Exame de Matemática III de 2022

Correcção do exame de Matemática III de 2022

1. A solução da equação $|-3+x| = -3$ é:

   A. $x = 0$ B. $x = 6$ C. $x = 0$ ou $x = 6$ D. $x = -3$ E. $\emptyset$

   Resolução: O móduo de um número de um número real é sempre não negativo. Assim, esta equação não tem solução. A resposta certa é **E**.

2. $y = |ax^2 + bx + c|$ é uma função:

   A: Positiva B: Positiva quando $x \geq 0$ e negativa caso contrário C: Par D: Ímpar E: Não negativa

   Resolução : Temos:

   - Positiva: não é verdade. Pois, por exemplo $y = |x^2 - 1|$ toma valor zero quando $x = \pm 1$.
   - Positiva quando $x \geq 0$ e negativa caso contrário: não. Pois, $y = |x^2 - 1|$ toma valor zero quando $x = -1$.
   - Par: não é verdade. Pois, por exemplo a função $y = |x^2 - x|$ satisfaz $y(-2) = 6$ e $y(2) = 2$. Ou seja, $y(-2) \neq y(2)$, logo a função não é par.
   - Ímpar: não é verdade. Pois, por exemplo $y = |x^2 - 1|$ satisfaz $y(-2) = 3$ e $y(2) = 3$. Ou seja, $y(-2) \neq -y(2)$, logo a função não é ímpar.
   - Não negativa: é verdade. Pois, módulo de um número ou toma um valor positivo ou toma o valor zero.

   A resposta certa é **E**.

3. A solução da inequação $|x-2| \cdot |x-3| < 0$ é:

   A: $x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$ B: $\emptyset$ C: $x \geq 2$ ou $x \geq 3$ D: Nenhuma das anteriores E: $x \in]2, 3[$

   Resolução : O móduo de um número real é sempre não negativo. E o produto de dois números com memso sinal é sempre positivo. Assim, esta inequação não tem solução. A resposta certa é **B**.

4. a e $|a|$ são sempre dois números...

   A. com valores simétricos

   B. com o mesmo valor

   C. valores recíprocos

   D. com valores iguais ou simétricos

   E. nenhuma das anteriores

   Resolução : Temos:

- com valores simétricos. Não, pois, por exemplo $a = 2$, temos, $|a| = 2$, ou seja, $|a| = a$. Estes são simétricos, no caso $a < 0$.
- com o mesmo valor. Não, pois, por exemplo $a = -2$, temos, $|a| = 2$, ou seja, $|a| \neq a$. Estes tem o mesmo valor, no caso $a > 0$.
- com valores iguais ou simétricos. Sim, pois, se $a \geq 0$, temos $|a| = a$ e se $a < 0$ temos $|a| = -a$.

A resposta certa é **D**.

5. O domínio de uma função modular deve sempre ser:

   A. o conjunto de números reais
   B. nenhuma das outras alternativas
   C. positivos
   D. simétrico
   E. não negativo

   Resolução : O domínio de uma função modular pode ser complexo. Por exemplo, $y = |f(x)|$ onde $f(x)$ é uma função qualquer. O domínio neste caso depende de $f(x)$, que pode ter diferentes condições de existência. A função $f(x) = \frac{1}{|x|}$, tem domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. A resposta certa é **B**.

6. Quantas permutações das letras ABCDEFGH contém a palavra ABC?

   A: 720 B: 120 C: 4 D: Permutação de 8 E: 6

   Resolução : Fixamos as letras ABC, consideramos estas como uma letra (designamos por L) e permutamos as letras LDEFGH. Obtemos, um número total de $6! = 720$ permutações . A resposta certa é **A**.

   - Note que listando algumas possibilidades, juntando ABC temos, por exemplo ABCDEFGH, DEFGHABC, ABCEDFGH, ABCFDEGH, ABCDEGH, FEDGHABC, FDEGHABC, ... que são permutações que satisfazem a condição dada. Desta forma, a resposta certa é um número não inferior a 7.
   - Note que não podemos retirar ABC e permmutar os restantes, pois, a palavra ABC pode estar em diferentes posições, no início, no fim, no meio, depois da primeira letra, etc. Assim, não é corrrecto coniderar que tais permutações são $5! = 120$.
   - Não é correcto considerar permutação de 8, pois, este caso, inclui os que as letras A, B e C não estão juntas.

7.

8. Um estudante pode escolher um projecto de estudo de entre 3 listas, a primeira tem 23 projectos, a segunda tem 15 projectos e a terceira tem 19 projectos. Quantas alternativas de escolha tem o estudante? (Onde C_r^n representa a combinação de n elementos r a r).

   A: 6555 B: 57 C: $23C_{19}^{15}$ D: $19C_{23}^{15}$ E: Inversamente proporcional a k

   Resolução : O estudante pode escolher da lista A, ou da lista B ou da lista C. Tendo em conta o total de possibilidades de cada lista, temos:

   $$23 + 15 + 19 = 57.$$

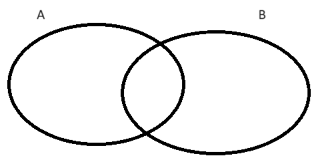
   A resposta certa é **B**.

   - Note que neste caso, não há agrupamento, daí que não faz sentido usar combinação.

9. Uma empresa recebeu candidaturas para ocupar 2 vagas. 220 candidatos concorreram para vaga A, 147 para a vaga B e 51 concorreram para 2 vagas. Quantos candidatos concorreram somente para a vaga A?

   A: 271 B: 350 C: 220 D: 169 E: Nenhuma das anteriores

   Resolução: Designemos por A o conjunto de pessoas que concorrem a vaga A, por B o conjunto de pessoas que concorrem a vaga B e $\#(C)$ representa número de elementos do conjunto C. Tendo em conta o diagrama



   Temos $\#(A) = 220$, $\#(B) = 147$, $\#(A \cap B) = 51$. Os que somente concorrem a vaga A, são $\#(A \setminus B)$. Usando propriedades de conjunto, temos

$$\#(A \setminus B) = \#(A) - \#(A \cap B) = 220 - 51 = 169.$$

   A resposta certa é **C**.

   - Note que não é correcto fazer a diferença $\#(A) - \#(B)$, pois, podem existir elementos do conjunto B que não pertencem ao conjunto A, ou seja, podem existir candidatos que apenas concorreram à vaga B. Mais, este número não pode ser superior a 220.

10. De quantas formas podem ser selecionados 49 estudantes de uma turma de 52? Onde A_n^r representa o arranjo de n elementos r a r.

   A: 22100 B: 3 C: A_{52}^{47} D: 2548 E: Nenhuma das anteriores

   Resolução : Para formar grupos de pessoas, a ordem não interessa. Desta forma, usamos

$$C_{49}^{51} = \frac{52!}{(52-49)!49!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49!}{49! \cdot 3!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50}{6} = 22100.$$

   A resposta certa é **A**.

11. Quantas palavras de comprimento r podem ser construídas com um alfabeto de n letras?

   A: $n \cdot r$ B: $\frac{n!}{(n-r)!}$ C: $\frac{n!}{r!(n-r)!}$ D: n^r E: Nenhuma das anteriores

   Resolução: Temos n possibilidades para escolher a primeira letra, n possibilidades para escolher a segunda letra, ..., n possibilidades para escolher a k-ésima letra. Assim,

$$\underbrace{n \cdot n \cdot \ldots n}_{r\ vezes} = n^r.$$

   A resposta certa é **D**.

   - Este exercício pode ser considerado como permutação com reposição e o resultado é n^r.

12. A C_n^r (C_n^r é a combinação de n elementos r a r) é:

    A: é uma operação usada para fazer agrupamentos com repetições múltiplas

    B. é uma operação usada para fazer agrupamentos com apenas uma repetição

    C. produz grupos sem repetição

    D. faz arranjos de elementos de um conjunto.

    E. Nenhuma das anteriores

    Resolução : Combinação dá o número de grupos de n elementos tomados r a r, sem repetição e onde a ordem não interessa. A resposta certa é **E**.

    - Note que a ordem faz muita diferença. Pois, quando a ordem interessa pode-se usar arrranjo.

13. Seja $f(x)$ uma função par, então:

    A: $f(x) = f(2x)$
    B: $f(x) = |f(x)|$
    C: $f(x) - f(-x) = 0$
    D: $-f(x) = f(-x)$
    E: $f(x) = 2f(g(x))$ para uma função $g(x)$ no mesmo domínio da função $f(x)$

    Resolução : Uma função real de variável real $f(x)$ diz-se par, se para cada elemento x do domínio de f, o elemento $-x$ também pertence ao domínio de f e, $f(-x) = f(x)$.

    Temos:

    - $f(x) = f(2x)$, não está certa, pois, por exemplo a função

    $$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{se } x \geq 0 \\ 4, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

      Temos $f(x) = f(2x)$ mas $f(-2) \neq f(2)$. Logo, f não é par.
    - $f(x) = |f(x)|$, não está certa, pois, por exemplo a função $f(x) = 2^x$ satisfaz $f(x) = |f(x)|$ mas $f(-2) \neq f(2)$. Logo, f não é par.
    - $f(x) - f(-x) = 0$, temos $f(x) = f(-x)$, logo, f é par.
    - $-f(x) = f(-x)$, não está certa, pois, por exemplo a função $f(x) = x$, satisfaz $-f(1) = f(-1)$ mas $f(-1) \neq f(1)$, logo, f não é par.
    - $f(x) = f(-x)$, logo, f é par.
    - $f(x) = 2f(g(x))$ para uma função $g(x)$ no mesmo domínio da função $f(x)$. Não. Pois, por exemplos a funções $g(x) = x + 1$, $f(x) = 2$, temos $f(x) = 2f(x+1)$, $f(0) = 2f(1)$ $f(-1) = 2f(0) = 4f(1)$. Mais, $f(-1) = 2 \neq f(1) = 8$.

    A resposta certa é **D**.

14. Duas funções lineares, a composição destas $f(g(x))$ ou $g(f(x))$ são:

    A. funções iguais

    B. funções simétricas

    C. funções recíprocas

    D. funções lineares

    E. funções de ordem superior a linear

Resolução : Seja $f(x) = ax + b$, $g(x) = kx + m$, a, b, k, m são constantes. Temos:

$$f(g(x)) = a(kx + m) + b = akx + am,$$
$$g(f(x)) = k(ax + b) + m = akx + kb + m.$$

As funções $f(g(x))$ e $g(f(x))$ são lineares, em geral diferentes, não simétricas ($f(g(x)) \neq -g(f(x))$), não recíprocas ($f(g(x)) \cdot g(f(x)) \neq 1$). A resposta certa é **D**.

15. A função $f(x) = x^2 - 4x + c$ tem zeros diferentes se e somente se:

A: $c = 4$ B: $c < 4$ C: $c > 4$ D: $c \leq 4$ E: $c \geq 4$

Resolução : Considere a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Então,

- $f(x)$ tem dois zeros reais e distintos, se $\Delta = b^2 - 4ac > 0$;
- $f(x)$ tem dois zeros reais e iguais, se $\Delta = b^2 - 4ac = 0$;
- $f(x)$ não tem zeros em $\mathbb{R}$, se $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

A função $f(x) = x^2 - 4x + c$ tem zeros diferentes se e somente se o descriminante $(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot c > 0$. Temos: $16 - 4c > 0 \Rightarrow c < \frac{16}{4} = 4$. A resposta certa é **B**.

- Nas outras alternativas ou a função tem dois zeros iguais ou não tem zeros.

16. Os arcos de uma ponte são descritos por uma função $f(x) = x^2 + 2x$, $x \in]-3, 0]$. Sabendo que $f(x)$ é periódica e de período igual a 3, determine $f(7)$.

A: 15 B: 3 C: 0 D: 2 E: -8

Resolução : Uma função é periódica se existe $T > 0$ tal que $\forall x \in \mathbb{R}$, tal que $f(x + T) = f(x)$. Assim, $T = 3$ e $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x + 3) = f(x)$. Assim,

$$\begin{aligned} f(7) &= f(4+3) = f(4) = f(1+3) = f(1) \\ &= f(-2+3) = f(-2) = (-2)^2 + 2 \cdot (-2) = 4 - 4 = 0. \end{aligned}$$

A resposta certa é **C**.

17. As funções $f(x) = 2x^2 - 3x + 3$, $g(x) = -x + 4$ são definidas no mesmo. Determine os pontos de interseção entre elas.

A. Não existem pontos de intersecção
B: $x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$
C: $x = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$
D: $x = \frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$
E: Nenhuma das anteriores

Resolução : Procuramos o ponto de intersecção destas funções fazendo $f(x) = g(x)$

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 2x^2 - 3x + 3 = -x + 4 \Rightarrow 2x^2 - 2x - 1 = 0$$
$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{4}.$$

Visto que o descriminate é -4, então, esta equação não tem raízes em $\mathbb{R}$. Logo, não existe ponto de interseção. A resposta certa é **A**.

18. A imagem da função $f(x) = 5\cos(2x) + 1$ encontra-se em:

A: $[-1, 1]$ B: $[-5, 5]$ C: $[0, 1]$ D: $[-4, 6]$ E: Nenhuma das anteriores

Resolução : Tendo em conta que $\forall x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \cos(x) \leq 1$, então, $-1 \leq \cos(2x) \leq 1$. Então, multiplicando por 5 a esta desigualdade, temos: $-5 \leq 5\cos(2x) \leq 5$. Adiconando 1 unidade a esta desigualdade temos:

$$-5 + 1 \leq -5\cos(x) + 1 \leq 5 + 1 \Rightarrow -4 \leq -5\cos(x) + 1 \leq 6.$$

A resposta certa é **D**.

19. O número de bons ovos em um galinheiro é aproximadamente igual a $E(n) = 2n^2 + \frac{n-1}{4}$ onde n representa o número de dias desde a criação do galinheiro. Quantos ovos bons existiam no início da criação e quantos depois de 24 horas?

A: 0 e 2 respectivamente B: 0 ovos C: -0.25 e 2 D: -0.25 E: 2

Resolução: Matematicamente, $n = 0$ significa o inínio da criação e $n = 1$, significa que passou 1 dia (24 horas). Assim,

$$E(0) = 2 \cdot 0^2 + \frac{0-1}{4} = -\frac{1}{4} = -0,25, \quad E(1) = 2 \cdot 1^2 + \frac{1-1}{4} = 2.$$

A resposta certa é **C**.

20. Determine o termo geral da sucessão $\frac{5}{3}, \frac{7}{8}, \frac{9}{15}, \ldots$

A: $a_n = \frac{2n+1}{n^2-1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$
B: $a_n = \frac{2n+1}{n^2-1}$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$
C: $a_n = \frac{2n+1}{n^2-1}$,
D: $a_n = \frac{2n+1}{n^2-1}$, $n = 2, 3, \ldots$
E: Nenhuma das anteriores

Resolução : Observando a sucessão do numerador é 5,7,9, ...e a sucessão do denominador é 3,8,15, ... Para o numerador, temos $u_{n+1} - u_n = 2$ é uma progressão aritmétrica de razão 2. Temos: $u_n = 5 + 2(n-1) = 2n + 3$, com $n = 1, 2, \ldots$.

Para o denominador, temos não temos nem progressão aritmétrica e nem progressão geométrica. Mas, notamos que

$$3 = 2^2 - 1, \ 8 = 3^2 - 1, \quad 15 = 4^2 - 1,$$

o que sugere a sucessão de termo geral $v_n = n^2 - 1$, $n = 2, 3, \ldots$. Assim, devemos escrever u_n começando de $n = 2, 3, \ldots$. Para tal, fazemos $k = n + 1$, temos $u_k = 2(k-1) + 3 = 2k + 1$, $k = 2, 3, 4 \ldots$. Assim,

$$a_k = \frac{u_k}{v_k} = \frac{2k+1}{2^k - 1}, \ k = 2, 3, \ldots$$

Podemos escrever em termos de n, ou seja, trocar k por n. Temos:

$$a_n = \frac{u_n}{v_n} = \frac{2n+1}{2^n - 1}, \ n = 1, 2, 3, \ldots$$

A resposta certa é **D**.

- Note que as expressões analíticas dadas nas alternativas A e B não satisfazem $a_1 = \frac{5}{3}$.

21. Determine a soma dos primeiros 12 termos da sucessão 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

A: $S_{12} = 375$ B: $S_{12} = \frac{1-r^n}{1-r}$ C: $S_{12} = 6(a_1 + a_{12})$
D: $S_{12} = 350$ E: Nenhuma das anteriores

Resolução : Temos:

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_3 = a_1 + a_2 = 2,\ a_4 = a_2 + a_3 = 3,\ a_5 = a_3 + a_4 = 5,$$
$$a_6 = a_4 + a_5 = 8,\ a_7 = a_5 + a_6 = 13,\ a_8 = a_6 + a_7 = 21,\ a_9 = a_7 + a_8 = 34,$$
$$a_{10} = a_8 + a_9 = 55,\ a_{11} = a_9 + a_{10} = 89,\ a_{12} = a_{11} + a_{10} = 144.$$

Assim,

$$S_{12} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{12} = 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 21$$
$$+34 + 55 + 89 + 144 = 376.$$

A resposta certa é **E**.

22. Diz-se que uma sucessão a_n é estritamente crescente se:

A. os valores de n forem crescentes

B. os valores de n forem crescentes na medida em que a_n for crescendo

C. os valores de a_n forem crescendo na medida em que o n vai crescendo

D. os valores de a_n forem crescendo ou constantes na medida em que o n for crescendo.

E. Nenhuma das anteriores

Resolução : Temos: uma sucessão a_n é estritamente crescente se $a_n < a_{n+1}$ para qualquer n, ou seja, à medida que n cresce, os valores de a_n crescem. A resposta certa é **C**.

- Note que a alternativa D, é parecida com a C, no entanto, significa que a_n é crescente e não estritamente crescente.

23. No fim de 131 dias de colheita, um certo produto vai ser comercializado a 10 meticais por unidade. Sabendo que nos diferentes dias de colheita foram feitos os seguintes registos de quantidades colhidas, 3, 4.5, 6, 7.5, 9, . . . , determine o valor monetário arrecadado depois da comercialização.

A: 131 655 MT B: 1310 MT C: 393MT D: 90 MT E: Nenhuma das anteriores

Resolução : Seja a_n a quantidade produzida do produto colhida no $n-$ésimo ano. Assim,

$$a_1 = 3,\ a_2 = 4.5,\ a_3 = 6, \ldots$$
$$a_2 - a_1 = 1,5,\ a_3 - a_2 = 1,5, \ldots$$

então a_n forma uma progressão aritmética de razão $d = 1,5$. O termo geral é

$$a_n = a_1 + d(n-1) = 3 + 1,5(n-1) = 1,5n + 1,5.$$

Supondo que comercializa-se todas as quantidades colhidas, o valor monetário arrecadado depois da comercialização é

$$s_{131} \cdot 10\text{Mt}, \tag{4}$$

onde s_{131} é a soma dos primeiros 131 termos da sucessão. Temos:

$$s_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \Rightarrow s_{131} = \frac{3 + a_{131}}{2} \cdot 131 = \frac{3 + a_1 + 130 \cdot d}{2} \cdot 131$$

$$= \frac{3+3+130\cdot 1,5}{2}\cdot 131 = 13165,5.$$

Desta forma, (4) torna-se

$$s_{131}\cdot 10 \text{ Mt} = 131655\text{Mt}.$$

A resposta certa é **A**.

24. Uma fábrica de produção de calçado pretende a partir do mês de Maio de 2022, incrementar a sua produção em 10 unidades por mês. No mês de Abril de 2022, ela produzirá 100 calçados. Determine a quantidade que deverá ser produzida no mês de Maio de 2083.

A: 7430 B: 6200 C: 161 D: 74100 E: 741 000

Resolução : Seja a_n o número de calçado produzido após n meses, a contar desde Maio de 2022, sendo que no fim do mês de Maio de 2022 faz o primeiro mês.

O termo geral tem a forma $a_n = a_1 + d(n-1)$, onde $d = 10$. No dia 30 de Maio, será produzido 100+10=110 calçados. Assim, $a_1 = 110$ e

$$a_n = 110 + 10(n-1) = 100 + 10n.$$

De Junho de 2022 a Maio de 2083, teremos 61 anos que corresponde a $61\cdot 12 = 732$ meses e mais o mês de Maio de 2022, teremos 733 meses.

Desta forma,

$$a_{733} = 100 + 10\cdot 733 = 7430.$$

A resposta certa é **A**.

25. Se o vigésimo termo de uma progressão geométrica de razão 0.5 é igual a 23, determine o termo na posição 50.

A: $a_{50} = 23(0,5)^{49}$ B: $a_{50} = 23(0,5)^{50}$ C: $a_{50} = 1150$
D: $a_{30} = 23(0,5)^{30}$ E: Nenhuma das anteriores

Resolução : O termo geral tem a forma $a_n = a_1q^{n-1}$, onde q é a razão e a_1 é o primeiro termo. Assim $q = 0,5$ e

$$a_{20} = a_1\cdot q^{19} \Rightarrow a_1 = \frac{a_{20}}{q^{19}} = \frac{23}{(0,5)^{19}}.$$

Desta forma,

$$a_{50} = a_1q^{49} = \frac{23}{(0,5)^{19}}\cdot (0,5)^{49} = 23\cdot (0,5)^{49-19} = 23\cdot (0,5)^{30}.$$

A resposta certa é **D**.

26. Se $f(x) = 2^{-x}$, então $f(0) + f(1) + \ldots + f(100)$ será:

A. $S = 2 - 2^{-101}$ B. $S = 2^{50} - 2^{-50}$ C. $S = 2 - 2^{-101}$
D. $S = 2 + 2^{-100}$ E. $S = 2 - 2^{-100}$

Resolução : Temos:

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{100}}$$

Esta corresponde a soma dos primeiros termos duma progressão geométrica de razão:

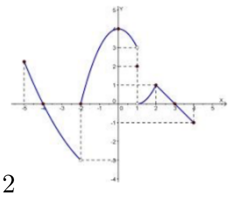
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q = \frac{1}{2},\ n = 1, 2, \ldots$$

Temos:

$$s_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{101}\right)}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\frac{1}{2^{101}}\right) = 2\cdot\frac{(2^{101}-1)}{2\cdot 2^{100}} = 2-2^{-100}.$$

Assim, $S = 2-2^{-100}$. A resposta certa é **E**.

27. Para a função a abaixo, os valores de $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -2^-}$, $f(x)$ e $f(1)$, são respectivamente iguais a:



A. Não existe, -3, 2 B. $2, 0, 2$ C. 0, -3, 0
D. 3, 0, 0 E. Nenhuma das anteriores

Resolução : Temos:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 3,\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x) \ \Rightarrow \ \text{não existe.}$$
$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = -3,\ f(1) = 2.$$

A resposta certa é **A**.

28. O limite da função $f(x)$ quando $x \to a$ é:

A: o valor de $f(x)$ quando $x = a$
B: o valor de $f(x)$ quando $x \neq a$
C: o valor de $f(x)$ quando x é proximo de a
D: o valor do domínio de $f(x)$
E: indeterminado se $x = 0$

Resolução : Por definição $\lim_{x\to a} f(x) = L$ se a função $f(x)$ aproxima-se de L com um erro ε escolhido, então x aproxima-se de a com um erro deterinado por em função do erro ε. Quer dizer que à medida que nos aproximamos de a, a função $f(x)$ aproxima-se de L. A resposta certa é **C**.

- Note que o limite não depende do valor de $f(x)$ no ponto $x = a$, mas sim de valores de $f(x)$ quando x está próximo de a.

29. O resultado do cálculo da expressão $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{x+1}$ é:

A. 0 B. 1 C. indeterminado D. -1 E. Nenhuma das anteriores

Resolução : Temos:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x+1} = \frac{1-1}{1+1} = 0.$$

A resposta certa é **A**.

30. Seja dada a função : $f(x) = \begin{cases} x-2, & x<1 \\ kx^2, & x \geq 1. \end{cases}$ Determine o valor de k, de modo que a função seja contínua.

A: $k = \frac{1}{x^2}$ B: $k=5$ C: $k = 7x-2$ D: $k = \frac{7x-2}{x^2}$ E: Nenhuma das alternativas anteriores

Resolução : A condição de continuidade de uma função $f(x)$ no ponto $x = x_0$ é:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

As funções $x-2$ e kx^2 são funções polinomiais, são contínuas nos seus respectivos domínios de definição. O ponto que suscita dúvida quanto à continuidade de $f(x)$ é $x=1$. Usando a condição de continuidade neste ponto, teremos:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 1-} (x-2) = \lim_{x\to 1^+} kx^2 = k \Rightarrow -1 = k$$

A resposta certa é **E**.

31. Para uma função $f(x)$, se $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ então:

A. a função tem assimptota em $\pm\infty$
B. a é assimptota horizontal
C. a é assimptota vertital.
D. $f(x)$ é uma função contínua em todo o seu domínio.
E. Nenhuma das anteriores

Resolução : Por definição , se $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ então, $f(x)$ tem uma assímptota vertical $x = a$. A recta $y = mx+b$ é assímptota se a distância de um ponto variavel $P(x,y)$ da função $f(x)$ à recta $y = mx+b$ tende para zero quando pelo menos uma das coordenadas de P tende para o infinito. Neste caso, quando $y \to \infty$ e x é próximo de a, a distância de P à recta tende para zero. A resposta certa é **C**.

32. A velocidade de uma gota de chuva em queda livre é dada por
$v(t) = v_f(1-e^{-\frac{gt}{v_f}})$, onde $(g = 9,8\frac{m}{s^2}$ e v_f é a velocidade final da gota. Se uma gota cai de um ponto muito alto de tal modo que precise de uma infinidade de segundos para chegar ao chão , determine a velocidade da queda.

A: ∞ B: $-\infty$ C: 0 D: v_f E: Nenhuma das anteriores

Resolução : Calculamos o limite

$$v = \lim_{t\to\infty} v_f(1-e^{-\frac{gt}{v_f}}) = v_f(1-e^{-\infty}) = v_f.$$

A resposta certa é **D**.

33. Suponha que $f(x) = \log_{5\sqrt[3]{5}}^{(x^4)}$ indica em centenas x dias depois da libertação de um inimigo natural das bactérias. Quantas bactérias terá o ambiente no início do sexto dia depois que se liberta o predador?

A: 3 B: 200 C: 300 D: 400 E: 4

Resolução: No início do sexto dia depois que se liberta o predador corresponde a $x=5$. Assim, usamos as propriedades $\log_a^{b^m} = m\log_a^b$, $a,b>0$, $a\neq 1$, $\log_{a^m}^b = \frac{1}{m}\log_a^b$, $m \neq 0$, temos:

$$f(5) = \log_{5\sqrt[3]{5}}^{(5^4)} = 4\log_{5\sqrt[3]{5}}^5 = 4\log_{5^{\frac{4}{3}}}^5 = 4\cdot\frac{3}{4}\cdot\log_5^5 = 3\text{centenas} = 300.$$

A resposta certa é **C**.

34. Uma empresa está a fabricar autocarros da marca Moçambique e encontra-se na fase de testes da velocidade que os autocarros podem atingir passados x segundos tendo dos testes definido a função velocidade

$$v(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ ax^2 - bx + 3, & \text{se } 2 \leq x < 3 \\ 2x - a + b, & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

Os engenheiros querem que a velocidade evolua de modo a evitar mudanças abruptas desta. Determine os valores de a e b, para a satisfação dos engenheiros.

A: $a = 0.5,\ b = -0.5$ B: $a = b = 0.5$ C: $a = -2.5,\ b = -5.5$
D: $a = -2.5,\ b = 4.5$ E: Nenhuma das anteriores

Resolução :

A condição de continuidade de uma função $f(x)$ no ponto $x = x_0$ é:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

As funções $\frac{x^2-4}{x-2}$, $ax^2 - bx + 3$, $2x - a + b$ são funções contínuas em $[0, 2[$, $[2, 3[$, $[3, \infty[$. Os pontos que suscitam dúvida quanto à continuidade de $f(x)$ são $x = 2$ e $x = 3$. Usando a condição de continuidade nestes pontos, teremos:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = f(2) \\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = f(3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+} (ax^2 - bx + 3) = 4a - 2b + 3 \\ \lim\limits_{x\to 3^-} (ax^2 - bx + 3) = \lim\limits_{x\to 3^+} (2x - a + b) = 6 - a + b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 4a - 2b + 3 \\ \lim\limits_{x\to 3^-} (ax^2 - bx + 3) = 6 - a + b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} (x+2) = 4a - 2b + 3 \\ 9a - 3b + 3 = 6 - a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 = 4a - 2b + 3 \\ 10a - 4b - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4a - 2b - 1 = 0 \\ 10a - 4b - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -8a + 4b + 2 = 0 \\ 10a - 4b - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a - 1 = 0 \\ 10a - 4b - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0.5 \\ b = 0.5 \end{cases}$$

A resposta certa é **B**.

- Note que substituindo os valores de a e b dados nas outras alternativas, não satisfaz as condições de continuidade.

35. A derivada de $f(x) = ax^2 + \sqrt{x} + \ln(2x) + e^{3x}$ é:

A: $f(x) = 2ax + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} + 3e^{3x}$
B: $f(x) = 2ax + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x} + 3e^{3x}$
C: $f(x) = 2ax + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x} + 3e^{3x}$
D: $f(x) = 2ax + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2x} + 3e^{3x}$
E: Nenhuma das alternativas anteriores

Resolução : Usando as seguintes regras de derivação,

$$(x^n)' = nx^{n-1},\ (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x),\ (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

$$(\ln(u(x)))' = \frac{u'(x)}{u(x)},\ (e^{u(x)})' = u'(x)e^{u(x)},$$

temos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (ax^2 + \sqrt{x} + \ln(2x) + e^{3x})' = (ax^2)' + (\sqrt{x})' + (\ln(2x))' + (e^{3x})' \\ &= 2ax + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{(2x)'}{2x} + (3x)'e^{3x} = 2ax + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x} + 3e^{3x}. \end{aligned}$$

A resposta certa é **B**.

36. O resultado da integral $\int \left(x^2 + \frac{2}{x} + 2^x\right)dx$

A: $f(x) = \frac{x^3}{3} + 2\ln(x) + x2^{x-1} + c,\ c \in \mathbb{R}$
B: $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2\ln(x) + x2^{x-1} + c,\ c \in \mathbb{R}$
C: $f(x) = \frac{x^3}{3} + 2\ln(x) + \frac{2^x}{\ln 2} + c,\ c \in \mathbb{R}$
D: $f(x) = \frac{x^3}{3} + 2\ln(x) - \frac{2^x}{\ln 2} + c,\ c \in \mathbb{R}$
E: $f(x) = \frac{x^3}{3} + 2\ln(x) + (\ln 2)2^x + c,\ c \in \mathbb{R}$

Resolução : Usando as seguintes regras de integração,

$$\int x^n dx = \frac{x^n}{n+1} + c, n \neq -1,$$
$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x) + \beta \int g(x))dx, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$
$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c,\ a > 0, c \in \mathbb{R},$$

temos:

$$\begin{aligned} \int \left(x^2 + \frac{2}{x} + 2^x\right)dx &= \int x^2 dx + \int \frac{2}{x}dx + \int 2^x dx \\ &= \frac{x^3}{3} + 2\ln|x| + \frac{2^x}{\ln 2} + c, \end{aligned}$$

onde c é uma constante arbitrária. A resposta certa é **C**.

- Note que a derivada de $x^2 + \frac{2}{x} + 2^x$ não coincide com nenhuma das funções paresentadas nas restantes alternativas.

37. Determine a equação da recta tangente a $y = x^3 - 4x + 1$ no ponto $P(2, 1)$ é:

A: $y = 8x$ B: $y = 8x + 15$ C: $y = 3x^2 - 4$
D: $y = 8x - 15$ E: Nenhuma das anteriores

Resolução : A equação da recta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto (x_0, y_0) é:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Temos, $f'(x) = 3x^2 - 4,\ f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 4 = 8$. Assim, a equação da recta tangente é:

$$y - 1 = 8(x - 2) \Rightarrow y = 8x - 15.$$

A resposta certa é **D**.

38. O valor que minimiza a função $f(x) = 3x^2 - x + 1$ é:

A: $\frac{1}{3}$ B: $-\frac{1}{3}$ C: $\pm\frac{1}{3}$ D: $\frac{1}{6}$ E: $\frac{7}{9}$

Resolução : O gráfico desta função é uma parábola com concavidade virada para baixo, pois é uma função quadrática com o coeficiente de x^2 positivo. Esta função tem um mínimo e o mínimo atinge-se quando $x = x_v$, x_v é a abcissa do vértice. Para determinar x_v, escrevemos a função na forma $f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$. Formando quadrado perfeito, teremos:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2 - x + 1 = 3\left(x^2 - \frac{x}{3}\right) + 1 = 3\left(x^2 - \frac{x}{3} + \frac{1}{6^2} - \frac{1}{6^2}\right) + 1 \\ &= 3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{3}{36} + 1 = 3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{33}{36} = 3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{11}{12}. \end{aligned}$$

Desta forma, $x = x_v = \frac{1}{6}$ é o valor que minimiza a função $f(x)$. A resposta certa é D.

- Note que é possível usar derivada e determinar os extremos da função.

39. Para uma função $f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$, o ponto x_0 é ponto de mínimo se:

A. $f'(x_0) = e,\ f''(x_0) > 0$ B. $f'(x_0) = 0,$ C. $f''(x_0) = 0,$
D. $f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) > 0$ E. $f'(x_0) = e,\ f''(x_0) < 0$

Resolução : Suponhamos que a função $f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$, tem um mínimo no ponto x_0. Sendo o gráfico de $f(x)$ uma parábola, terá mínimo se a concavidade estiver virada para cima e isto acontece quando $a > 0$. O ponto mínimo obtém-se quando $x_0 = x_v = -\frac{b}{2a}$. De outro lado, $f'(x) = 2ax + b$ e substituindo $x = x_0$, obtemos

$$f'(x_0) = f'\big(-\frac{b}{2a}\big) = 2a \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right) + b = 0.$$

Assim, $f'(x_0) = 0$. Calculando a segunda derivada, obtemos $f''(x) = 2a$. Visto que $a > 0$, teremos $f''(x_0) > 0$. A resposta certa é **D**.

40. A divisão dos números $z_1 = x - iy$ por $z_2 = 3y + xi$ é:

A: $\frac{2xy-(x^2+3y)i}{9y^2+x^2}$ B: Não determinado C: $\frac{x}{3y} - \frac{y}{x}$
D: $\frac{x}{3y} - \frac{y}{x}i$ E: Nenhuma das anteriores

Resolução : Multiplicando, dividindo pelo conjugado do denominador e tendo em conta que $i^2 = -1$, teremos:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x - iy}{3y + xi} = \frac{(x - iy)(3y - xi)}{(3y + xi)(3y - xi)} = \frac{3xy - i3y^2 - x^2 i - xy}{9y^2 + x^2} \\ &= \frac{2xy - ix^2 - i3y^2}{9y^2 + x^2} = \frac{2xy - i(x^2 + 3y^2)}{9y^2 + x^2}. \end{aligned}$$

A resposta certa é **A**.