

Exame de Matemática III de 2023

Correcção do exame de Matemática III de 2023

1. Numa escola estudam 203 alunos. Arredondando o número de alunos até centenas, qual é a percentagem do erro relativo desta operação?

A: 3 B: 2,5 C: 2 D: 1,5 E: 1

Resolução: Arredondando o número de alunos até centenas temos 200 alunos. Daí que o erro absoluto desta operação é $|200 - 203| = 3$. Assim, a percentagem desta operação é $p = \frac{3}{203} \times 100\% \approx 1,5\%$. Logo a resposta certa é **D**.

2. No mapa de parede da República de Moçambique no canto inferior direito, está escrito: 1 : 1300000, o que significa que cada 1 centímetro do mapa corresponde a 1300000 centímetros de distância real. Neste mapa, a distância de Beira a Tete mede 32,7 centímetros. Qual é a distância real da Beira à Tete em quilómetros (km), arredondando a resposta a três algarismos significativos.

A: 400 B: 405 C: 415 D: 425 E: 450

Resolução: Da escala 1 : 1300000 temos,

$$\begin{cases} 1 \text{ cm} & \text{---} & 1300000 \text{ cm} \\ 32,7 \text{ cm} & \text{---} & x \end{cases} \Rightarrow x = 32,7 \times 1300000 \text{ cm} = 42510000 \text{ cm}$$

Visto que 1 metro corresponde a 100 centímetros, temos

$$\begin{cases} 1 \text{ m} & \text{---} & 100 \text{ cm} \\ y & \text{---} & 42510000 \text{ cm} \end{cases} \Rightarrow y = 42510000/100 \text{ m} = 425100 \text{ m}$$

Por outro lado, temos que 1 quilómetro corresponde a 1000 metros, então

$$\begin{cases} 1 \text{ km} & \text{---} & 1000 \text{ m} \\ z & \text{---} & 425100 \text{ m} \end{cases} \Rightarrow z = 425100/1000 \text{ km} = 425,1 \approx 425 \text{ km}$$

Logo, a resposta certa é **D**.

3. Do salário mensal deduz-se a parte que se chama Imposto sobre Rendimentos das Pessoas Singulares (IRPS). Qual será o montante de dinheiro (em mil Meticais (Mt)) recebido depois da redução de 17% de Imposto do salário mensal igual a 5 mil Meticais?

A: 4,15 B: 4,30 C: 4,45 D: 4,70 E: 4,85

Solução: O dinheiro recebido após a dedução do imposto é $5 - 0,17 \times 5 = 5 \times 0,83 = 4,15$ mil Meticais. Logo a resposta certa é **A**.

4. O intervalo do tempo médio estatístico de reacção de um motorista dum carro para começar travagem extra, encontrando de repente um obstáculo no caminho, é de aproximadamente $[1,5; 1,8]$ segundos. Qual é o intervalo de distância (em metros) que passe o carro durante esse intervalo de tempo, se sua velocidade for 60 quilómetros por hora?

A: $[7; 10]$ B: $[11; 17]$ C: $[18; 24]$ D: $[25; 30]$ E: $[31; 43]$

Solução: Visto que $60 \text{ km/h} \equiv \frac{60 \times 1000 \text{ m}}{60 \times 60 \text{ s}} = \frac{100}{6} = \frac{50}{3} \text{ m/s}$ Supondo que o veículo está em um movimento rectilíneo uniforme, temos $v = s/t \Rightarrow s = vt$. Se $t_0 = 1,5 \text{ s}$ e $t_1 = 1,8 \text{ s}$ então, $s_0 = \frac{50}{3} \times 1,5 = 25 \text{ m}$ e $s_1 = \frac{50}{3} \times 1,8 = 30 \text{ m}$. Assim, o intervalo do espaço percorrido no intervalo de tempo $[1,5; 1,8]$ é $[25; 30]$ Logo, a resposta certa é **D**.

5. Uma solução de concentração de sal de 6% foi obtida misturando a solução A de massa de 3 kg e de concentração de 4% com a solução B de massa de 2 kg. Qual é a massa de sal da solução B?

A: 0,2 B: 0,6 C: 0,35 D: 0,2 E: 0,18

Resolução: Seja α a percentagem de sal na solução B, então: $0,04 \cdot 3 + \alpha \cdot 2 = 0,06 \cdot 5 \Rightarrow 2\alpha = 0,18$. Então, a resposta certa é **E**.

6. Um grupo de 5 pessoas querem jogar em voleibol da praia formando as equipas 2 contra 2 jogadores. Quantos jogos com diferentes jogadores nas equipas podem ser realizados?

A: 10 B: 8 C: 12 D: 20 E: 16

Resolução: Suponhamos que temos os jogadores A, B, C, D, E então podemos formar $C_2^5 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2! \cdot 3!} = 10$ equipas de forma diferente i.e., $AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE$. Consideremos a seguinte tabela

	AB	AC	AD	AE	BC	BD	BE	CD	CE	DE
AB										
AC										
AD										
AE										
BC			✓	✓						
BD		✓		✓						
BE		✓	✓							
CD	✓			✓			✓			
CE	✓		✓		✓	✓				
DE	✓	✓				✓				

Da tabela acima vemos que temos 16 jogos com jogadores diferentes. A resposta certa é **E**.

7. Quantos jogos m de um campeonato de xadrez devem ser realizados entre 20 pessoas e qual é a probabilidade p de uma pessoa ser vencedora desta prova?

A: $m = 10; p = \frac{1}{10}$ B: $m = 190; p = \frac{1}{20}$ C: $m = 400; p = \frac{1}{40}$ D: $m = 200; p = \frac{1}{20}$
 E: $m = 120; p = \frac{1}{40}$

Resolução: O número de jogos a realizar são $C_2^{20} = \frac{20!}{(20-2)!2!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18!}{18! \cdot 2!} = 190$ e a probabilidade de uma pessoa sair vencedora (número de casos favoráveis é 1) é $p = \frac{1}{20}$ onde 20 é o número de casos possíveis. Portanto, a resposta certa é **B**.

8. Um caderno custa 120 Meticais, o que em seis vezes é mais caro comparando com o preço duma caneta. O aluno comprou quatro cadernos e umas canetas, pagando 600 Meticais. Quantas canetas comprou o aluno?

A: 4 B: 6 C: 8 D: 10 E: 12

Solução: Sejam n o número de canetas que o aluno comprou ao preço y . Então $6y = 120 \implies y = 20$ e $4 \cdot 120 + n \cdot y = 600 \implies n \cdot 20 = 120 \implies n = 6$ canetas. A resposta certa é **B**.

9. A fórmula de conversão da escala Celcius (C) para escala Fahrenheit (F) para medir a temperatura num ambiente é linear $F = 1,8C + 32$. Sabe-se que $0^\circ C$ corresponde a $32^\circ F$ e $100^\circ C$ corresponde a $212^\circ F$. Qual é a temperatura de um ambiente na escala em Fahrenheit se na escala em Celcius o seu valor é 50° ?

A: 87 B: 98 C: 118 D: 122 E: 147

Resolução: Visto que $F = 1,8C + 32 \implies F = 1,8 \times 50 + 32 = 122^\circ F$. Logo, a resposta certa é **D**.

10. Que ponto do plano cartesiano fica mais próximo à origem do sistema cartesiano, o ponto $A(-2, 5)$, $B(-6, -1)$ ou o ponto médio C do segmento AB ?

A: A B: B C: C D: tanto A como B E: Nenhuma das anteriores

Resolução: A distância entre dois pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1) é dada por $d = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$, então a distância de A à origem é $d_A = \sqrt{(0 - (-2))^2 + (0 - 5)^2} = \sqrt{29}$ e a distância de B à origem é $d_B = \sqrt{(0 - (-6))^2 + (0 - (-1))^2} = \sqrt{37}$. Por outro lado, o ponto médio é $C = \frac{B+A}{2} = (-4, 2)$, logo a distância de C à origem é $d_C = \sqrt{(0 - (-4))^2 + (0 - 2)^2} = \sqrt{20}$. Fica mais próximo da origem o ponto cuja distância é menor possível, então, a resposta certa é **C**.

11. Três números $a = \frac{1}{\ln \sqrt{5}}$, $b = \frac{1}{\ln \sqrt{4}}$ e $c = \frac{1}{\ln \sqrt{3}}$ satisfazem a dupla desigualdade

A: $a < b < c$ B: $c < a < b$ C: $c < b < a$ D: $c < a < b$ E: $a < c < b$

Resolução: Note que $\ln x = \log_e x$ tem base $e > 1$, então $\ln \sqrt{3} < \ln \sqrt{4} < \ln \sqrt{5} \implies \frac{1}{\ln \sqrt{5}} < \frac{1}{\ln \sqrt{4}} < \frac{1}{\ln \sqrt{3}} \implies a < b < c$. Portanto, a alternativa certa é **A**.

12. Dois números complexos $z = 1 + 3i$ e $w = 1 - 3i$ chamam-se:

A: assimétricos B: relativos C: conjugados D: inversos E. Nenhuma das anteriores

Resolução: Dado um número complexo $z = x + iy$, o número complexo $w = x - iy$ chama-se conjugado do número complexo z e denota-se usualmente por \bar{z} . Então os números dados são conjugados. Logo, a resposta certa é **C**.

13. soma de três números naturais consecutivos, sendo o primeiro designado por m , é igual a 48. Logo, a equação para calcular o número m é:

$$A: 6m + 18 = 48 \quad B: 2(m + 2) = 48 \quad C: 2(2m + 1) = 48 \quad D: 3m + 6 = 48 \quad E: 3m + 3 = 48$$

Resolução : Sendo o primeiro número m então a sucessão do três números consecutivos será $m, m + 1, m + 2$. Logo, a soma é $m + m + 1 + m + 2 = 3m + 3 = 48$. Então, a resposta certa é **E**.

14. A soma de todos números da sucessão numérica $2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$ é:

$$A: 3,75 \quad B: 4 \quad C: 4,25 \quad D: 4,5 \quad E: \infty$$

Resolução : A sucessão dada é uma progressão geométrica, visto que se a_n é o seu termo geral, $q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$. Então, a soma dos primeiros n termos é

$$s_n = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q} = \frac{2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{2}} = 4 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \Rightarrow$$

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 4$$

Logo, a resposta certa é **B**.

15. O resultado das operações $(A \cup B) \cap C$ sobre os conjuntos numéricos $A =]-1, 1[$, $B =]-1, 2]$, $C =]2, 3[$ é o conjunto:

$$A: [-1, 2] \quad B: [-1, 3] \quad C: \{2\} \quad D:]2, 3[\quad E: \emptyset$$

Resolução : $A \cup B =]-1, 1[\cup]-1, 2] =]-1, 2]$, então $(A \cup B) \cap C =]-1, 2] \cap]2, 3[= \emptyset$. Logo, a resposta certa é alternativa **E**.

16. Que fórmula de transformações dadas $\forall x \in \mathbb{R}$ está errada?

$$A: \sqrt{x^2} = x \quad B: \operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen} x \quad C: x = x$$

$$D: |x - 1| = |1 - x| \quad E: (e^x)^2 = e^{2x}$$

Reolução : A única expressão errada é a da alternativa A, pois para $x < 0$ temos $\sqrt{x^2} = x < 0$ o que é um absurdo, dado que a raiz quadrada de um número nunca é negativa. As restantes alternativas possuem expressões correctas, pois é obvio que $x = x$, $(e^x)^2 = e^{2x}$, $|x - 1| = |-(1 - x)| = |1 - x|$ e $\operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen} \pi \cos(-x) + \cos(\pi) \operatorname{sen}(-x) = 0 + \operatorname{sen} x$. Então, a resposta certa é **A**.

17. O resultado da operação da negação da expressão lógica $(P \rightarrow Q) \wedge Q \vee R$ é a expressão:

$$A: \neg P \quad B: P \wedge R \quad C: \neg Q \wedge \neg R \quad D: \neg P \vee \neg R \quad E: \neg R$$

Resolução: A ordem de prioridade dos conectivos é $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$. Assim, temos:

$$(P \rightarrow Q) \wedge Q \vee R \Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge Q \vee R \Leftrightarrow Q \vee R.$$

Assim, a negação desta expressão é $\neg Q \wedge \neg R$. A resposta certa é **C**.

- Neste exercício usamos as leis:

$$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B \text{ lei da implicação}$$

$$(A \vee B) \wedge B \Leftrightarrow B \text{ lei da absorção}$$

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B \text{ lei de Morgan.}$$

18. A probabilidade de num número aleatório de três algarismos, todos serem distintos, é de:

A: 0,31 B: 0,45 C: 0,54 D: 0,72 E: 0,83

Resolução: A probabilidade é dada como $p = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}$. No nosso caso, o número de casos favoráveis é a quantidade de números de três algarismos, todos distintos e, o número de casos possíveis é a quantidade de números com três algarismos.

Sejam nF = número de casos favoráveis e nP = número de casos possíveis. Visto que temos 10 dígitos e o primeiro algarismo não pode ser zero, então, $nF = 9 \cdot 9 \cdot 8$ e $nP = 9 \cdot 10 \cdot 10$. Assim,

$$p = \frac{nF}{nP} = \frac{9 \cdot 9 \cdot 8}{9 \cdot 10 \cdot 10} = 0,72.$$

Logo, a resposta certa é **E**.

19. O termo a_1 e a diferença d de uma progressão aritmética cujos termos $a_{21} = 62$ e $a_{31} = 92$, são:

A: $a_1 = 2$; $d = 5$ B: $a_1 = 2$; $d = 4$ C: $a_1 = 3$; $d = 3$ D: $a_1 = 2$; $d = 3$ E: $a_1 = 3$; $d = 2$

Resolução : O termo geral de uma progressão aritmética é dada por $a_n = a_1 + (n - 1)d$, $n = 1, 2, \dots$

$$\begin{cases} a_{21} = 62 \\ a_{31} = 92 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 20d = 62 \\ a_1 + 30d = 92 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 20d = 62 \\ 10d = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 20d = 62 \\ d = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 2 \\ d = 3 \end{cases}$$

Logo, a resposta certa é **D**.

20. Um viajante andou numa planície 6 quilómetros na direcção do Sol e depois 8 quilómetros na direcção de Oeste. A distância recta entre o ponto inicial e o ponto final da viagem é igual à:

A: 14 km B: 10 km C: 8 km D: 6 km E: 2 km

Resolução: Assumindo que o percurso na direcção do sol e na direcção Oeste formam um ângulo de 90° , a distância pretendida corresponde à hipotenusa de um triângulo rectângulo. Temos:

$$d^2 = (6km)^2 + (8km)^2 \Rightarrow d^2 = 36km^2 + 64km^2 = 100km^2 \Rightarrow d = \sqrt{100km^2} = 10km.$$

A resposta certa é **B**.

21. A função $h(x) = x^2 - 5x + 1$ definida em \mathbb{R} é:

A. ímpar B. par C. não é par, nem ímpar D. par para $x < 0$ E. ímpar para $x > 0$

Resolução: Completando o quadrado perfeito temos,

$$h(x) = x^2 - 5x + 1 = x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 1 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{21}{4}.$$

Então $x_v = -\frac{5}{2}$ o que significa que $h(x)$ não é simétrica em relação ao eixo Y , isso torna-a em uma função não par, nem ímpar. Logo, a resposta certa é **C**.

22. A função inversa $y = f^{-1}(x)$ de uma função $f(x) = \sqrt{x-2}$ é:

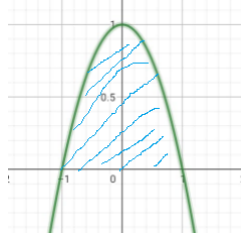
A. $y = -x^2 + 2$ B. $y = -x^2 - 2$ C. $y = x^2 - 2$ D. $y = x^2 + 2$ E. não existe

Resolução: Uma função possui inversa se e somente se ela é injectiva e sobrejectiva. Visto que $y = \sqrt{x-2}$ tem como domínio $D(f) = [2, +\infty[$, sejam $x_1, x_2 \in D(f)$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$, então $\sqrt{x_1-2} = \sqrt{x_2-2} \Leftrightarrow x_1 - 2 = x_2 - 2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$. O que quer dizer que a função é injectiva. Por outro lado, a função dada tem como Imagem $Im(f) = [0, +\infty[$, então seja $y \in Im(y) \Rightarrow y = \sqrt{x-2} \Rightarrow x = y^2 + 2$, então $\exists x = y^2 + 2 \in D(f)$ tal que $y = f(x)$, logo a função é sobrejectiva. Deste modo, ela possui inversa e $f^{-1}(x) = x^2 + 2$ Logo, a resposta certa é **D**.

23. O domínio Dom da função $f(x) = \sqrt{x-1} \cdot \ln(1-x^2)$ é:

- A. $Dom = \mathbb{R}$ B. $Dom =]-1, 1[$ C. $Dom = [1, +\infty[$ D. $Dom = \{1\}$ E. \emptyset

Resolução: $Dom = \{x \in \mathbb{R} : x-1 \geq 0 \wedge 1-x^2 > 0\}$. Para $1-x^2 > 0$ temos o gráfico



cuja solução $x \in]-1, 1[$. Por outro lado temos $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} = [0, +\infty[$ e fazendo a intersecção com $] - 1, 1[$ obtemos o domínio dado por $Dom =]-1, 1[\cap [1, +\infty[= \emptyset$. Logo, a resposta certa é alternativa **E**.

24. As fórmulas que relacionam a coordenadas x e y , $(x, y \in \mathbb{R})$ de um sistema cartesiano com coordenadas ρ e φ , $(\rho \geq 0, \varphi \in [0, 2\pi])$ do sistema polar, (as origens destes coincidem e o eixo das abcissas do sistema cartesiano coincide com o eixo polar ρ), são as seguintes: $x = \rho \cos \varphi$ e $y = \rho \sin \varphi$. Exprima a equação de uma circunferência de raio R , centrada na origem do sistema cartesiano, na forma $\rho = \rho(\varphi)$ no sistema polar.

- A: $\rho = R$ B: $\rho = e\pi R$ C: $\rho = \pi R^2$ D: $\rho = 2\pi$ E: $\rho = \pi R$

Resolução: E equação da circunferência de raio R e centrada na origem do sistema cartesiano é dada na forma $x^2 + y^2 = R^2$. Substituindo x e y pelas expressões dadas temos

$$(\rho \cos \varphi)^2 + (\rho \sin \varphi)^2 = R^2 \Rightarrow \rho^2(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = R^2 \Rightarrow \rho^2 = R^2 \Rightarrow \rho = R.$$

Logo, a resposta certa é **A**.

25. O valor do $\lim_{x \rightarrow 0} e^t \frac{\sin 2t^2}{\tan 3t^2}$ é:

- A. $\frac{9}{4}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{4}{9}$ D. $\frac{3}{2}$ E. ∞

Resolução: Calculando o limite temos:

$$\lim_{t \rightarrow 0} e^t \frac{\sin 2t^2}{\tan 3t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} (\cos 3t^2 \cdot e^t) \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t^2}{\sin 3t^2} = 1 \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t^2 \cdot 3 \cdot \sin 2t^2}{2t^2 \cdot 3 \cdot \sin 3t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3t^2}{2t^2} = \frac{3}{2}.$$

Aqui usamos o limite notável $\lim_{t \rightarrow a} \frac{\sin \varphi(t)}{\varphi(t)} = 1$ sempre que $\lim_{t \rightarrow a} \varphi(t) = 0$ para obter $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t^2}{2t^2} = 1$ e $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{3t^2}{\sin 3t^2} = 1$. Logo, a resposta certa é **B**.

26. Para que a função $f(x) = \begin{cases} -x^2 + x + 1 & ; x \in]-\infty, 0] \\ e^{x-b} & ; x \in]0, +\infty[\end{cases}$ seja contínua no ponto $x = 0$, o parâmetro b deve ser igual a:

- A. -1 B. 0 C. 1 D. 2 E. $\forall b \in \mathbb{R}$

Resolução: Para que $f(x)$ seja contínua no ponto $x = a$ é necessário e suficiente que $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$. Então,

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (-x^2 + x + 1) = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{x-b} = e^{-b}$
- $f(0) = 1$

Então, $e^{-b} = 1 \Rightarrow e^{-b} = e^0 \Rightarrow b = 0$. Deste modo, a resposta certa é **B**.

27. Para que valores do parâmetro λ a equação $4^x - 2^{x+1} + \lambda = 0$ tem raízes reais?

A: $\lambda \in [2, 3]$ B: $\lambda \in]1, \infty[$ C: $\lambda = 2$ D: $\lambda \in]-\infty, 1]$ E: $\lambda \in [4, +\infty[$

Resolução: Fazendo $2^x = \mu$, temos $\mu^2 - 2\mu + \lambda = 0$ e esta equação terá raízes reais se e somente se $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \lambda = 4 - 4\lambda \geq 0 \Rightarrow \lambda \leq 1$, então $\lambda \in]-\infty, 1]$. Logo, a resposta certa é **D**.

28. Resolvendo a equação $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = 1$ a resposta, sendo $k \in \mathbb{Z}$, é:

A: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ B: $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ C: $x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$
 D: $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ E: $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$

Resolução: Resolvendo a equação, temos:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

A resposta certa é alternativa **E**.

29. A solução da inequação $\frac{x(x-2)}{x+3} \geq 0$ é o intervalo:

A: $x \in]2, +\infty[$ B: $x \in]-3, 2]$ C: $x \in]-\infty, -3[\cup]2, +\infty[$
 D: $x \in]-3, 0] \cup]2, +\infty[$ E: $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$

Resolução: Os valores que anulam o numerador e o denominador são $\{0, 2, -3\}$ e o domínio da expressão é $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$. Assim, temos a seguinte tabela

x	$] - \infty, -3[$	-3	$] - 3, 0[$	0	$] 0, 2[$	2	$] 2, \infty[$
x	-	-	-	0	+	+	+
$x - 2$	-	-	-	-	-	0	+
$x(x - 2)$	-	-	-	0	-	0	+
$x + 3$	-	0	+	+	+	+	+
$\frac{x(x-2)}{x+3}$	+	#	-	0	-	0	+

De acordo com a tabela, a solução do problema é $x \in]-\infty, -3[\cup]2, +\infty[$. Logo, a resposta certa é **C**.

30. Resolvendo a inequação $\sqrt{4-x} < \sqrt{x-2}$ a solução é o intervalo:

A: $x \in]-2, 2[$ B: $x \in [2, 4]$ C: $x \in]2, 3[$ D: $x \in [3, 4]$ E: $x \in]3, 4]$

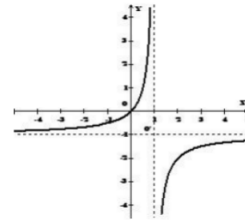
Resolução: Para a existência da inequação dada $4 - x \geq 0 \wedge x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \leq 4 \wedge x \geq 2 \Rightarrow x \in [2, 4]$. Por outro lado, elevando ambo os membros da inequação e sabendo que $x \leq 4 \wedge x \geq 2$, temos

$$(\sqrt{4-x})^2 < (\sqrt{x-2})^2 \Rightarrow 4-x < x-2 \Rightarrow 6 < 2x \Rightarrow x > 3 \Rightarrow x \in]3, +\infty[.$$

Deste modo, a solução é $x \in [2, 4] \cap]3, +\infty[=]3, 4]$. Logo, a resposta certa é **E**.

31. A curva, cujo gráfico está representado na figura, tem equação :

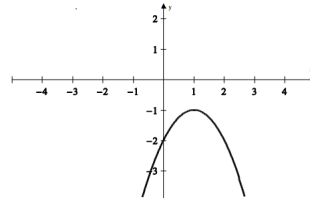
- A: $y(x) = \frac{2-x}{x-1}$ B: $y(x) = \frac{-x}{x+1}$ C: $y(x) = \frac{x+2}{x+1}$
 D: $y(x) = \frac{2-x}{1-x}$ E: $y(x) = \frac{x}{1-x}$



Resolução: Pelo gráfico a curva tem como zero de função $x = 0$ e assíntota vertical $x = 1$, pois $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{1-x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{1-x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$. A única expressão com esses dados é da alternativa E i.e., $y = \frac{x}{1-x}$. Notemos também que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{1-x} = -1$ que é a assíntota horizontal apresentada no gráfico. Logo, a resposta certa é **E**.

32. A curva representada geometricamente na figura, tem a seguinte equação:

- A: $y(x) = (x-1)^2 - 1$
 B: $y(x) = (x-1)^2 + 1$
 C: $y(x) = -(x+1)^2 + 1$
 D: $y(x) = -(x-1)^2 - 1$
 E: $y(x) = -(x+1)^2 - 1$



Resolução: A expressão analítica de uma parábola pode ser dada por $y = a(x - x_v)^2 + y_v$ onde (x_v, y_v) são as coordenadas do vértice. Do gráfico temos que $(x_v, y_v) = (1, -1) \Rightarrow y = a(x - 1)^2 - 1$ e $y(0) = -2$, então

$$-2 = a(0 - 1)^2 - 1 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow y = -(x - 1)^2 - 1. \text{ Logo, a resposta certa é } \mathbf{D}.$$

33. As assíntotas verticais A_V , horizontais A_H , oblíquas A_O da função $f(x) = e^T$, $T = \frac{1}{x}$ são:

- A. $A_V : x = 1$, $A_H : y = e$, $A_O : y = x + 1$
 B. $A_V : x = 1$, $A_H : y = 1$, $A_O : y = x$
 C. $A_V : x = 0$, $A_H : y = 0$, $A_O : \text{não existe}$
 D. $A_V : x = 0$, $A_H : y = 1$, $A_O : \text{não existe}$
 E. a função não tem assíntotas

Resolução : Temos:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{1}{x}\right) = e^0 = 1,$$

então a recta $y = 1$ é assíntota horizontal.

Para determinarmos a assíntota oblíqua $y = mx + b$, calculamos

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(1/x)}{x} = 0$$

Assim, não existe assíntota oblíqua, pois, esta se reduz em horizontal que determinamos a cima.

Para determinarmos a assíntota vertical, notamos que $x = 0$ não pertence ao domínio de $f(x)$. Assim, calculamos

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \exp(1/x) = +\infty.$$

Assim, a recta $x = 0$ é assíntota vertical. A resposta certa é **D**.

34. Seja dada a função $f(x) = -\frac{x^3}{12}(4-x)$. Os extremos (máximo ou/e mínimo) locais da função são:

A: $f_{min} = 0$; $f_{max} = 1$ B: $f_{min} = -\frac{9}{4}$ C: $f_{min} = 0$ D: $f_{max} = 1$ E: Não há extremos

Resolução: Visto que o domínio da função é \mathbb{R} que também é o domínio da sua derivada, então os pontos críticos da função são os pontos estacionários i.e., os pontos para os quais a derivada é igual a zero. Assim,

$$f'(x) = -\frac{x^2}{4}(4-x) + \frac{x^3}{12} = -\frac{x^2}{4}\left(4 - \frac{4x}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$$

Usando o teste da segunda derivada, temos $f''(x) = -\frac{x}{2}\left(4 - \frac{4x}{3}\right) + \frac{2x}{3}$.

• Para $x = 3$ temos $f''(3) = 2 > 0$, então a função atinge um mínimo local $f_{min} = f(3) = -\frac{9}{4}$.

• Para $x = 0$, $f''(0) = 0$ então o teste da segunda derivada é inconclusivo. Verifiquemos se a primeira derivada muda de sinal ao passar da origem. Para $x < 0$, tomemos por exemplo $x = -1$ então $f'(-1) = -\frac{4}{3} < 0$ e para $x > 0$ tomemos $x = 1$, então $f'(1) = -\frac{2}{3} < 0$. Vemos que a $f'(x)$ não muda de sinal ao passar da origem, portanto $f(x)$ não atinge extremo neste ponto.

Então, a resposta certa é **B**.

35. Considere o sistema linear $\begin{cases} \beta x + 2y = \beta + 4 \\ 2x + \beta y = -2 \end{cases}$ Segundo o parâmetro β a afirmação verdadeira é:

A: Se $\beta = 2$ o sistema tem uma e só única solução

B: Se $\beta = -2$ o sistema não tem a solução

C: Se $\beta \neq 2$ e $\beta \neq -2$ o sistema tem mais do que uma solução

D: Se $\beta \neq 2$ e $\beta \neq -2$ o sistema tem uma e só única solução

E: Se $\beta = 2$ o sistema tem mais do que uma solução

Resolução: Usando o método de eliminação de Gauss temos

$$\begin{cases} \beta x + 2y = \beta + 4 / \times -2 \\ 2x + \beta y = -2 / \times \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2\beta x - 4y = -2\beta - 8 \\ 2\beta x + \beta^2 y = -2\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{---} \\ (\beta^2 - 4)y = -4\beta - 8 \end{cases}$$

• se $\beta^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow \beta \neq \pm 2$ o sistema terá única solução

• para $\beta^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \beta = \pm 2$, temos dois casos

(a) se $\beta = 2$ o sistema não tem solução, pois temos para $\beta = 2$ $0 = -16$ o que é impossível;

(b) se $\beta = -2$ o sistema não tem solução tem várias solução pois o sistema reduz-se em apenas uma equação $-2x + 2y = 2 \Rightarrow y = x + 1$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$, e a segunda equação anula-se.

Então, a resposta certa é **D**.

36. As rectas no plano cartesiano $y = \frac{1}{2}x + 5$ e $y = kx - b$ são perpendiculares quando:

A: $k = 2, b = 5$ B: $k = 2, b = -5$ C: $k = -2, b \in \mathbb{R}$ D: $k = 1, b \in \mathbb{R}$ E: $k = -0,5, b \in \mathbb{R}$

Resolução : Os declives das rectas são $a_1 = \frac{1}{2}$ e $a_2 = k$, respectivamente. Usando a condição de perpendicularidade de rectas no plano, teremos:

$$a_1 \cdot a_2 = -1 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot k = -1 \Rightarrow k = -2.$$

A resposta certa é **D**.

- As outras alternativas estão erradas pois, esboçando os gráficos não teremos rectas perpendiculares.

37. O resultado de multiplicação da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ é:

A: $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ B: $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ C: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ D: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$ E: Não existe

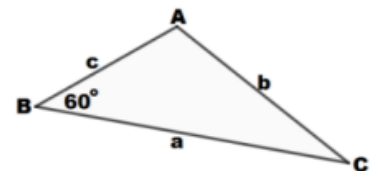
Resolução: A multiplicação de A por B é possível pois o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B e teremos uma matriz $C_{2 \times 1}$ i.e.e, $A_2 \cdot B_{3 \times 1} = C_{2 \times 1}$. Assim, a única alternativa candidata é B. Verifiquemos,

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \\ -1 \cdot (-1) - 2 \cdot 0 - 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Logo, a alternativa certa é **B**.

38. No triângulo ABC , o lado $a = 6\text{cm}$, o lado $c = 3\text{cm}$, o ângulo $\angle B = 60^\circ$. A medida do lado b é igual à:

A: 5 B: $5\sqrt{3}$ C: 4 D: $3\sqrt{3}$ E: $\sqrt{3}$



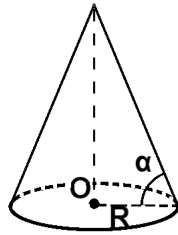
Resolução: Usando o teorema dos cossenos para o triângulo acima, temos

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(\angle B) \Rightarrow b^2 = 6^2 + 3^2 - 2 \cdot 6 \cdot 3 \cos(60^\circ) \Rightarrow$$

$$b^2 = 45 - 2 \cdot 18 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow b^2 = 27 \Rightarrow b = 3\sqrt{3}.$$

A resposta certa é **D**.

39. Seja o raio de base dum cone circular é igual a R , a geratriz faz um ângulo $\alpha = 45^\circ$ com a base. Se o ângulo α for aumentado por 15° , a razão entre o volume final e o volume inicial é:



A: $6\sqrt{3}$ vezes B: $4\sqrt{3}$ vezes C: $2\sqrt{3}$ vezes D: $0,5\sqrt{3}$ vezes E: $\sqrt{3}$ vezes

Resolução : Note que na variação do ângulo, apenas a altura irá variar e raio da base mantém-se constante. Seja altura inicial igual a h_0 e altura final h_f . O volume do cone dado é $V_0 = \frac{1}{3}\pi R^2 h_0$ e o volume final será $V_f = \frac{1}{3}\pi R^2 h_f$. Para $\alpha = 45^\circ$, teremos $\frac{h}{R} = \tan(45^\circ)$ ou seja $h_0 = R$. Quando α aumenta 15° teremos $\alpha_f = 60^\circ$, assim $h_f = R \tan(60^\circ) = R\sqrt{3}$. Desta forma,

$$\frac{V_f}{V_0} = \frac{1/3\pi R^2 \cdot h_f}{1/3\pi R^2 \cdot h_0} = \frac{R\sqrt{3}}{R} = \sqrt{3}.$$

Logo, a resposta certa é **E**.

40. A primitiva $F(x)$ da função $f(x) = \sin(3x)$, sendo C uma constante arbitrária é:

A: $F(x) = -\cos(3x) + C$ B: $F(x) = \frac{1}{3}\cos(3x) + C$ C: $F(x) = -\frac{1}{3}\cos(3x) + C$
 D: $F(x) = 3\cos(3x) + C$ E: $F(x) = 3\cos x + C$

Resolução : Temos:

$$F(x) = \int f'(x)dx = \int \sin(3x)dx = -\frac{1}{3}\cos(3x) + C,$$

onde C é uma constante arbitrária. A resposta é **C**.