

Exame de Matemática II de 2023

Correcção do exame de Matemática II de 2023

1. Considere a seguinte expressão: $|-4| + |\sqrt{2}| - |\sqrt{2} - 3|$. O seu valor corresponde a qual das seguintes opções?

A: -7 B: $7 + 2\sqrt{2}$ C: 1 D: 7 E: $1 + 2\sqrt{2}$

Resolução: Visto que módulo de um número nunca é negativo, temos que $|\sqrt{2} - 3| = 3 - \sqrt{2}$ visto que $\sqrt{2} < 3$. Então,

$$|-4| + |\sqrt{2}| - |\sqrt{2} - 3| = 4 + \sqrt{2} - (3 - \sqrt{2}) = 4 - 3 + 2\sqrt{2} = 1 + 2\sqrt{2}.$$

Logo, a resposta certa é **E**.

2. Indique as soluções da equação $|x^2 - 2x - 1| = x - 1$:

A: $x = -1 \vee x = 0$ B: $x = 2 \vee x = 3$ C: $x = -1 \vee x = 2$ D: $x = 0 \vee x = 3$ E: $x = -2 \vee x = 1$

Resolução: Usando a definição $|y| = a \Leftrightarrow y = a \vee y = -a$, e visto que módulo de um número nunca é negativo, temos o seguinte domínio de existência da expressão acima: $x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$. Assim temos:

$$\begin{aligned} |x^2 - 2x - 1| = x - 1 &\Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = x - 1 \vee x^2 - 2x - 1 = -(x - 1) \\ &\Rightarrow x^2 - 3x = 0 \vee x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x(x - 3) = 0 \vee (x - 2)(x + 1) = 0 \\ &\Rightarrow x = 0 \vee x = 3, x = 2 \vee x = -1 \end{aligned}$$

Comparando com os valores do domínio, temos a seguinte solução $x = 2 \vee x = 3$. Logo a resposta certa é **B**.

3. Qual o conjunto solução da seguinte inequação $1 \leq |x - 3| \leq 2$?

A: $[1, 2] \cup [4, 5]$ B: $[-5, 4] \cup [-2, 1] \cup [1, 2] \cup [4, 5]$ C: $] -\infty, 2] \cup [5, +\infty[$ D: $[2, 5]$ E: $[1, 2] \cup [5 + \infty[$

Solução: Para resolver esta dupla inequação, temos que achar a solução do sistema de inequações

$$\begin{aligned} \begin{cases} |x - 3| \geq 1 \\ |x - 3| \leq 2 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x - 3 \geq 1 \vee x - 3 \leq -1 \\ x - 3 \leq 2 \wedge x - 3 \geq -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 4 \vee x \leq 2 \\ x \leq 5 \wedge x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \\ \begin{cases} x \in] -\infty, 2] \cup [4, +\infty[\\ x \in [1, 5] \end{cases} &\Rightarrow x \in [1, 2] \cup [4, 5]. \end{aligned}$$

Logo a resposta certa é **A**.

4. Para que valores de a e b a função $f(x) = |x - a| + b$ é simétrica em relação ao eixo dos Y ?

A: $a = 0, b \in \mathbb{R}$ B: $a \in] - \infty, 0[, b = 0$ C: $a, b \in]0, +\infty[$
 D: $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ E: $a, b \in] - \infty, 0[$

Solução: O valor de b na função dada influencia no deslocamento do gráfico ao longo do eixo Y , enquanto que o valor de a mede o deslocamento do gráfico ao longo do eixo do X . Deste modo, para que o gráfico da função dada seja simétrico em relação ao eixo Y , basta $a = 0$, para quaisquer valores de b . Logo, a resposta certa é **A**.

5. Considere as funções $f(x) = |x|^2 - 4$ e $g(x) = |x^2 - 4|$. Indique a afirmação incorrecta:

A: Ambas funções têm o mesmo domínio
 B: Ambas funções têm o mesmo contradomínio (**imagem**)
 C: Os zeros de $f(x)$ coincidem com os zeros de $g(x)$
 D: $f(x) \geq 0$ para $x \in \mathbb{R} \setminus] - 2, 2[$ e $g(x) \geq 0$ para $x \in \mathbb{R}$
 E: $f(x)$ é crescente em $]0, +\infty[$ e $g(x)$ é crescente em $] - 2, 0[\cup]2, +\infty[$

Resolução: Note que a função $f(x) = |x|^2 - 4 = x^2 - 4$ e $g(x) = |x^2 - 4| = |f(x)|$. Portanto ambas funções tem o mesmo domínio e mesmos zeros de função $x = \pm 2$. Visto que $g(x) = |f(x)|$ então $g(x) \geq 0$ para todos valores de x reais. Por outro lado, o gráfico de $f(x)$ é simétrico em relação ao eixo Y , portanto crescente em $]0, +\infty[$ visto que tem concavidade voltada para cima. Consequentemente $g(x) \geq 0$ em $] - 2, 0[\cup]2, +\infty[$. Mas elas não têm mesmo conjunto imagem. Assim, a resposta certa é **B**.

6. O número de arranjos de 3 rapazes e 4 raparigas numa fila, se as raparigas tem que ficar juntas é:

A: $4! \times 4!$ B: $3! \times 4!$ C: $3! \times 2!$ D: $4! \times 4! \times 2!$ E: $3! \times 4! \times 2!$

Resolução: Visto que as raparigas devem ficar juntas, então temos 4 (3 rapazes e 1 grupo de meninas) objectos permutar e as 4 raparigas permutam entre si. Daí que o resultado é $4! \times 4!$. Assim, a resposta certa é **A**.

7. De entre 35 alunos de uma turma, de quantos modos diferentes é possível escolher um chefe, um sub-chefe e um secretário.

A: $C_3^{35} \times 35!$ B: C_3^{35} C: $A_3^{35} \times A_3^{34} \times A_1^{33}$ D: A_3^{35} E: $A_3^{35} \times A_{32}^{35}$

Resolução: Para escolher um chefe temos 35 possibilidades, 34 possibilidades para um sub-chefe e 33 para um secretário. Assim temos, $35 \cdot 34 \cdot 33 = A_3^{35}$ ou podemos escolher um grupo de 3 pessoas e desses temos 3 possibilidades de escolher um chefe, 2 possibilidades de escolher um sub-chefe e uma para o secretário i.e.,

$$C_3^{35} \times 3 \cdot 2 \cdot 1 = C_3^{35} \times 3! = \frac{35! \times 3!}{(35 - 3)!!} = \frac{35!}{(35 - 3)!} = A_3^{35}$$

Logo, a resposta certa é **D**.

8. Numa perfumaria quer-se colocar na montra, 3 frascos de perfumes de homem e 5 frascos de perfumes de mulher, escolhidos de cerca de 10 perfumes de homem e 12 perfumes de mulher. De quantas formas se pode formar a fila de perfumes?

A: $C_3^{10} \times C_5^{12}$ B: $A_3^{10} \times A_5^{11}$ C: $C_3^{10} \times C_5^{12} \times A_8^8$ D: $A_3^{10} \times A_5^{12} \times 8!$ E: $C_3^{10} \times C_5^{12} \times 22$

Resolução: Para resolver este problema basta escolher 3 frascos de perfumes de homem i.e., C_3^{10} , escolher 5 frascos de perfumes de mulher i.e., C_5^{12} , juntar obtendo 8 frascos e posteriormente permuta-los. Assim,

$$C_3^{10} \times C_5^{12} \times 8! = C_3^{10} \times C_5^{12} \times A_8^8$$

Então, a resposta certa é **C**.

9. Considere os acontecimentos (**independentes**) M e N de uma experiência X , tal que $P(M) = 0.2$ e $P(N) = 0.6$. Qual dos seguintes valores pode ser de (**representa**) $P(M \cup N)$?

A: 0.1 B: 0.4 C: 0.5 D: 0.7 E: 0.9

Resolução: Do estudo de probabilidades sabe-se que $P(M \cup N) = P(M) + P(N) - P(M \cap N)$ e visto que M e N são eventos independentes, temos

$$\begin{aligned} P(M \cup N) &= P(M) + P(N) - P(M \cap N) = P(M) + P(N) - P(M) \cdot P(N) \\ &= 0.2 + 0.6 - 0.2 \cdot 0.6 = 0, .68 \end{aligned}$$

Logo, a resposta certa é **D**.

10. Sabe-se que num país, a probabilidade de nascer uma rapariga é metade da probabilidade de nascer uma rapariga. A probabilidade de um casal com dois filhos ter dois rapazes é:

A: 1/9 B: 1/4 C: 2/3 D: 1/2 E: 1/3

Resolução: Seja p a probabilidade de nascer uma rapariga, então $p + p/2 = 1 \Rightarrow p = 2/3$. Assim, a probabilidade de nascer um rapaz é $p/2 = (2/3)/2 = 1/3$. Logo, a probabilidade de um casal ter dois rapazes será $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$. Portanto, a resposta certa é **A**.

11. O coeficiente de x^2 no desenvolvimento do binómio $(2x - 3)^5$ é igual a:

A: 1080 B: 540 C: -10 D: -540 E: -1080

Resolução: Para o binómio $(a + b)^n = \sum_{k=1}^n C_k^n a^k b^{n-k}$, tomando $a = 2x$, $b = -3$ e $n = 5$, temos

$$\begin{aligned} (2x - 3)^5 &= \sum_{k=0}^5 C_k^5 (2x)^k (-3)^{5-k} \\ &= C_0^5 (2x)^0 (-3)^5 + C_1^5 (2x)^1 (-3)^4 + C_2^5 (2x)^2 (-3)^3 \\ &\quad + C_3^5 (2x)^3 (-3)^2 + C_4^5 (2x)^4 (-3)^1 + C_5^5 (2x)^5 (-3)^0 \end{aligned}$$

O termo com x^2 é

$$C_2^5 (2x)^2 (-3)^3 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot 2^2 \cdot (-3)^3 \cdot x^2 = -1080x^2.$$

Logo, o coeficiente de x^2 é igual a -1080 . Portanto, a alternativa certa é **E**.

12. A soma dos primeiro, segundo, penúltimo e último elementos de uma linha do Triângulo de Pascal é 20. Então, o sexto elemento dessa linha é:

A: 84 B: 126 C: 220 D: 278 E: 332

Resolução: O termo geral dos elementos da linha n do Triângulo de Pascal é $a_k = C_k^n$. De acordo com os dados disponibilizados, temos

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 + a_{n-1} + a_n &= C_0^n + C_1^n + C_{n-1}^n + C_n^n \\ &= \frac{n!}{(n-0)! \cdot 0!} + \frac{n!}{(n-1)! \cdot 1!} + \frac{n!}{(1! \cdot (n-1)!)} + \frac{n!}{(n-n)! \cdot n!} \\ &= 1 + n + n + 1 = 2n + 2 = 20. \end{aligned}$$

Assim, $n = 9$. deste modo, o sexto termo é $a_5 = C_5^9 = \frac{9!}{5!(9-5)!} = 126$. Logo, a resposta certa é **B**.

13. Qual dos seguintes conjuntos descreve o domínio da função real de variável real $f(x) = \frac{x - \log(x)}{x}$?

A: $] - \infty, 1[$ B: $] - \infty, 0[$ C: $]0, +\infty[$ D: $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ E: $\mathbb{R} \setminus] - 1, 1[$

Resolução : Na função logarítmica, o logaritmando deve ser positivo e numa expressão racional, o denominador não deve ser nulo. Assim temos que $x > 0$ i.e., $x \in]0, +\infty[$. Logo, a resposta certa é **C**.

14. De uma função quadrática f sabe-se que $(1, 3)$ são as coordenadas do vértice da parábola que a representa graficamente e que $f(-2) = -4$. Então pode afirmar-se que a função:

A: É par. B: Tem um único zero. C: É injectiva. D: É monótona E: Tem contradomínio $] - \infty, 3]$

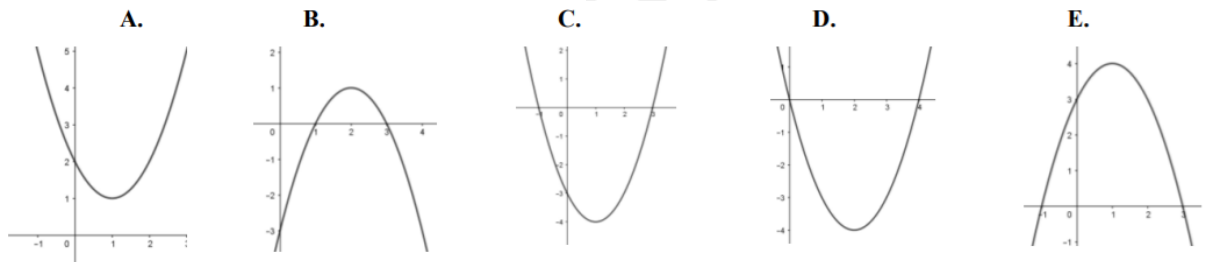
Resolução : Visto que o vértice da parábola é $(1, 3)$ e $f(-2) = -4 < 0$, então a concavidade da parábola está voltada para baixo. Logo, a sua imagem (contradomínio) é $] - \infty, 3]$, a função possui dois zeros, não é par porque não simétrica em relação ao eixo dos Y e uma função quadrática com domínio \mathbb{R} não é injectiva. Então, a resposta certa é **E**.

15. Seja f uma função de domínio \mathbb{R} , estritamente crescente. Qual das afirmações pode estar incorrecta?

A: f não pode ter mais que um zero B: A função é injectiva. C: A função não é par
D: $f(x - 1) < f(x)$ E: O contradomínio é \mathbb{R}^+

Resolução : Visto que f de domínio \mathbb{R} é estritamente crescente, então ela pode ser qualquer coisa declarada nas opções acima, excepto a afirmação alternativa **E** i.e., o contradomínio pode ser \mathbb{R} , por exemplo, $f(x) = x$. Logo, a resposta certa é alternativa **E**.

16. Seja dada a função $f(x) = x^2 - 2x - 3$. Qual dos seguintes gráficos representa esta função:



Reolução : Visto que o coeficiente $a = 1 > 0$, então o gráfico de f tem concavidade voltada para cima. Por outro lado $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16$ e o coeficiente $c = -3 \neq 0$ nos informa que f possui dois zeros distintos e $x = 0$ não é um deles. Com esta informação, ficamos apenas com a alternativa **C**, como candidata. Determinando os zeros de f , temos $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 \pm 4}{2} \Rightarrow x_1 = 3 \wedge x_2 = -1$. Isto confirma que a resposta certa é **C**.

17. Seja f uma função real de variável real definida por $f(x) = 2^x - 2$. Para um certo número real k , o gráfico da função g , definida por $g(x) = f(x + k)$, passa no ponto das coordenadas $(-4, -3/2)$. Qual é o valor de k ?

A: 3 B: $2/3$ C: 2 D: 5 E: -4

Resolução: Temos que

$$\begin{aligned} g(-4) = -3/2 &\Rightarrow f(-4 + k) = -3/2 \Rightarrow 2^{-4+k} - 2 = -3/2 \Rightarrow 2^{-4+k} = 1/2 \\ &\Rightarrow 2^{-4+k} = 2^{-1} \Rightarrow -4 + k = -1 \Rightarrow k = 3. \end{aligned}$$

Logo, a resposta certa é **A**.

O termo geral desta progressão é $u_n = u_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow u_{10} = 3 \cdot 2^{10-1} = 3 \cdot 2^9$. Então, a resposta certa é **D**.

23. Os primeiros 3 termos de uma progressão geométrica são $m+2$, m , $2m-3$. Sobre a progressão podemos dizer que:

- A. É crescente com $m = 0$.
 B. É decrescente com $m = -3$ ou $m = 2$.
 C. É crescente com $m = -1$ ou $m = 1$.
 D. Não monótona com $m = -2$.
 E. Decrescente com $m = -2$ ou $m = 3$.

Resolução: Determinando a razão de u_n , temos

$$q = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{m}{m+2} = \frac{2m-3}{m} \Rightarrow m^2 = (m+2)(2m-3) \Rightarrow m^2 + m - 6 = 0$$

$$(m-2)(m+3) = 0 \Rightarrow m = 2 \vee m = -3$$

- $m = 2 \Rightarrow q = \frac{1}{2} < 1$, logo a sucessão é decrescente pois $u_1 = 4 > 0$, $0 < q < 1$. que também pode-se notar substituindo o valor de m na sucessão dada para ter 4, 2, 1 que é uma sucessão decrescente, pois ou $u_{n+1} - u_n < 0$ para $n = 1, 2$.
- Para $m = -3 \Rightarrow q = 3$. Neste caso a sucessão é $-1, -3, -9$ que é decrescente, pois $u_1 = -1 \wedge q = 3 > 0$ ou $u_{n+1} - u_n < 0$ para $n = 1, 2$.

Logo, a sucessão dada é decrescente para $m = 2$ ou $m = -3$. Então, a resposta certa é alternativa **B**.

24. Se $a_k = 3^{-2k}$ ($k \in \mathbb{N}$), então a soma infinita $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ é igual a:

- A: 0.1 B: 0.125 C: 0.2 D: 1.125 E: 1.2

Resolução: Para obter a soma requerida, primeiro achemos a soma parcial $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ (visto que é uma progressão geométrica cujo $q = \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{3^{-2(k+1)}}{3^{-2k}} = \frac{1}{9}$ e $a_1 = 3^{-2} = \frac{1}{9}$). Assim,

$$S_n = \frac{\frac{1}{9} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{9}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{1}{8} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{9}\right)^n\right).$$

A soma pretendida obtém-se calculando o limite $s = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ i.e.,

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{8} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{9}\right)^n\right) = \frac{1}{8} = 0.125.$$

Logo, a resposta certa é **B**.

25. Considere as sucessões, representadas pelo seu termo geral a_n ($n \in \mathbb{N}$). **Qual delas é convergente?**

- A. $a_n = \frac{n^2 - 4}{n^2}$ B. $a_n = \frac{3n^3 + 5n}{n^2 - 5}$ C. $a_n = \left(\frac{5}{2}\right)^n$ D. $a_n = n^2 - 3$ E. Nenhuma das anteriores.

Resolução: Uma sucessão diz-se convergente se o seu limite existe e é finito. Neste caso a única sucessão com limite finito é a sucessão da alternativa **A**, pois

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 4}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(1 - 4/n^2)}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - 4/n^2) = 1 < \infty.$$

Logo, a resposta certa é **A**.

As alternativas B e C não são correctas porque $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, ora vejamos

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 + 5n}{n^2 - 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3(3 - 5/n^2)}{n^2(1 - 5/n^2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(3 - 5/n^2)}{1 - 5/n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty.$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{2}\right)^n = \infty$ pois $5 > 2.$

26. O valor do limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3+n}{n-1}\right)^{2n}$ é:

- A. ∞ B. e^3 C. 1 D. 0 E. e^8

Resolução: Calculando o limite temos:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3+n}{n-1}\right)^{2n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3+n-1+1}{n-1}\right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n-1} + \frac{4}{n-1}\right)^{2(n-1+1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{4}{n-1}\right)^{n-1}\right]^2 \cdot \left(1 + \frac{4}{n-1}\right)^2 = (e^4)^2 \cdot 1 = e^8. \end{aligned}$$

Deste modo, a resposta certa é **E**.

27. Indique o valor do limite $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^2 + x - 2}$:

- A: -2 B: 0 C: 1 D: $+\infty$ E: $-\infty$

Resolução: Calculando o limite, temos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^2 + x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1)(x^2 - 4)}{(x - 1)(x + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)}{(x - 1)(x + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1)(x - 2) = -2. \end{aligned}$$

Logo, a resposta certa é **A**.

28. Qual o limite, quando $x \rightarrow 5$ da função $\frac{2x^2 - 50}{\sqrt{x} - \sqrt{5}}$:

- A: $40\sqrt{5}$ B: $25\sqrt{10}$ C: ∞ D: 0 E: $2/5$

Resolução: Calculando o limite, temos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2 - 50}{\sqrt{x} - \sqrt{5}} &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2(x^2 - 25)(\sqrt{x} + \sqrt{5})}{(\sqrt{x} - \sqrt{5})(\sqrt{x} + \sqrt{5})} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2(x - 5)(x + 5)(\sqrt{x} + \sqrt{5})}{((\sqrt{x})^2 - (\sqrt{5})^2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2(x - 5)(x + 5)(\sqrt{x} + \sqrt{5})}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} 2(x + 5)(\sqrt{x} + \sqrt{5}) = 40\sqrt{5}. \end{aligned}$$

A resposta certa é alternativa **A**.

29. De uma função $g(x)$, de domínio \mathbb{R} , sabe-se que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ existe e que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x^2} = k$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Qual poderá ser $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$?

- A: 0 B: -1 C: 1 D: ± 2 E: $\pm \infty$

Resolução: Se o limite de uma função for finito (alternativas A, B, C e D), então o limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x^2} = 0$ o que contradiz a hipótese de que $k \neq 0$. Portanto, o $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ ou $-\infty$.

Neste caso temos **E** como alternativa certa.

30. Para certos números reais a e b , é contínua a função $f(x) = \begin{cases} a, & x \leq 0 \\ \frac{\sqrt{x-2}}{x-4}, & 0 < x < 4 \\ b, & x \geq 4 \end{cases}$ Determine a e b .

A: $a = b = 1$ B: $a = 4; b = \frac{1}{2}$ C: $a = \frac{1}{4}; b = 0$ D: $a = \frac{1}{2}; b = \frac{1}{4}$ E: $a = 0; b = 4$

Resolução: A a função dada é contínua em todo \mathbb{R} , com exceção talvez dos pontos $x = 0$ e $x = 4$. Para que uma função seja contínua no ponto x_0 é necessário e suficiente que sejam satisfeitas as condições:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

Com base nessas condições, iremos determinar as constantes a e b .

- Para o ponto $x = 0$, temos:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} a = a \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x-2}}{x-4} = \frac{1}{2} \\ f(0) = a \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{2};$$

- Para o ponto $x = 4$, temos:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} b = b \\ \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x-2}}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2})}{(x-4)(\sqrt{x+2})} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x+2})} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x+2}} = \frac{1}{4} \\ f(4) = 4 \end{cases} \Rightarrow b = \frac{1}{4}. \text{ Logo, a}$$

resposta certa é **D**.

31. Considere a função $f(x) = \ln\left(\frac{x^2-2}{2}\right)$. Determine a sua derivada.

A: $\frac{2x}{x^2-2}$ B: $\frac{4x}{x^2-2}$ C: $2x$ D: $\frac{2(x-1)}{x^2-2}$ E: $\ln\left(\frac{x^2-2}{2x}\right)$

Resolução: Calculando a derivada desta função, temos:

$$f'(x) = \left[\ln\left(\frac{x^2-2}{2}\right) \right]' = \frac{\left(\frac{x^2-2}{2}\right)'}{\frac{x^2-2}{2}} = \frac{\frac{2x}{2}}{\frac{x^2-2}{2}} = \frac{2x}{x^2-2}.$$

Logo, a resposta certa é **A**.

32. Sejam as funções f e g tais que $f(2) = 4$, $f'(2) = -2$, $g(2) = -3$, $g'(2) = 1$. Determine $\left(\frac{1}{f+g}\right)'$ no ponto $x = 2$.

A: 0 B: -1 C: 1 D: -2 E: 2

Resolução: Calculando a derivada do quociente, temos:

$$\left(\frac{1}{f(x)+g(x)}\right)' = \frac{1' \cdot [f(x)+g(x)] - 1 \cdot [f(x)+g(x)]'}{[f(x)+g(x)]^2} = -\frac{f'(x)+g'(x)}{[f(x)+g(x)]^2}.$$

$$\text{Então, } \left(\frac{1}{f(x)+g(x)}\right)' \Big|_{x=2} = -\frac{f'(2)+g'(2)}{[f(2)+g(2)]^2} = -\frac{-2+1}{(4-3)^2} = 1.$$

Deste modo, a resposta certa é **C**.

33. Considere a função $f(x) = \frac{x}{x+1}$ definida em $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Determine o(s) ponto(s) do gráfico de f nos quais a recta tangente é paralela à recta $y = x$.

A: (0, 0) B: (1, -1) e (1, 1) C: (0, 1) D: (0, 0) e (-2, 2) E: (1, 2) e (2, 1)

Resolução: A recta tangente $y = ax + b$ será paralela à $y = x$ se tiverem o mesmo declive i.e., $a = 1$. O declive da recta tangente à curva num ponto é igual a derivada dessa função nesse ponto. Derivado a função dada temos:

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x+1} \right)' = \frac{x'(x+1) - x(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}.$$

Então $f'(x) = 1 \Rightarrow \frac{1}{(x+1)^2} = 1 \Rightarrow (x+1)^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = -2$.

Para $x = 0$ temos $y = f(0) = 0$ e para $x = -2$ temos $f(-2) = \frac{-2}{-2+1} = 2$. Assim, os pontos onde as tangentes são paralelas à recta $y = x$ são (0, 0) e (-2, 2). Então, a resposta certa é **D**.

34. Considere a função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$. Os seus máximos e mínimos são:

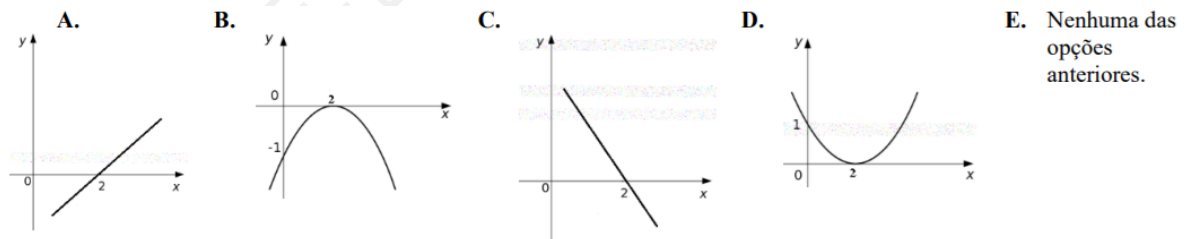
A: Máx. $M(3, 3)$; Mín. $P(0, 0)$ B: Máx. $M(0, 3)$; Mín. $P(2, -1)$ C: Máx. $M(3, 0)$ e Mín. $P(2, -1)$
D: Máx. $M(-1, 2)$ e Mín. $P(0, 3)$ E: Máx. $M(2, -1)$ e Mín. $P(0, 3)$

Resolução: Os pontos para os quais a função atinge os seus valores extremais são aqueles onde a sua derivada anula ou não existe. Deste modo, $f'(x) = 3x^2 - 6x$ e visto que esta derivada é contínua em todo \mathbb{R} , então apenas os pontos que anulam $f'(x)$ são ponto críticos. $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 2$. Usando o teste da segunda derivada, temos $f''(x) = 6x - 6$. Assim,

- Para $x = 0 \Rightarrow f''(0) = -6 < 0$, logo a função atinge um máximo local neste ponto e $f_{max} = f(0) = 3$.
- para $x = 2 \Rightarrow f''(2) = 6 \cdot 2 - 6 = 6 > 0$, logo a função atinge um mínimo local neste ponto e $f_{min} = f(2) = -1$.

Os pontos de máximo e mínimo são respectivamente, Máx. $M(0, 3)$ e Mín. $P(2, -1)$. Então, a resposta certa é **B**.

35. Seja $f(x)$ uma função cujo gráfico tem um ponto máximo de abcissa $x = 2$. Qual dos seguintes gráficos poderá representar o da sua primeira derivada?



Resolução: O gráfico da sua primeira derivada deve possuir $x = 2$ como seu zero de função. Visto que $x = 2$ é ponto de máximo, então para $x < 2$ a derivada é positiva e negativa para $x > 2$. O único gráfico com essas características é o da alternativa C. Assim, a resposta certa é **C**.

36. Seja $h(x) = (x^2 - 1)(x + 1)$ função de domínio \mathbb{R} . Indique qual das afirmações está correcta?

A: $h(x)$ tem três zeros em $x = -1$, $x = 0$, e $x = 1$
B: $h(x)$ tem um mínimo e não tem máximo
C: $h(x)$ é crescente em todo seu domínio

D: $h(x)$ tem um ponto de inflexão em $x = -3$

E: O gráfico de $h(x)$ apresenta concavidade voltada para cima no intervalo $]\frac{1}{3}, +\infty[$

Resolução: Facilmente vemos que os pontos que anulam a função dada são $x = -1$, $x = 1$. Então alternativa A não é correcta. Fazemos agora o estudo de monotonia e extremos. Derivando a função, temos $h'(x) = 2x(x+1) + 1 \cdot (x^2 - 1) = 2x(x+1) + (x+1)(x-1) = (x+1)[2x+x-1] = (x+1)(3x-1)$.

- Pontos estacionários: $h'(x) = 0 \Rightarrow (x+1)(3x-1) = 0 \Rightarrow x = -1 \vee x = \frac{1}{3}$.
- Monotonia

x	$]-\infty, -1[$	-1	$]-1, \frac{1}{3}[$	$\frac{1}{3}$	$]\frac{1}{3}, +\infty[$
$h'(x)$	-	0	0	-	+
$h(x)$	decrecente	0	decrecente	$-\frac{32}{27}$	crescente

- A função é decrescente em $]-\infty, 1/3[$, portanto a alternativa C não é correcta.
- A função possui um mínimo quando $x = \frac{1}{3}$ e não possui máximo, então a alternativa B está certa.
- Pontos de inflexão: Pontos para os quais $h''(x) = 0$ ou não existe. Então, $h''(x) = 1 \cdot (3x-1) + 3(x+1) = 6x+2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$, logo alternativas D e E não estão certas, pois $x = -3$ não é ponto de inflexão e o intervalo onde a concavidade está voltada para cima é $]-\frac{1}{3}, +\infty[\supset]\frac{1}{3}, +\infty[$.

Portanto, a alternativa certa é **B**.

37. Considere o número complexo $z = i(i+1)$. Qual o resultado da sua simplificação?

- A: $1-i$ B: $i+1$ C: $-2i$ D: $i-1$ E: $-1-i$

Resolução: Sabe-se que $i = \sqrt{-1}$ e $i^2 = -1$, então $z = i(i+1) = i^2 + i = -1 + i = i - 1$. Portanto, a alternativa certa é **D**.

38. Considere a equação $z^3 - 4z^2 + 5z = 0$, onde z pertence ao conjunto dos números complexos, \mathbb{C} . Qual dos conjuntos representa as soluções da equação?

- A: $\{0, 2+i, 2-i\}$ B: $\{0, i, -i\}$ C: \emptyset D: $\{1+i, -1+i\}$ E: $\{-i, i, -1, 1\}$

Resolução: Resolvendo a equação, temos:

$$z^3 - 4z^2 + 5z = 0 \Rightarrow z(z^2 - 4z + 5) = 0 \Rightarrow z = 0 \vee z^2 - 4z + 5 = 0.$$

Para a equação $z^2 - 4z + 5 = 0$ temos $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -4$. Então $z = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{-1}}{2} = 2 \pm i$. Assim, o conjunto solução é $\{0, 2-i, 2+i\}$

Logo, a resposta certa é **A**.

39. Se $f'(x) = \frac{1}{3} \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) + 3x^2$ a derivada de uma função real $f(x)$. Sabendo que $f(0) = 1$, determine a primitiva de $f'(x)$.

- A: $f(x) = -\frac{2}{3} \cos\left(\frac{x}{2}\right) + x^3 + \frac{5}{3}$ B: $f(x) = \frac{2}{3} \operatorname{sen}\left(\frac{x}{4}\right) + x^3 + 1$ C: $f(x) = \frac{2}{3} \cos\left(\frac{x}{4}\right) + x^3 + \frac{2}{3}$
D: $f(x) = -\frac{1}{6} \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{3x^2}{2}$ E: $f(x) = -\frac{2}{3} \cos\left(\frac{x}{2}\right) + x^3 + 1$

Resolução: Fazendo a substituição ao $\frac{x}{2} = t \Rightarrow dx = 2dt$, então

$$\int \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) dx = \int 2 \operatorname{sen} t dt = -2 \cos t + C = -2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) + C,$$

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \left[\frac{1}{3} \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) + 3x^2 \right] dx = \frac{1}{3} \int \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) dx + 3 \int x^2 dx$$

$$= -\frac{2}{3} \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{3x^3}{3} + c = -\frac{2}{3} \cos\left(\frac{x}{2}\right) + x^3 + c.$$

Usando a condição $f(0) = 1$ temos $1 = -\frac{2}{3} \cos(0) + 0 + c \Rightarrow c = \frac{5}{3}$. Assim, a primitiva de $f'(x)$ que passe pelo ponto dado é $f(x) = -\frac{2}{3} \cos\left(\frac{x}{2}\right) + x^3 + \frac{5}{3}$. Logo, a alternativa certa é **A**.

40. Seja $g(x) = (9x^2)(3x^3 - 2)^6$ a derivada da função $G(x)$ e $c \in \mathbb{R}$. Qual a possível expressão de $G(x)$?

A: $G(x) = (3x^3)\left(\frac{3}{4}x^4 - 2\right)^6$ B: $G(x) = (3x^3)(3x^3 - 2x)^7$ C: $G(x) = \left(\frac{3x^3}{7}\right)\left(\frac{3}{4}x^4 - 2\right)^7 + c$

D: $G(x) = \frac{1}{7}(3x^3 - 2)^7 + c$ E: $G(x) = (3x^3)\left(\frac{3}{4}x^4 - 2x\right)^7 + c$

Resolução: Fazendo a substituição $u = 3x^3 - 2 \Rightarrow du = d(3x^3 - 2) = 9x^2 dx$, então

$$\begin{aligned} G(x) &= \int g(x) dx = \int (9x^2)(3x^3 - 2)^6 dx = \int (3x^3 - 2)^6 \cdot 9x^2 dx \\ &= \int (3x^3 - 2)^6 d(3x^3 - 2) = \int u^6 du = \frac{u^7}{7} + c = \frac{1}{7}(3x^3 - 2)^7 + c \end{aligned}$$

Logo, a alternativa certa é **D**.