

Exame de Matemática de 2020B

Correcção do exame de Matemática de 2020 B

1. O número $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{9^{1/2}}}$ corresponde a qual das seguintes alternativas?

A: $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{9/2}}$ B: $\frac{\sqrt{12}}{3}$ C: 2 D: $(\frac{4}{3})^{1/2}$ E: $\frac{4}{3}$

Resolução: Temos: $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{9^{1/2}}} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{\sqrt{9}}} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{12}{3}} = \sqrt{4} = 2$. Então, a resposta certa é a alternativa C.

- A alternativa A não está certa, pois, $9^{1/2} \neq \frac{9}{2}$.
- A alternativa B não está certa, pois, $\sqrt{9^{1/2}} = \sqrt{3} \neq 3$.
- As alternativas D e E não estão certas, pois, não se pode simplificar os radicandos, sem primeiro reduzir tanto o numerador como o denominador ao mesmo radical.

2. Qual é o valor de $(-\frac{3}{5})^2 \cdot (\frac{2}{3})^2 + 8 : 8^{1/3}$?

A: 2,21 B: 5,56 C: 1,25 D: 4,16 E: 3,84

Resolução: Temos:

$$\begin{aligned} \left(-\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 8 : 8^{1/3} &= \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + 8 : (2^3)^{1/3} \\ &= \frac{9}{25} \cdot \frac{4}{9} + 8 : 2^{3/3} = \frac{4}{25} + 8 : 2 = \frac{4}{25} + 4 = 0,16 + 4 = 4,16. \end{aligned}$$

Então, a resposta certa é a alternativa D.

- A alternativa E não está certa, pois, o quadrado de número real negativo é positivo.
 - Note que não se pode simplificar 8 com 8, pois, o divisor não é 8, mas sim $8^{1/3}$, deve ser feita primeira a operação de potência.
3. O Carlos e o Rui trabalham como animadores de festas. O Carlos cobra uma taxa inicial de 400 meticais e mais 80 meticais por cada hora adicional, enquanto o Rui cobra uma taxa inicial de 230 meticais e mais 140 meticais por hora adicional. Qual o tempo mínimo que deve durar a festa para ser mais vantajoso contratar o Carlos que o Rui?

A: 7 B: 4 C: 2 D: 6 E: 9

Resolução: Designepor por x o número de horas adicionais. O valor que o Carlos cobra é $400 + 80x$ meticais. O valor que o Rui cobra é $230 + 140x$ meticais. Para que seja mais vantajoso contratar o Carlos

que o Rui, teremos o valor cobrado pelo Carlos deve ser menor que o do Rui, ou seja, $400+80x < 230+140x$. Resolvendo a inequação teremos:

$$\begin{aligned} 400 + 80x < 230 + 140x &\Leftrightarrow 80x - 140x < 230 - 400 \Leftrightarrow -60x < -170 \\ &\Leftrightarrow (-1)(-60x) > (-1)(-170) \Leftrightarrow 60x > 170 \Leftrightarrow x > \frac{170}{60} \approx 3. \end{aligned}$$

A resposta certa seria $\frac{17}{6}$ horas que é aproximadamente igual a 3 horas (assumindo que o número de horas pretendido é inteiro).

- Note que em 2 horas adicionais, o valor do Carlos é $400+80 \cdot 2 = 560$ meticais e o do Rui $230+140 \cdot 2 = 510$ meticais. É mais caro contratar o Carlos.
- Note que em 4 horas adicionais, o valor do Carlos é $400+80 \cdot 4 = 720$ meticais e o do Rui $230+140 \cdot 4 = 790$ meticais. É mais caro contratar o Rui. No entanto, em 3 horas adicionais, o valor do Carlos é $400 + 80 \cdot 3 = 640$ meticais e o do Rui $230 + 140 \cdot 3 = 650$ meticais. É mais caro contratar o Rui. E 3 é o número mínimo de horas (assumindo que número de horas é inteiro) em que é mais vantajoso contratar o Carlos.

4. Seja $x^2 + y^2 = 60$. Qual o valor positivo de $x + y$ sabendo que $xy = 20$:

A: 5 B: 10 C: 15 D: 20 E: 25

Resolução: Resolvemos o sistema de equações:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^2 + y^2 = 60 \\ xy = 20 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 2xy - 2xy = 60 \\ xy = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = 60 \\ xy = 20 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 2 \cdot 20 = 60 \\ xy = 20 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 = 100 \\ xy = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \pm\sqrt{100} \\ xy = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \pm 10 \\ xy = 20 \end{cases} \end{aligned}$$

O valor positivo de $x + y$ é 10. A alternativa certa é **B**.

- Note que as outras alternativas não satisfazem o sistema de equações. Por exemplo, se $x + y = 5$, usando $(x + y)^2 - 2xy = 60$, $xy = 20$ obtemos $25 - 40 = 60$ que não é verdade.

5. Sendo $x - y \neq 0$, a expressão $\frac{x^2 - y^2}{x - y}$ é equivalente a:

A: $x + y - 2xy$ B: $x + y$ C: $x - y$ D: $x^2 + y^2 + 2$ E: $2xy$

Resolução: Temos:

$$\frac{x^2 - y^2}{x - y} = \frac{(x + y)(x - y)}{(x - y)} = x + y,$$

pois, $x - y \neq 0$. A resposta certa é a alternativa **B**.

- Note que $x^2 - y^2 \neq (x - y)^2$ e não se pode simplificar sem factorizar o numerador, daí que não podemos ter alternativa C.
- Podemos também verificar por meio de um contraexemplo, se $x = 2$, $y = 1$, $\frac{x^2 - y^2}{x - y} = \frac{2^2 - 1^2}{2 - 1} = 3$ mas em A, B, D e E teremos valores diferentes de 3.

6. Indique a opção que apresenta todas soluções da equação $4x^2 - 4x + 1 = 0$.

A: $\frac{1}{2}$ B: 0 e $\frac{1}{2}$ C: $\frac{1}{2} - \sqrt{2}$, $\frac{1}{2} + \sqrt{2}$ D: 1 e 4 E: Nenhuma das anteriores

Resolução: Temos:

$$4x^2 - 4x + 1 = 0 \implies x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4} = \frac{1}{2}.$$

A resposta certa é a alternativa **A**.

- Note que as outras respostas não estão correctas, pois, substituindo na equação não obtemos identidade.
7. Uma parede tem 9600cm^2 de área. Sabendo que a largura da parede é uma vez e meia da sua altura, quais são, em metros, as dimensões da parede?

A: 1,6 e 2,4 B: 80 e 100 C: 1920 e 2880 D: 0,6 e 1,2 E: 0,8 e 1,2

Resolução: Seja x a altura da parede, assim a largura da parede é $1,5 \cdot x = \frac{3}{2}x$. Desta forma, a área da parede é:

$$\text{Área} = x \cdot \frac{3}{2}x = 9600\text{cm}^2.$$

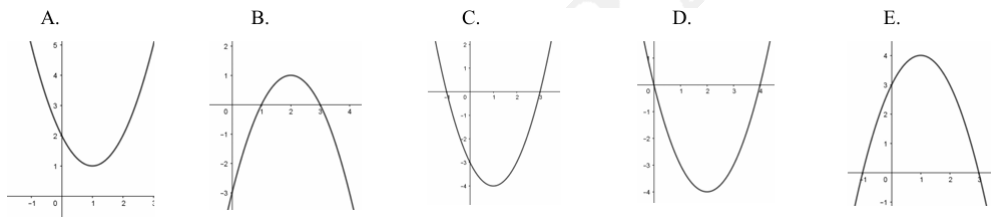
Resolvendo a equação, teremos:

$$x \cdot \frac{3}{2}x = 9600 \Leftrightarrow x^2 = \frac{2}{3} \cdot 9600 \Leftrightarrow x^2 = 6400 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{6400} = \pm 80\text{cm}.$$

Assim, a altura é $80\text{cm} = 0,8\text{m}$ e a largura é $120\text{cm} = 1,2\text{m}$. A resposta certa é a alternativa **E**.

- Note que as outras respostas não estão certas, pois, ao multiplicarmos não obtemos $0,96\text{m}^2$.

8. Seja $f(x) = x^2 - 2x - 3$. Qual dos seguintes gráficos representa a função?



Resolução: Temos $f(x) = x^2 - 2x - 3 = x^2 - 2x + 1 - 1 - 3 = (x-1)^2 - 4$. Assim, $f(x) = a(x-x_v)^2 + y_v$, onde $x_v = 1$, $y_v = -4$ e $a = 1$. Assim, o vértice é o ponto $(1, -4)$. Visto que $a > 0$, o gráfico de $f(x)$ tem concavidade voltada para cima. Desta forma, a resposta certa é **C**.

- Note que as outras alternativas não tem, simultaneamente, o vértice $(1, -4)$ e a concavidade voltada para cima.
9. Um comerciante obtém, pela venda de garrafas de água, um lucro dado pela função $L(x) = -5x^2 + 100x - 80$, onde x é o número de garrafas vendidas e $L(x)$ o lucro em metcais. Indique qual o lucro máximo obtido pelo comerciante na venda das garrafas de água e qual o número de garrafas que se devem vender para alcançar esse valor?

A: 2317 e 148 B: 1680 e 20 C: 420 e 10 D: 12 e 20 E: 580 e 12

Resolução : Precisamos encontrar o valor máximo da função $L(x)$. Visto que $L(x)$ é uma função quadrática com $a = -5 < 0$, o gráfico tem a concavidade voltada para baixo. Logo, o valor máximo de $L(x)$ será o y_v . Determinemos as coordenadas do vértice. Temos:

$$\begin{aligned} L(x) &= -5x^2 + 100x - 80 = -5(x^2 - 20x) - 80 \\ &= -5(x^2 - 20x + 10^2 - 10^2) - 80 = -5(x - 10)^2 + 500 - 80 \\ &= -5(x - 10)^2 + 420. \end{aligned}$$

Assim, $x_v = 10$ e $y_v = 420$. O lucro máximo é 420 e o número de garrafas que se devem vender para alcançar este valor é 10. A resposta certa é **C**.

- Note que as outras alternativas não são pontos do gráfico de $L(x)$.

10. Considere os seguintes conjuntos $A = [-3, 7]$, $B =]-3, 9]$ e $C = \{1, 7\}$. O conjunto $(A \cap B) \setminus C$ é dado por?

A: $] -3, 9]$ B: $] -3, 7[\cup\{1, 7\}$ C: \emptyset D: $] -3, 1[\cup]1, 7]$ E: $] -3, 1[\cup]1, 7[\cup]7, 9[$

Resolução : Temos: $A \cap B = [-3, 7] \cap [-3, 9] = [-3, 7]$. Assim,

$$(A \cap B) \setminus C = [-3, 7] \setminus \{1, 7\} = [-3, 1[\cup]1, 7[.$$

A resposta certa é **D**.

- Note que $E \setminus F$, é conjunto formado por elementos do conjunto E que não pertencem ao conjunto F .

11. Num bairro 1800 pessoas leem o Jornal Azul ou o Jornal Verde. Destas, 1200 pessoas leem o Jornal Azul e 800 pessoas leem o Jornal Verde. Quantas pessoas leem o Jornal Azul, mas não o Jornal Verde?

A: 600 B: 400 C: 200 D: 800 E: 1000

Resolução : Seja A o conjunto de pessoas que leem o jornal azul, V o conjunto de pessoas que leem o jornal verde. Assim, $\#(A)$ designa número de elementos do conjunto A . Temos: $\#(A \cup V) = 1800$, $\#(A) = 1200$, $\#(V) = 800$, e pretendem $\#(A \setminus V)$. Por propriedade de conjuntos, $A \setminus V = A \setminus (A \cap V)$. Assim, vamos determinar $\#(A \cap V)$. Temos:

$$\#(A \cup V) = \#(A) + \#(V) - \#(A \cap V) \Leftrightarrow 1800 = 1200 + 800 - \#(A \cap V) \Leftrightarrow \#(A \cap V) = 200.$$

Assim, $\#(A \setminus V) = \#(A) - \#(A \cap V) = 1200 - 200 = 1000$. A resposta certa é **E**.

- Note que em geral $\#(A \setminus V) \neq \#(A) - \#(V)$, pois, nem sempre todos elementos de V são elementos de A .

12. Os valores de x que satisfazem a inequação $(x+2)^2 < -1+10x$ correspondem ao conjunto definido por:

A: $1 < x < 5$ B: $2 < x < 5$ C: $2 < x < 10$ D: $x < 10$ E: $x < 5$

Reolução : Temos:

$$\begin{aligned} (x+2)^2 < -1+10x &\Leftrightarrow x^2+4x+4 < -1+10x \\ &\Leftrightarrow x^2+4x-10x+4+1 < 0 \Leftrightarrow x^2-6x+5 < 0 \Leftrightarrow (x-5)(x-1) < 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x-5 < 0 \wedge x-1 > 0 \\ \text{ou } x-5 > 0 \wedge x-1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 5 \wedge x > 1 \\ \text{ou } x > 5 \wedge x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \emptyset \\ \text{ou } 1 < x < 5. \end{cases} \end{aligned}$$

Desta forma, a resposta certa é **A**.

- Também pode-se usar o método gráfico para resolver a inequação.
- Note que as restantes alternativas não estão correctas, pois, ou excluem alguns valores que fazem parte da solução ou incluem valores que não fazem parte da solução. Por exemplo, as alternativas B e C, excluem o ponto $x = 3/2$ que faz parte da solução, e as alternativas D e E, incluem o ponto $x = 0$ que não faz parte da solução.

13. A solução da inequação $x^2 - 9 \geq 0$ é:

A: $x \leq -3 \vee x \geq 3$ B: $x \geq \pm 3$ C: $-3 \leq x \leq 3$ D: $x \leq \pm 3$ E: \emptyset

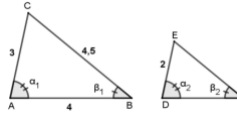
Resolução : Temos:

$$x^2 - 9 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x + 3) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 \geq 0 \wedge x + 3 \geq 0 \\ \text{ou } x - 3 \leq 0 \wedge x + 3 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \wedge x \geq -3 \\ \text{ou } x \leq 3 \wedge x \leq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ \text{ou } x \leq -3. \end{cases}$$

Desta forma, a resposta certa é $x \leq -3 \vee x \geq 3$, ou seja, a alternativa **A**.

- Não se pode escrever $x \geq \pm 3$ e nem $x \leq \pm 3$.
 - A alternativa C não está correcta, pois, contém números que não fazem parte da solução, por exemplo, $x = 0$.
 - A alternativa E não está correcta, pois, por exemplo $x = 4$ satisfaz a inequação, pois, $4^2 - 9 \geq 0$.
14. Tendo em conta as medidas dos lados dos triângulos apresentadas na figura e considerando $\alpha_1 = \alpha_2$ e $\beta_1 = \beta_2$, indique o perímetro do triângulo DEF:



A: 11,5

B: 8

C: 23/3

D: 6,25

E: 17/3

Resolução : Visto que $\alpha_1 = \alpha_2$ e $\beta_1 = \beta_2$ então, $\angle ACB = \angle DEF$, pois, a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° . Desta forma, $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ pelo critério ângulo, ângulo, ângulo. Assim,

$$\frac{|DE|}{|AC|} = \frac{|EF|}{|BC|} = \frac{|DF|}{|AB|} = \frac{2}{3}, \quad |DE| = \frac{2}{3}|AC|, \quad |EF| = \frac{2}{3}|BC|, \quad |DF| = \frac{2}{3}|AB|.$$

O perímetro do $\triangle DEF$ é

$$P = |DE| + |EF| + |DF| = \frac{2}{3}(|AC| + |BC| + |AB|) = \frac{2}{3}(3 + 4,5 + 4) = \frac{23}{3}.$$

A resposta certa é **C**.

- Note que a alternativa A não está certa, pois, 11,5 é o perímetro do triângulo ABC e este é semelhante ao triângulo DEF com razão de proporcionalidade diferente de 1.
15. Considere um triângulo isósceles ABC com base $|AB| = 12$, $|BC| = |AC| = 10$. Qual a área deste triângulo?

A: 120

B: 57

C: 60

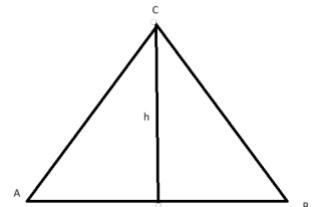
D: 18

E: 48

Resolução : Consideremos a figura ao lado. A área do triângulo ABC é $\frac{|AB| \cdot h}{2}$, h é altura do triângulo. Podemos determinar h usando o teorema de Pitágoras: $|AC|^2 = (\frac{|AB|}{2})^2 + h^2$. Teremos

$$10^2 = 6^2 + h^2 \Leftrightarrow h^2 = 64 \Rightarrow h = 8.$$

Assim, a área do triângulo ABC é $\frac{|AB| \cdot h}{2} = 12 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 48$. A resposta certa é **E**.



- Note que pelo facto do triângulo ABC ser isósceles, o segmento de recta baixado do vértice C até a base AB que é perpendicular à base e divide a base em dois segmentos iguais.

16. Quais as soluções da equação $\cos^2 \theta + \sin \theta - 1 = 0$, em radianos, onde $\theta \in [0, 2\pi[$.

- A: $\theta = 0 \vee \theta = 1$ B: $\theta = \pi/4 \vee \theta = \pi/3 \vee \theta = \pi/2$ C: $\theta = 0 \vee \theta = \pi/2 \vee \theta = \pi$
 D: $\theta = 0 \vee \theta = \pi$ E: $\theta = 0 \vee \theta = \pi/2 \vee \theta = \pi \vee \theta = 3\pi/2$

Resolução: Temos:

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta + \sin \theta - 1 = 0 &\Leftrightarrow 1 - \sin^2 \theta + \sin \theta - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin \theta - \sin^2 \theta = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin \theta(1 - \sin \theta) = 0 \Leftrightarrow \sin \theta = 0 \vee \sin \theta = 1 \Leftrightarrow \theta = 0 \vee \theta = \pi \vee \theta = \pi/2. \end{aligned}$$

A resposta certa é **C**.

- As outras alternativas ou estão incompletas ou apresentam alguns valores de θ que não satisfazem a equação.

17. Simplificando a expressão $\cos(7680^\circ)$.

- A: 0 B: $-1/2$ C: $\sqrt{3}/2$ D: 1 E: $-\sqrt{2}/2$

Resolução: Temos $7680^\circ = 360^\circ \cdot 21 + 120^\circ$. Em radianos, teremos $7680^\circ = 21 \cdot 2\pi + \frac{2\pi}{3}$. Visto que a função $\cos(x)$ é periódica, de período 2π , temos:

$$\cos(7680^\circ) = \cos(21 \cdot 2\pi + 2\pi/3) = \cos(2\pi/3) = -\cos(\pi - \frac{2\pi}{3}) = -\cos(\pi/3) = -\frac{1}{2}.$$

A resposta certa é **B**.

18. A negação da afirmação "Hoje é Sábado e amanhã não irá chover" é:

- A. Hoje é Sábado ou amanhã irá chover.
 B. Hoje não é Sábado e amanhã irá chover.
 C. Hoje não é Sábado ou amanhã irá chover.
 D. Hoje não é Sábado ou amanhã não irá chover.
 E. Hoje é Sábado e amanhã não irá chover.

Resolução: Sejam p : "Hoje é sábado" e q : "Amanhã irá chover". As letras p e q representam duas proposições. A proposição composta, "Hoje é Sábado e amanhã não irá chover" é dada por $p \wedge \neg q$. A negação desta proposição é $\neg(p \wedge \neg q)$. Usando as leis de Morgan, teremos:

$$\neg(p \wedge \neg q) \Leftrightarrow \neg p \vee q.$$

Colocando em linguagem corrente, teremos: "Hoje não é Sábado ou amanhã irá chover".

A resposta certa é **C**.

- Note que fazendo a tabela de verdade, a alternativa C tem valores de verdade opostos ao da proposição composta correspondente à frase dada. As restantes alternativas não tem todos os valores de verdade opostos à $p \wedge \neg q$.

19. Considere a afirmação "Todos os alunos da professora Paula tiveram positiva no exame de Matemática.". Qual das seguintes opções é necessariamente verdadeira:

- A. Se a Eduarda não é aluna da professora Paula, então ela não teve positiva no exame de Matemática.
 B. Se o Carlos não teve positiva no exame de Matemática, então ele não é aluno da professora Paula.

- C. Se a Márcia teve positiva no exame de Matemática, então ela é aluna da professora Paula.
 D. Se a Luísa não teve positiva no exame de Matemática, então ela é aluna da professora Paula.
 E. Se o Leonel teve positiva e Justino teve negativa no exame de Matemática, então eles têm professores diferentes.

Resolução: Sejam $p(x)$: " x é aluno da Professora Paula" e $q(x)$: " x teve nota positiva no exame de Matemática". As expressões $p(x)$ e $q(x)$ representam duas proposições para o aluno x . A proposição composta, "Todos os alunos da professora Paula tiveram positiva no exame de Matemática." é dada por $\forall x, p(x) \rightarrow q(x)$.

- **A alternativa B é verdadeira** pois, todos os alunos da Professora Paula tiveram positiva no exame de Matemática. Se um estudante não teve positiva no exame de Matemática, não é aluno da Professora Paula.
- A alternativa A é falsa pois, não sabemos o resultado dos alunos dos outros professores.
- A alternativa C é falsa pois, não podemos tirar conclusões sobre $p(x)$ a partir da suposição de $q(x)$. A Márcia pode ser aluna de outro professor.
- A alternativa D é falsa, pois, todos os alunos da Professora Paula tiveram positiva no exame de Matemática. Se um estudante não teve positiva no exame de Matemática, não é aluno da Professora Paula.
- A alternativa E é falsa, pois, não sabemos o resultado dos alunos dos outros professores.

20. Racionalize o denominador da expressão $\frac{x}{\sqrt{x+9}-3}$ e simplifique-a. O resultado será:

- A: \sqrt{x} B: $\frac{x}{\sqrt{x+9}}$ C: $\sqrt{x+9}+3$ D: $\frac{x-3}{x+3}$ E: Nenhuma das anteriores

Resolução: Temos:

$$\frac{x}{\sqrt{x+9}-3} = \frac{x(\sqrt{x+9}+3)}{(\sqrt{x+9}-3)(\sqrt{x+9}+3)} = \frac{x(\sqrt{x+9}+3)}{(\sqrt{(x+9)^2-3^2})} = \frac{x(\sqrt{x+9}+3)}{x+9-9} = \sqrt{x+9}+3.$$

A resposta certa é **C**.

21. Quais os valores que satisfazem a inequação $\sqrt{2x^2+x} > 1$:

- A: $x \in]-\infty, 1[\cup]4, \infty[$ B: $x \in]-\infty, -2[\cup]-2, -1[$ C: $x \in]-\infty, -1[\cup]1/2, \infty[$ D: $x \in]-2, -1[$
 E: $x \in]-\infty, -2[\cup]-2, 1[\cup]1, \infty[$

Resolução: Por condição de existência da raiz quadrada, $2x^2+x \geq 0$. Assim,

$$\sqrt{2x^2+x} > 1 \implies \begin{cases} (\sqrt{2x^2+x})^2 > 1 \\ 2x^2+x \geq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 2x^2+x-1 > 0 \\ x(2x+1) \geq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} (2x-1)(x+1) > 0 \\ x(2x+1) \geq 0. \end{cases}$$

Resolvemos a inequação $(2x-1)(x+1) > 0$. Temos:

$$\begin{aligned} 2x-1 > 0 \wedge x+1 > 0 \text{ ou } 2x-1 < 0 \wedge x+1 < 0 \\ x > 1/2 \wedge x > -1 \text{ ou } x < 1/2 \wedge x < -1 \\ x > 1/2 \text{ ou } x < -1. \end{aligned}$$

Resolvemos a inequação $x(2x+1) \geq 0$. Temos:

$$2x+1 \geq 0 \wedge x \geq 0 \text{ ou } 2x+1 \leq 0 \wedge x \leq 0$$

$$x \geq 1/2 \wedge x \geq 0 \text{ ou } x \leq 1/2 \wedge x \leq 0$$

$$x \geq 1/2 \text{ ou } x \leq 0.$$

Assim,

$$\begin{cases} (2x-1)(x+1) > 0 \\ x(2x+1) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1/2 \text{ ou } x < -1 \\ x \geq 1/2 \text{ ou } x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow x > 1/2 \text{ ou } x < -1.$$

A resposta certa é **C**.

22. Considere o sistema de equações lineares $\begin{cases} 3x + 2y - z = 0 \\ x + 3y + z = 1 \\ 2x + 2y - 2z = 2. \end{cases}$ Qual é a solução do sistema?

A: $(x, y, z) = (-1, 2, 3)$

B: $(x, y, z) = (0, 0, 0)$

C: $(x, y, z) = (-1, 1, -1)$

D: Não existem soluções

E: $(x, y, z) = (4, -5, 2)$

Resolução: Usando o método de Cramer, temos:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 \cdot 2$$

$$+ (-1) \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 3 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 \cdot 3 - (-2) \cdot 1 \cdot 2 = -12.$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \cdot 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 \cdot 2$$

$$+ (-1) \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 3 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 \cdot 0 - (-2) \cdot 1 \cdot 2 = 12.$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \cdot 2$$

$$- 2 \cdot 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 \cdot 3 - (-2) \cdot 1 \cdot 0 = -12.$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \cdot 2$$

$$- 2 \cdot 3 \cdot 0 - 2 \cdot 1 \cdot 3 - 2 \cdot 1 \cdot 2 = 12.$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{12}{-12} = -1, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-12}{-12} = 1, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{12}{-12} = -1$$

A resposta é **C**.

- Note que a solução existe e é única. As alternativas A, B e D não satisfazem o sistema de equações.

23. Sabendo que uma das raízes da equação $x^3 + x^2 - 4x = 4$ é $x = -2$, qual será o produto das outras raízes?

A: 3

B: -2

C: $\sqrt{3}$

D: 1

E: Nenhuma das anteriores

Resolução: Usando a regra de Ruffini para dividir o polinômio $x^3 + x^2 - 4x - 4$ por $x + 2$ obtemos:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & -4 & -4 \\ -2 & & -2 & 2 & 4 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

Desta forma, $x^3 + x^2 - 4x - 4 = (x + 2)(x^2 - x - 2)$. Logo, o produto das outras raízes é -2. A resposta certa é **B**.

24. Resolva a inequação $(\frac{1}{2})^{3x-x^2} > 1$. Qual é a solução ?

A: $x \in]-\infty, 0[$ B: $x \in]-\infty, 0[\cup]3, \infty[$ C: $x \in]0, 3[$ D: $x \in]-3, 3[$ E: $x \in]-\infty, -3[\cup]0, \infty[$

Resolução: Temos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\right)^{3x-x^2} > \left(\frac{1}{2}\right)^0 &\implies 3x-x^2 < 0 \implies x(3-x) < 0 \\ x > 0 \wedge 3-x < 0 \text{ ou } x < 0 \wedge 3-x > 0 \\ x > 0 \wedge -x < -3 \text{ ou } x < 0 \wedge -x > -3 \\ x > 0 \wedge x > 3 \text{ ou } x < 0 \wedge x < 3 \\ x > 3 \text{ ou } x < 0. \end{aligned}$$

A resposta é **B**.

- As outras respostas não estão certas, pois, ou excluem valores que fazem parte do conjunto solução ou incluem valores que não fazem parte da solução. Por exemplo, em A, $x = 4$ obtemos $16 > 1$, satisfaz a inequação mas não está incluso no conjunto solução. Em C, D e E, para $x = 1$ obtemos $\frac{1}{4} > 1$, não satisfaz a inequação mas está incluido nestes conjuntos.

25. Considere a proposição $a^{2x+3} > a^8$ na qual x é uma variável real e a é uma constante real positiva. A proposição é verdadeira se:

A: $x = 2, a > 1$ B: $x = -2, a < 1$ C: $x = 3, a < 1$ D: $x = -3, a > 1$ E: $x = 4, a < 1$

Resolução: Consideremos dois casos:

caso 1: $a > 1$ temos:

$$a^{2x+3} > a^8 \implies 2x+3 > 8 \implies 2x > 5 \implies x > \frac{5}{2}.$$

caso 2: $a < 1$ temos:

$$a^{2x+3} > a^8 \implies 2x+3 < 8 \implies 2x < 5 \implies x < \frac{5}{2}.$$

A resposta certa é **B**.

- As outras alternativas não satisfazem as condições otidas tanto no caso 1 como no caso 2.

26. Qual das seguintes opções representa a solução da equação $3^{2x} = 3^x + 12$?

A: $x = 0$ B: $x = \log_3^4$ C: $x = \log_3^{12}$ D: $x = \log_3^3$ E: Nenhuma das anteriores

Resolução: Temos $3^{2x} = 3^x + 12 \iff (3^x)^2 - 3^x - 12 = 0$. Seja $t = 3^x > 0$. Teremos:

$$\begin{aligned} (3^x)^2 - 3^x - 12 = 0 &\implies t^2 - t - 12 = 0 \iff (t+3)(t-4) = 0 \\ &\implies t = -3 \vee t = 4. \end{aligned}$$

Visto que $t > 0$, consideramos apenas $t = 4$. Da equação $3^x = 4$ resulta $x = \log_3^4$. A resposta certa é **B**.

- As alternativas A, C e D não estão certas, pois, não satisfazem a equação.

27. Para que valores de x é válida a inequação $25^{2x+1} > \sqrt{5^{6+x}}$?

A: $x \in \mathbb{R}$ B: $x < \frac{1}{9}$ C: $x > \frac{2}{7}$ D: $x < -6$ E: Nenhuma das anteriores

Resolução: Temos:

$$25^{2x+1} > \sqrt{5^{6+x}} \iff 5^{4x+2} > 5^{\frac{6+x}{2}} \implies 4x+2 > \frac{6+x}{2} \iff 8x+4 > 6+x \iff 7x > 2 \implies x > \frac{2}{7}.$$

A resposta certa é **C**.

- As alternativas A, B e D não estão certas, pois, ou excluem valores que fazem parte do conjunto solução ou incluem valores que não fazem parte da solução. Por exemplo, em A e B, para $x = 0$ obtemos $25 > 125$. Em D, $x = -10$ não satisfaz a inequação.

28. Que valores de x representa a solução da equação $\log_5(x+1) + \log_5(2x+3) = 0$?

A: $x \in \{-3; -2\}$ B: $x \in \{-3/2; -1\}$ C: $x = -\frac{3}{2}$ D: $x \in [-2, -1[$ E: $x = -1/2$.

Resolução: Tendo em conta as condições de existência de logaritmo, temos $x+1 > 0$ ($x > -1$) e $2x+3 > 0$ ($x > -3/2$). Uando propriedades, temos:

$$\begin{aligned} \log_5(x+1) + \log_5(2x+3) = 0 &\iff \log_5(x+1)(2x+3) = \log_5 1 \\ &\implies (x+1)(2x+3) = 1 \iff 2x^2 + 5x + 2 = 0 \\ &\iff x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{4} \implies x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = -2. \end{aligned}$$

A solução é $x = -1/2$ pois, $-1/2 > -1$. De referir que $x = -2$ não é solução, pois, não satisfaz $-2 > -1$. A resposta certa é **E**.

29. Indique o conjunto que representa as soluções da inequação $\log_{1/2}^{(3x)} > \log_{1/2}^{(2x+5)}$.

A: $x \in]0, 5[$ B: $x \in]-5/2, 0[$ C: $x \in]-\infty, 5[$ D: $x \in [2, 5[$ E: $x \in]2, 3[$

Resolução: Tendo em conta as condições de existência de logaritmo, temos $3x > 0$ ($x > 0$) e $2x+5 > 0$ ($x > -5/2$). Uando propriedades, temos:

$$\log_{1/2}^{(3x)} > \log_{1/2}^{(2x+5)} \iff \begin{cases} 3x < 2x+5 \\ x > 0 \\ x > -\frac{5}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x < 5 \\ x > 0 \\ x > -\frac{5}{2} \end{cases} \implies 0 < x < 5.$$

A resposta certa é **A**.

- As outras respostas não estão certas, pois, ou excluem valores que fazem parte do conjunto solução ou incluem valores que não fazem parte da solução. Por exemplo, em B e C, $x = -1$ não pertence ao domínio de $\log_{1/2}^{(3x)}$. Em D e E, $x = 1$ satisfaz a inequação mas não foi incluído nestes conjuntos.

30. A equação $\log_3 x = 1 + \log_x 9$ tem duas raízes reais. O seu produto é:

A: 0 B: 1/3 C: 9 D: 6 E: 3

Resolução: Tendo em conta as condições de existência de logaritmo, temos $x > 0$ e $x \neq 1$. Uando propriedades, temos:

$$\log_3 x = 1 + \log_x 9 \iff \log_3 x = 1 + 2 \log_x 3 \iff \log_3 x = 1 + \frac{2}{\log_3 x}.$$

Fazendo $t = \log_3^x$, teremos:

$$\log_3 x = 1 + \frac{2}{\log_3^x} \Leftrightarrow t = 1 + \frac{2}{t} \Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow (t - 2)(t + 1) = 0 \implies t = 2 \vee t = -1.$$

Para $t = -1$, da equação $\log_3^x = -1$ implica $x = \frac{1}{3}$. Para $t = 2$, da equação $\log_3^x = 2$ implica $x = 9$. Assim, o produto de 9 e $1/3$ é 3. A resposta certa é **E**.

31. Qual a solução da equação $\sqrt{x^2 - 4} \log_3^{(x+5)} \leq 0$?

A: \emptyset B: \mathbb{R} C: $x \in]-5, -4[$ D: $x \in]-\infty, -4[$ E: $x = \pm 2$

Resolução: Tendo em conta as condições de existência de logaritmo e da raiz quadrada, temos $x + 5 > 0$ ($x > -5$), $x^2 - 4 \geq 0$. Assim,

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - 4} \log_3^{(x+5)} \leq 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3^{(x+5)} \leq 0 \\ x > -5 \\ x^2 - 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3^{(x+5)} \leq \log_3^1 \\ x > -5 \\ (x+2)(x-2) \geq 0 \end{cases} \\ \implies \begin{cases} x+5 \leq 1 \\ x > -5 \\ x-2 \geq 0 \wedge x+2 \geq 0 \text{ ou } x-2 \leq 0 \wedge x+2 \leq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -4 \\ x > -5 \\ x \geq 2 \text{ ou } x \leq -2 \end{cases} \implies -5 < x \leq -4. \end{aligned}$$

A resposta certa é **C**.

32. Qual das seguintes expressões desceve a equação da recta r que é perpendicular à recta t : $y = 2x + 2$, sabendo que as rectas se intersectam no ponto $(-6/5, -2/5)$?

A: $y = -\frac{x}{2} - 1$ B: $y = 4x + 3$ C: $y = 2$ D: $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$ E: $y = -x$

Resolução: A recta r tem a forma $y = a(x - x_0) + y_0$, onde a satisfaz $a \cdot 2 = -1$ (condição de perpendicularidade de rectas) e (x_0, y_0) é um ponto da recta. Temos:

$$a = -\frac{1}{2}, \quad y = -\frac{1}{2} \left(x + \frac{6}{5} \right) - \frac{2}{5} = -\frac{x}{2} - 1.$$

A resposta certa é **A**.

33. Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções lineares, com coeficientes angulares k_f e k_g , respectivamente. Considere os pontos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ tal que $x_1 < x_2$. Se $f(x_1) < g(x_1)$ e $f(x_2) = g(x_2)$ então:

A: $k_f = k_g$ B: $k_f < k_g$ C: $k_f > k_g$ D: Nada se conclui E: $k_g = 2k_f$

Resolução: As funções tem a forma $f(x) = k_f(x - x_1) + f(x_1)$, $g(x) = k_g(x - x_1) + g(x_1)$. Temos: $f(x_2) = g(x_2)$ então

$$\begin{aligned} k_f(x_2 - x_1) + f(x_1) &= k_g(x_2 - x_1) + g(x_1) \\ \implies k_f(x_2 - x_1) - k_g(x_2 - x_1) &= g(x_1) - f(x_1) \\ \implies (k_f - k_g)(x_2 - x_1) &= g(x_1) - f(x_1) \\ \implies k_f - k_g &= \frac{g(x_1) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0. \end{aligned}$$

Assim, $k_f > k_g$. A resposta certa é **C**.

34. Considere a circunferência de centro $(-3, -2)$ e raio 4. Qual dos seguintes pontos pertence à circunferência?

A: $(-3, -2)$ B: $(1, 1)$ C: $(-3, 2)$ D: $(1, 0)$ E: $(-1, -3/2)$

Resolução: A equação da circunferência de centro (x_0, y_0) e raio r tem a forma $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$. Assim, a circunferência dada tem a forma $(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 4^2$. Um ponto pertence à circunferência se satisfaz a equação. Verifiquemos os pontos dados:

- $(-3, -2)$ é o centro da circunferência, não pertence à mesma;
- $(1, 1)$ temos $(1 + 3)^2 + (1 + 2)^2 \neq 4^2$;
- $(-3, 2)$ temos $(-3 + 3)^2 + (2 + 2)^2 = 4^2$;
- $(1, 0)$ temos $(1 + 3)^2 + (0 + 2)^2 \neq 4^2$;
- $(-1, -3/2)$ temos $(-1 + 3)^2 + (-3/2 + 2)^2 \neq 4^2$;

Vemos que apenas $(-3, 2)$ pertence à circunferência. Logo, a resposta certa é **C**.

35. Seja C a circunferência $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 3$ e r a recta $r: 2x - y + 3 = 0$. C e r intersecta-se:

A: Em 1 ponto B: Num número infinito de pontos C: Em 2 pontos D: Em 0 pontos E: Nenhuma das anteriores

Resolução : Temos:

$$\begin{aligned} \begin{cases} (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 3 \\ 2x - y + 3 = 0 \end{cases} &\implies \begin{cases} (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 3 \\ y = 2x + 3 \end{cases} \implies \begin{cases} (x - 1)^2 + (2x + 5)^2 = 3 \\ 2x - y + 3 = 0 \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} x^2 - 2x + 1 + 4x^2 + 20x + 25 = 3 \\ 2x - y + 3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 5x^2 + 18x + 23 = 0 \\ 2x - y + 3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Verifiquemos o número de soluções da equação $5x^2 + 18x + 23 = 0$. Temos $\Delta = 18^2 - 4 \cdot 23 \cdot 5 < 0$. Então, a equação $5x^2 + 18x + 23 = 0$ não tem raízes reais. Desta forma, C e r não se intersectam. A resposta certa é **B**.

- Também pode -se resolver graficamente, esboçando as linhas C e r .

36. Se $x \in [0, \pi]$, determine o conjunto no qual $2 \cos(2x) - 1 \geq 0$.

A: $x \in [0, \pi/2] \cup [2\pi/3, \pi]$ B: $x = \pi/2 \wedge x = \pi/3$ C: $x \in [0, \pi]$ D: $x \in [0, \pi/6]$ E: $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Resolução : Temos:

$$2 \cos(2x) - 1 \geq 0 \implies \cos(2x) \geq \frac{1}{2} \implies \frac{1}{2} \leq \cos(2x) \leq 1 \implies 0 \leq 2x \leq \pi/3 \implies 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}.$$

A resposta certa é **D**.

37. O período da função $y = 2 \sin(\frac{3}{2}x - \frac{\pi}{6})$ é:

A: $3\pi/4$ B: $2\pi/3$ C: $3\pi/2$ D: $4\pi/3$ E: $7\pi/6$

Resolução : Temos:

$$\begin{aligned} 2 \sin\left(\frac{3}{2}(x + T) - \frac{\pi}{6}\right) &= 2 \sin\left(\frac{3}{2}x - \frac{\pi}{6}\right) \implies 2 \sin\left(\frac{3}{2}x - \frac{\pi}{6} + \frac{3T}{2}\right) = 2 \sin\left(\frac{3}{2}x - \frac{\pi}{6}\right) \\ \implies 2 \sin\left(\frac{3}{2}x - \frac{\pi}{6} + \frac{3T}{2}\right) - 2 \sin\left(\frac{3}{2}x - \frac{\pi}{6}\right) &= 0 \implies 4 \cos\left(3x - \frac{\pi}{3} + \frac{3T}{4}\right) \sin\left(\frac{3T}{4}\right) = 0, \forall x \end{aligned}$$

$$\implies \sin\left(\frac{3T}{4}\right) = 0 \implies \frac{3T}{4} = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Tomando k o menor inteiro positivo, temos $T = 4\pi/3$. Desta forma, $T = \frac{4\pi}{3}$. A resposta certa é **D**.

- Usamos a fórmula $\sin a - \sin b = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$.
- Usando a relação $f(x+T) = f(x)$, $\forall x$, podemos provar que as outras alternativas não estão certas. Por exemplo, em A, $T = \pi/4$, temos para $x = 0$, $\sin(0 - \pi/6) \neq \sin(0 + \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}) = 0$. Em B, $T = 2\pi/3$, temos para $x = 0$, $-\frac{1}{2} = \sin(0 - \pi/6) \neq \sin(0 + \frac{2}{3} \cdot \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$

38. As raízes da equação $\tan(x) \cdot \cot(x) + \sin(4x) = 1$, definem-se pela fórmula (onde $n \in \mathbb{Z}$):

A: $\frac{\pi}{4}n$ B: $\pm\frac{\pi}{4} + 2n\pi$ C: $\frac{\pi}{2}n$ D: πn E: $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n$

Resolução : Temos:

$$\tan(x) \cdot \cot(x) + \sin(4x) = 1 \implies \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \cdot \frac{\cos(x)}{\sin(x)} + \sin(4x) = 1,$$

$$\cos(x) \sin(x) \neq 0, \implies 1 + \sin(4x) = 1, \frac{1}{2} \sin(2x) \neq 0$$

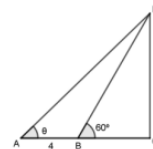
$$\sin(4x) = 0, 2x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \implies 4x = \pi n \implies x = \frac{\pi}{4}n \implies x = \frac{\pi}{4}n, x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\implies x = \frac{\pi}{4}n, n \text{ é número inteiro e ímpar} \implies x = \frac{\pi}{4}(2n+1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n.$$

A resposta mais próxima a esta é **E**.

- As outras alternativas não estão correctas, pois, ou excluem algumas soluções ou incluem valores que não pertencem ao conjunto solução. Por exemplo, em A e C, $x = \pi/2$ não é solução pois não pertence ao domínio da função $\tan(x)$. A alternativa B não inclui a solução $x = \frac{3\pi}{4}$. A alternativa D inclui $x = \pi$ que não é solução pois não pertence ao domínio da função $\cot(x)$.

39. Observe a seguinte figura. Quanto medem o ângulo θ e o segmento $|AC|$, sabendo que $|CD| = \sqrt{12}$.



A: $\theta = 45^\circ$ e $|AC| = 8$ B: $\theta = 30^\circ$ e $|AC| = 6$ C: $\theta = 15^\circ$ e $|AC| = 6$
D: $\theta = 30^\circ$ e $|AC| = 8$ E: $\theta = 15^\circ$ e $|AC| = 8$

Resolução : No triângulo ECD , $60^\circ + 90^\circ + \angle CDE = 180^\circ$ então, $\angle CDE = 30^\circ$. Desta forma,

$$\tan \angle CDE = \frac{|BC|}{|DC|} \implies |BC| = \tan 30^\circ \cdot |DC| = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{12} = 2.$$

Assim, $|AC| = |AB| + |BC| = 4 + 2 = 6$. Para determinar a medida do ângulo θ , determinamos

$$\tan \theta = \frac{|DC|}{|AC|} = \frac{\sqrt{12}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Assim, $\theta = 30^\circ$. Desta forma, a resposta certa é **B**.

40. Para que valores de x é válida a equação $|x + \pi| = -(x + \pi)$?

- A: $x > 0$ B: $x = -\pi$ C: $x > \pi$ D: $x \leq -\pi$ E: $x > -\pi$

Resolução : Temos, $|x + \pi| = \begin{cases} x + \pi, & \text{se } x + \pi > 0 \\ 0, & \text{se } x = -\pi \\ -(x + \pi), & \text{se } x + \pi < 0 \end{cases} = \begin{cases} x + \pi, & \text{se } x > -\pi \\ 0, & \text{se } x = -\pi \\ -(x + \pi), & \text{se } x < -\pi. \end{cases}$

A resposta certa é **D**.

• A alternativa B não esta certa pois exclui muitas soluções. As restantes alternativas não satisfazem a equação.

41. Qual o conjunto S , das soluções da inequação $|2x + 1| + 4 - 3x > 0$?

- A: $S =] - \infty, 5[$ B: $S = [0, 2]$ C: $S = [3, +\infty[$ D: \emptyset E: $S = \{0, 1, 7\}$

Resolução : Usando a definição de módulo e sintetizando numa tabela, teremos:

x	$] - \infty, -\frac{1}{2}[$	$[-\frac{1}{2}, \infty[$
$ 2x + 1 $	$-2x - 1$	$2x + 1$
$4 - 3x$	$4 - 3x$	$4 - 3x$
Soma	$3 - 5x$	$5 - x$

Assim,

$$\begin{aligned} & |2x + 1| + 4 - 3x > 0 \\ \Leftrightarrow & \{3 - 5x > 0, \text{ se } x < -\frac{1}{2} \text{ ou } 5 - x > 0, \text{ se } x \geq -\frac{1}{2}\} \\ |2x + 1| + 4 - 3x > 0 \Leftrightarrow & \{x < \frac{3}{5}, \text{ se } x < -\frac{1}{2} \text{ ou } x < 5, \text{ se } x \geq -\frac{1}{2}\} \\ |2x + 1| + 4 - 3x > 0 \Leftrightarrow & \{x < -\frac{1}{2} \text{ ou } -\frac{1}{2} \leq x < 5\} \\ |2x + 1| + 4 - 3x > 0 \Leftrightarrow & x < 5. \end{aligned}$$

A resposta certa é **A**.

- As outras alternativas não estão certas, pois, ou não incluem todos valores do conjunto solução ou incluem valores que não fazem parte da solução. Por exemplo, em C, tomando $x = 10$ e substituirmos na inequação, obtemos $-5 > 0$.

42. Considerando todos os divisores do número 60, determine a probabilidade de se escolher, ao acaso um número primo.

- A: 0,25 B: 0,3 C: 1,2 D: 0,6 E: 0,75

Resolução : Os divisores de 60 são, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 e 60. No total são 12. Destes, 3 são números primos. Assim, a probabilidade de escolher um número primo é

$$P = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}} = \frac{3}{12} = 0,25.$$

A resposta certa é **A**.

- É erro típico considerar que 1 é número primo.

43. Para o registo num site é necessária uma palavra passe formada por 2 algarismos e 2 letras (maiúsculas e minúsculas). Considerando que na palavra passe as letras maiúsculas e minúsculas são diferentes, quantas palavras passe podem existir?

A: $10^2 26^2 (4!/2!)$ B: $10^2 26^2$ C: $10^2 52 (4!/2!)$ D: $10^2 52^2$ E: $10^2 52^2 (4!/(2!2!))$

Resolução : Vamos usar o princípio do produto. Temos 10 possibilidades de escolher o primeiro dígito e de novo 10 possibilidades para o segundo dígitos. Temos 26 possibilidades de escolher a primeira letra e de novo 26 possibilidades para escolher a segunda letra. Temos: $10^2 \cdot 26^2$. A resposta certa é **B**.

44. Numa equipa de futebol de salão composta por 12 jogadores, de quantas formas diferentes pode o treinador escolher os cinco jogadores que participarão num jogo?

A: 60 B: 792 C: 453 D: 826 E: 144

Resolução :

Temos um agrupamento de 12 pessoas tomados 5 a cinco. A ordem não interessa, então

$$C_5^{12} = \frac{12!}{5!(12-5)!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7!} = \frac{4 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 9}{1} = 792.$$

A resposta certa é **B**.

45.

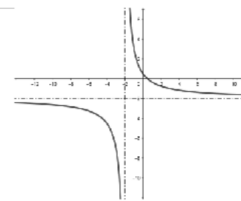
46. Indique a função inversa de $f(x) = \frac{2x-5}{-3x+11}$.

A: $y = \frac{-3x+11}{2x-5}$ B: $y = \frac{2x-5}{3x+11}$ C: $y = \frac{11x+5}{3x+2}$ D: $y = \frac{2x+11}{-3x-5}$ E: $y = \frac{2-5x}{-3+11x}$

Resolução : Temos, $x = \frac{2y-5}{-3y+11} \implies x(-3y+11) = 2y-5 \implies -3xy - 2y = -5 - 11x$
 $\implies y(-3x-2) = -5 - 11x \implies y = \frac{11x+5}{3x+2}$.

A resposta certa é **C**.

- Note que a inversa de uma função real é única.
- As outras alternativas não estão correctas pois, existem valores nos quais $f(x_0) = y_0$ mas $f^{-1}(y_0) \neq x_0$. Por exemplo, $f(5/2) = 0$ mas em A, $f^{-1}(0) = -\frac{11}{5} \neq \frac{5}{2}$.



47. Observe o gráfico. Qual das expressões corresponde à expressão da função representada no gráfico?

A: $y = \frac{-2x+1}{x+2}$ B: $y = \frac{2x+1}{x+2}$ C: $y = \frac{-2x+1}{x-2}$
D: $y = \frac{-2x-1}{x+1}$ E: $y = \frac{2x+1}{x-2}$

Resolução : O gráfico é uma função do tipo, $y = f(x) = \frac{Ax+B}{Cx+D}$, $C \neq 0$. Do gráfico, vemos que

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -2$. Então, $\frac{A}{C} = -2$. De outro lado, do gráfico $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$, então, a recta $x = -2$ é assíntota vertical. Assim, $-\frac{D}{C} = -2$. Logo,

$$y = f(x) = \frac{Ax + B}{Cx + D} = \frac{-2Cx + B}{Cx + 2C} = \frac{-2x + \frac{B}{C}}{x + 2}$$

Do gráfico, vemos que o zero da função é um número positivo, então $\frac{B}{C} > 0$. A única expressão que satisfaz as condições descritas é a alternativa **A**.

- As outras alternativas estão erradas pois, pelo menos uma das assíntotas não corresponde às do gráfico apresentado.

48. A sequência a_1, a_2, a_3, \dots em que $a_k = -(0,5)^{-k}$, com $k \in \mathbb{N}$ é:

- A. Progressão aritmética crescente.
- B. Progressão geométrica crescente.
- C. Progressão geométrica decrescente.
- D. Progressão geométrica que não é crescente nem decrescente.
- E. Sequência que não é progressão aritmética nem geométrica.

Resolução : Temos:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{-(0,5)^{-(k+1)}}{-(0,5)^{-k}} = (0,5)^{-1} = 2, \quad k = 1, 2, \dots$$

Ou seja, a_k é uma progressão geométrica de razão 2. Temos:

$$a_1 = -2, \quad q = 2 > 1$$

então a_k é decrescente. A resposta certa é **C**.

49. Na progressão 1, 3, 9, 27, 81, ... a soma dos n primeiros termos é 364. Qual o n ?

A: 6

B: 72

C: 4

D: 16

E: 7

Resolução : Temos:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 3, \quad n = 1, 2, \dots$$

Ou seja, a_n é uma progressão geométrica de razão 3. Temos:

$$a_1 = 1, \quad q = 3 \implies a_n = a_1 q^{n-1} = 3^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

A soma dos primeiros n termos é:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} \implies 364 = \frac{1(1 - 3^n)}{1 - 3} \implies -728 = 1 - 3^n \\ &\implies 729 = 3^n \implies 2^6 = 3^n \implies n = 6. \end{aligned}$$

A resposta certa é **A**.

- Note que calculando a soma dos primeiros n termos, sendo n o valor indicado nas restantes alternativas, o resultado não é 364. Por exemplo, em C, $S_4 = 1 + 3 + 9 + 27 = 40$.

50. Qual o limite da sucessão de termo geral $u_n = 1 + e^{-2n}$, $n \in \mathbb{N}$?

A: $-\infty$ B: 2 C: 1 D: 2 E: ∞

Resolução : Temos:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + e^{-2n}) = 1 + \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-2n} = 1.$$

A resposta certa é **C**.

- Note que o limite quando existe é único.

51. Indique qual é o $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{2n}$.

A: $2/3$ B: $e^{2/3}$ C: π D: ∞ E: 1

Resolução : Temos $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{2n} = 1^\infty$ que é uma indeterminação. Usando o limite notável

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

teremos:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{2n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{3n \cdot \frac{2}{3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{3n}\right)^{2/3} \\ &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{3n}\right)^{2/3} = e^{2/3}. \end{aligned}$$

A resposta certa é **B**.

52. O $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 5x + 6}$ é:

A: 2 B: ∞ C: Não existe D: 6 E: 3

Resolução : Temos $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 5x + 6} = \frac{3^2 - 3 \cdot 3}{3^2 - 5 \cdot 3 + 6} = \frac{0}{0}$ que é uma indeterminação. Factorizando tanto o numerador como o denominador, teremos:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x - 3)}{(x - 2)(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{x - 2} = 3.$$

A resposta certa é **E**.

53. Qual o valor de $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - \sqrt{2x}}$?

A: 4 B: ∞ C: 2 D: -2 E: 0

Resolução : Temos $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - \sqrt{2x}} = \frac{2^2 - 3 \cdot 2 + 2}{2 - \sqrt{2 \cdot 2}} = \frac{0}{0}$ que é uma indeterminação. Multiplicando e dividindo pelo conjugado do denominador e factorizando a expressão resultante, tanto o numerador como o denominador, teremos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - \sqrt{2x}} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 3x + 2)(x + \sqrt{2x})}{(x - \sqrt{2x})(x + \sqrt{2x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x - 1)(x + \sqrt{2x})}{(x^2 - 2x)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-1)(x+\sqrt{2x})}{x(x-2)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)(x+\sqrt{2x})}{x} \\
&= \frac{(2-1)(2+\sqrt{2 \cdot 2})}{2} = 2.
\end{aligned}$$

A resposta certa é **C**.

54. Na função $f(x) = \begin{cases} 2, & x \leq -1 \\ ax + b, & -1 < x < 3, \\ -2, & x \geq 3 \end{cases}$ que valores devem assumir a e b para que $f(x)$ seja contínua?

A: $a = 2, b = -1$

B: $a = 1, b = 1$

C: $a = 0, b = 2$

D: $a = -1, b = 1$

E: $a = -2, b = 3$

Resolução : A condição de continuidade no ponto x_0 é:

$$f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x).$$

Analisemos esta condição nos pontos que suscitam dúvida. Para $x = -1$, temos

$$\begin{aligned}
f(-1) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \\
2 &= -a + b = 2.
\end{aligned}$$

Para $x = 3$, temos

$$\begin{aligned}
f(3) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \\
-2 &= -2 = 3a + b.
\end{aligned}$$

Assim, usando estas igualdades, teremos:

$$\begin{cases} -a + b = 2 \\ 3a + b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 + a \\ 3a + 2 + a = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 + a \\ 4a = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = -1. \end{cases}$$

A resposta certa é **D**.

- Note que com outros valores de a e b , a função $f(x)$ não satisfaz a condição de continuidade em pelo menos um dos pontos $x = -1$ e $x = 3$.

55. Indique a derivada de $f(x) = 2\sqrt{x} + \frac{3}{x}$.

A: $f(x) = \sqrt{x} - \frac{3}{x}$

B: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{3}{x^2}$

C: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x^2}$

D: $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{3}{x^2}$

E: $f(x) = 2\sqrt{x^3} - \frac{3}{x^2}$

Resolução :

Usando a fórmula $(\frac{k}{x})' = -\frac{k}{x^2}$, k constante, temos:

$$f'(x) = (2\sqrt{x})' + (\frac{3}{x})' = (2x^{\frac{1}{2}})' - \frac{3}{x^2} = 2 \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{3}{x^2}.$$

A resposta certa é **B**.

56. Seja f uma função real de variável real tal que $f(x) = f'(x)$, para todo e qualquer número real. Qual das seguintes expressões pode definir a função f ?

- A: $3x^2$ B: $\sin x$ C: e^{5x} D: $2e^x$ E: $\ln(x)$

Resolução : Verifiquemos qual das funções satisfaz a condição dada. Temos:

- em A, $f(x) = 3x^2$, $f'(x) = 6x$ e $3x^2 \neq 6x$, $x \neq 0$. Então, $f(x) = 3x^2$ não satisfaz $f(x) = f'(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- em B, $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$ e $\sin x \neq \cos x$, $x \neq \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Então, $f(x) = \sin x$ não satisfaz $f(x) = f'(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- em C, $f(x) = e^{5x}$, $f'(x) = 5e^{5x}$ e $e^{5x} \neq 5e^{5x}$. Então, $f(x) = e^{5x}$ não satisfaz $f(x) = f'(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- em D, $f(x) = 2e^x$, $f'(x) = 2e^x$ e $2e^x = 2e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Então, $f(x) = 2e^x$ satisfaz $f(x) = f'(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- em E, $f(x) = \ln x$, $f'(x) = \frac{1}{x}$ e $\ln x \neq \frac{1}{x}$, $x > 0$. Então, $f(x) = \ln x$ não satisfaz $f(x) = f'(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

A resposta certa é **D**.

57. Qual das seguintes funções não possui tangente horizontal no ponto dado?

- A: $f(x) = -x^2 - 1$, $x = 0$
 B: $f(x) = x^2 - 1$, $x = 1$
 C: $f(x) = x^3 - 6x$, $x = \sqrt{2}$
 D: $f(x) = \sin x$, $x = \frac{\pi}{2}$
 E: $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2$, $x = 2$

Resolução : Verifiquemos qual das funções não satisfaz a condição dada. Se a função $f(x)$ tem uma tangente horizontal no ponto x_0 , então $f'(x_0) = 0$. Verifiquemos esta condição :

- em A, $f(x) = -x^2 - 1$, $x = 0$, $f'(x) = -2x$ e $f'(0) = 0$. Então, $f(x) = -x^2 - 1$ tem uma tangente horizontal no ponto $x = 0$.
- em B, $f(x) = x^2 - 1$, $x = 1$, $f'(x) = 2x$ e $f'(1) = 2 \neq 0$. Então, $f(x) = x^2 - 1$ não tem uma tangente horizontal no ponto $x = 1$.
- em C, $f(x) = x^3 - 6x$, $x = \sqrt{2}$, $f'(x) = 3x^2 - 6$ e $f'(\sqrt{2}) = 0$. Então, $f(x) = x^3 - 6x$ tem uma tangente horizontal no ponto $x = \sqrt{2}$.
- em D, $f(x) = \sin x$, $x = \frac{\pi}{2}$, $f'(x) = \cos x$ e $f'(0) = 0$. Então, $f(x) = \sin x$ tem uma tangente horizontal no ponto $x = \frac{\pi}{2}$.
- em E, $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2$, $x = 2$, $f'(x) = x^2 - 2x$ e $f'(2) = 0$. Então, $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2$ tem uma tangente horizontal no ponto $x = 2$.

A resposta certa é **B**.

58. Se $f'(x) = \sqrt{x}$. A primitiva de $f'(x)$ é dada por:

- A: $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ B: $\frac{3}{x^2}$ C: $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ D: $\frac{2}{\sqrt{x^3}}$ E: $\sqrt{x^3}$

Resolução : A primitiva de $f'(x)$ é:

$$\int f'(x)dx = \int \sqrt{x}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c,$$

onde c é uma constante arbitrária.

A resposta mais próxima a esta é a alternativa A que é um caso particular quando $c = 0$.

59. Sejam f, g e h três funções deriváveis em \mathbb{R} tais que $h'(x) - (f' \cdot g)(x) = (f \cdot g')(x)$, $f(2) = g(2) = 3$, $h(2) = (f(2) - 1)^2$. Qual das seguintes afirmações é correcta?

A: $h(x) = (f \cdot g)(x) + 5$ B: $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} + 3$ C: $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} - 3$
 D: $h(x) = (f \cdot g)(x) - 5$ E: $h(x) = (f \cdot g)(x) - 1$

Resolução : Escrevemos $h'(x)$ na forma

$$h'(x) = (f' \times g)(x) + (f \times g')(x)$$

Assim, a primitiva de $h'(x)$ é:

$$h(x) = (f \times g)(x) + k,$$

onde k é uma constante arbitrária. Visto que $h(2) = (f(2) - 1)^2$, teremos

$$h(2) = (f \times g)(2) + k \implies (3 - 1)^2 = 3^2 + k \implies k = -5.$$

Deste modo, $h(x) = (f \times g)(x) - 5$. A resposta certa é **D**.

- Note que as outras alternativas não estão certas, pois, ou a derivada não coincide com $h'(x)$ ou não satisfaz a condição $h(2) = (f(2) - 1)^2 = 4$. Por exemplo, em A $h(2) = 3^2 + 5 = 14 \neq 4$.

60. Considere a igualdade $x + (4 + y)i = (6 - x) + 2yi$, em que x e y são números reais e i é unidade imaginária. O módulo do número complexo $z = x + iy$, é um número:

A: Maior que 10 B: Quadrado perfeito C: Irrracional
 D: Racional não inteiro E: Primo

Resolução : Primeiro vamos determinar x e y . Temos:

$$x + (4 + y)i = (6 - x) + 2yi \implies \begin{cases} x = 6 - x \\ 4 + y = 2y \end{cases} \implies \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$$

Assim, $z = 3 + 4i$ e o seu módulo é

$$|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

A resposta certa é **E**.

- Note que 5 é menor que 10, não é quadrado perfeito, é racional e inteiro.