Exame de Matemática IV de 2021

Correcção do exame de Matemática IV de 2021

1. O conjunto das soluções da inequação $-5 < |2x+3| < 1$ é:

   A: $\emptyset$ B: $]-2,-1[$ C: $]-\infty,-1[\cup]1,\infty[$ D: $]-2,1[$ E: $]-\infty,-2[\cup]-2,-1[\cup]1,\infty[$

   Resolução: Temos: $-5 < |2x+3| < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -5 < 2x+3 < 1, & \text{se } 2x+3 \geq 0 \\ \vee & \\ -5 < -2x-3 < 1, & \text{se } 2x+3 < 0 \end{cases}$

   $$\Leftrightarrow \begin{cases} -5-3 < 2x < 1-3, & \text{se } 2x+3 \geq 0 \\ -5+3 < -2x < 1+3, & \text{se } 2x+3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < x < -1, & \text{se } x \geq -3/2 \\ \vee & \\ -2 < x < 1, & \text{se } x < -3/2 \end{cases}$$

   $$\Rightarrow -3/2 \leq x < -1 \vee -2 < x < -3/2 \Rightarrow -2 < x < -1.$$

   A resposta certa é B.

   - As outras alternativas não estão certas, pois, ou excluem valores que pertencem ao conjunto solução ou incluem valores que não pertencem ao conjunto solução. Por exemplo, $x = 0$ e $x = 2$ não satisfazem a inequação, portanto, C, D e E não estão certas. Por outro lado, $x = -3/2$ satisfaz a inequação, logo, A não está certa.

2. A professora convidou alunos das disciplinas de Matemática, Física, Química, Geografia, História para destas escolher três que eles mais gostam. Quantas escolhas diferentes existem?

   A: 60 B: 30 C: 15 D: 10 E: 8

   Resolução : Designando cada disciplina pelas suas inicias, teremos por exemplo, os seguintes possíveis resultados: MHF, FQG e os seguintes não admissíveis MMQ, FGF, ou seja, não pode haver repetição de disciplinas. Assim, trata-se de agrupamentos de 5 elementos tomados 3 a 3 sem repetição e onde a ordem não interessa. Temos:

   $$C_3^5 = \frac{5!}{(5-3)!3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2! \cdot 3!} = 10. \text{ A resposta certa é } \mathbf{D.}$$

   - Note que é possível listar todos os casos possíveis, ou seja, MFQ, MFH, MFG, MQH, MQG, MHG, FQH, FQG, FHG, QHG.

3. Um teste consiste de três perguntas, cada uma das quais contém cinco alternativas de resposta, sendo uma única delas correcta. Um aluno marcou as respostas aleatoriamente. Qual é a probabilidade de que pelo menos duas respostas são correctas?

A: 0.325 B: 0.8 C: 0.104 D: 0.24 E: 0.248

Resolução : Seja E o evento "marcação da alternativa certa entre 5 alternativas". A probabilidade do evento E occorrer é $P(E) = \frac{1}{5}$.

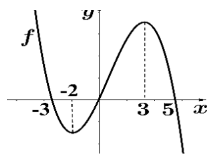
Seja A o evento "marcação de pelo menos duas alternativas certas em três perguntas". Temos, os seguintes casos possíveis EEE^c, EEE, E^cEE, EE^cE, onde E^c é o evento complementar de E. Assim, usando propriedade

$$\begin{aligned} P(A) &= P(EEE^c) + P(EE^cE) + P(E^cEE) + P(EEE) \\ &= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5} + \frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5} + \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5} = \frac{13}{125} = 0,104. \end{aligned}$$

A resposta certa é **C.**

- Note que é possível usar o evento complementar de A, que seria "marcação de no máximo uma alternativa certa em três perguntas".

4. Atendendo ao gráfico da função $y = f(x)$ na figura, escolha a proposição verdadeira.



A. No intervalo $[-2, 1]$, a função f é crescente e toma valores positivos;
B. No intervalo $[3, 8]$, a função f é decrescente e toma valores negativos;
C. No intervalo $[-2, -1]$, a função f é crescente e toma valores negativos;
D. No intervalo $[2, 3]$, a função f é decrescente e toma valores positivos;
E. No intervalo $[-3, -1]$, a função f é decrescente e toma valores negativos;

Resolução : Temos:

- No intervalo $[-2, 1]$, $f(x)$ é crescente e toma valores tanto positivos assim como negativos. Desta forma, a alternativa A está errada.
- No intervalo $[3, 8]$, $f(x)$ é decrescente e toma valores tanto positivos assim como negativos. Desta forma, a alternativa B está errada.
- No intervalo $[-2, -1]$, $f(x)$ é crescente e toma valores tanto negativos. **Desta forma, a alternativa C está certa**.
- No intervalo $[2, 1]$, $f(x)$ é crescente e toma valores positivos. Desta forma, a alternativa D não está certa .
- No intervalo $[-3, -1]$, $f(x)$ é não é monótona e toma valores tanto não positivos. Desta forma, a alternativa E está errada.

A resposta certa é **C.**

5. Qual é o termo geral a_n, da sucessão $-1, \frac{2}{3}, -\frac{4}{5}, \frac{8}{7}, \ldots$?

A: $\frac{(-1)^n 2^{n-1}}{2n-1}$ B: $\frac{(-1)^{n+1} 2^{n-1}}{2n+1}$ C: $\frac{(-1)^n 2^n}{2n-1}$ D: $\frac{(-1)^{n+1} 2^{n-1}}{2n-1}$ E: $\frac{(-1)^n 2^{n-1}}{2n+1}$

Resolução : Vemos que o valor absoluto do numeradores são $1, 2, 4, 8, ..$, ou seja, uma progressão geométrica de razão $q = 2$. O termo geral de uma progressão geométrica de razão q é $u_n = u_1 q^{n-1}$. Assim o termo geral dos valores absolutos do numerador é $u_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$. De outro lado, o valor absoluto dos denominadores são $1, 3, 5, 7, ..$, ou seja, uma progressão aritmética de razão $d = 2$. O termo geral de uma progressão aritmétrica de razão d é $v_n = v_1 + d(n-1)$. Assim o termo geral dos valores absolutos do denominador é $v_n = 1 + 2(n-1) = 2n - 1$. Tendo em conta a alternância do sinal, teremos:

$$a_n = \frac{(-1)^n 2^{n-1}}{2n-1}.$$ Logo, a resposta certa é **A.**

- As outras alternativas não estão certas, pois, por exemplo, para $n = 1$, não obtemos $a_1 = -1$.

6. Seja $a_1, a_2, a_3, \ldots$ a sucessão dos números de mosquitos numa região no início dos anos 2010, 2011, 2012, ..., sendo $a_1 = 10^9$. O número de mosquitos diminui anualmente em 10%. Qual é o número de mosquitos na região no início de 2019?

A: $9^{10}/10$ B: 11^8 C: 9^9 D: 10^8 E: $11^8 \cdot 10$

Resolução : Vamos determinar a_n e depois calcular a_{10} que corresponde ao ano 2019. Temos,

$$\begin{gathered} a_2 = a_1 - 10\% \cdot a_1 = a_1 - 0,1 \cdot a_1 = 0,9 \cdot a_1 \\ a_3 = a_2 - 10\% \cdot a_2 = a_2 - 0,1 \cdot a_2 = 0,9 \cdot a_2 = 0,9 \cdot 0,9 a_1 = (0,9)^2 a_1 \\ a_4 = a_3 - 10\% \cdot a_3 = a_3 - 0,1 \cdot a_3 = 0,9 \cdot a_3 = 0,9 \cdot (0,9)^2 a_1 = (0,9)^3 a_1 \\ \ldots \\ a_n = (0,9)^{n-1} a_1 = \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} a_1 \Longrightarrow a_{10} = \left(\frac{9}{10}\right)^{10-1} a_1 = \left(\frac{9^9}{10^9}\right) 10^9 = 9^9. \end{gathered}$$

A resposta certa é **C.**

7. Qual é o valor do limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{15 - x - 8x^2}{(2x-1)(x+5)}$?

A: -5 B: 0 C: 15 D: $+\infty$ E: -4

Resolução : Temos: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{15 - x - 8x^2}{(2x-1)(x+5)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(15/x^2 - 1/ - 8)}{x^2(2 - 1/x)(1/x + 5/x)} = \frac{-8}{2} = -4.$

A resposta certa é **B.**

8. Qual é o valor do parâmetro real h para que a função
$f(x) = \begin{cases} x + h, & \text{se } x > 1 \\ x + 1, & \text{se } x \leq 1 \end{cases}$ seja contínua no ponto $x = 1$.

A: -2 B: 1 C: 0 D: -1 E: 2

Resolução : A função $f(x)$ é contínua no ponto x_0 se $\displaystyle\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

Verifiquemos a condição de continuidade neste ponto $x = 1$. Temos: $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) \Rightarrow 2 = 1 + h \Rightarrow h = 1$. Assim, se $h = 1$ a função $f(x)$ é contínua. A resposta certa é B.

9. Qual é a primeira derivada da função $f(x) = \dfrac{x^2+1}{1-3x^2}$?

A: $\frac{2x}{1-3x^2}$ B: $-\frac{12x^3+4x}{(1-3x^2)^2}$ C: $-1/3$ D: $\frac{8x}{(1-3x^2)^2}$ E: $\frac{x^2+1}{9x^2-3}$

Resolução : Temos:

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)'(1-3x^2) - (1-3x^2)'(x^2+1)}{(1-3x^2)^2} = \frac{2x(1-3x^2) + 6x(x^2+1)}{(1-3x^2)^2}$$

$$= \frac{2x - 6x^3 + 6x^3 + 6x}{(1-3x^2)^2} = \frac{8x}{(1-3x^2)^2}. \quad \text{A resposta certa é } \mathbf{D.}$$

10. Qual é a inclinação (coeficiente angular) da recta tangente ao gráfico da função $f(x) = \sqrt{1-4x}$ no ponto $x = 0$?

A: -2 B: $-0,5$ C: 15 D: $0,5$ E: 2

Resolução: O coeficiente angular da recta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto $x = 0$ é $f'(0)$. Temos:

$$f'(x) = \frac{(1-4x)'}{2\sqrt{1-4x}} = \frac{-4}{2\sqrt{1-4x}} = -\frac{2}{\sqrt{1-4x}} \Longrightarrow f'(0) = -2. \quad \text{A resposta certa é } \mathbf{A.}$$

11. O ponto máximo da função $f(x) = 1 + 12x - x^3$ é ?

A: $x = 1$ B: $x = -1$ C: $x = 2$ D: $x = -2$ E: não existe

Resolução : Vamos procurar os pontos críticos. Temos,

$$f'(x) = 12 - 3x^2 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 12 - 3x^2 = 0 \Rightarrow 4 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 2.$$

Estudando o sinal da derivada, teremos:

x	$]-\infty,-2[$	-2	]-2,2[	2	$]2,\infty[$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	-
$f(x)$	$\searrow$	-15	$\nearrow$	17	$\searrow$

Desta forma, o máximo é 17 que é atingido quando $x = 2$. A resposta certa é **C.**

12. Qual é a expressão geral para a função primitiva da função $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$?

A: $-\frac{3}{4}\sqrt{(2x+1)^{-3}} + c$ B: $\frac{1}{4}\sqrt{(2x+1)} + c$ C: $2\sqrt{(2x+1)^{-1}} + c$

D: $\sqrt{(2x+1)} + c$ E: $-3\sqrt{(2x+1)^{-3}} + c$

Resolução: Fazendo substituição $u = 2x + 1$, teremos:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}},\ u = 2x+1,\ du = 2dx \Longrightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}} = \int \frac{du}{2\sqrt{u}} = \sqrt{u} + c = \sqrt{2x+1} + c,$$

onde c é constante arbitrária. A resposta certa é **D.**

13. O número complexo $z = (1+i)^2$ é igual a:

A: $-2i$ B: $2+2i$ C: 1 D: $2-2i$ E: $2i$

Resolução : Temos: $(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$. A resposta certa é **E.**

14. Sejam P, Q duas proposições verdadeiras. Escolha proposição verdadeira.

A: $\sim (P \vee \sim Q)$ B: $P \to \sim Q$ C: $(P \vee \sim Q) \wedge (\sim P)$ D: $\sim P \to Q$ E: $\sim P \wedge Q$

Resolução : Temos:

- O valor de verdade da proposição $\sim (P \vee \sim Q)$ é falso, pois, a disjunção $P \vee Q$ é verdadeira e a sua negação é falsa. Então, a alternativa A não é a correcta.

- O valor de verdade da proposição $P \rightarrow \sim Q$ é falso, pois, P é verdadeira e $\sim Q$ é falsa, que é o caso em que uma condicional toma o valor de verdade falso. Então, a alternativa B não é a correcta.
- O valor de verdade da proposição $(P \vee \sim Q) \wedge (\sim P)$ é falso, pois uma conjunção toma o valor de verdade falso quando ao menos uma das proposições é falsa que é o caso de $\sim P$. Então, a alternativa C não é a correcta.
- O valor de verdade da proposição $\sim P \rightarrow Q$ é verdade, pois, uma condicional apenas é falsa quando a primeira for verdadeira e a segunda for falsa, que não é o caso. Então, **a alternativa D é a correcta.**
- O valor de verdade da proposição $\sim P \wedge Q$ é falso, pois $\sim P$ é falsa e uma conjunção é falsa quando pelo menos uma das proposições é falsa. Então, a alternativa E não é a correcta.

A resposta certa é **D.**

15. Escolha a proposição verdadeira:

A. $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 > -4$ B. $\exists x \in \mathbb{N},\ x < 0$ C. $\forall x \in \mathbb{R},\ 2^x = 1$ D. $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| = -3$ E. $\forall x \in \mathbb{Z},\ x^8 > 0$

Resolução : Temos:

- O valor de verdade da proposição $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 > -4$ é vedadeiro, pois, o quadrado de um númeor rela é sempre um número não negativo, logo é maior que -4. Então, **a alternativa A é a correcta.**
- O valor de verdade da proposição $\exists x \in \mathbb{N},\ x < 0$ é falso, pois, todo o número natural é não negativo. Então, a alternativa B não é a correcta.
- O valor de verdade da proposição $\forall x \in \mathbb{R},\ 2^x = 1$ é falso, pois, por exemplo, $x = 2 \in \mathbb{R},\ 2^2 \neq 1$. Então, a alternativa C não é a correcta.
- O valor de verdade da proposição $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| = -3$ é falso, pois, por exemplo, $x = 0,\ |0| \neq -3$. Então, a alternativa D não é a correcta.
- O valor de verdade da proposição $\forall x \in \mathbb{Z},\ x^8 > 0$ é falso, pois, por exemplo, $x = 0 \in \mathbb{Z},\ 0^8 \not> 0$. Então, a alternativa E não é a correcta.

A resposta certa é A.

16. O domínio de existência da expressão $\sqrt{x-3} + \log_3^{(2-x)}$ é:

A: $]-\infty, 2[\cup[3, \infty[$ B: $[3, \infty[$ C: $]-\infty, 2[$ D: $]2, 3]$ E: $\emptyset$

Resolução : Temos, $x - 3 \geq 0 \wedge 2 - x > 0 \Rightarrow x \geq 3 \wedge -x > -2 \Longrightarrow x \geq 3 \wedge x < 2 \Rightarrow x \in \emptyset$.

A resposta certa é **E**.

- Por outro lado, em A e C , $x = -1$ não pertence ao domínio de existência de $\sqrt{x-3}$.
- Em B, $x = 4$ não pertence ao domínio de $\log_3^{2-x}$.

17. Qual é a expressão equivalente à expressão $(a^{1/6}+1)(a^{1/2}+1)(a^{1/3}-a^{1/6}+1)$.

A: $a-1$ B: $1+2\sqrt{a}+a$ C: $2a^{1/6}$ D: $1-2\sqrt{a}+a$ E: $a+1$

Resolução : Temos:

$$(a^{1/6}+1)(a^{1/2}+1)(a^{1/3}-a^{1/6}+1) = (a^{2/3}+a^{1/6}+a^{1/2}+1)(a^{1/3}-a^{1/6}+1)$$
$$= a - a^{5/6} + a^{2/3} + a^{1/2} - a^{1/3} + a^{1/6} + a^{5/6} - a^{2/3} + a^{1/2} + a^{1/3} - a^{1/6} + 1 = a + 2\sqrt{a} + 1$$

A resposta certa é **B.**

18. Um casaco após o aumento de preço de 25% começou a custar 3.000 MT. Quanto custou o casaco antes do aumento de preço?

A: 2.925 Mt B: 3.750 Mt C: 2.400 Mt D: 2.250 Mt E: 750 Mt

Resolução : Temos:

$$P = P_0 + 25\% \cdot P_0 \Rightarrow P = 1,25P_0 \Rightarrow 3000 = 1,25P_0 \Rightarrow P_0 = \frac{3000}{1,25} = 2400.$$

Assim, o preço inicial é 2400 Mt. A resposta certa é **C.**

19. O preço de um produto primeiro aumentou em 40%, depois diminuiu em 40%. Como o preço final do produto mudou em relação ao seu preço inicial?

A: não mudou B: diminuiu 16% C: diminuiu 12% D: aumentou 20% E: diminuiu 24%

Resolução : Temos:

$$\begin{aligned} P_1 &= P_0 + 40\% \cdot P_0 \Rightarrow P = 1,4P_0 \Rightarrow P_2 = P_1 - 40\% \cdot P_1 = 0,6 \cdot P_1 = 0,6 \cdot 1,4P_0 = 0,84\dot{P}_0 \\ &= (1 - 0,16)P_0 = P_0 - 0,16P_0 = P_0 - 16\% \cdot P_0. \end{aligned}$$

Assim, o preço final em relação ao inicial, diminuiu 16%. A resposta certa é **B.**

20. A população N de um determinado tipo de animal diminui de acordo com a regra $N(t) = 250 \cdot 2^{-0,15t}$, onde t é o tempo medido em meses. Depois de quantos meses a população vai diminuir oito vezes?

A: 12 meses B: 16 meses C: 20 meses D: 24 meses E: 32 meses

Resolução : A popolução inicial é $N(0) = 250$ e depois de um tempo t, a população é $N(0)/8$. Temos:

$$\frac{N(0)/8}{N(0)} = \frac{250 \cdot 2^{-0,15t}}{250} \Rightarrow \frac{1}{8} = 2^{-0,15t} \Rightarrow 2^{-3} = 2^{-0,15t} \Rightarrow -3 = -0,15t \Rightarrow t = \frac{3}{0,15} = 20.$$

Depois de 20 meses a população vai diminuir oito vezes. A resposta certa é **C.**

21. Única raiz da equação $(\sqrt{2})^{2x+1} = 0,25$ é igual a:

A: $-2,5$ B: $1,5$ C: $\sqrt[4]{2}$ D: $-0,125$ E: $6,25$

Resolução : Temos:

$$\begin{aligned} (\sqrt{2})^{2x+1} = 0,25 \Leftrightarrow 2^{\frac{2x+1}{2}} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2^{\frac{2x+1}{2}} = 2^{-2} \Rightarrow \frac{2x+1}{2} = -2 \\ \Rightarrow 2x + 1 = -4 \Rightarrow 2x = -5 \Rightarrow x = -\frac{5}{2} = -2,5. \end{aligned}$$

A resposta certa é **A.**

22. O produto das raízes da equação $10^{x^2+5x} = 0,001$ é igual a:

A: -5 B: 3 C: -15 D: -3 E: 5

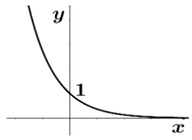
Resolução : Temos:

$$\begin{aligned} 10^{x^2+5x} = 0,001 \Rightarrow 10^{x^2+5x} = 10^{-3} \Rightarrow x^2 + 5x = -3 \\ \Rightarrow x^2 + 5x + 3 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 3}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}. \end{aligned}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-5-\sqrt{13}}{2} \cdot \frac{-5+\sqrt{13}}{2} = \frac{1}{4}\left[(-5)^2 - \left(\sqrt{13}\right)^2\right] = \frac{25-13}{4} = \frac{12}{4} = 3.$$

Assim, as raízes existem e o seu produto é 3. A resposta certa é **B.**

23. Qual é a função cujo gráfico está apresentado na figura ao lado.
A: $f(x) = a^x$, sendo $a > 0$ B: $f(x) = \log_a^x$, sendo $0 < a < 1$
C: $f(x) = x^a$, sendo $a < 0$ D: $f(x) = \log_a^x$, sendo que $a > 1$
E: $f(x) = a^x$, sendo $0 < a < 1$



Resolução : Temos:

- Para $f(x) = a^x$, sendo $a > 0$, o gráfico pode ser crescente, se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$. Então esta não é uma resposta exacta.
- Para $f(x) = \log_a^x$, sendo $0 < a < 1$, o domínio é $x > 0$, logo vemos que não concorda com o domínio da função apresentada no gráfico. Assim, a alternatia B não é a correcta.
- Para $f(x) = x^a$, sendo $a < 0$, $x = 0$ ão pertence ao domínio, logo vemos que não concorda com o domínio da função apresentada no gráfico. Assim, a alternatia C não é a correcta.
- Para $f(x) = \log_a^x$, sendo que $a > 1$, o domínio é $x > 0$, logo vemos que não concorda com o domínio da função apresentada no gráfico. Assim, a alternatia B não é a correcta.
- Para $f(x) = a^x$, sendo $0 < a < 1$, o domínio é $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 1$, é monótona decrescente, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. Logo vemos que concorda com as caracteríticas da função apresentada no gráfico. Assim, **a alternativa E é a correcta.**

A resposta certa é **E.**

24. O número $\log_{\sqrt{6}}^{4} + 2\log_{\sqrt{6}}^{3}$ é igual a:

A: 4 B: $-1/6$ C: $6\sqrt{6}$ D: -36 E: 1

Resolução : Temos:

$$\log_{\sqrt{6}}^{4} + 2\log_{\sqrt{6}}^{3} = \log_{\sqrt{6}}^{4} + \log_{\sqrt{6}}^{3^2} = \log_{\sqrt{6}}^{4\cdot 9} = \log_{\sqrt{6}}^{36} = \log_{\sqrt{6}}^{6^2} = 2\log_{\sqrt{6}}^{(\sqrt{6})^2} = 4\log_{\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} = 4.$$

25. Única raiz da equação $3\log_{\sqrt{8}}^{x} + \log_{0,5}^{9} = 0$ é igual a:

A: $1/3$ B: $1/2$ C: 1 D: 2 E: 3

Resolução : Tendo em conta o domínio da função $\log$, teremos:

$$3\log_{\sqrt{8}}^{x} + \log_{0,5}^{9} = 0 \Leftrightarrow \log_{2^{3/2}}^{x^3} + \log_{1/2}^{9} = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3}\log_{2}^{x^3} + \log_{2^{-1}}^{9} = 0$$
$$\Leftrightarrow \log_{2}^{x^{3\cdot 2/3}} - \log_{2}^{9} = 0 \Leftrightarrow \log_{2}^{x^2} = \log_{2}^{9} \Rightarrow x^2 = 3^2 \Longrightarrow x = 3.$$

A resposta certa é **E.**

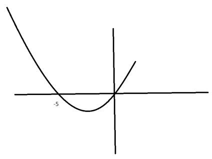
26. O conjunto de soluções da inequação $\log_{0,5}^{(-5x)} > 2\log_{0,5}^{-x}$ é:

A. $]0, \infty[$ B. $]-\infty, -5[$ C. $]-\infty, 0[$ D. $]-5, 0[$ E. $]-\infty, -5[\cup]0, \infty[$

Resolução : Pelo domínio de $\log$ temos $-5x > 0$ e $-x > 0$, de onde resulta $x < 0$. Nesta condições , temos ainda que

$$\log_{0,5}^{(-5x)} > 2\log_{0,5}^{-x} \Rightarrow \log_{0,5}^{(-5x)} > \log_{0,5}^{(-x)^2} \Rightarrow -5x < (-x)^2 \Rightarrow x^2 + 5x > 0.$$

Assim, resolvendo graficamnete, temos o gráfico ao lado.
A solução é $]-\infty,-5[$. A resposta certa é **B.**



27. A distância entre pontos $A(2;4)$ e $B(-1;8)$ no plano é igual a:

A. $5\sqrt{2}$ B. 30 C. $10\sqrt{13}$ D. 5 E. $\sqrt{17}$

Resolução : A distância entre os pontos $P_1(x_1,y_1)$ e $P_2(x_2,y_2)$ é:

$$d(P_1,P_2)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

Assim,

$$d(A,B)=\sqrt{(-1-2)^2+(8-4)^2}=\sqrt{9+16}=5.$$

A resposta certa é **D.**

28. Qual é a equação da circunferência com centro no ponto com coordenadas $(-1;1)$ e do raio 4?

A. $(x-1)^2+(y+1)^2=2$ B. $(x+1)^2+(y-1)^2=16$ C. $-x^2+y^2=4$
D. $(x+1)^2+(y-1)^2=2$ E. $(x-1)^2+(y+1)^2=16$

Resolução : A equação da circunferência de centro (x_0,y_0) e raio r tem a forma:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2.$$

Temos:

$$(x+1)^2+(y-1)^2=4^2 \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-1)^2=16.$$

A resposta certa é **B.**

29. Determine o valor do parâmetro h de tal modo que as rectas no plano dadas pelas equações $hx-2y+3=0$ e $3x+4y-1=0$ sejam perpendiculares.

A. $-3/2$ B. $2/3$ C. $-4/3$ D. $-1/3$ E. $8/3$

Resolução : Escrevemos ambas equações das rectas na forma $y=ax+b$. Temos:

$$y=\frac{h}{2}x-\frac{3}{2} \quad \text{e} \quad y=-\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}.$$

A condição de perpendicularidade de rectas no plano é $a_1\cdot a_2=-1$, onde a_1 e a_2 são os declives de cada uma das rectas. Assim,

$$\frac{h}{2}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)=-1 \Rightarrow h=\frac{8}{3}.$$

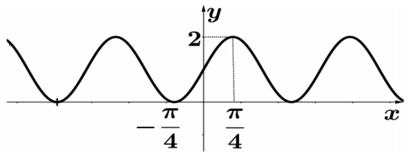
A resposta certa é **E.**

30. Os vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm as mesmas direcções e mesmos sentidos, além disso, a norma (comprimento) do vector $\vec{u}$ é dupla da norma do vector $\vec{v}$. Então, podemos afirmar que:

A: $\vec{u}+2\vec{v}=0$ B: $2\vec{u}-\vec{v}=0$ C: $\vec{u}-2\vec{v}=0$ D: $2\vec{u}+\vec{v}=0$ E: $\vec{u}\cdot\vec{v}=2$

Resolução : Os vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares, pois tem mesma direcção . Assim, $\vec{u}=k\vec{v}$, para certo escalar k. Note que $k>0$ porque $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tem mesmo sentido. A norma de $|\vec{u}|=2|\vec{v}|$. Assim, $|\vec{u}|=|k\vec{v}|=k|\vec{v}|$. Desta forma, $k=2$. Logo, $\vec{u}=2\vec{v}$ ou seja $\vec{u}-2\vec{v}=0$. A resposta certa é **C.**

31. Qual é a função cujo gráfico está apresentado na figura abaixo?



A: $f(x) = 1 + \sin(2x)$ B: $f(x) = 1 + \cos(2x)$ C: $f(x) = \cos(x) + \sin(x)$ D: $f(x) = 1 + 2\cos(x)$
E: $f(x) = 1 + 2\sin(x)$

Resolução : Temos:

- Para $f(x) = 1 + \sin(2x)$ temos $-1 \le \sin(2x) \le 1$, logo $0 \le 1 + \sin(2x) \le 2$. Esta função tem período π, $f(0) = 1$, $f(\pi/4) = 2$, $f(-\pi/4) = 0$. Todas estas propriedades concordam o gráfico apresentado.
- Para $f(x) = 1 + \cos(2x)$ temos $f(\pi/4) = 1 \neq 2$, logo esta função não representa a expressão analítica da função do gráfico apresentado.
- Para $f(x) = \cos(x) + \sin(x)$ temos $f(\pi/4) = \sqrt{2} \neq 2$, logo esta função não representa a expressão analítica da função do gráfico apresentado.
- Para $f(x) = 1 + 2\cos(x)$ temos $f(\pi/4) = 1 + \sqrt{2} \neq 2$, logo esta função não representa a expressão analítica da função do gráfico apresentado.
- Para $f(x) = 1 + 2\sin(x)$ temos $f(\pi/4) = 1 \neq 2$, logo esta função não representa a expressão analítica da função do gráfico apresentado.

A resposta certa é **A.**

32. Qual é a raiz da equação $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \sqrt{3}\sin(\pi + x) = 0$ no intervalo $[0, \pi]$?

A: $\pi/3$ B: $5\pi/6$ C: $3\pi/4$ D: $\pi/6$ E: $2\pi/3$

Resolução : Temos:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \sqrt{3}\sin(\pi + x) = 0 \Leftrightarrow \sin(\frac{\pi}{2})\cos(x) + \cos(\frac{\pi}{2})\sin(x) - \sqrt{3}\,(\cos(\pi)\sin(x) + \sin(\pi)\cos(x)) = 0$$

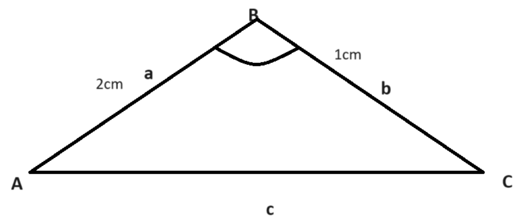
$$\Leftrightarrow \cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = 0 \Leftrightarrow \tan(x) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \tan(x) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Longrightarrow x = \frac{5\pi}{6}$$

Pois, $\tan(\frac{5\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. A resposta certa é **B**.

33. Os dois lados dum triângulo medem 1 cm e 2 cm, e o ângulo entre si mede 120°. Qual é a medida do terceiro lado do triângulo?

A: $\sqrt{3}$cm B: $\sqrt{5 + 2\sqrt{3}}$cm C: $\sqrt{7}$cm D: $\sqrt{5 - 2\sqrt{3}}$cm E: $\sqrt{5}$cm

Resolução : Temos:



Usando o teorema dos cossenos temos: $c^2 = a^2+b^2-2a\cdot b\cos(120°) = 2^2+1^2-2\cdot2\cdot1\cos(120°) = 5+4\cdot\dfrac{1}{2} = 7$. Assim, $c = \sqrt{7}cm$. Logo, a resposta certa é **C**.

34. A renda de uma empresa y (em milhões de meticais) depende da produção x de um certo bem (em milhares de unidades) pela expressão $y = x^2 - 2x + 9$. Que nível mínimo de produção fornece a renda da empresa não inferior a 57 milões MT?

    A: 2 mil unidades B: 4 mil unidades C: 6 mil unidades D: 8 mil unidades E: 10 mil unidades

    Resolução : Temos:

    $$y = x^2 - 2x + 9 = x^2 - 2x + 1 + 8 = (x-1)^2 + 8.$$

    O gráfico tem a concavidade voltada para cima e é crescente no intervalo de $[1, +\infty[$. Assim,

    $$57 = x^2 - 2x + 9 \Rightarrow x^2 - 2x - 48 = 0 \Rightarrow (x-8)(x+6) = 0 \Rightarrow x = 8 \vee x = -6.$$

    Visto que x (número de unidades) deve ser não negativo, $x = 8$. A resposta certa **D.**

35. A soma de todas as raízes reais diferentes da equação $(x^2+2x)^2 - 2(x^2+2x) - 3 = 0$ é igual a:

    A: -3 B: -2 C: -1 D: 0 E: 1

    Rsolução : Fazendo $t = x^2 + 2x$, teremos:

    $$t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow (t-3)(t+1) = 0 \Rightarrow t_1 = -1 \wedge t_2 = 3.$$

    Se $t_1 = -1$, teremos

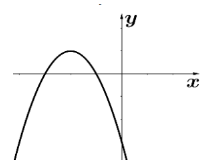
    $$x^2 + 2x = -1 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x+1)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = -1.$$

    Se $t_2 = 3$, teremos

    $$x^2 + 2x = 3 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x+3)(x-1) = 0 \Rightarrow x_3 = -3, x_4 = 1.$$

    A soma de todas raízes diferentes é -3, i.e., ignorando a multiplicidade. Se não igonaramos a multiplcidade das raízes, teremos $-1-1+1-3 = -4$. A resposta é **A.**

36. Os parâmetros da função quadrática $f(x) = ax^2+bx+c$ na figura ao lado satisfazem a condição:

    A: $a<0,\ b>0,\ c<0$ B: $a>0,\ b<0,\ c<0$ C: $a<0,\ b<0,\ c>0$
    D: $a>0,\ b>0,\ c>0$ E: $a<0,\ b<0,\ c<0$

    Resolução :

    - Se $a<0$, $b>0$, $c<0$, o gráfico correspondente tem a concavidade virada para baixo, a ordenada na origem é c, e é negativa. As coordenadas do $x_v = -b/2a$, e é positivo, pois, $a<0$. Assim, o eixo de simetria da parápola fica à direita do eixo das ordenadas OY. Esta última característica não corresponde ao gráfico apresentado. A alternativa A não é a correcta.

- Se $a > 0$, $b < 0$, $c < 0$, o gráfico correspondente tem a concavidade virada para cima, a ordenada na origem é c, e é negativa. Estas características não correspondem ao gráfico apresentado. A alternativa B não é a correcta.
- Se $a < 0$, $b < 0$, $c > 0$, o gráfico correspondente tem a concavidade virada para baixo, a ordenada na origem é c, e é positiva. Estas última características não correspondem ao gráfico apresentado. A alternativa C não é a correcta.
- Se $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, o gráfico correspondente tem a concavidade virada para cima, a ordenada na origem é c, e é positiva. Estas características não correspondem ao gráfico apresentado. A alternativa D não é a correcta.
- Se $a < 0$, $b < 0$, $c < 0$, o gráfico correspondente tem a concavidade virada para baixo, a ordenada na origem é c, e é negativa. As coordenadas do $x_v = -b/2a$, e é negativo, pois, $a < 0$, $b < 0$. Assim, o eixo de simetria da parápola fica à esquerda do eixo das ordenadas OY. Estas características correspondem ao gráfico apresentado. A **alternativa E é a correcta.**

A resposta certa é **E.**

37. Dos 50 alunos duma turma, 34 gostam de Álgebra, 15 gostam de Álgebra e Geometria, 10 não gostam nem de Álgebra nem de Geometria. Quantos alunos gostam de Geometria?

A: 6 B: 21 C: 16 D: 31 E: 19

Resolução : Seja A o conjunto de alunos que gostam de Álgebra, G o conjunto de alunos que gostam de Geometria. Assim, $\#(C)$ designa número de elementos do conjunto C. O conjunto $A \cup G$ é composto por alunos que gostam de pelo menos uma das disciplinas: Álgebra e Geometria. O conjunto $(A \cup G)^c$, conjunto complementar de $A \cup G$, é composto por alunos que não gostam nem de Álgebra e nem de Geometria. Assim,

$$\#(A \cup G) + \#((A \cup G)^c) = 50 \Rightarrow \#(A \cup G) + 10 = 50 \Rightarrow \#(A \cup G) = 40.$$

De outro lado,

$$\#(A \cup G) = \#(A) + \#(G) - \#(A \cap G) \Leftrightarrow 40 = 34 + \#(G) - 15 \Rightarrow \#(G) = 21.$$

A resposta certa é **B.**

38. O número real $(\sqrt{3} - \sqrt{5})^{-1} + (\sqrt{3} + \sqrt{5})^{-1}$ é igual a:

A: $-\sqrt{3}$ B: $-\sqrt{5}$ C: 1 D: $\sqrt{5}$ E: $\sqrt{3}$

Resolução : Temos:

$$\begin{aligned}
(\sqrt{3} - \sqrt{5})^{-1} + (\sqrt{3} + \sqrt{5})^{-1} &= \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} \\
&= \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{5})}{(\sqrt{3} - \sqrt{5})(\sqrt{3} + \sqrt{5})} + \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{5})}{(\sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{3} - \sqrt{5})} \\
&= \frac{\sqrt{3} + \sqrt{5}}{3 - 5} + \frac{\sqrt{3} - \sqrt{5}}{3 - 5} = \frac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

A resposta certa é **A.**

39. Qual é a solução do sistema de inequações $\begin{cases} 1 - 2x > 5 \\ 4 + 2x < 2 \end{cases}$?

A: $\emptyset$ B: $]-\infty, -2[$ C: $]-2, -1[$ D: $]-\infty, -1[$ E: $]-\infty, -2[\cup]-1, \infty[$

Resolução : Temos: $\begin{cases} 1-2x>5 \\ 4+2x<2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x>4 \\ 2x<-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-2 \\ x<-1 \end{cases} \Rightarrow x<-2.$

A resposta certa é **B.**

- A alternativa A não está certa, pois, por exemplo, $x=-3$ satisfaz o sistema de inequações .
- As alternativas C e D não estão certas, pois, por exemplo, $x=-3/2$ não satisfaz o sistema de inequações .
- A alternativa E não está certa, pois, por exemplo, $x=0$ não satisfaz o sistema de inequações .

40. O resultado da decomposição do polinómio x^3-9x-x^2+9 em factores é:

A: $(x+1)(x-1)(x-3)$ B: $(x+1)(x-2)(x+3)$ C: $(x-1)(x+3)(x-3)$
D: $(x-1)(x+1)(x+3)$ E: $(x+1)(x-3)(x+3)$

Resolução : Temos:

$$x^3-9x-x^2+9=x(x^2-9)-(x^2-9)=(x^2-9)(x-1)=(x-1)(x+3)(x-3).$$

A resposta certa é **C.**

- Note que substituindo $x=0$ no polinômio obtemos 9, contudo não obtemos este valor quando substituimos $x=0$ em nenhum dos polinômios das restantes alternativas.