$\frac{83}{41} \leq u_n \leq \frac{67}{33} \Rightarrow \frac{83}{41} \leq 2 + \frac{1}{n} \leq \frac{67}{33} \Rightarrow \frac{83}{41} \leq \frac{2n+1}{n}, \frac{2n+1}{n} \leq \frac{67}{33}$$

$$n \leq 41 \wedge n \geq 33 \Rightarrow 33 \leq n \leq 41.$$

O total de números naturais ímpares entre 33 e 41 é 5. A resposta certa é **D**.

25. Em relação à sucessão  $(u_n)$  de termo geral  $u_n = 3 + \frac{1}{n}$  pode afirmar-se que:

- A:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$                       B:  $u_n$  é uma sucessão divergente                      C:  $u_n$  é uma sucessão convergente  
 D:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \infty$                       E:  $u_n$  é uma sucessão crescente.

**Resolução :** Temos:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$ , logo,  $u_n$  é convergente. Analisemos a monotonia. Para qualquer  $n \in \mathbb{N}$ , temos:

$$u_{n+1} - u_n = 3 + \frac{1}{n+1} - \left(3 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)} < 0.$$

Logo,  $u_n$  é decrescente. A resposta certa é **D**.

26. O limite, quando  $n \rightarrow \infty$  da sucessão de termo geral  $u_n = \frac{10n+1}{\frac{n}{2}-4}$  é:

- A:  $\frac{1}{4}$                       B:  $\frac{1}{2}$                       C: 5                      D: 10                      E: 20

**Resolução :** Temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10n+1}{\frac{n}{2}-4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(10 + \frac{1}{n})}{n(\frac{1}{2} - \frac{4}{n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10 + \frac{1}{n}}{\frac{1}{2} - \frac{4}{n}} = 20.$$

A resposta certa é **E**.

27. O limite, quando  $n \rightarrow \infty$  da sucessão de termo geral  $u_n = 1 + e^{-2n}$  é:

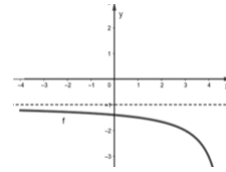
- A:  $-\infty$                       B: 2                      C: 1                      D: 0                      E:  $+\infty$

**Resolução :** Temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + e^{-2n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + e^{-\infty}) = 1 + 0 = 1.$$

A resposta certa é **C**.

28. A figura representa parte do gráfico de uma função  $f$  de domínio  $\mathbb{R}$ , sendo  $y = 1$  a única assíntota do seu gráfico. Qual o valor de  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{f(x)}$ ?



- A:  $-\infty$     B:  $-3$     C:  $-1$     D:  $3$     E:  $0$

**Resolução :** Temos:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{f(x)} = \frac{3}{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)} = \frac{3}{1} = 3$ . A resposta certa é **D**.

29. Para que número real positivo  $k$  é contínua a função definida por  $f(x) = \begin{cases} \log_2^{(k+x)}, & x \geq 0 \\ \frac{\sin(2x)}{x}, & x < 0? \end{cases}$
- A:  $0$                       B:  $1$                       C:  $2$                       D:  $3$                       E:  $4$

**Resolução :** Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua no ponto  $x = a$  se  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ .

Claramente  $f(x)$  é contínua em  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Determinemos  $k$  de tal maneira que  $f$  seja contínua também no ponto  $x = 0$ . Temos:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) \implies \log_2^k = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(2x)}{x} \Rightarrow \log_2^k = 2 \Rightarrow k = 2^2 = 4.$$

A resposta certa é **E**.

30. De uma função  $h$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , sabe-se que  $h$  é par e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (h(x) - 2x) = 0$ . Qual o valor de  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ ?
- A:  $-\infty$                       B:  $-2$                       C:  $0$                       D:  $2$                       E:  $+\infty$

**Resolução :** Pelo facto de  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (h(x) - 2x) = 0$ , concluímos que a recta  $y = 2x$  é assíntota oblíqua da função  $h(x)$ . Desta forma,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$ . A resposta certa é **E**.

31. Qual o valor de  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - x - 12}{16 - x^2}$ ?

- A:  $-\frac{7}{8}$                       B:  $-\frac{3}{4}$                       C:  $1$                       D:  $\frac{5}{3}$                       E:  $2$

**Resolução :** Substituindo directamente obtemos indeterminação  $\frac{0}{0}$ . Factorizando e simplificando, teremos

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - x - 12}{16 - x^2} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x+3)(x-4)}{(4-x)(4+x)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x+3)(x-4)}{-(x-4)(4+x)} = \lim_{x \rightarrow 4} -\frac{x+3}{4+x} = -\frac{7}{8}.$$

A resposta certa é **A**.

32. De uma função sabe-se que  $f(2) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ . Então:

- A.  $f(x)$  não tem assíntotas    B.  $f(x)$  só tem assíntota horizontal    C. As assíntotas são  $y = 3$  e  $x = 2$   
D. As assíntotas são  $x = 3$  e  $y = 2$     E.  $f(x)$  só tem assíntota vertical

**Resolução :** Por definição de  $f(x)$ , a recta  $x = 2$  é assíntota vertical e a recta  $y = 3$  é assíntota horizontal. A resposta certa é **C**.

33. O valor da derivada da função  $f(x) = \sin(\pi x)$  o ponto  $x = 1$  é:

- A: 0                      B:  $-1$                       C:  $\pi$                       D: 1                      E:  $-\pi$

**Resolução :** Utilizando derivação por tabela, teremos  $f'(x) = \cos(\pi x)(\pi x)' = \pi \cos(\pi x)$ . Desta forma,  $f'(1) = \pi \cos(\pi) = -\pi$ . A resposta certa é **E**.

- Outra ideia é usar derivada pela definição no ponto  $x = 1$ . Temos:

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x) - \sin(\pi)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{x - 1} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi(t + 1))}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi t) \cos(\pi) + \cos(\pi t) \sin(\pi)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} -\frac{\sin(\pi t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} -\frac{\pi \sin(\pi t)}{\pi t} = -\pi. \end{aligned}$$

Nesta resolução foram usadas as identidades:

$$t = x - 1 \Rightarrow x = t + 1, \quad x \rightarrow 1 \Rightarrow t \rightarrow 0$$

$$\sin(x + y) = \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

34. Indique a equação da recta tangente à  $f(x) = xe^{1-x}$  no ponto  $x = -1$ :

- A:  $y = (1 - x)e^{1-x}$     B:  $y = -xe^{x-1}$     C:  $y = 2e^{2x} + 3e^2$     D:  $y = xe^2$     E:  $y = e^2(2x + 1)$

**Resolução :** A equação da recta tangente à curva  $y = f(x)$  no ponto  $x = x_0$  tem a forma  $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ . Assim, fazendo  $f(x) = xe^{1-x}$ ,  $x_0 = -1$ , teremos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= x'e^{1-x} + x(e^{1-x})' = e^{1-x} - xe^{1-x}, \quad f'(-1) = e^2 + e^2 = 2e^2, \\ y - f(-1) &= 2e^2(x + 1) \Rightarrow y = -e^2 + 2e^2x + 2e^2 = e^2(2x + 1). \end{aligned}$$

A resposta certa é **E**.

35. Qual das seguintes funções não possui tangente horizontal no ponto dado:

- A:  $f(x) = -x^2 - 1$ ,  $x = 0$     B:  $f(x) = x^2 - 1$ ,  $x = 1$     C:  $f(x) = x^3 - 6x$ ,  $x = \sqrt{2}$   
 D:  $f(x) = \sin(x)$ ,  $x = \frac{\pi}{2}$     E:  $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2$ ,  $x = 2$

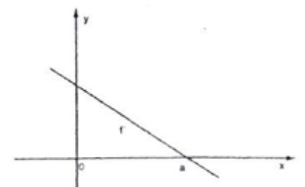
**Resolução :** Uma função  $f(x)$  contínua e com derivada contínua tem tangente horizontal no ponto  $x = a$  sse  $f'(a) = 0$ . Assim,

- para  $f(x) = -x^2 - 1$ ,  $x = 0$ , temos  $f'(x) = -2x$ ,  $f'(0) = 0$ ;
- para  $f(x) = x^2 - 1$ ,  $x = 1$ , temos  $f'(x) = 2x$ ,  $f'(1) = 2$  **tangente não horizontal**;
- para  $f(x) = x^3 - 6x$ ,  $x = \sqrt{2}$ , temos  $f'(x) = 3x^2 - 6$ ,  $f'(\sqrt{2}) = 0$ ;
- para  $f(x) = \sin(x)$ ,  $x = \frac{\pi}{2}$ , temos  $f'(x) = \cos(x)$ ,  $f'(\frac{\pi}{2}) = 0$ ;
- para  $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2$ ,  $x = 2$ , temos  $f'(x) = x^2 - 2x$ ,  $f'(2) = 0$ .

A resposta certa é **B**.

36. A figura representa uma parte do gráfico de  $f'$ . Seja  $a \in \mathbb{R}^+$  tal que  $f'(a) = 0$ . Qual das afirmações é verdadeira:

- A. A função  $f$  tem um mínimo para  $x = 0$ ;  
 B. A função  $f$  tem um ponto de inflexão para  $x = 0$ ;  
 C. A função  $f$  não apresenta extremos;  
 D. A função  $f$  é crescente em  $]0, a[$ ;  
 E. A função  $f$  é decrescente em  $\mathbb{R}$ .



**Resolução :**

- A alternativa **A** é falsa, pois,  $f'(x) > 0$  na vizinhança do ponto  $x = 0$ , significa que  $f(x)$  é crescente nessa vizinhança;
- A alternativa **B** é falsa, pois,  $f'(x)$  não nos dá condições suficientes para a existência de ponto de inflexão ;
- A alternativa **C** é falsa, pois,  $f'(x)$  muda de sinal ao passar pelo ponto  $x = a$ , significa que  $f(x)$  atinge um extremo em  $x = a$ ;
- A alternativa **D** é **verdadeira**, pois,  $f'(x) > 0$  no conjunto  $]0, a[$ ;
- A alternativa **E** é falsa, pois,  $f'(x) > 0$ , por exemplo, na vizinhança do ponto  $x = 0$ , significa que  $f(x)$  é crescente nessa vizinhança.

A resposta certa é **D**.

37. Seja  $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$  uma função de domínio  $\mathbb{R}$ . Indique qual a afirmação correcta.

- A. A função  $f(x)$  tem um mínimo em  $x = 0$  e um máximo em  $x = 2$
- B. A função  $f(x)$  tem dois máximos em  $x = -4$  e  $x = 3$
- C. A função  $f(x)$  é crescente em todo seu domínio
- D. A função  $f(x)$  não possui extremos
- E. A função  $f(x)$  é decrescente se  $x < 0$  e é crescente se  $x > 0$

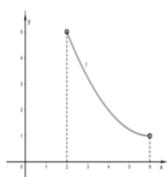
**Resolução :** Temos:  $f'(x) = -3x^2 + 6x$ ,  $f'(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow -3x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 2$ .  
Desta forma,

$x$	$] -\infty, 0[$	$0$	$]0, 2[$	$2$	$]2, +\infty[$
$f'(x)$	-	$0$	+	$0$	-
$f(x)$	$\searrow$	$f(0) = 4$	$\nearrow$	$f(2) = 0$	$\searrow$

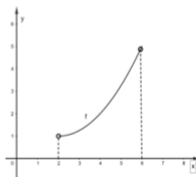
Assim,  $f(x)$  atinge um mínimo em  $x = 0$  e um máximo em  $x = 2$ . A resposta certa é **A**.

38. Seja  $f$  uma função definida em  $]2, 6[$ . A função tem primeira e segunda derivadas finitas e  $f'(x) > 0$ ,  $f''(x) \leq 0, \forall x \in ]2, 6[$ . Qual dos gráficos representa a função?

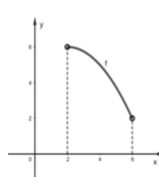
A.



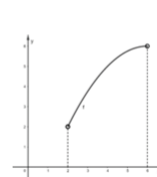
B.



C.



D.



E. Nenhuma das anteriores

**Resolução :** Das condições  $f'(x) > 0$ ,  $f''(x) \leq 0, \forall x \in ]2, 6[$  implicam que  $f(x)$  é crescente e tem uma concavidade voltada para baixo no intervalo  $]2, 6[$ . Desta forma, a alternativa D é a única que tem um gráfico com estas condições. A resposta certa é **D**.

39. Seja  $k$  um número real e  $z = (k - i)(3 - 2i)$  um número complexo. Qual o valor de  $k$  para que a parte real de  $z$  seja 0?

- A:  $\frac{3}{2}$                       B:  $-\frac{2}{3}$                       C:  $\frac{2}{3}$                       D:  $-\frac{3}{2}$                       E: 0

**Resolução:** Vamos escrever  $z$  na forma  $z = a + ib$ , onde  $a, b \in \mathbb{R}$ . Temos:

$$z = (k - i)(3 - 2i) = 3k - 3i - 2ki + 2i^2 = 3k - i(3 + 2k) - 2 = 3k - 2 - i(3 + 2k).$$

Assim, a parte real de  $z$  é  $3k - 2$ . Esta será 0 se e somente se  $3k - 2 = 0$  ou seja  $k = \frac{2}{3}$ . A resposta certa é **C**.

40. Uma das funções que cumprem a condição  $f'(x) = 4x^3 + x^2$  é:

- A:  $f(x) = x^4 + x^3$                       B:  $f(x) = x^4 + \frac{1}{3}x^3$                       C:  $f(x) = x^3 + \frac{1}{3}x^2 + 3$   
D:  $f(x) = 4x^4 + x^3 + 4$                       E:  $f(x) = -x^4 + \frac{1}{3}x^3 + 4$

**Resolução:** Temos:

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int (4x^3 + x^2) dx = x^4 + \frac{1}{3}x^3 + c,$$

onde  $c$  é uma constante arbitrária. A resposta certa é **D**.

- Note que ao derivar as funções das restantes alternativas, não encontramos a função  $4x^3 + x^2$ .