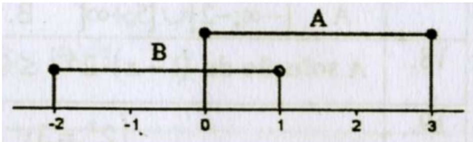
Exame de Matemática de 2017

Correcção do exame de Matemática de 2017

Na figura estão representados os intervalos A e B contidos no conjunto $U =]-5;6[$. Com base na informação responda as questões de 1,2 e 3.



1. Os intervalos representados na figura são:

   A: $[-2;1]$ e $[0;3]$ B: $]-2;1[$ e $[0;3]$ C: $[-2;1[$ e $]0;3[$ D: $]-2;1[$ e $[0;3]$ E: $[-2;1[$ e $]0;3[$

   Resolução: Fazendo leitura ao gráfico, os conjuntos representados são $[-2;1]$ e $[0,3]$, o que quer dizer que a resposta certa é **A**.

2. O resultado da operação $A \setminus B$ é:

   A: $[1;3]$ B: $]1;3[$ C: $]0;1]$ D: $]1;3]$ E: $[0;1[$
   Solução: $A \setminus B =]1,3]$, então a resposta certa é **D**.

3. O conjunto $[0;1[$ é equivalente à:

   A: $A \cup B$ B: $A \setminus B$ C: $c(B)$ D: $A \cap B$ E: $c(A)$

   Solução: A resposta certa é **C**.

4. $\sqrt{3}$ não pertence ao conjunto:
   A: $[1;2[$ B: $\{1;2\}$ C: $]1;2]$ D: $[1;2]$ E: $]1;2[$

   Resolução: Notemos que $1 < \sqrt{3} < 2$, então o único conjunto onde $\sqrt{3}$ não pertença é o conjunto formado por apenas dois elementos $\{1;2\}$, logo, a alternativa certa é **B**.

5. Em Dezembro houve um aumento de 50% no preço de um produto que custava $40.000,00\,MT$. O produto passou a custar:
   A: $60.000,00\,MT$ B: $50.000,00\,MT$ C: $20.000,00\,MT$ D: $30.000,00\,MT$ E: $70.000,00\,MT$

   Resolução: O preço final do produto é igual a $40.000,00\,MT + 0,5 \cdot 40.000,00\,MT = 60.000,00\,MT$. Logo, a resposta certa é a alternativa **A**.

6. Três números inteiros consecutivos foram divididos por 2, 3 e 5, reespectivamente, e a soma dos seus quocientes é igual a 9. A soma desses números é:

A: 24 B: 21 C: 18 D: 27 E: 33

Resolução: Sejam a, $a+1$, $a+2$ os tr2̂s números inteiros consecutivos. Então,

$$\frac{a}{2}+\frac{a+1}{3}+\frac{a+2}{5}=9 \Longrightarrow \frac{15a+10(a+1)+6(a+2)}{30}=9 \Longrightarrow 31a+22=9\cdot 30 \Longrightarrow a=\frac{248}{31}=8.$$

Logo, os números são 8, 9 e 10. Assim a sua soma é $8+9+10=27$. Então, a resposta certa é **D**.

7. Simplificando a expressão $\dfrac{p^2+2p}{(p+1)(p-1)+(p+1)}$ obtém-se:

A: $\dfrac{p+2}{p(p+1)}$ B: $\dfrac{p+2}{p+1}$ C: $\dfrac{p}{p+1}$ D: $\frac{p}{(p+1)(p-1)}$ E: $\dfrac{p(p+2)}{(p+1)(p-2)}$

Resolução: Temos:

$$\frac{p^2+2p}{(p+1)(p-1)+(p+1)}=\frac{p(p+2)}{(p+1)[(p-1)+1]}=\frac{p(p+2)}{p(p+1)}=\frac{p+2}{p+1}.$$

Esta simplificação é válida para $p\neq 0$. Portanto, a resposta certa é **B**.

8. A expressão equivalente a $\dfrac{a^3-5a^2+6a}{a^3-8}\div\dfrac{a^2-9}{a^2+2a+4}$ é:

A: $\dfrac{a+3}{a+2}$ B: $\dfrac{a-2}{a+3}$ C: $\dfrac{a+3}{a}$ D: $\dfrac{a}{a+2}$ E. $\dfrac{a}{a+3}$

Resolução: Temos:

$$\frac{a^3-5a^2+6a}{a^3-8}\cdot\frac{a^2-9}{a^2+2a+4}=\frac{a(a^2-5a+6)}{(a-2)(a^2+2a+4)}\div\frac{(a-3)(a+3)}{a^2+2a+4}$$
$$=\frac{a(a-3)(a-2))}{(a-2)(a^2+2a+4)}\cdot\frac{a^2+2a+4}{(a-3)(a+3)}=\frac{a}{a+3}$$

Esta simplificação é válida para $a\neq 2$, $a^2+2a+4\neq 0$, $a\neq 3$ e aqui usamos os casos notáveis $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$, $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$. Assim, a resposta certa é **E**.

9. O valor de $\log_7 7\cdot\sqrt[5]{49}$ é:

A: $\dfrac{2}{5}$ B: $\dfrac{5}{7}$ C: $\dfrac{7}{5}$ D: 10 E: 11

Resolução : Temos: $\log_7(7\cdot\sqrt[5]{49})=\log_7\left(7\cdot 49^{\frac{1}{5}}\right)=\log_7\left(7\cdot 7^{\frac{2}{5}}\right)=\log_7\left(7^{\frac{7}{5}}\right)=\dfrac{7}{5}\cdot\log_7 7=\dfrac{7}{5}$. Logo, a resposta certa é **C**.

10. O valor de $\dfrac{a^2(ba^{-2}-ab^{-2})}{a^2-(-b^{-3})}$ se $a=-2$ e $b=-1$ é:

A: $-\dfrac{7}{3}$ B: $-\dfrac{7}{5}$ C: $\dfrac{9}{5}$ D: $\dfrac{7}{3}$ E: Nenhuma das alternativas anteriores

Resolução : Sendo $a=-2$ e $b=-1$, temos:

$$\frac{a^2(ba^{-2}-ab^{-2})}{a^2-(-b^{-3})}=\frac{b-a^3b^{-2})}{a^2+b^{-3}}=\frac{(-1)-(-2)^3(-1)^{-2}}{(-2)^2+(-1)^{-3}}=\frac{-1+8}{4-1}=\frac{7}{3}.$$

Então, a resposta certa é **D**.

11. A equação da circunfrrência de centro $(-1;2)$ que passa pelo ponto $(-1;5)$ é:

A: $(x-1)^2+(y-2)^2=9$ B: $(x+1)^2+(y-2)^2=9$ C: $(x-1)^2+(y+2)^2=9$
D: $(x+1)^2+(y+2)^2=9$ E: Nenhuma das anteriores

Resolução : A equação da circunferência de centro $(x_0;y_0)$ e raio R é dada por $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$. Sendo que ela passa pelo ponto $(-1;5)$ e está dado o centro, então $(-1+1)^2+(5-2)^2=R^2 \Longrightarrow R=3$. Então, a equação requerida é $(x+1)^2+(y-2)^2=9$. Logo, a resposta certa é **B**. Para as outras alternativas, o ponto dado não irá satisfazer as correspondentes equações, por exemplo se substituirmos na alternativa **A** temos, $(-1-1)^2+(2-2)^2=4\neq 9$.

12. O valor da expressão $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-10}\times 27^{-3}+(0,2)^{-4}\times 25^{-2}+\left(64^{\frac{1}{9}}\right)^{-3}$ é:

A: 6 B: 7 C: 9 D: 8 E: 5

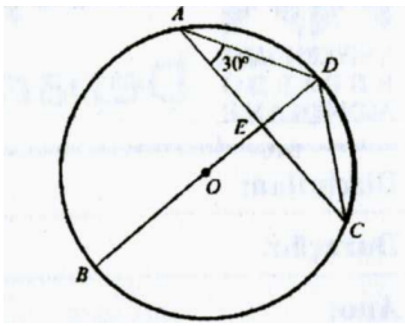
Reolução : Temos,

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-10}\times 27^{-3}+(0,2)^{-4}\times 25^{-2}+\left(64^{-\frac{1}{9}}\right)^{-3}=3^{10}\cdot\left(3^2\right)^{-3}+\left(\frac{2}{10}\right)^{-4}\cdot\left(5^2\right)^{-2}+\left(\left(2^6\right)^{-\frac{1}{9}}\right)^{-3}$$
$$=3^{10}\cdot 3^{-9}+\left(\frac{1}{5}\right)^{-4}\cdot 5^{-4}+\left(2^{-\frac{6}{9}}\right)^{-3}=3+5^4\cdot 5^{-4}+\left(2^{-\frac{2}{3}}\right)^{-3}=3+5^0+2^2=8.$$

Desta forma, a resposta certa é **D**.

13. Na figura ao lado os pontos A, B, C e D pertencem à uma circunferência de centro O e E é o ponto médio do segmento $\overline{OD}$. Se $\overline{AD}$ mede $5\,cm$ a medida do raio da circunferência é:

A: $5\,cm$ B: $\dfrac{5}{2}\,cm$ C: $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}\,cm$ D: $5\sqrt{3}\,cm$ E: $\dfrac{1}{2}\,cm$



Resolução: Sendo $\overline{OE}$ igual ao segmento $\overline{ED}$, então o triângulo OAD é isóscele e consequentemente o triângulo EAD é rectângulo em E. Sendo assim, $sen30^o=\dfrac{|ED|}{|AD|}\Longrightarrow\dfrac{1}{2}=\dfrac{|ED|}{5cm}\Longrightarrow|ED|=\dfrac{5}{2}cm$. Deste modo, o raio da circunferência será $r=2\cdot|ED|=5cm$. Logo, a resposta certa é **A**.

14. O polinómio $P(x) = x^2 + ax + b$ é divisível por $Q(x) = x - 1$ e $R(x) = x + 3$. Os valores de a b são:

A: $a = -3$, e $b = 2$ B: $a = -2$, e $b = 3$ C: $a = -2$, e $b = -3$ D: $a = 2$, e $b = -3$ E: $a = 2$, e $b = 3$

Resolução : Visto que $P(x)$ é divisível por $Q(x)$ e $R(x)$, então $P(x) = Q(x) \cdot R(x) \Longrightarrow x^2 + ax + b = (x-1)(x+3) = x^2+2x-3$. Dois polinómios são iguais se e somente se os coeficientes de termos semelhantes são iguais, i.e., $a = 2$, $b = -3$. Logo, a resposta certa é **D**.

15. Uma gota de tinta caiu num pano formando um círculo de raio igual a $k\,cm$. Se de hora em hora a medida do raio duplica, depois de seis horas a medida do raio será:

A: $12\,k\,cm$ B: $6\,k\,cm$ C: $64\,k\,cm$ D: $32\,k\,cm$ E: $8\,k\,cm$

Resolução : Se de hora em hora a medida do raio duplica, temos a seguinte sequência: $k\,cm$, $2\,k\,cm$, $4\,k\,cm$, $8\,k\,cm, \ldots$ Esta é uma progressão geométrica com razão iguyal a $q = \frac{8k}{4k} = \frac{4k}{2k} = \frac{2k}{k} = \ldots = 2$. Assim, o termo geral deste sequência é $r_n = a_1 \cdot q^{n-1} = k \cdot 2^{n-1}$. Portando, após seis horas o raio será iguala a $r = r_6 = k \cdot 2^{6-1} = 32\,k\,cm$. Então, a resposta certa é **D**.

16. O contradomínio de funcção $f(x) = 2sen\,x$ de domínio $[-\dfrac{\pi}{6}, \pi]$ é:

A: $[-1; 2]$ B: $]-1; 2[$ C: $[-2; 2]$ D: $[-1; 1]$ E: $[-2; 1]$

Resolução: Note que no domínio $[-\frac{\pi}{6}, 0]$ a função $-\dfrac{1}{2} \leq senx \leq 0$ e no domínio $[0, \pi]$, $0 \leq sen\,x \leq 1$. Combinano esses contradomínios temos $-\frac{1}{2} \leq sen\,x \leq 1$. Então, multiplicando ambo os membros desta inequação por 2, temos $-1 \leq 2sen\,x \leq 2$. Logo, a resposta certa é **A**.

17. A solução da inequação $x^2 < 3x + 10$ é:

A: $[-\infty, -2] \cup [5, +\infty[$ B: $]-\infty, -2] \cup [5, +\infty[$ C: $[-2; 5]$ D: $]-2; 5[$ E: $[-2; 0] \cup [5, +\infty[$

Resolução: A inequação $x^2 < 3x + 10$ é equivalente à $x^2 - 3x - 10 < 0 \Longleftrightarrow (x-5)(x+2) < 0$.

$$(x-5)(x+2) < 0 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x-5 > 0 \wedge x+2 < 0 \\ \vee \\ x-5 < 0 \wedge x+2 > 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x > 5 \wedge x < -2 \\ \vee \\ x < 5 \wedge x > -2 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \emptyset \\ \vee \\ -2 < x < 5 \end{array} \right.$$

O que quer dizer que $x \in]-2; 5[$. Logo, a alternativa certa é **D**.

18. A solução da inequação $(1-x) \cdot 2^{x-1} \leq 0$ é:

A. $]-\infty; 1]$ B. $[-1; 1]$ C. $[1; +\infty[$ D. $]-\infty; 1]$ E. $]1; +\infty[$

Resolução: O factor 2^{x-1} nunca é negativo e nem zero, poratnto o sinal da expressão depende inteiramente do sinal de $1-x$, i.e., $(1-x)e^{x-1} \leq 0 \Longleftrightarrow 1-x \leq 0 \Longrightarrow x \geq 1$. O que quer dizer que $x \in [1, +\infty[$. A resposta certa é **C**.

19. Dado o sistema $\left\{ \begin{array}{l} 2^x = 3y \\ 3^x = 2y \end{array} \right.$. O valor de $x + y$ é igual à:

A. $\frac{5}{6}$ B. $\frac{7}{6}$ C. $-\frac{7\pi}{6}$ D. $\frac{2}{3}$ E. $-\frac{5}{6}$

Resolução: Dividindo a primeira equação pela segunda, temos

$$\frac{2^x}{3^x} = \frac{3y}{2y} \Longrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{3}{2} \Longrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \Longrightarrow x = -1.$$

Da equação $2^x = 3y$ temos $2^{-1} = 3y \Longrightarrow y = \frac{1}{6}$. Assim, $x + y = -1 + \frac{1}{6} = -\frac{5}{6}$. Logo, a resposta certa é alternativa **E**.

20. A inversa da função $f(x) = 4^{x-1}$, é:

A: $f^{-1}(x) = -1 + \log_4 x$ B: $f^{-1}(x) = 1 - \log_4 x$ C: $f^{-1}(x) = 4 + \log_4 x$
D: $f^{-1}(x) = 1 + \log_4 x$ E: $f^{-1}(x) = \log_4(x + 1)$

Resolução: Uma função possui inversa se ela for injectiva e sobrejectiva. Será injectiva se $\forall\, x_1,\, x_2 \in D_f$ tal que $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$. Verifiquemos: Notemos que $f(x) = 4^{x-1}$ tem como domínio $D_f = \mathbb{R}$ e contradomínio $CD_f =]0, +\infty[$. Sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tal que,

$$f(x_1) = f(x_2) \Longleftrightarrow 4^{x_1-1} = 4^{x_2-1} \Longrightarrow x_1 - 1 = x_2 - 1 \Longrightarrow x_= x_2.$$

Então, a função é injectiva.

$f(x)$ é sobrejectiva se $\forall\, y \in CD_f$, $\exists\, x \in\ D_f : y = f(x)$. Para isso, seja $y \in]0, +\infty[$, então $y = 4^{x-1} \Longrightarrow \log_4 y = x - 1 \Longrightarrow x = 1 + \log_4 y \in \mathbb{R}$. Então, $f(x)$ é sobrejectiva e visto que é também injectiva, logo é bijectiva. Deste modo, possui inversa. Se na última expressão, trocar os papeir de x e y, obtemos $y = 1 + \log_4\, x \Longrightarrow f^{-1}(x) = 1 + \log_4\, x$. Assim, a resposta certa é **D**.

21. O termo seguinte da sucessão 0, 3, 8, 15, 24, 35, ... é:

A. 44 B. 38 C. 43 D. 45 E. 48

Resolução: Esta sucessão não é uma progressão (nem aritimética, muito menos geométrica). Mas a sucessão das diferenças de termos consecutivos i.e., $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2, \ldots$ é 3, 5, 7, 9, 9, ... Isto quer dizer que o termo actual da sucessão dada é igual a adição do termo anterior pelo correspondente termo dos números ímpares, i.e., $a_n = a_{n-1} + (2n - 1)$, $n = 2, 3, \ldots$ Assim, o termo seguinte requerido é $a_7 = a_6 + (2 \cdot 7 - 1) = 35 + 13 = 48$. Logo, a resposta certa é **E**.

22. De uma progressão (a_n) sabe-se que a razão é $-\frac{1}{3}$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira:

A: (a_n) é infinitamente grande
B: (a_n) é extritamente decrescente
C: (a_n) é limitada
D: (a_n) é extritamente crescente
E: Nenhuma das alternativas anteriores

Resolução: A progreção com razão $-\frac{1}{3}$ tem como termo geral $a_n = a_1 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$. Neste contexto, independentemente do sinal do primeiro termo, o termo anterior terá sinal diferente do termo actual, i.e., é uma sucessão de termos alternados, então ela não pode ser monótona (crescente ou decrescente). Mas, $|a_n| = \left|a_1 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right| \leq \frac{|a_1|}{3} \leq |a_1|$, $\forall\, n$. isto que dizer que a sucessão é limitada. Logo, a resposta certa é alternativa é **C**.

23. Numa progressão aritmética $a_1 + a_5 = 16, \quad a_5 + a_9 = 40$. O primeiro termo e a diferença são respectivamente:

A: $a_1 = 3,\ d = 2$ B: $a_1 = 2,\ d = 3$ C: $a_1 = 3,\ d = -2$ D: $a_1 = 2,\ d = -3$ E: $a_1 = 4,\ d = 2$

Resolução: O termo geral de uma pprogressão aritmética é dado por $a_n = a_1 + d \cdot (n-1)$. Assim sendo, das equações dadas temos

$$\begin{cases} a_1 + a_5 = 16 \\ a_5 + a_9 = 40 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_1 + a_1 + 4d = 16 \\ a_1 + 4d + a_1 + 8d = 40 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2a_1 + 4d = 16 \\ 8d = 24 \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} 2a_1 + 4d = 16 \\ d = 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2a_1 + 4 \cdot 3 = 16 \Longrightarrow a_1 = 2 \\ d = 3 \end{cases}$$

Então, resposta certa é **B**.

24. A soma dos termos de uma progressão geométrica infinita de razão $\frac{1}{2}$ é igual a 6. O primeiro termo é:

A: 12 B: 2 C: 3 D: $\dfrac{1}{2}$ E: $\dfrac{1}{3}$

Resolução: A soma dos termos de uma progressão geométrica infinita com $|q| < 1$ é $S = \dfrac{a_1}{1-q}$, onde q é a razão e a_1 o primeiro dermo da sucessão. Então, $6 = \dfrac{a_1}{1 - \frac{1}{2}} \Longrightarrow a_1 = 3$. A resposta certa é alternativa **C**.

25. O limite da sucessão de termo geral $a_n = \left(\dfrac{n-5}{n+5}\right)^n$ é:

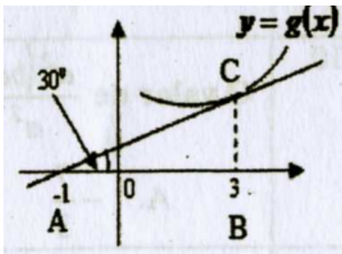
A: e^{10} B: e^5 C: e^{15} D: $\frac{1}{e^5}$ E: $\frac{1}{e^{10}}$

Resolução: Calculando o limite da sucessão dada temos: $\lim \left(\dfrac{n-5}{n+5}\right)^n = [1^\infty]$ e é uma indeterminação. Vamos levantar essa indeterminação:

$$\lim \left(\frac{n-5}{n+5}\right)^n = e^{\lim\left(\frac{n-5}{n+5} - 1\right)\cdot n} = e^{\frac{-10n}{n+5}} = e^{\frac{-10n}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}} = e^{-10} = \frac{1}{e^{10}}.$$

Então, a resposta certa é **E**.

Na figura abaixo está representada parte de uma função e uma recta tangente à curva no ponto de abcissa $x = 3$. Com base no gráfico responda as questões 26, 27 e 28.



26. $g'(3)$ é igual a:

A: 1 B: $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C: 7 D: $\sqrt{7}$ E: 0

Resolução: A derivada de $g(3)$ é igual ao declive da tangente à curva de $f(x)$ no ponto $x = 3$ que é a tangente do ângulo formado pela recta tangente e o eixo Ox. Assim, temos $g'(3) = tg(30^o) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Assim a resposta certa é alternativa **B**.

27. A medida de $\overline{AC}$ é:

A: $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B: $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ C: $\frac{7\sqrt{3}}{2}$ D: $\sqrt{\frac{7}{2}}$ E: $\frac{8\sqrt{3}}{3}$

Resolução: O triângulo ABC é rectângulo em B. Então, $\cos 30^o = \dfrac{|AB|}{|AC|} \Longrightarrow |AC| = \dfrac{4}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$. Assim a resposta certa é alternativa **E**.

28. $g(3)$ é igual a:

A: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ B: $2\sqrt{3}$ C: $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ D: $4\sqrt{3}$ E: $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

Resolução: O valor da função no ponto $x = 3$ é igual ao valor da recta tangente nesse ponto. Esta recta passa pelo ponto $A(-1, 0)$, cujo coefiente angular $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (que determinamos no exerciicio 26). Esta recta tem como equação $y - 0 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x + 1) \Longrightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x + 1)$. Deste modo, $g(3) = \frac{\sqrt{3}}{3}(3 + 1) = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. Então, a resposta certa é altenativa **C**. As outras alternativas não são correctas pois quando substituidos na equação da recta, o valor de x não será 3. Por exemplo, se $g(3) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Longrightarrow \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}(x+1) \Longrightarrow x = 1 \neq 3$.

29. O mínimo relativo da função $y = -x^3 + 3x^2 - 1$ é:

A: $x = -1$ B: $x = 2$ C: $x = 0 \vee x = 2$ D: $x = 1$ E: Nenhuma das anteriores

Resolução: Se uma função atinge seu extremo no ponto x_0 então $f'(x_0) = 0$ ou $f'(x_0)$ não existe. Vemos que $f'(x) = -3x^2 + 6x$ está definida e contínua em todo $\mathbb{R}$. A função terá extremo apenas nos pontos onde $f'(x) = 0 \Longrightarrow -3x^2 + 6x = 0 \Longrightarrow -3x(x - 2) = 0 \Longrightarrow x = 0 \vee x = 2$.

Usando o teste da segunda derivada, i.e., se $f''(x_0) > 0$ então x_0 é ponto de mínimo local; se $f''(x_0) < 0$ então x_0 é ponto de máximo local. Determinando a segunda derivada, temos: $f''(x) = -6x + 6$. Para $x = 0$ temos que $f''(0) = 6 > 0$, então $x = 0$ é ponto de mínimo local. Para $x = 2$ temos $f''(2) = -6 \cdot 2 + 6 = -6$, então $x = 2$ é ponto de máximo local. Portanto, a resposta certa é alternativa **C**, pois temos a disjunção $'\vee'$, esta proposição é verdadeira se pelo menos uma das afirmações é verdadeira. A alternativa B não está certa porque é ponto de máximo (e não míniom) local. nas alíneas A e D os pontos não correspondem a pontos críticos da função dada, portanto a função não tem seus extremos nesses pontos.

30. A assímptotas verticais da função $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1}$ são:

A: $x = 1 \vee x = -1$ B: $x = 1$ C: $x = 3 \vee x = -1$ D: $x = -1$ E: Nenhuma das anteriores

Resolução: As potenciai assímptotas verticais são os pontos que anulam o denominador i.e., os pontos para os quais $x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow (x + 1)(x - 1) = 0 \Longrightarrow x = 1 \vee x = -1$

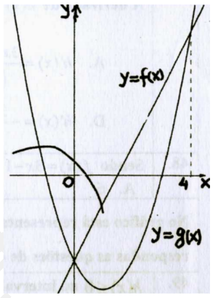
$$\lim_{x \to 1^{-1}} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{(x - 3)(x + 1)}{(x - 1)(x + 1)} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x - 3}{x - 1} = \frac{-2}{0^-} = +\infty,$$

Logo $x = 1$ é assímptota vertical.

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{x^2-2x-3}{x^2-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x-3}{x-1} = \frac{-4}{-2} = 2$$
$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{x^2-2x-3}{x^2-1} = \lim_{x\to -1^+} \frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to -1^+} \frac{x-3}{x-1} = \frac{-4}{-2} = 2.$$

Todos os limites laterais são finitos e iguais. Logo, $x = -1$ não é assímptota vertical. Apenas $x = 1$ é assímptota vertical. A resposta certa é alternativa **B**.

Na figura estão representadas as funções $y = f(x) = 2x - 3$ e $y = g(x)$. Responda as questões de 31 a 35



31. O valor de $g(4)$ é:

A: 6 B: 4 C: 8 D: 3 E: 5

Resolução: Pela figura vemos que $g(4) = f(4) = 2 \cdot 4 - 3 = 5$. Logo, a resposta certa é **E**.

32. $f(x) < g(x)$ em:

A: $]-\infty, 0] \cup [4, +\infty[$ B: $]0, 4[$ C: $]-\infty, 0[\cup]4, +\infty[$ D: $[0, 4]$ E: Nenhuma das anteriores

Resolução: $f(x) < g(x)$ nos intervalos onde o gráfico de $g(x)$ está acima do gráfico de $f(x)$ e isso acontece em $]-\infty, 0[\cup[4, +\infty[$. Portanto, a resposta certa é alternativa **C**.

33. O vérice da parábola é $V(1, -4)$ então os zeros da função são:

A: -1 e 3 B: $-\frac{1}{2}$ e 3 C: $-\frac{1}{2}$ e 2 D: -1 e 2 E: -1 e $\frac{5}{2}$

Resolução: Como vimos no exercício 31, $g(x)$ passa pelo ponto $A(4, 5)$ e pela hipótese o vértice é $V(1, -4)$. Então a equação da parábola dada na figura é $y = a(x-x_v)^2 + y_v$, onde (x_v, y_v) são coordenadas do vértice. Logo, $y = a(x-1)^2 - 4$. Substituindo o ponto $A(4, 5)$, temos $5 = a(4-1)^2 - 4 \Longrightarrow a = 1$. Assim, $y = (x-1)^2 - 4$. Determinando os zeros da função temos: $(x-1)^2 - 4 = 0 \Longrightarrow x - 1 = \pm 2 \Longrightarrow x = 3 \vee x = -1$. A resposta certa é **A**.

34. A recta perpendicular a $y = f(x)$ que passa pelo ponto $(3, 4)$ é:

A: $y - x - 11 = 0$ B: $2y + x - 11 = 0$ C: $2y - x + 11 = 0$ D: $2y + x + 11 = 0$ E: $2y - x - 11 = 0$

Resolução: Sendo que a recta $y = f(x)$ tem declive $m = 2$, então a recta perpendicular a $y = f(x)$ tem declive $a = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{2}$. A equação da recta que passa por um ponto $(x_0, y_0) = (3, 4)$ e dado o seu declive $'a'$ é $y = a(x - x_0) + y_0 \Longrightarrow y = -\frac{1}{2}(x-3) + 4 \Longrightarrow 2y = -x + 3 + 8 \Longrightarrow 2y + x - 11 = 0$. Deste modo, a resposta certa é a alternativa **B**.

35. O domínio de $y = \frac{1}{g(x)}$ é:

A: $\mathbb{R}$ B: $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ C: $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ D: $\mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$ E: Nenhuma das anteriores

Resolução: A função $\frac{1}{g(x)}$ não tem sentido nos pontos onde $g(x)$ não tem sentido e nos pontos onde $g(x) = 0$. A função $g(x)$ tem como domínio $\mathbb{R}$ e vimos que $g(x) = 0$ nps pontos $x = -1 \vee x = 3$. Logo, o domínio de $\frac{1}{g(x)}$ é $\mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$. Logo, a resposta certa é a alternativa **D**.

As alternativas A, B e C não estão correctas pois possuem pontos onde a função $\frac{1}{g(x)}$ não tem sentido em $\mathbb{R}$. Por exemplo, o conjunto em B possui o elemento $x = 3$ em que $\frac{1}{g(3)} = \frac{1}{0}$ que não existe.

36. De uma função h dum certo domínio, sabe-se que a sua derivada h' está igualmente definida no mesmo domínio e é dada por $h'(x) = -2 + \cos x$. Qual é o valor do limite $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{h(x) - h(\frac{\pi}{2})}{x - \frac{\pi}{2}}$.

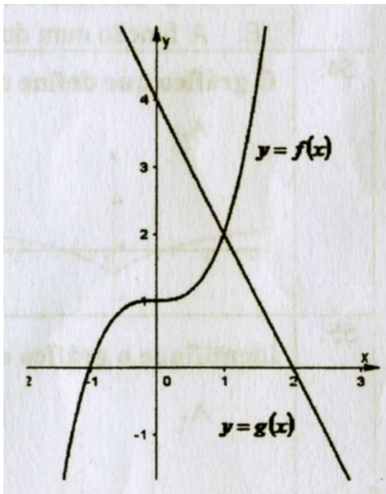
A: 4 B: -2 C: $\dfrac{2 - 3\sqrt{3}}{2}$ D: $\frac{2 - 3\sqrt{2}}{3}$ E: 1

Resolução: Sejam $f(x) = h(x) - h(\frac{\pi}{2})$ e $g(x) = x - \frac{\pi}{2}$. Vemos que $f(x)$ e $f'(x)$ estão definidas na vizinhança de $\pi/2$, igualmente para $g(x)$ e $g'(x)$ visto que $g(x)$ é função linear; $f(\frac{\pi}{2}) = g(\frac{\pi}{2}) = 0$ e $h'(\frac{\pi}{2}) = -2 \neq 0$ e $g'(\frac{\pi}{2}) = 1 \neq 0$, então são satisfeitas as condições do teorema de L'hospital. Logo, tem lugar a igualdade

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{h'(x)}{1} = h'(\frac{\pi}{2}) = -2.$$

Logo, a resposta certa é alternativa **B**.

No gráfico estão representadas partes dos gráficos das funções $y = f(x)$ e $y = g(x)$. Com base na figura responda as questões de 37 a 44.



37. O valor de x para $f(x) = g(x)$ é:

A: -1 B: 4 C: 2 D: 1 E: 0

Resolução: Fazendo leitura no gráfico vemos que $f(x) = g(x)$ para $x = 1$. O que quer dizer que a resposta certa é **D**.

38. O valor de x para $f[g(x)] = 1$ é:

A. -1 B. 4 C. 0 D. 1 E. 2

Rsolução: Seja $z = g(x)$ tal que $f(z) = 1$. Fazendo leitura ao gráfico temos: $f(z) = 1 \Longrightarrow z = 0$. Assim, $z = g(x) \Longrightarrow g(x) = 0 \Longrightarrow x = 2$. Logo, a resposta certa é **E**.

39. O produto $f(-2) \times g(-2)$ é:

A. $+\infty$ B. negativo C. $-\infty$ D. zero E. positivo

Rsolução: Pelo gráfico vemos que $f(-2) < 0$ pois neste ponto o gráfico se encontra abaixo do eixo Ox e $g(-2) > 0$ porque neste ponto o gráfico de $g(x)$ está acima do eixo Ox. Então o produto $f(-2) \times g(-2) < 0$, i.e., é negativo. Logo, a resposta certa é **B**.

40. O $\lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{2}{f(x)}$ é igual a:

A: $-\infty$ B: $+\infty$ C: 0 D: -1 E: 2

Resolução: De acordo com o gráfico $f(x) \to 0^-$, $x \to -1^-$, então

$\lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{2}{f(x)} = \dfrac{2}{0^-} = -\infty$. Logo, a alternativa certa é **A**.

41. A área do triângulo formado pela recta $y = g(x)$ e pelos eixos das coordenadas é

A. $2u^2$ B. $6u^2$ C. $4u^2$ D. $1u^2$ E. $8u^2$

Resolução: Tem-se um triângulo rectângulo de base 2 cm e altura 4 cm. Assim,

$$\text{Area} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{4 \cdot 2}{2} = 4.$$

Resposta certa é C.

42. A função $y = f(x)$ tem um ponto de inflexão em:

A: $x = -1$ B: $x = 0$ C: $x = 1$ D: $x = 2$ E: $x = 3$

Resolução : Ponto de inflexão é onde a função muda de concavidade. Para a função $y = f(x)$, isso acontece no ponto de abcissa $x = 0$. Logo, a resposta certa é alternativa **B**.

43. A expressão analítica da função $y = g(x)$ é:

A: $y = -2x$ B: $y = 2x - 1$ C: $y = -2x + 1$ D: $y = -2xx - 4$ E: $y = -2x + 4$

Resolução: A função $y = g(x)$ é uma recta que passa pelo pelos pontos $A(x_0, y_0) = A(0, 4)$ e $B(x_1, y_1) = B(2, 0)$ e a sua expressão analítica é dada por $y - y_0 = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) \Longrightarrow y - 4 = \dfrac{0 - 4}{2 - 0}(x - 0) \Longrightarrow y = -2x + 4$. Logo, a resposta certa é **E**.

44. O coeficiente angular da recta $y = g(x)$ é:

A: 2 B: 4 C: -2 D: -4 E: 1

Resolução : Visto que a expressão analítica de $y = g(x)$ é $y = -2x + 4$, então o seu coeficiente angular é -2. Então a resposta certa é **C**.

O gráfico da derivada de uma função $y = g(x)$ é uma parábola voltada para baixo cujas raizes são $x = 1$ e $x = 3$. Com base nesta infrmação responda as questões 45 e 46.

45. O(s) extremo(s) de $y = g(x)$ é (são):

A: $x = 1$ B: $x = -1$ C: $x = 3$ D: $x = 2$ E: $x = 3 \vee x = 1$

Resolução : Analisemos a tabela de variação do sinal da derivada. Visto que a parábola está voltada para baixo, temos:

	$]-\infty, 1[$	1	$]1, 3[$	3	$]3. + \infty[$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$--$	$\nearrow$	$--$	$\searrow$

Pela tabela vemos que $x = 1$ é ponto de mínimo local e $x = 3$ é ponto de máximo local. Logo, a resposta certa é **E**. As alternativas A e C estão simplesmente incompletas.

46. É FALSO afirmar que a função $y = g(x)$:

A: tem um ponto de inflexão
B: é crescente no intervalo $]1; 3[$
C: é ímpar
D: é uma função do terceiro grau
E: intercepta pelo menos uma vez o eixo das abcissas

Resolução : A função $y = g(x)$ é um polinómio do terceiro grau e logicamente terá ao menos um zero, ao menos um ponto de inflexão e com base no exerício 45 ela é crescente em $]1; 3[$. Mas não está claro se é par ou não, mas se ela fosse par, os seus intervalos de decrescimento, por exemplo, deviam ser simétricos. mas não é o que acontece, então é falso afirmar que esta função é par. Logo, a resposta certa é **C**.

47. A derivada da função $y = \frac{x+2}{(x^2-1)^2}$ é:

A: $h'(x) = \dfrac{3x^2 + 8x + 1}{(x^2-1)^3}$ B: $h'(x) = \dfrac{3x^2 + 8x + 1}{(x^2-1)^4}$ C: $h'(x) = -\dfrac{3x^2 + 8x + 1}{(x^2-1)^3}$

D: $h'(x) = \dfrac{3x^2 - 8x - 1}{(x^2-1)^3}$ E: $h'(x) = \dfrac{3x^2 - 8x + 1}{(x^2-1)^3}$

Resolução : Derivando a função dada temos:

$$
\begin{aligned}
h'(x) &= \frac{(x+2)' \cdot (x^2-1)^2 - (x+2) \cdot [(x^2-1)^2]'}{[(x^2-1)^2]^2} = \frac{(x^2-1)^2 - (x+2)(x^2-1) \cdot 2(x^2-1)'}{(x^2-1)^4} \\
&= \frac{(x^2-1)\left[x^2 - 1 - 4x(x+2)\right]}{(x^2-1)^4} = \frac{x^2 - 1 - 4x^2 - 8x}{(x^2-1)^3} = \frac{-3x^2 - 8x - 1}{(x^2-1)^3} = -\frac{3x^2 + 8x + 1}{(x^2-1)^3}.
\end{aligned}
$$

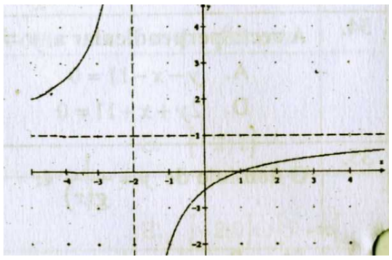
Logo, a resposta certa é **C**.

48. Sendo $f(x) = 3x - 1$ e $g(x) = -x + 4$, a função composta $fog(x)$ no ponto $x = 3$ será é igaul a:

A: 6 B: 2 C: 7 D: 3 E: Nenhuma das anteriores

Resolução : $fog(x) = f[g(x)] = f(-x+4) = 3(-x+4) - 1 = -3x + 12 - 1 = -3x + 11 \Longrightarrow fog(3) = f[g(3)] = -3 \cdot 3 + 11 = 2$. Logo, a resposta certa é **B**.

No gráfico está representada a função $h(x) = A + \frac{B}{X-C}$. Considerando o gráfico responda as questões 49 a 53.



49. $h(x) \leq 0$ no intervalo:

A: $[-2; 1]$ B: $]-2; 1[$ C: $]-2; 1]$ D: $[-2; 1[$ E: $]-2; +\infty[$

Resolução : A função $h(x)$ é negativa na parte em que o gráfico se localiza abaixo do eixo das abcissas $]-2, 1[$ e em $x = 1$ ela anula-se. Portanto, $h(x) \leq 0$ no intervalo $]-2, 1]$. Assim, a resposta certa é **C**.

50. O cntradomínio da função é:

A: $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ B: $\mathbb{R} \setminus \{1; -2\}$ C: $\mathbb{R}$ D: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ E: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Solução: Pelo gráfico vemos que o contradomínio são todos valores de $y \in \mathbb{R}$ com excepção $y = 1$, i.e., $y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Logo, a resposta certa é **D**.

51. As assímptotas da função são:

A: $x = -2$ e $y = 1$ B: $x = 2$ e $y = 1$ C: $x = -2$ e $y = -1$ D: $x = 2$ e $y = -1$ E: Nenhuma das anteriores

Solução: Fazendo leitura ao gráfico temos assímptota vertical $x = -2$ e assímptota horizontal $y = 1$. Então, a resposta certa é alternativa **A**.

52. O valor de x para o qual se verifica $h[h(x)] = -\dfrac{1}{2}$ é:

A: 2 B: 1 C: -1 D: 0 E: -2

Resolução: Seja $z = h(x)$, então $h[z] = -\frac{1}{2} \Longrightarrow z = 0 \Longrightarrow h(x) = z \Longrightarrow h(x) = 0 \Longrightarrow x = 1$. Logo, a resposta cerrta é **B**.

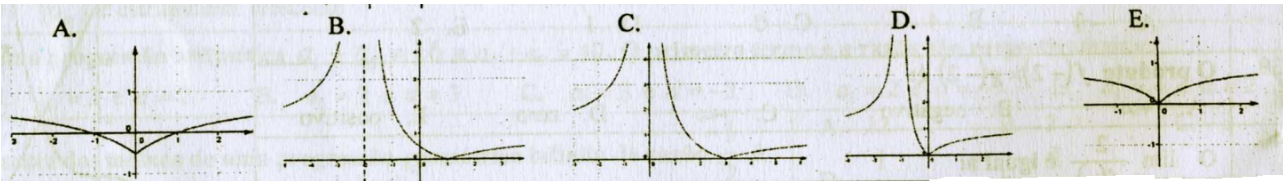
53. Em relação a função $y = h(x)$, é FALSO dizer que:

A: A função é injectiva
B: A função é derivável em $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$
C: A 2^a derivada é negativa no intervalo $]-2; +\infty[$

D: A 1^a derivada admite um zero
E: A função num determinado ponto é descontínua

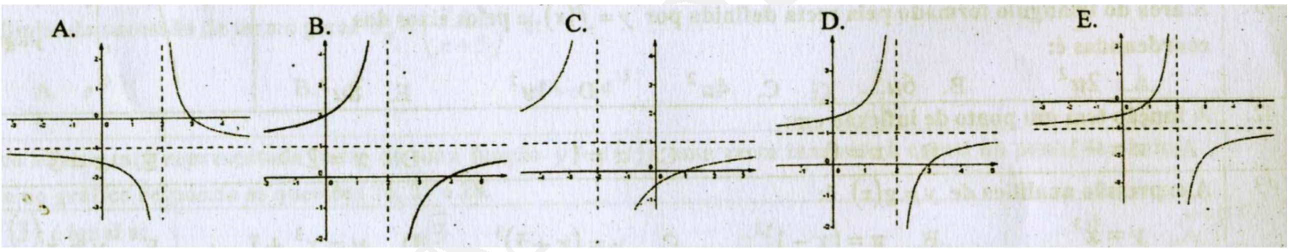
Resolução: De acordo com o gráfico a função é injectiva pois traçando linhas paralelas ao eixo dos Oy, cada uma toca o gráfico em apenas um ponto. No intervalo $]-2,+\infty[$ a concavidade está voltada para baixo, o que quer dizer que a segunda derivada neste intervalo é negativa. A função em todo seu domínio é crescente, logo é derivável e não possui pontos estacionários i.e., onde $f'(x)=0$. Mas por outro lado, um ponto de descontinuidade ou é da primeira espécie do tipo salto ou simplesmente é da segunda espécie, portando a alternativa **D** é falsa. Então, a resposta certa é **D**.

54. O gráfico que define a função $f(x)=|h(x)|$ é:



Resolução: Para a função $|h(x)|$ apenas os valores negativos de $h(x)$ irão ser multiplicados por -1 para se tornarem positivos e o respectivo gráfico é o indicado na alternativa **B**, i.e., a resposta certa é **B**.

55. Identifique o gráfico correspondente a função $y=\frac{x-3}{x-2}$.



Resolução: Note que podemos escrever a fução dada na forma $y=\frac{x-3}{x-2}=\frac{x-2-1}{x-2}=1-\frac{1}{x-2}$. Neste caso $y=1$ é assímtota horizontal; $x=2$ é assímptota vertical. Igualando $y=0$ temos $\frac{x-3}{x-2}=0\Longrightarrow x=3$ é zero da função. A ordenada na origem é $y=\frac{3}{2}$.

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x-3}{x-2}=\frac{-1}{0^+}=-\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 2^-}\frac{x-3}{x-2}=\frac{-1}{0^-}=+\infty.$$

A única função com essas características é a representada na alternativa **D**.

56. A solução do integral $\displaystyle\int\frac{3x+1}{x}dx$ é:

A: x^2+3x+c B: $3x+\ln|x|+c$ C: $3x^2+\ln|x|+c$ D: $\dfrac{3x^2+x}{x^2}+c$ E: Nenhuma das anteriores

Resolução: Resolvendo o integral temos:

$$\int\frac{3x+1}{x}dx=\int\left(3+\frac{1}{x}\right)dx=\int 3dx+\int\frac{dx}{x}=3x+\ln|x|+c.\quad \text{Assim, a resposta certa é } \mathbf{B}.$$

57. Para que valores de x o número $z = 5x - 10 + (y+4)i$ é imaginário puro?

A: $x = 2 \wedge y \neq -4$ B: $y \neq -4$ C: $x \neq 2 \wedge y = -4$ D: $x = 2$ E: $x \neq 2 \wedge y \neq 4$

Resolução: Para que um número complexo seja imaginário puro é suficiente que a parte real seja igual a zero e para qualquer valor da parte imaginária. Para o nosso caso temos $5x - 10 = 0 \Longrightarrow x = 2$, $\forall y \in \mathbb{R}$. Logo, a resposta certa é **D**.

- A alternativa A não está certa porque tem a condição $y \neq 4$ que não é necessária para o número seja imaginário puro.