

# Exame de Matemática II de 2022

## Correcção do exame de Matemática II de 2022

1. Seja o conjunto dos números naturais  $N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ . A expressão falsa é:

- A.  $N$  é o conjunto infinito;
- B.  $N$  é o conjunto ordenado;
- C.  $\forall n, p \in N$ ,  $s = n + p$  em conjunto  $N$  define soma de números
- D.  $\forall n, p \in N$ ,  $r = n - p$  em conjunto  $N$  define diferença de números
- E.  $N$  contém o elemento mais pequeno

**Resolução:** Temos:

- $N$  é o conjunto infinito. Sim, pela forma de representação .
- $N$  é o conjunto ordenado. Sim, pois para cada  $m, k \in N$  ou  $m \leq k$  ou  $k > m$ .
- $\forall n, p \in N$ ,  $s = n + p$  em conjunto  $N$  define soma de números. Sim,  $s = n + p$  é uma operação bem definida e  $s \in N$ .
- $\forall n, p \in N$ ,  $r = n - p$  em conjunto  $N$  define diferença de números. Não. Existe um problema no caso  $n < p$ , pois  $n - p \notin N$ .
- $N$  contém o elemento mais pequeno. Sim, 1 é elemento mínimo deste conjunto.

A resposta certa é **D**.

2. Três números  $a = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ ,  $b = \frac{1}{\sqrt{e}}$ ,  $c = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , onde  $\pi \approx 3,14$  e  $e \approx 2,72$  satisfazem a desigualdade dupla:

A:  $a < b < c$     B:  $c < a < b$     C:  $c < a > b$     D:  $c < b < a$     E:  $a < c < b$

**Resolução :** Tendo em conta que a função  $\sqrt{\cdot}$  é crescente, teremos:

$$e < 3 < \pi \Rightarrow \sqrt{e} < \sqrt{3} < \sqrt{\pi} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi}} < \frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{1}{\sqrt{e}} \Rightarrow a < c < b.$$

A resposta certa é **E**.

3. Um táxi andou 1500 metros com uma velocidade de 15 quilómetros por hora; depois 3 quilómetros durante 9 minutos e o resto do caminho com uma velocidade de 30 km/h durante meia hora. Então, a velocidade média de viagem em quilómetros por hora é:

A: 41                      B: 65/3                      C: 30,5                      D: 26                      E: 21

**Resolução :** Temos:  $s_1 = 1500m = 1,5km$ ,  $v_1 = 15km/h$ ,  $s_2 = 3km$ ,  $t_2 = 9min = \frac{9}{60}h = 0,15h$ ,  $v_3 = 30km/h$ ,  $t_3 = 30min = \frac{30}{60}h = 0,5h$ . Assim,

$$v_1 = \frac{s_1}{t_1} \Rightarrow t_1 = \frac{s_1}{v_1} = \frac{1,5km}{15km/h} = 0,1h.$$

$$s_3 = t_3 \cdot v_3 = 30 \text{ km/h} \cdot 0,5 \text{ h} = 15 \text{ km}.$$

Assim,

$$v_m = \frac{s_t}{t_t} = \frac{s_1 + s_2 + s_3}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{1,5 \text{ km} + 3 \text{ km} + 15 \text{ km}}{0,1 \text{ h} + 0,15 \text{ h} + 0,5 \text{ h}} = 26 \text{ km/h}.$$

A resposta certa é **D**.

4. Qual é o aumento percentual da área de um círculo cujo raio  $R$  é aumentado por 50%?  
 A. 50%;                      B. 100%;                      C. 125%;                      D. 150%;                      E. 200%;

**Resolução :** Temos:

$$\begin{aligned} A_1 = \pi R^2 &\Rightarrow A_2 = \pi(R + 0,5R)^2 = \pi \cdot 2,25R^2 \\ &\Rightarrow \frac{A_2}{A_1} = \frac{\pi 2,25R^2}{\pi R^2} = 2,25 = (1 + 1,25). \end{aligned}$$

Então, o aumento é de 125%. A resposta certa é **C**.

5. Segundo o inquérito, numa turma de 25 alunos foi registado que 18 alunos praticam basquetebol e 20 alunos futebol. Quantos alunos praticam basquetebol e futebol?  
 A: 2                      B: 13                      C: 38                      D: 7                      E: 19

**Resolução :** Seja  $B$  “o conjunto de alunos da turma que jogam basquetebol” e  $F$  “o conjunto de alunos da turma que jogam futebol”. Designemos por  $\#(A)$  o número de elementos do conjunto  $A$ . Assumindo que cada aluno da turma joga pelo menos uma das modalidades basquetebol ou futebol, ou seja,  $\#(B \cup F) = 25$ . Assim,

$$\#(B \cup F) = \#(B) + \#(F) - \#(B \cap F) \Rightarrow 25 = 20 + 18 - \#(B \cap F) \Rightarrow \#(B \cap F) = 13.$$

A resposta certa é **B**.

6. As possibilidades de eleger 3 representantes de uma turma que contém 20 alunos são de:  
 A: 60                      B: 4520                      C: 8000                      D: 800                      E: 1140

**Resolução :** Temos que formar grupos de 3 pessoas num total de 20 alunos. Assumindo que todos os representantes desempenham papel similar, ou seja, a ordem não interessa, temos:

$$C_3^{20} = \frac{20!}{3!(20-3)!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17!}{3 \cdot 2 \cdot 17!} = 1140.$$

A resposta certa é **E**.

7. O resultado da operação da negação da expressão lógica  $(P \rightarrow Q) \wedge Q \vee R$  é:  
 A:  $\neg P$                       B:  $P \wedge R$                       C:  $\neg Q \wedge \neg R$                       D:  $\neg P \vee \neg Q$                       E:  $\neg R$

**Resolução :** Usando leis de álgebra das proposições, temos:

$$\begin{aligned} \neg((P \rightarrow Q) \wedge Q \vee R) &\Rightarrow \neg((\neg P \vee Q) \wedge Q \vee R) \\ &\Rightarrow \neg((\neg P \wedge Q) \vee (Q \wedge Q) \vee R) \Rightarrow \neg(Q \vee R) \\ &\Rightarrow \neg Q \wedge \neg R \end{aligned}$$

A resposta certa é a **C**.

- Usamos as propriedades  $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$ ,  $(P \vee Q) \wedge Q \Leftrightarrow Q$ .

8. A probabilidade de ocasiões que num número aleatório de três algarismos todos sejam distintos, é de:

A: 0,31                      B: 0,45                      C: 0,54                      D: 0,72                      E: 0,83

**Resolução :** Seja  $E$  o evento “saída de 3 dígitos diferentes em um número de 3 algarismos”. Tendo em conta que 000, 056, 001 não tem 3 algarismos, temos: 9 possibilidades para escolher o primeiro dígito, depois de escolher este, retiramos da lista mas acrescentamos o dígito zero na lista e ficamos com 9 possibilidades para escolher o segundo dígito e de seguida retiramos este último dígito escolhido e ficamos com 8 possibilidades de escolha. O total de tais números de 3 algarismos com os 3 dígitos diferentes é  $9 \cdot 9 \cdot 8$ . Assim,

$$P(E) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}} = \frac{9 \cdot 9 \cdot 8}{9 \cdot 10 \cdot 10} = \frac{72}{100} = 0,72.$$

A resposta certa é **D**.

9. O termo  $a_1$  e a razão  $d$  duma progressão aritmética cujos termo são  $a_{21} = 62$  e  $a_{31} = 92$ , são:

A:  $a_1 = 2$ ,  $d = 5$                       B:  $a_1 = 2$ ,  $d = 4$                       C:  $a_1 = 3$ ,  $d = 3$

D:  $a_1 = 2$ ,  $d = 3$                       E:  $a_1 = 3$ ,  $d = 2$

**Resolução :** Temos  $a_m = a_k + (m - k)d$ ,  $m, k \in \mathbb{N}$ . Assim,

$$\begin{aligned} a_{31} &= a_{21} + 10d \Rightarrow 92 = 62 + 10d \Rightarrow d = 3 \\ a_{21} &= a_1 + 20d \Rightarrow 62 = a_1 + 20 \cdot 3 \Rightarrow a_1 = 2. \end{aligned}$$

A resposta certa é **D**.

- Note que o termo geral de uma progressão aritmética é  $a_n = a_1 + d(n - 1)$  e substituindo o primeiro termo e a razão dadas nas restantes alternativas, não obtemos simultaneamente  $a_{21} = 62$  e  $a_{31} = 92$ .

10. A soma de todos os números da sucessão numérica  $5; 1; 0,2; 0,04; \dots$  é igual a:

A: 5                      B: 5,75                      C: 6,25                      D: 7                      E:  $\infty$

**Resolução:** Temos:  $\frac{1}{5} = \frac{0,2}{1} = \frac{0,04}{0,2} = 0,2$  ou seja, esta corresponde a soma infinita dos termos de uma progressão geométrica de razão  $q = 0,2$  e  $a_1 = 5$ . A soma dos primeiros  $n$  termos é:

$$s_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{5 \cdot (1 - (0,2)^n)}{1 - 0,2} = 6,25(1 - (0,2)^n).$$

Assim, quando o número de termos a somar é infinitamente grande, calculamos o limite de  $s_n$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Temos:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 6,25(1 - (0,2)^n) = 6,25,$$

pois,  $(0,2)^n \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . A resposta certa é **C**.

- Note que a soma infinita dos termos de uma progressão geométrica é um número finito quando  $|q| < 1$ .
- A soma é maior que 6, pois, todos os termos são não negativos e os dois primeiros são 5 e 1 que a soma é 6.

11. Um viajante andou numa planície 6 quilómetros na direcção de Norte e depois 8 quilómetros na direcção de Leste. A distância recta entre o ponto inicial e o ponto final da viagem é igual a:

A: 14km                      B: 10km                      C: 8km                      D: 6km                      E: 2km

**Resolução :** Assumindo que o percurso na direcção norte e na direcção leste formam um ângulo de  $90^\circ$ , a distância pretendida corresponde à hipotenusa de um triângulo rectângulo. Temos:

$$d^2 = (6km)^2 + (8km)^2 \Rightarrow d^2 = 36km^2 + 64km^2 = 100km^2$$

$$d = \sqrt{100km^2} = 10km.$$

A resposta certa é **B**.

12. O módulo do vector  $\vec{AB}$  cujos pontos inicial e final são  $A(1, 3, 0)$ ,  $B(4, 7, 2\sqrt{6})$  é igual a:

A:  $15 + 2\sqrt{6}$                       B:  $8 + 2\sqrt{6}$                       C: 5                      D: 7                      E: 8

**Resolução:** Temos:

$$\vec{AB} = (4 - 1, 7 - 3, 2\sqrt{6}) = (3, 4, 2\sqrt{6})$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + (2\sqrt{6})^2} = \sqrt{9 + 16 + 24} = \sqrt{49} = 7.$$

A resposta certa é **D**.

13. A função  $h(x) = x^2 - 5|x| + 1$  definida em  $\mathbb{R}$  é:

A: ímpar                                      B: par                                      C: não é par, nem ímpar  
D: par para  $x > 0$                       E: ímpar para  $x < 0$

**Resolução :** Temos:

$$f(-x) = (-x)^2 - 5|-x| + 1 = x^2 - 5|x| + 1 = f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Então,  $f(x)$  é par. A resposta certa é **B**.

14. O preço dum produto de uma fábrica varia diariamente, segundo a função,  $q(t) = at^2 + b$  ( $t$  dias). Sendo o preço inicial 30,00Mt por unidade e depois de três dias 21,00Mt, qual será o preço de uma unidade do produto passando mais dois dias?

A: 15                      B: 12                      C: 10                      D: 7                      E: 5

**Resolução :** Temos:

$$q(0) = b = 30, \quad q(3) = a \cdot 3^2 + b \Rightarrow 21 = 9a + 30 \Rightarrow a = -1.$$

Assim,  $q(t) = -t^2 + 30$  e  $q(5) = -5^2 + 30 = 5$ . A resposta certa é **E**.

15. A função inversa  $y = f^{-1}(x)$  da função  $f(x) = \sqrt{x-1}$  é:

A:  $y(x) = -x^2 + 1$                       B:  $y(x) = -x^2 - 1$                       C:  $y(x) = x^2 - 1$   
D:  $y(x) = x^2 + 1$                       E: não existe

**Resolução :** Temos:

$$x = \sqrt{y-1} \Rightarrow x^2 = y-1 \Rightarrow y = x^2 + 1.$$

A resposta certa é **D**.



$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \cos(9x^2)}{9} = \frac{4}{9}.$$

A resposta certa é **B**.

20. Para que a função  $f(x) = \begin{cases} -x^2 + x + 1, & x \in ]-\infty, 0] \\ e^{x-b}, & x \in ]0, \infty[ \end{cases}$  seja contínua no ponto  $x = 0$ , parâmetro  $b$  deve ser igual a:

A: -1                      B: 0                      C: 1                      D: 2                      E:  $\forall b \in \mathbb{R}$

**Resolução :** A condição de continuidade de  $f(x)$  no ponto  $x = x_0$  é:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

Assim, claramente que  $f$  é contínua em  $\mathbb{R}$  com exceção talvez do ponto  $x = 0$ , que é um ponto que suscita dúvida quanto à continuidade de  $f(x)$ . Vamos verificar as condições continuidade de  $f$  neste ponto, temos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^2 + x + 1) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x-b} = 1 \\ 1 = e^{-b} &\Rightarrow e^0 = e^{-b} \Rightarrow -b = 0 \Rightarrow b = 0. \end{aligned}$$

A resposta certa é **B**.

21. A soma das raízes da equação  $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$  é igual a :

A: 0                      B: 10                      C: -5                      D: 7                      E: 13

**Resolução :** Fazendo  $t = x^2$  teremos:

$$\begin{aligned} x^4 - 13x^2 + 36 = 0 &\Leftrightarrow t^2 - 13t + 36 = 0 \Rightarrow (t - 9)(t - 4) = 0 \\ t_1 &= 9 \wedge t_2 = 4 \\ t_1 = x^2 &\Rightarrow 9 = x^2 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 3 \\ t_2 = x^2 &\Rightarrow 4 = x^2 \Rightarrow x_{3,4} = \pm 2. \end{aligned}$$

A soma das raízes é igual a zero. A resposta certa é **A**.

22. Simplificando a expressão  $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$  obtém-se a expressão:

A:  $\frac{2}{\sin \alpha}$                       B:  $\frac{1}{2} \sin \alpha$                       C:  $\frac{1}{2} \cos^2 \alpha$                       D: 2                      E:  $\frac{1}{2}$

**Resolução :** Temos:

$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} &= \frac{\sin^2 \alpha + (1 + \cos \alpha)^2}{(1 + \cos \alpha) \sin \alpha} \\ &= \frac{\sin^2 \alpha + 1 + 2 \cos \alpha + \sin^2 \alpha}{(1 + \cos \alpha) \sin \alpha} = \frac{2 + 2 \cos \alpha}{(1 + \cos \alpha) \sin \alpha} = \frac{2}{\sin \alpha}. \end{aligned}$$

A resposta certa é **A**.

- Note que se substituirmos  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  em  $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$ , obtemos  $2\sqrt{2}$  no entanto, nas outras alternativas não obtemos este valor.

23. Quantos pontos de intersecção ( $k$ ) têm os gráficos de funções  $y = \sin x$  e  $g(x) = |\sin 2x|$  no intervalo  $[0, \pi]$ ?

A:  $k = 4$                       B:  $k = 3$                       C:  $k = 2$                       D:  $k = 1$                       E:  $k = 0$

**Resolução :** Temos:

$$\begin{aligned} \sin x = |\sin 2x| &\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \sin 2x, & \text{se } \sin(2x) \geq 0 \\ \sin x = -\sin 2x, & \text{se } \sin(2x) < 0 \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 2 \sin x \cos x, & \text{se } \sin(2x) \geq 0 \\ \sin x = -2 \sin x \cos x, & \text{se } \sin(2x) < 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \sin x(1 - 2 \cos x) = 0, & \text{se } x \in [0, \pi/2] \\ \sin x(1 + 2 \cos x) = 0, & \text{se } x \in ]\pi/2, \pi] \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \vee \cos x = \frac{1}{2}, & \text{se } x \in [0, \pi/2] \\ \sin x = 0 \vee \cos x = -\frac{1}{2}, & \text{se } x \in ]\pi/2, \pi] \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \vee x = \frac{\pi}{3}, & \text{se } x \in [0, \pi/2] \\ x = \pi \vee x = \frac{2\pi}{3}, & \text{se } x \in ]\pi/2, \pi] \end{cases} \end{aligned}$$

A resposta certa é **A**.

24. Resolvendo a equação  $\log_x^{(2x-1)} = -1$  a resposta é:

A:  $x = -0,5$                       B:  $x = 1$                       C:  $x = 2$                       D:  $x = 0,5$                       E:  $\emptyset$

**Resolução :** Tendo em conta o domínio de logaritmo temos:  $x > 0$ ,  $x \neq 1$  e  $2x - 1 > 0$ . Assim,

$$\begin{aligned} \log_x^{(2x-1)} = -1 &\Rightarrow x^{-1} = 2x - 1 \Rightarrow 1 = 2x^2 - x \\ &\Rightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = 0 \\ &\Rightarrow (x + \frac{1}{2})(x - 1) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \vee x = 1. \end{aligned}$$

Visto que  $x > 0$  e  $x \neq 1$ , então, esta equação não tem solução em  $\mathbb{R}$ . A resposta certa é **E**.

25. A solução da inequação  $\frac{x^2-1}{x-5} \geq 0$  é o intervalo:

A:  $\mathbb{R}$                       B:  $[1, 5[$                       C:  $[-1, 1] \cup ]5, \infty[$                       D:  $] - \infty, -1]$                       E:  $\mathbb{R} \setminus \{5\}$

**Resolução :** Tendo em conta que  $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ , teremos:

$x$	$] - \infty, -1[$	$-1$	$] - 1, 1[$	$1$	$]1, 5[$	$]5, +\infty$
$x + 1$	-	0	+	2	+	+
$x - 1$	-	-2	-	0	+	+
$x - 5$	-	-6	-	-4	-	+
$\frac{(x-1)(x+1)}{x-5}$	-	0	+	0	-	+

Assim,  $\frac{(x-1)(x+1)}{x-5} \geq 0$ , implica  $x \in [-1, 1] \cup ]5, \infty[$ . A resposta certa é **C**.

- Note que as outras alternativas ou incluem valores que não satisfazem a inequação ou excluem valores que satisfazem a inequação.

26. Resolvendo a inequação  $\sqrt{4 - 3x} \leq \sqrt{7x + 2}$  a resposta é o intervalo:

A:  $x \in ] - \infty, -\frac{2}{7}[$                       B:  $] - \frac{2}{7}, 0[$                       C:  $x \in [\frac{1}{5}, \frac{4}{3}]$                       D:  $x \in [\frac{5}{3}, \frac{11}{3}]$                       E:  $x \in [\frac{11}{3}, \infty[$

**Resolução :** Temos:

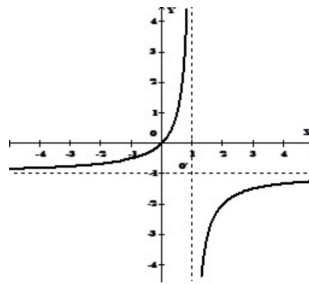
$$4 - 3x \geq 0, \quad 7x + 2 \geq 0, \quad (\sqrt{4 - 3x})^2 \leq (\sqrt{7x + 2})^2$$

$$\begin{aligned}
 -3x &\geq -4, \quad 7x \geq -2, \quad |4 - 3x| \leq |7x + 2| \\
 x &\leq \frac{4}{3}, \quad x \geq -\frac{7}{2}, \quad |4 - 3x| \leq |7x + 2| \\
 x &\leq \frac{4}{3}, \quad x \geq -\frac{7}{2}, \quad 4 - 3x \leq 7x + 2 \\
 x &\leq \frac{4}{3}, \quad x \geq -\frac{7}{2}, \quad -10x \leq -2 \Rightarrow x \leq \frac{4}{3}, \quad x \geq -\frac{7}{2}, \quad x \geq \frac{1}{5}.
 \end{aligned}$$

Intersectando estes conjuntos, obtemos:  $x \in [\frac{1}{5}, \frac{4}{3}]$ . A resposta certa é **C**.

- Note que as outras alternativas incluem valores que não satisfazem a inequação. Por exemplo,  $x = \frac{11}{3}$  não pertence ao domínio de existência de  $\sqrt{4 - 3x}$ .

27. A curva, cujo gráfico está representado na figura, tem a seguinte equação:



A.  $y(x) = \frac{2-x}{x-1}$     B.  $y(x) = \frac{-x}{x+1}$     C.  $y(x) = \frac{x+2}{x+1}$     D.  $y(x) = \frac{2-x}{1-x}$     E.  $y(x) = \frac{x}{1-x}$

**Resolução :** Assumimos que a expressão analítica da função tem a forma:

$$y(x) = \frac{Ax + B}{Cx + D},$$

onde  $A, B, C, D$  são constantes,  $C \neq 0$ .

Temos,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{Ax + B}{Cx + D} = \frac{A}{C} = -1.$$

Assim,  $A = -C$ . A recta  $x = 1$  é assíntota vertical, logo  $-\frac{D}{C} = 1$ . Desta forma  $D = -C$  e

$$y(x) = \frac{-Cx + B}{Cx - C} = \frac{-x + \frac{B}{C}}{x - 1}.$$

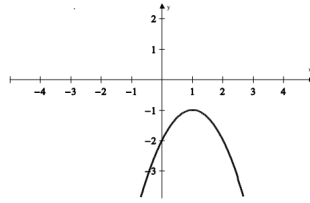
Tendo em conta que o gráfico passa pela origem, temos:

$$y(0) = 0 \Rightarrow \frac{B}{C} = 0 \Rightarrow B = 0.$$

Assim,  $y(x) = -\frac{x}{x-1}$ . A resposta certa é **B**.

- Note que as funções dadas nas restantes alternativas ou não passam pela origem ou os limites laterais no ponto  $x = 1$  não correspondem ao gráfico dado.

28. A curva representada geometricamente na figura, tem a seguinte equação:



- A:  $y(x) = (x - 1)^2 - 1$       B:  $y(x) = (x - 1)^2 + 1$       C:  $y(x) = -(x + 1)^2 + 1$   
 D:  $y(x) = -(x - 1)^2 - 1$       E:  $y(x) = -(x + 1)^2 - 1$

**Resolução :** A expressão analítica da curva dada tem a forma  $y(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$ , onde  $(x_v, y_v)$  são as coordenadas do vértice. Temos  $x_v = 1$ ,  $y_v = -1$  e a ordenada na origem é  $-2$ , ou seja, a parábola passa pelo ponto  $(0, -2)$ . Assim,

$$\begin{aligned} y(x) &= a(x - x_v)^2 + y_v \Rightarrow y(x) = a(x - 1)^2 - 1 \\ \Rightarrow -2 &= a(0 - 1)^2 - 1 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow y(x) = -(x - 1)^2 - 1 \end{aligned}$$

A resposta certa é **D**.

- Note que as expressões analíticas dadas nas restantes alternativas ou não passam do ponto  $(0, -2)$  ou não tem o vértice em  $(1, -1)$ .

29. As assíntotas verticais  $A_V$ , horizontais  $A_H$ , oblíquas  $A_O$  da função  $f(x) = e^T$ ,  $T = \frac{1}{x}$  são:

- A.  $A_V : x = 1$ ,  $A_H : y = e$ ,  $A_O : y = x + 1$   
 B.  $A_V : x = 1$ ,  $A_H : y = 1$ ,  $A_O : y = x$   
 C.  $A_V : x = 0$ ,  $A_H : y = 0$ ,  $A_O$  : não existe  
 D.  $A_V : x = 0$ ,  $A_H : y = 1$ ,  $A_O$  : não existe  
 E. a função não tem assíntotas

**Resolução :** Temos:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{1}{x}\right) = e^0 = 1,$$

então a recta  $y = 1$  é assíntota horizontal.

Para determinarmos a assíntota oblíqua  $y = mx + b$ , calculamos

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(1/x)}{x} = 0$$

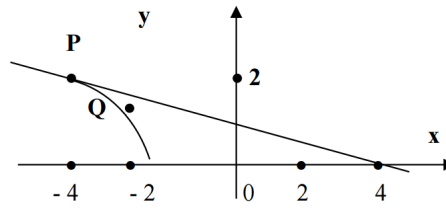
Assim, não existe assíntota oblíqua, pois, esta se reduz em horizontal que determinamos a cima.

Para determinarmos a assíntota vertical, notamos que  $x = 0$  não pertence ao domínio de  $f(x)$ . Assim, calculamos

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \exp(1/x) = +\infty.$$

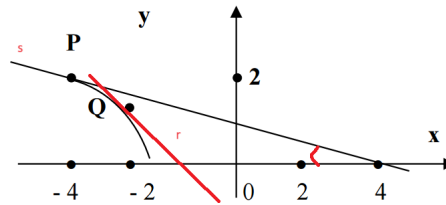
Assim, a recta  $x = 0$  é assíntota vertical. A resposta certa é **D**.

30. Na figura ao lado estão representados os fragmentos dos gráficos de uma  $y$  função  $y = f(x)$  e de uma tangente à curva no ponto  $P$ . Compare os valores da derivada da função nos pontos  $P$  e  $Q$ .



- A.  $f'(-2) > f'(-4)$   
 B.  $f'(-2) < f'(-4)$   
 C.  $f'(-2) = f'(-4)$   
 D. Nenhuma das anteriores  
 E. Os valores de  $f'(-2)$  e  $f'(-4)$  não são comparáveis.

**Resolução :** Tendo em conta que a derivada de  $f$  no ponto  $x_0$  é o coeficiente angular da recta tangente à  $f$  no ponto  $x = x_0$ . Vemos pelo gráfico



que a recta  $s$  decresce com menor velocidade em relação à recta  $r$ . Assim, o declive de  $s$  é maior que o declive de  $r$ , ou seja,  $f'(-4) > f'(-2)$ . A resposta certa é **B**.

31. Um ponto material move-se pelo eixo recto segundo a lei  $R(t) = -\frac{1}{6}t^3 + 3t^2 - 5$ , ( $t$ — segundos,  $R$ — metros). A velocidade de movimento  $v(t)$  em ( $m/s$ ) e o instante do tempo  $T$  em ( $s$ ) quando a aceleração de movimento é nula correspondem a:

- A:  $v(1) = 3, T = 1$       B:  $v(3) = 9, T = 3$       C:  $v(4) = 12, T = 4$   
 D:  $v(5) = 16, T = 5$       E:  $v(6) = 18, T = 6$

**Resolução :** Temos:

$$v(t) = R'(t) = -\frac{t^2}{2} + 6t, \quad a(t) = v'(t) = -t + 6,$$

$a(t)$  corresponde a aceleração no instante  $t$ . Assim,

$$a(t) = 0 \Rightarrow -t + 6 = 0 \Rightarrow t = 6, \quad v(6) = -\frac{6^2}{2} + 6 \cdot 6 = 18.$$

A resposta certa é **E**.

32. PASSE PARA A PERGUNTA SEGUINTE.

33. Resolvendo o sistema linear  $\begin{cases} x + y = 5(x - y) \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$  a soma dos valores de  $x$  e  $y$  é igual a:

- A: 0      B: 1      C: 5      D: 3      E: Nenhuma das alteriores

**Resolução :** Temos:

$$\begin{cases} x + y = 5(x - y) \\ 2x - 3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x + 6y = 0 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \cdot 2x + 6y = 0 \\ 2x = 5 + 3y \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -2(3y + 5) + 6y = 0 \\ 2x = 3y + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10 = 0 \\ 2x = 3y + 5 \end{cases}$$

é impossível. A resposta certa é **E**.

34. As rectas no plano cartesiano  $y = \frac{1}{2}x + 5$  e  $y = k \cdot x - b$  são perpendiculares quando:

A:  $k = 2, b = 5$

B:  $k = 2, b = -5$

C:  $k = -0,5, b \in \mathbb{R}$

D:  $k = 1, b \in \mathbb{R}$

E:  $k = -2, b \in \mathbb{R}$

**Resolução :** As rectas são perpendiculares se  $\frac{1}{2} \cdot k = -1 \Rightarrow k = -2$  e  $b \in \mathbb{R}$ . A resposta certa é **E**.

35. Que figura no plano cartesiano é descrita pela equação  $z\bar{z} = 4$ , onde  $z$  e  $\bar{z}$  (conjugado de  $z$ ) são os números complexos?

A. círculo fechado

B. círculo aberto

C. circunferência

D. elipse

E. duas rectas intersectadas

**Resolução :** Seja  $z = x + iy$ , então  $\bar{z} = x - iy$ ,  $i = \sqrt{-1}$ . Assim

$$z\bar{z} = 4 \Leftrightarrow (x + iy)(x - iy) = 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4$$

Que é a equação da circunferência. A resposta certa é **C**.

36. O raio da circunferência cujo centro é o ponto  $O'(\sqrt{18}, 0)$  e as rectas  $y = x$ ,  $y = -x$  são suas tangentes, é igual a:

A: 1

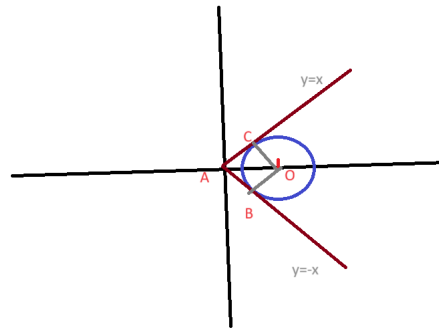
B: 2

C: 3

D: 4

E: 5

**Resolução :** Da figura



vemos que o raio da circunferência é a distância do centro a uma das rectas tangentes. A distância de um ponto  $(x_0, y_0)$  até a reta  $Ax + By + C = 0$  é dada por:  $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ . Para a reta  $y = x$ , temos  $A = 1, B = -1, C = 0$ . Assim,

$$d = \frac{|1 \cdot \sqrt{18} - 1 \cdot 0 + 0|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|\sqrt{18}|}{\sqrt{2}} = 3$$

Portanto, o raio da circunferência é 3. A resposta certa é **C**.

37. O resultado de multiplicação da matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$  por  $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  é a matriz:

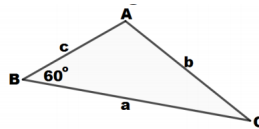
- A.  $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$  B.  $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$  C.  $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$  D.  $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$  E. Não existe

**Resolução :** Temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \\ (-1) \cdot (-1) + (-2) \cdot 0 + (-3) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

A resposta certa é **B**.

38. No  $\triangle ABC$  o lado  $a = 6\text{cm}$ ,  $c = 3\text{cm}$ , o ângulo  $\angle B = 60^\circ$ . A medida do lado  $b$  é igual à:



- A. 5 B.  $5\sqrt{3}$  C. 4 D.  $3\sqrt{3}$  E.  $\sqrt{3}$

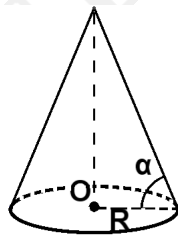
**Resolução :** Usando o teorema dos cossenos, temos:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(60^\circ) = 6^2 + 3^2 - 2 \cdot 6 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 27$$

$$\Rightarrow b = 3\sqrt{3}.$$

A resposta certa é **D**.

39. Seja o raio de base dum cone circular é igual a  $R$ , a geratriz faz um ângulo  $\alpha = 60^\circ$  com a base. Seja o ângulo  $\alpha$  diminuído por  $15^\circ$ . Em quantas vezes diminuirá o volume  $V$  do cone.



- A:  $6\sqrt{3}$  vezes B:  $4\sqrt{3}$  vezes C:  $2\sqrt{3}$  vezes D:  $0,5\sqrt{3}$  vezes E:  $\sqrt{3}$  vezes

**Resolução :** O volume do cone é  $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$ ,  $h$  altura. Quando  $\alpha$  diminui  $15^\circ$ ,  $\alpha = 45^\circ$ , teremos  $\frac{h}{R} = \tan(45^\circ)$  ou seja  $h = R$ . Assim, quando  $\alpha = 60^\circ$ , teremos  $h = R \tan(60^\circ)$ . Desta forma,

$$\frac{V_f}{V_0} = \frac{1/3\pi R \cdot R \tan(45^\circ)}{1/3\pi R \cdot R \tan(60^\circ)} = \frac{1}{\tan(60^\circ)} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Assim  $V_f = \frac{1}{\sqrt{3}}V_0$  vezes. Assim,  $V_0$  diminui em  $\sqrt{3}$  vezes. A resposta certa é **E**.

40. A primitiva  $F(x)$  da função  $f(x) = \sin(3x)$ , sendo  $C$  uma constante arbitrária é:

A.  $F(x) = \cos(3x) + C$

B.  $F(x) = \frac{1}{3} \cos(3x) + C$

C.  $F(x) = -\frac{1}{3} \cos(3x) + C$

D.  $F(x) = 3 \cos(3x) + C$

E.  $F(x) = 3 \cos(3x) + C$

**Resolução :** Fazendo a substituição,  $t = 3x$ , teremos  $dt = 3dx$  e :

$$F(x) = \int f(x)dx = \int \sin(3x) dx = \int \frac{1}{3} \sin t dt = -\frac{1}{3} \cos(3x) + C,$$

onde  $C$  é constante arbitrária. A resposta é **C**.

- Note que a derivada das funções dadas nas outras alternativas é diferente de  $f(x)$ .

UEM - DRA