

Exame de Matemática III de 2021

Correcção do exame de Matemática III de 2021

1. Considere as funções $f(x) = |-2x|$ e $g(x) = -2x$? Em que conjunto tem-se $f(x) = g(x)$?

A: \mathbb{R} B: 0 C: $] -\infty, 0]$ D: $[0, \infty[$ E: \emptyset

Resolução: Temos: $f(x) = |-2x| = -2x$ se $-2x \geq 0$, então $f(x) = g(x) = -2x$ se $x \leq 0$. A resposta certa é **C**.

- As outras alternativas não estão certas, pois, ou excluem valores que pertencem ao conjunto solução ou incluem valores que não pertencem ao conjunto solução. Por exemplo, em A e D, se $x = 1$, temos $f(1) = 2 \neq g(1) = -2$.

2. Quais os zeros da função definida por $y = |x - 4| - 3$?

A: -4 e 4 B: 3 C: \emptyset D: 1 e 7 E: 4

Resolução: Temos:

$$y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -(x-4) - 3 = 0, & \text{se } x-4 < 0 \\ x-4 - 3 = 0, & \text{se } x-4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+1 = 0, & \text{se } x < 4 \\ x = 7, & \text{se } x \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, & \text{se } x < 4 \\ x = 7, & \text{se } x \geq 4. \end{cases}$$

A resposta certa é **D**.

- As outras alternativas não estão certas pois substituindo na função não obtemos $y = 0$.

3. Multiplicando os valores inteiros de x que satisfazem as desigualdades $|x-2| \leq 3$ e $|3x-2| > 5$, obtemos:

A: 12 B: 60 C: -12 D: -60 E: 0

Resolução: Temos:

$$\begin{aligned} |x-2| - 3 \leq 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x-2-3 \leq 0, & \text{se } x-2 \geq 0 \\ -(x-2) - 3 \leq 0, & \text{se } x-2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 5, & \text{se } x \geq 2 \\ -x-1 \leq 0, & \text{se } x < 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 5, & \text{se } x \geq 2 \\ x \geq -1, & \text{se } x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 5 \vee -1 \leq x < 2 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 5. \\ |3x-2| - 5 > 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2-5 > 0, & \text{se } 3x-2 \geq 0 \\ -(3x-2) - 5 > 0, & \text{se } 3x-2 < 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x > 7, & \text{se } x \geq 2/3 \\ -3x-3 > 0, & \text{se } x < 2/3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 7/3, & \text{se } x \geq 2/3 \\ x < -1, & \text{se } x < 2/3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x > 7/3 \vee x < -1. \end{aligned}$$

Intersectando os conjuntos das soluções de ambas as inequações obtemos $7/3 < x \leq 5$. Assim, as soluções inteiras são 3, 4 e 5 cujo produto é 60. A resposta certa é **B**.

- Note que o produto não pode ser negativo, pois, significa que pelo menos uma das soluções inteiras é um número negativo. Vimos que $x = -1$ não é solução da inequação $|3x - 2| > 5$ e se $x < -1$ não satisfaz a inequação $|x - 2| \leq 3$.
- A alternativa A não está certa, pois, $x = 5$ é uma solução inteira e não é divisor de 12.
- A alternativa E não está certa, pois, $x = 0$ não satisfaz $|3x - 2| > 5$.

4. Seja $1 < x < 3$ e $|x - 1| + |x - 3|$ será igual a:

A: $2x + 4$ B: 2 C: $-2x + 4$ D: 4 E: $2x - 2$.

Resolução : Temos:

x	$] - \infty, 1[$	1	$]1, 3[$	3	$]3, \infty[$
$ x - 1 $	$-(x - 1)$	0	$x - 1$	2	$x - 1$
$ x - 3 $	$-(x - 3)$	2	$-(x - 3)$	0	$x - 3$
$ x - 1 + x - 3 $	$-x - 1$	2	2	2	$2x - 4$

A resposta certa é **B**.

- Note que substituindo $x = \frac{3}{2}$ e $x = 2$ em $|x - 1| + |x - 3|$ obtemos 2, contudo nas outras alternativas não encontramos o mesmo valor.

5. Qual o conjunto de soluções da inequação $|x^2 - 4x - 5| > 0$?

A: $\{-1, 5\}$ B: $\mathbb{R} \setminus \{-1, 5\}$ C: $] - \infty, -1[\cup]5, \infty[$ D: $] - 1, 5[$ E: \mathbb{R}

Resolução : Tendo em conta a definição de módulo, $f(x) = |x^2 - 4x - 5| \geq 0$. Verificamos o caso $f(x) = 0$. Temos:

$$x^2 - 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 - 4 - 5 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 9$$

$$x - 2 = \pm 3 \Rightarrow x = 2 \pm 3 \Rightarrow x_1 = -1 \wedge x_2 = 5.$$

Assim, $f(x) > 0$ em \mathbb{R} com exceção dos pontos onde $f(x) = 0$, que são os pontos $x = -1$ e $x = 5$. A resposta certa é **B**.

- As outras alternativas não estão certas, pois, ou excluem valores que pertencem ao conjunto solução ou incluem valores que não pertencem ao conjunto solução . Por exemplo, em A e E, se $x = -1$, não satisfaz a inequação e em C, D $x = 2$, $x = 6$ satisfazem a inequação mas não estão inclusos nestes conjuntos, respectivamente.

6. O Armando esqueceu-se do *pin* do seu telefone, mas sabe que se inicia com 0, que 7 faz parte do pin e que é composto por 4 algarismos sem repetição . De quantas tentativas precisaria o Armando para garantir que poderia desbloquear o telefone?

A: 120 B: 56 C: 168 D: 504 E: 126

Resolução : Temos as seguintes possibilidades $07xy$ ou $0x7y$ ou $0xy7$, onde xy são os dígitos em falta para completar o pin. Para cada um dos casos, temos $8 \cdot 7$ possibilidades de escolher os outros dois dígitos, pois, os dígitos não se repetem no pin do Armando. Esta corresponde a um arranjo de 8 elementos tomados 2 a dois, sem repetição. Para o número total das possibilidades, temos $3 \cdot 56 = 168$. A resposta certa é **C**.

7. Soube-se que numa reunião os participantes infringiram as regras de distanciamento social, terminado a reunião com um aperto de mão. Para rastreamento dos contactos, as autoridades de saúde perguntaram ao recepcionista qual o número de presentes na reunião. Este disse não saber, mas ter contado no total 15

apertos de mão, sendo que todos os participantes se despediram dos restantes. Quantas pessoas estavam na reunião?

A: 10 B: 6 C: 15 D: 4 E: 8

Resolução : Seja n o número de pessoas presentes na reunião. Visto que por exemplo Carlos apertando a mão de Bento é o mesmo que Bento apertando a mão de Carlos, temos:

$$C_2^n = 15 \Rightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} = 15 \Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!}{2!(n-2)!} = 15$$

$$\Rightarrow n(n-1) = 30 \Rightarrow n^2 - n - 30 = 0 \Rightarrow (n-6)(n+5) = 0 \Rightarrow n = 6 \vee n = -5.$$

Visto que n é um número positivo, $n = 6$. A resposta certa é **B**.

8. O número de arranjos de 3 rapazes e 4 raparigas numa fila, se as raparigas têm que ficar juntas é:

A: $4! \times 4!$ B: $3! \times 4!$ C: $3! \times 2!$ D: $4! \times 4! \times 2!$ E: $3! \times 4! \times 2!$

Resolução : Podemos considerar que as raparigas juntas é um bloco (um elemento). Assim, vamos permutar 4 elementos dos quais (3 rapazes) e um bloco (inseparável) de 4 raparigas. Então, $4!$ é o número de todas as permutações. As raparigas juntas, podem permutar entre si, $4!$ é o número de tais possibilidades. Assim, o total de arranjos é $4! \times 4!$. A resposta certa é **A**.

9. No lançamento de uma moeda não viciada, qual é a probabilidade de, ao lançar 3 vezes, obter-se cara duas vezes?

A: $3/8$ B: $1/4$ C: $1/8$ D: $5/8$ E: $1/2$

Resolução : Seja H cara e T coroa. Temos o seguinte espaço dos resultados possíveis:

$$\Omega = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}.$$

Seja E o evento saída de duas caras. Assim,

$$P(E) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}} = \frac{3}{8}.$$

A resposta certa é **A**.

10. De entre as disciplinas de Matemática, Física, Química, Biologia, Geologia e Geografia a Eunice tem que escolher exactamente duas. De quantas maneiras diferentes pode fazer a escolha?

A: 24 B: 30 C: 15 D: 10 E: 36

Resolução: Trata-se de agrupamento de 6 elementos tomados 2 a 2, em que a ordem não interessa, pois, escolher Matemática e Biologia é o mesmo que escolher Biologia e Matemática. Assim, o número de tais possibilidades de escolha é:

$$C_2^6 = \frac{6!}{2! \cdot (6-2)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{2! \cdot 4!} = 15.$$

A resposta certa é **C**.

11. No desenvolvimento do binómio $(x + \frac{a}{x})^6$, o coeficiente do termo x^4 é 12. Qual é o valor de a ?

A: $\sqrt{15}$ B: 3 C: 1 D: 6 E: 2

Resolução : Temos:

$$\left(x + \frac{a}{x}\right)^6 = x^6 + 6 \cdot x^5 \frac{a}{x} + C_2^6 x^4 \cdot \frac{a^2}{x^2} + C_3^6 x^3 \cdot \frac{a^3}{x^3} + \dots + \frac{a^6}{x^6}.$$

Assim, o coeficiente do termo x^4 é $6a$. De outro lado, este coeficiente é 12. Desta forma, $6a = 12$, logo $a = 2$. A resposta certa é **E**.

12. A soma dos três primeiros elementos de uma certa linha do Triângulo de Pascal é 121. Qual o terceiro elemento da linha seguinte:

A: 5 B: 360 C: 105 D: 120 E: 84

Resolução: Seja n o grau do polinômio no binômio $(x + y)^n$. Assim, os coeficientes no triângulo de Pascal são os coeficientes binomiais. Desta forma,

$$C_0^n + C_1^n + C_2^n = 121 \Leftrightarrow 1 + n + \frac{n!}{2!(n-2)!} = 121$$

$$1 + n + \frac{n(n-1)(n-2)!}{2!(n-2)!} = 121 \Leftrightarrow 2 + 2n + n(n-1) = 242$$

$$n^2 + n - 240 = 0 \Leftrightarrow (n-15)(n+16) = 0 \Rightarrow n = 15 \vee n = -16.$$

Tendo em conta que n é positivo, $n = 15$. Desta forma, o terceiro elemento da linha seguinte é $C_2^{16} = \frac{16!}{2!14!} = \frac{16 \cdot 15}{2} = 120$. A resposta certa é **D**.

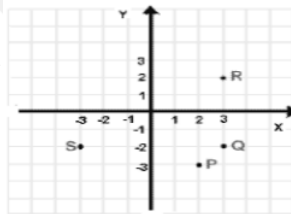
13. Qual dos seguintes conjuntos descreve o domínio da função real de variável real $\frac{x - \log(x)}{x}$?

A: $] - \infty, 1[$ B: $] - \infty, 0[$ C: $] 0, \infty[$ D: $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ E: $\mathbb{R} \setminus] - 1, 1[$

Resolução : Pelo domínio de logaritmo temos $x > 0$ e porque x é denominador de uma fracção, $x \neq 0$. Intersectando as duas condições temos: $x > 0$. A resposta certa é **C**.

- Note que as outras alternativas admitem números negativos que não pertencem ao domínio da função $\log(x)$. Por exemplo, $x = -2$, não existe em \mathbb{R} , $\log(-2)$.

14. Um ponto dado $V(-3, 2)$ pertence a uma função ímpar $y = g(x)$. Com base nesta afirmação é correcto afirmar que, dos pontos representados na figura ao lado, também pertence a $y = g(x)$ o ponto:

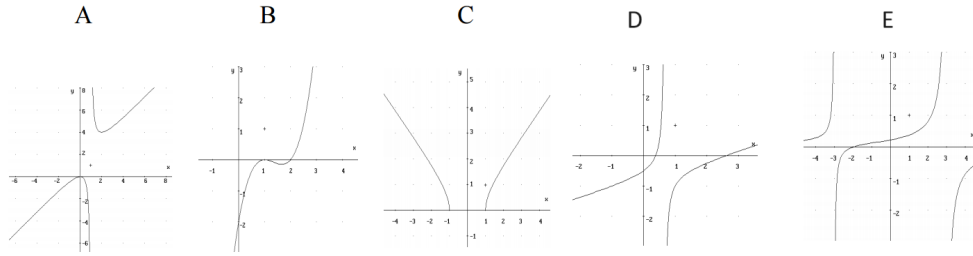


A: S B: Q C: P D: R E: Nenhuma das alternativas anteriores

Resolução : Vemos que Q pertence a $y = g(x)$, $g(3) = -2$ e o ponto $V(-3, 2)$ e por $g(x)$ ser ímpar, $g(-3) = -g(3)$. A resposta certa é **B**.

- S não pertence ao gráfico de $y = g(x)$ pois, $V(-3, 2)$ pertence ao gráfico e S tem mesma abcissa com V , por definição de função esta tem uma única imagem.
- R não pertence ao gráfico de $y = g(x)$ pois, $V(-3, 2)$ pertence ao gráfico e a função é ímpar, por propriedade de função ímpar, o gráfico é simétrico em relação à origem.
- Não dá para tirar conclusões se P pertence ao gráfico.

15. Diga qual dos gráficos a seguir indicados corresponde à função $f(x) = -\frac{x+2}{x^2-9}$:



Resolução : Temos:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{x+2}{x^2-9} \right) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{x+2}{x^2-9} \right) = 0.$$

Então, $y = 0$ é assíntota vertical. Mais, vemos que $x = -3$ e $x = 3$ não pertencem ao domínio de $f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = -\infty$. O zero da função é $x = -2$ e a ordenada na origem é $f(0) = 2/9$. Estes dados correspondem ao gráfico da alternativa **E**.

- As restantes gráficos não estão certos, pois, por exemplo, nenhum deles tem assíntota horizontal a recta $y = 0$.

16. Determine as coordenadas do vértice da seguinte função $f(x) = 4x^2 - 2x + 1$.

A: $V(\frac{1}{4}; \frac{3}{4})$

B: $V(4; 7)$

C: $V(\frac{1}{4}; 1)$

D: $V(1; 3)$

E: $V(\frac{3}{2}; \frac{5}{2})$

Resolução : Representemos $f(x)$ na forma $f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$. Temos:

$$\begin{aligned} f(x) &= 4x^2 - 2x + 1 = 4\left(x^2 - \frac{x}{2}\right) + 1 = 4\left(x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{4^2} - \frac{1}{4^2}\right) + 1 \\ &= 4\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = 4\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Assim, $x_v = \frac{1}{4}$ e $y_v = \frac{3}{4}$. A resposta certa é **A**.

17. Indique, se existirem, as assíntotas horizontal e vertical da função $f(x) = \frac{5x-1}{4-x}$.

A: AV: $x = 0$, AH: $y = 1$

B: AV: não existe, AH: $y = -5$

C: AV: $x = 4$, AH: não existe

D: AV: $x = 4$, AH: $y = 5$

E: AV: $x = -4$, AH: $y = 5$

Resolução : Temos: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x-1}{4-x} = -5$. Assim, $y = -5$ é assíntota horizontal. Para assíntota vertical, temos $x = 4$ não pertence ao domínio, e $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{5x-1}{4-x} = +\infty$. Então, $x = 4$ é assíntota vertical. A resposta certa é **D**.

18. Seja uma sucessão 1, 4, 7, 10, ... e dois números 147 e 157. Qual das afirmações é correcta?

A. Ambos números são termos da sucessão.

B. Ambos números não são termos da sucessão.

C. O número 147 não é termo da sucessão, mas 157 é.

D. O número 147 é termo da sucessão, mas 157 não.

E. Nenhuma das alternativas anteriores.

Resolução : Temos $a_{n+1} - a_n = 3$, $n = 1, 2, \dots$. Assim, os termos da sucessão formam uma progressão aritmética de razão $d = 3$. O termo geral é $a_n = a_1 + (n-1)d = 1 + 3(n-1) = 3n - 2$. Para cada termo da sucessão corresponde a uma ordem n inteiro e positivo. Temos:

$$147 = 3n - 2 \Rightarrow 3n = 149 \Rightarrow n = \frac{149}{3} \notin \mathbb{Z}, \quad 157 = 3n - 2 \Rightarrow 3n = 159 \Rightarrow n = \frac{159}{3} = 53 \in \mathbb{Z}.$$

Desta forma, apenas o número 157 é termo da sucessão. A resposta certa é **C**.

19. Considere a sucessão: 5, 9, 13, 17, 21, 25, ... Indique a soma dos 12 primeiros termos.

A: 320 B: 324 C: 380 D: 384 E: 234

Resolução : Temos $a_{n+1} - a_n = 4$, $n = 1, 2, \dots$. Assim, os termos da sucessão formam uma progressão aritmética de razão $d = 4$. O termo geral é $a_n = a_1 + (n-1)d = 5 + 4(n-1) = 4n + 1$. A soma dos primeiros n termos é dada por

$$s_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

Assim, a soma dos primeiros doze termos é:

$$s_{12} = \frac{a_1 + a_{12}}{2} \cdot 12 = (5 + 4 \cdot 12 + 1) \cdot 6 = 324.$$

A resposta certa é **E**.

20. Seja a progressão: 1, 3, 9, 27, 81, ... A soma de n primeiros termos é igual a 364. Determine n .

A: 4 B: 5 C: 6 D: 7 E: 8

Resolução : Temos:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 3, \quad n = 1, 2, \dots$$

Assim, os termos da sucessão formam uma progressão geométrica de razão $q = 3$. O termo geral é $a_n = a_1 q^{(n-1)} = 1 \cdot 3^{(n-1)}$. A soma dos primeiros n termos é dada por

$$s_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}, \quad q \neq 1.$$

Assim,

$$364 = \frac{1 - 3^n}{1 - 3} \Leftrightarrow -728 = 1 - 3^n \Leftrightarrow 3^n = 729 \Leftrightarrow 3^n = 3^6 \Leftrightarrow n = 6.$$

A resposta certa é **C**.

21. Numa progressão geométrica $u_3 = 1/8$, $u_6 = 1/64$. Determine a soma dos 5 primeiros termos:

A: 32/31 B: 31/32 C: 63/64 D: 65/64 E: 30/32

Resolução : Temos: $a_m = a_k q^{m-k}$, $m, k \in \mathbb{N}$, q é a razão. Assim,

$$a_6 = a_3 q^3 \Leftrightarrow \frac{1}{64} = \frac{1}{8} q^3 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^3 = q^3 \Leftrightarrow q = \frac{1}{2}.$$

A soma dos primeiros n termos é dada por

$$s_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}, \quad q \neq 1.$$

Temos $a_1 = a_3q^{-2} = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \frac{1}{2}$. Assim,

$$s_5 = \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5\right)}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{32} = \frac{31}{32}.$$

A resposta certa é **B**.

22. Na primeira semana de funcionamento, uma biblioteca registou a entrada de 120 pessoas. Na segunda semana registou 145 e na terceira 170. A quantidade de pessoas a frequentar a biblioteca foi aumentando, em média, igualmente, durante 9 semanas. Quantas entradas foram registadas na 5ª semana?

A: 220 B: 240 C: 260 D: 280 E: 300

Resolução : Seja a_n o número de pessoas que frequentaram a biblioteca na n -ésima semana. Assim,

$$a_{n+1} - a_n = 25, \quad n = 1, 2, \dots$$

Assim, os termos da sucessão formam uma progressão aritmética de razão $d = 25$. O termo geral é $a_n = a_1 + (n - 1)d = 120 + 25(n - 1) = 25n + 95$. Desta forma

$$a_5 = 25 \cdot 5 + 95 = 125 + 95 = 220.$$

A resposta certa é **A**.

23. Qual o seguinte limite: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n$?

A: ∞ B: Não existe C: 3 D: $3e$ E: e^3

Resolução : Temos $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n = 1^\infty$ que é uma indeterminação. Assim, usando o limite notável $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, teremos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{\frac{n}{3} \cdot 3} = e^3.$$

A resposta certa é **E**.

24. Qual o limite da sucessão de termo geral $u_n = 1 + e^{-2n}$, $n \in \mathbb{N}$?

A: $-\infty$ B: -1 C: 1 D: 2 E: ∞

Resolução : Temos: $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + e^{-2n}) = 1 + e^{-\infty} = 1$. A resposta certa é **C**.

25. Seja a função dada por $f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & \text{se } x \leq 1 \\ ax^2, & \text{se } x > 1. \end{cases}$ Qual deve ser o valor de a para que a função $f(x)$ seja contínua?

A: 2 B: 1 C: -1 D: 0 E: -2

Resolução : A função $f(x)$ é contínua no ponto x_0 se

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

Assim, o ponto que suscita dúvida quanto à continuidade de $f(x)$ é $x = 1$. Verifiquemos a condição de continuidade neste ponto. Temos:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Rightarrow a = 2.$$

Assim, se $a = 2$ a função $f(x)$ é contínua. A resposta certa é **A**.

26. Determine os limites laterais da seguinte função, quando x tende para 1, $f(x) = -\frac{x^3}{x^2-1}$.

- A: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$
 B: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$
 C: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$
 D: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$
 E: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$

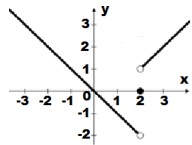
Resolução : Temos:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} -\frac{x^3}{x^2-1} = -\frac{1}{0^-} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} -\frac{x^3}{x^2-1} = -\frac{1}{0^+} = -\infty,$$

pois, $x \rightarrow 1^-$ significa que $x < 1$, $x \rightarrow 1$, $x \rightarrow 1^+$ significa que $x > 1$ e $x \rightarrow 1$. A resposta certa é **A**.

27. Na figura está representada parte do gráfico de uma função $f(x)$ de domínio \mathbb{R} . O grupo de afirmações verdadeiras é:



- A. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2)$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$
 B. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq f(2)$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \neq f(2)$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ não existe
 C. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq f(2)$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$
 D. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2)$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \neq f(2)$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ não existe
 E. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq f(2)$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \neq f(2)$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$

Resolução : Temos:

$$f(2) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -2, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1.$$

Assim, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq f(2)$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \neq f(2)$ e $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ não existe. A resposta certa é **B**.

28. Calcule o limite, quando $x \rightarrow 0$ da função $\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{x}$

- A: $+\infty$ B: $-\infty$ C: 1 D: 0 E: 2.

Resolução : Temos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x})}{x(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1-(1-x)}{x(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}} = 1. \end{aligned}$$

A resposta certa é **C**.

29. A derivada da função $f(x) = 2^{-x} + 2^x + 3$ é:

- A: $f'(x) = 2xe^x + 2e^x + 3$
 B: $f'(x) = 2x2^{-x} + 2e^x$
 C: $f'(x) = 2^{-x} + 2^x$
 D: $f'(x) = -2^{-x+1} \ln 2 + 2^x \ln 2 + 3$
 E: $f'(x) = -2^{-x} \ln 2 + 2^x \ln 2$

Resolução : Temos:

$$f'(x) = 2^{-x}(\ln 2) \cdot (-x)' + 2^x \ln 2 + 0 = -2^{-x} \ln 2 + 2^x \ln 2.$$

A resposta certa é **E**.

30. Seja f uma função real de variável real tal que $f(x) = f'(x)$ para todo e qualquer número real. Qual das seguintes expressões pode definir a função f :

- A: $3x^2$ B: $\sin(x)$ C: e^{5x} D: $2e^x$ E: $\ln(x)$

Resolução : Temos:

- em A, $f'(x) = 6x \neq 3x^2 = f(x)$;
- em B, $f'(x) = \cos x \neq \sin x = f(x)$;
- em C, $f'(x) = 5e^{5x} \neq e^{5x} = f(x)$;
- em D, $f'(x) = 2e^x = 2e^x = f(x)$;
- em E, $f'(x) = \frac{1}{x} \neq \ln x = f(x)$.

A resposta certa é **D**.

31. Determine, se possível, a equação da recta tangente à função $f(x) = \sqrt{x+2}$ no ponto $Q(-1; 1)$.

- A: $y = x$ B: $y = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}$ C: $y = -\frac{x}{2} + 1$ D: Não é possível E: $y = x + 2$

Resolução : A equação da recta tangente à curva $f(x)$ no ponto $P(x_0, y_0)$ tem a forma $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$. Temos:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} \Rightarrow f'(-1) = \frac{1}{2}$$

$$y = f'(-1)(x + 1) + 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}(x + 1) + 1 = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}.$$

A resposta certa é **B**.

32. Indique, se existirem, os máximos e mínimos da função $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2}$.

- A. Não existem
 B. Máx. $M(4, 0)$; Mín. $P(1, -4)$
 C. Máx. $M(4, 0)$; Mín. não existe
 D. Máx. não existe; Mín. $P(0, 0)$
 E. Máx. $M(8, 0)$; Mín. não existe.

Resolução : Determinemos os pontos críticos. Temos:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2} = 1 - \frac{4}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, f'(x) \neq 0 \wedge f'(0) \nexists.$$

Então $x = 0$ é ponto crítico. Estudando o sinal da derivada, teremos:

x	$] - \infty, 0[$	0	$]0, \infty[$
$f'(x)$	$-$	$\cancel{0}$	$+$
$f(x)$	\searrow	$\cancel{0}$	\nearrow

Desta forma, não existem os valores máximos e mínimos de $f(x)$. A resposta certa é **A**.

- Note que os pontos M e P não são pontos do gráfico de $f(x)$.

33. Considere a função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$. Os seus máximos e mínimos são:

- A. Máx. $M(3, 3)$; Mín. $P(0, 0)$
 B. Máx. $M(0, 3)$; Mín. $P(2, -1)$
 C. Máx. $M(3, 0)$; Mín. $P(2, -1)$
 D. Máx. $M(-1, 2)$; Mín. $P(0, 3)$
 E. Máx. $M(2, -1)$; Mín. $P(0, 3)$.

Resolução : Determinemos os pontos críticos. Temos:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 3x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 2.$$

Então $x = 0$ e $x = 2$ são pontos críticos.

Estudando o sinal da derivada, teremos:

x	$] - \infty, 0[$	0	$]0, 2[$	2	$]2, \infty[$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	\nearrow	3	\searrow	-1	\nearrow

Desta forma, o máximo é $(0, 3)$ e o mínimo é $(2, -1)$. A resposta certa é **B**.

- Note que nas alternativas A, C e D pelo menos um dos pontos P e M não pertence ao gráfico de $f(x)$.

34. A função $f(x)$ definida e contínua num intervalo $[a, b]$, admite $f'(x) > 0$. Então, $f(x)$ em $[a, b]$ é:

- A. Monótona.
 B. Não é monótona.
 C. Decrescente
 D. Não é limitada.
 E. De diferentes sinais nas extremidades

Resolução : Dá para concluir que $f(x)$ é monótona crescente. A resposta certa é **A**.

- Note que nas extremidades $f(x)$ pode ter tanto mesmo sinal ou diferentes, dependendo da função . Por exemplo $f(x) = x$ em $[1, 2]$, temos $f'(x) = 1 > 0$ e $f(1) > 0$, $f(2) > 0$. O mesmo não acontece com $f(x) = x^2 - 1$ em $[1/2, 2]$.

35. Qual é a expressão para a função primitiva da função $f(x) = 6x^2$.

- A: $12x + c$ B: $3x^2 + c$ C: $3x^3 + c$ D: $3x + c$ E: $2x^3 + c$

Resolução : Temos:

$$\int 6x^2 dx = 6 \int x^2 dx = 6 \cdot \frac{x^3}{3} + c = 2x^3 + c,$$

onde c é uma constante arbitrária. A resposta certa é **E**.

- Note que a derivada das funções dadas nas restantes alternativas é diferente de $6x^2$.

36. A primitiva da função $f(x) = \frac{2}{x}$ é:

- A: $F(x) = \frac{2}{x^2} + c$ B: $F(x) = \ln(x + c)$ C: $F(x) = 2 \ln|x| + c$
 D: $F(x) = \frac{1}{x^2} + c$ E: Nenhuma das anteriores

Resolução : Temos:

$$\int \frac{2}{x} dx = 2 \int \frac{1}{x} dx = 2 \cdot \ln|x| + c,$$

onde c é uma constante arbitrária. A resposta certa é **D**.

- Note que a derivada das funções nas outras alternativas é diferente de $\frac{2}{x}$.

37. A que função corresponde o integral $\int \frac{x^2}{5+x^3} dx$?

- A: $\frac{x^3}{5x+x^4}$ B: $\frac{4x^3}{15x+3x^4}$ C: $\ln(5+x^3)$
 D: $\frac{1}{3} \ln|5+x^3| + c$ E: $(5+x^3)^{-2}$

Resolução : Fazemos a substituição $t = 5 + x^3$. Teremos, $dt = 3x^2 dx$ e

$$\int \frac{x^2}{5+x^3} dx = \int \frac{\frac{1}{3} dt}{t} = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{3} \ln|t| + c = \frac{1}{3} \ln|5+x^3| + c,$$

onde c é uma constante arbitrária. A resposta certa é **D**.

- Note que a derivada das funções nas outras alternativas é diferente de $\frac{x^2}{5+x^3}$.

38. Seja $f(x)$ uma função cuja derivada de segunda ordem é $f''(x) = \sin(x) + 6x$. Sabendo que o gráfico da função contém o ponto $(0,1)$ e que nesse ponto a recta tangente à função é paralela à recta $y = 3x$, indique a expressão de f :

- A: $f(x) = -\sin(x) + x^3 + 4x + 1$
 B: $f(x) = -\cos(x) + 6x^3$
 C: $f(x) = \sin(x) + 2x^2$
 D: $f(x) = -\sin(x) + x^3 + 2x - 3$
 E: $f(x) = -\sin(x) + 3x^3 - 1$

Resolução : Temos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \int f''(x) dx = \int (\sin(x) + 6x) dx = \int \sin(x) dx + \int 6x dx \\ &= -\cos(x) + 3x^2 + c_1. \end{aligned}$$

Sabemos que a recta tangente ao gráfico de f no ponto $(0,1)$ é paralela à recta $y = 3x$, isto é, $f'(0) = 3$. Assim, $f'(0) = -\cos 0 + 3 \cdot 0^2 + c_1 = c_1 - 1 = 3$, então $c_1 = 4$. Desta forma, $f'(x) = -\cos(x) + 3x^2 + 4$. Assim,

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (-\cos(x) + 3x^2 + 4) dx = -\sin x + x^3 + 4x + c_2.$$

Usando o facto do ponto $(0,1)$ pertencer ao gráfico de f , temos:

$$f(0) = -\sin 0 + 0^3 + 4 \cdot 0 + c_2 = 1 \Rightarrow c_2 = 1.$$

Desta forma, $f(x) = -\sin x + x^3 + 4x + 1$. A resposta certa é **A**.

- Note que nas outras alternativas $f(0) \neq 1$.

39. Considere os números complexos $z = 3(\cos 6^\circ + i \sin 6^\circ)$ e $u = 5(\cos 50^\circ + i \sin 50^\circ)$. A forma trigonométrica do complexo $z \cdot u$ é:

- A: $15 - 15\sqrt{3}i$ B: $4 - 4\sqrt{3}i$ C: $\cos(56^\circ) + i \sin(56^\circ)$
 D: $15(\cos(56^\circ) + i \sin(56^\circ))$ E: $8(\cos(56^\circ) + i \sin(56^\circ))$

Resolução : Temos:

$$\begin{aligned} z_1 &= |z_1|(\cos(\theta_1) + i \sin(\theta_1)), \quad z_2 = |z_2|(\cos(\theta_2) + i \sin(\theta_2)) \\ z_1 \cdot z_2 &= |z_1| \cdot |z_2|(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)) \\ z \cdot u &= 3(\cos 6^\circ + i \sin 6^\circ) \cdot 5(\cos(50^\circ) + i \sin(50^\circ)) \\ &= 3 \cdot 5 \cdot (\cos(6 + 50) + i \sin(6 + 50)) = 15(\cos(56) + i \sin(56)). \end{aligned}$$

A resposta certa é **D**.

40. A que valor equivale o número complexo $\frac{a+i}{1-ai}$, onde $a \in \mathbb{R}$.

- A: ai B: 1 C: $-i$ D: $-a$ E: i

Resolução : Temos:

$$\frac{a+i}{1-ai} = \frac{(a+i)(1+ai)}{(1-ai)(1+ai)} = \frac{a+a^2i+i-a}{1+a^2} = \frac{a^2i+i}{a^2+1} = \frac{(a^2+1)i}{(a^2+1)} = i.$$

A resposta é **E**.

- Note que se $a = 0$ obtemos $\frac{(a+i)(1+ai)}{(1-ai)(1+ai)} = i$ mas este resultado não obtemos substituindo $a = 0$ nas expressões das outras alternativas.