Exame de Matemática de 2018

Correcção do exame de Matemática de 2018

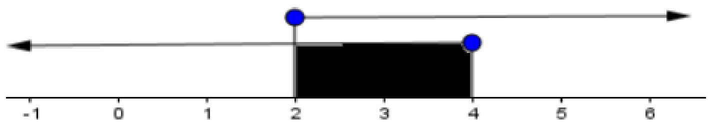
1. Dois números distam entre si 5 unidades, sendo um deles 3. A tradução da afirmação anterior em linguagem matemática é:

   A: $5 - 3$ B: $3 - 5$ C: $|x - 5| = 3$ D: $|3 - x| = 5$ E: $|3 + x| = 5$

   Resolução: A distância entre dois números é igual ao módulo da sua diferença. Seja x um dos números e $y = 3$, então e visto que distam a 5 unidade, temos $|y-x| = 5 \Longrightarrow |3-x| = 5$. Logo, a resposta certa á **D**.

   As alternativas A e B não estão correctas pois a diferença não é igual a 5 unidades. A alternativa E não está correcta porque por definição distância entre x e y é $|y - x|$ e não $|y + x|$.

2. Na figura ao abaixo está representada a preto a solução da inequaãão:



   A: $|x - 3| < 1$ B: $|x - 3| > 1$ C: $|x - 3| < 7$ D: $|x - 3| \leq 7$ E: $|x - 3| \leq 1$

   Resolução: A solução representada na figura é $2 \leq x \leq 4$ e é procuremos a su inequação na forma $|x - 3| \leq a \Longrightarrow -a \leq x - 3 \leq a \Longrightarrow 3 - a \leq x \leq 3 + a \Longrightarrow (3 - a = 2 \wedge 3 + a = 4) \Longrightarrow a = 1$. Assim, a correspondente inequação é $|x - 3| \leq 1$. Então, a resposta certa é **E**.

   Todas inequações com $' <'$ ou $' >'$ não irão incluir os extremos do intervalo solução (alternativas A, B e C). Se resolver a inequação em D temos $-7 \leq x - 3 \leq 7 \Longrightarrow -4 \leq x \leq 10$, que é diferente da solução representada.

3. Na equipa de futebol de salão do Bairro militam 10 jogadores. Pretende-se escalar o grupo que vai jogar na semana seguinte, tendo em conta que o Cossa e o Rafique devem obrigatoriamente fazer parte dos cinco seleccionados. Quantas possibilidades existem? Nota: num jogo uma equipa de futebol de salão é constituída por 5 jogadores.

A: C_{10}^5 B: A_{10}^5 C: C_8^3 D: A_8^3 E: P_5

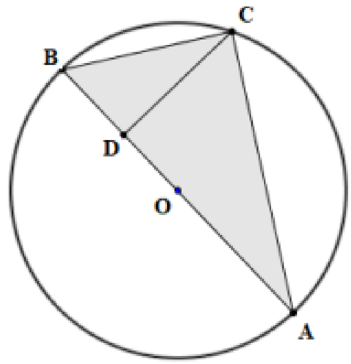
Resolução: Visto que já tem dois jogadores fixos na equipa, então resta-nos seleccionar os restantes 3. Visto que os conjuntos $\{\text{António}, \text{Joana}\}$ e $\{\text{Joana}, \text{António}\}$ são iguais, então a ordem de disposição não importa, nestes casos usamos combinação para evitar dupla contagem como é o caso de aranjos. Assim, temos C_8^3. Logo, a resposta certa é **C**.

4. Uma roleta mostra os números de 1 a 8. A probabilidade de acertar num número menor que 3 é:

A: $\frac{5}{8}$ B: $\frac{1}{4}$ C: $\frac{3}{4}$ D: $\frac{3}{8}$ E: $\frac{1}{8}$

Solução: O espaço amostral é $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, então número de casos possíveis é $n(\Omega) = 8$. O evento "Acerar um número menor do que 3" é $E = \{1, 2\}$, então o número de casos favoráveis é $n(E) = 2$. Logo, $P(E) = \frac{n(\Omega)}{n(E)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$. A resposta certa é **B**.

Responda asquestões 5, 6 e 7 realcionadas com a figura ao lado



5. A circunferência de centro O, circunscrita no triângulo ABC, tem de perímetro 18,84 cm. Os segmentos OB e CD são perpendiculares e têm a mesma medida. A área do triângulo é:

A: $9,42cm^2$ B: $4,5cm^2$ C: $6cm^2$ D: $12cm^2$ E: $18cm^2$

Resolução: O raio da circunferência é $|OB| = |OA|$. Mais, $|AB| = 2|OB|$ é diâmetro da circunferência e $|DC|$ a altura do triângulo ABC. Temos:

$$\text{Perímetro do circulo} = 2\pi r \Rightarrow 18,84 = 2 \cdot 3,14r \Rightarrow r = 3cm.$$

Assim, a área do triângulo ABC é

$$A = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{3\,cm \cdot 3\,cm}{2} = 4,5\,cm^2.$$

A resposta certa é B.

6. A medida dos segmentos DB e DA estão na proporção de 1 para 3. A medida de DB, em cm, é igual a:

A: $\frac{9}{2}$ B: $\frac{5}{2}$ C: $\frac{3}{2}$ D: $\frac{2}{27}$ E: $\frac{7}{2}$

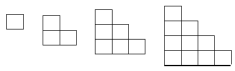
Resolução: Usando o diâmetro calculado no número 5, temos:

$$\frac{|DB|}{|DA|} = \frac{1}{3} \text{ e } |DA| + |DB| = 6cm. \Rightarrow |DA| = 3|DB|$$

$$\Rightarrow 3|DB| + |DB| = 6cm \Rightarrow |DB| = \frac{3}{2}cm.$$

A resposta certa é **C**.

7. PASSE PARA A PERGUNTA SEGUINTE

8. 

Ao lado está representada uma sequência de figuras. Mantendo-se essa lei de formação o número de quadrados na figura da posição 7 é:

A: 35 B: 30 C: 21 D: 36 E: 28

Resolução: A sequência de figuras acima corresponde a seguinte sequência de respectivos números de quadrados: 1, 3, 6, 10. Sendo $a_1 = 1$, vemos que $3 = a_2 = a_1 + 2$, $6 = a_3 = a_2 + 3$, $10 = a_4 = a_3 + 4$, continuando desta forma teremos $a_n = a_{n-1} + n$. Assim, $a_5 = a_4 + 5 = 10 + 5 = 15$, $a_6 = a_5 + 6 = 15 + 6 = 21$ e $a_7 = a_6 + 7 = 21 + 7 = 28$. Logo, a alternativa certa é **E**.

9. Dadas as proposições p e q, a negação de $p \wedge \sim q$ é:

A: $\sim p \wedge \sim q$ B: $\sim p \wedge q$ C: $\sim p \vee \sim q$ D: $\sim p \vee q$ E: $p \vee q$

Resolução: $\sim [p \wedge \sim q] \equiv \sim p \vee \sim (\sim q) \equiv \sim p \vee q$. Então, a resposta certa é **D**.

10. Dadas as proposições t: chove e r: vou a praia. A proposição S: não chove então vou a praia é tradizida simbolicamente por:

A: $\sim t \leftrightarrow \sim q$ B: $\sim t \wedge r$ C: $\sim t \vee \sim r$ D: $t \rightarrow \sim r$ E: $\sim t \rightarrow r$

Resolução: “Não chove” é negação da proposição “t: chove” e simbolicamente fica $\sim t$. A palávra "então“ é condicional que simbolicamente é representado por ” $\rightarrow$ “. Assim, a proposição s toma a forma simbolica $\sim t \rightarrow r$. Então a resposta certa é **E**.

11. Simplificando a expressão $\dfrac{3a^2 - 3x^2}{(a^2 + 2ax + x^2)^2(a^2 - 2ax + x^2)}$ obtém-se:

A: $-\dfrac{3}{a^2 - x^2}$ B: $-\dfrac{3}{x^2 - a^2}$ C: $-\dfrac{3}{(a^2 - x^2)(a^2 + x^2)}$ D: $\frac{3}{(a^2-x^2)(a^2+x^2)}$ E: Nenhuma das anteriores

Resolução: Para a existência dessa expressão $((a^2 + 2ax + x^2)^2 \neq 0 \wedge a^2 - 2ax + x^2 \neq 0) \Longrightarrow (a + x)^4 \neq 0 \wedge (a - x)^2 \neq 0 \Longrightarrow a \neq \pm x$.

$$\begin{aligned}\frac{3a^2 - 3x^2}{(a^2 + 2ax + x^2)^2(a^2 - 2ax + x^2)} &= \frac{3(a - x)(a + x)}{(a + x)^4(a - x)^2} \\ &= \frac{3}{(a + x)^3(a - x)} = \frac{3}{(a + x)^2(a^2 - x^2)}\end{aligned}$$

Portanto, a resposta certa é **E**.

- As outras alternativas não estão certas, pois, por exemplo se $a = 2$ e $x = 1$, da expressão dada obtemos $\frac{1}{9}$ e substituiondo nas alternativas temos: A: -1 B: 1 C: $-\dfrac{1}{5}$ D: $\frac{1}{5}$

12. A expressão simplificada de $\sqrt{27 + \sqrt{23 + \sqrt[3]{4 + \sqrt{16}}}}$ é:

A: $4\sqrt{2}$ B: $2\sqrt{2}$ C: $\sqrt[24]{2}$ D: $3\sqrt{2}$ E. $5\sqrt{2}$

Resolução: Temos:

$$\begin{aligned}&\sqrt{27+\sqrt{23+\sqrt[3]{4+\sqrt{16}}}}=\sqrt{27+\sqrt{23+\sqrt[3]{4+4}}}=\sqrt{27+\sqrt{23+\sqrt[3]{8}}}\\&=\sqrt{27+\sqrt{23+2}}=\sqrt{27+\sqrt{25}}=\sqrt{27+5}=\sqrt{32}=\sqrt{2^5}=4\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Logo, a resposta certa é **A**.

13. Simplificando a expressão $\dfrac{x+y}{x(x-2y)}-\dfrac{y}{(x+2y)x}-\dfrac{2(x+y)}{x^2-4y^2}$ obtém-se:

A: $\dfrac{1}{x}$ B: $-\dfrac{1}{x}$ C: $-\dfrac{1}{x-2y}$ D: $\frac{1}{x+2y}$ E: Nenhuma das anteriores

Resolução : Para a existência da expressão $(x(x-2y)\neq 0 \wedge x+2y\neq 0 \wedge x^2-4y^2\neq 0)\Longrightarrow x\neq 0\wedge x-2y\neq 0\wedge x+2y\neq 0$.

$$\begin{aligned}&\frac{x+y}{x(x-2y)}-\frac{y}{(x+2y)x}-\frac{2(x+y)}{x^2-4y^2}\\&=\frac{(x+y)(x+2y)-y(x-2y)-2(x+y)x}{x(x^2-4y^2)}\\&=\frac{(x+y)(x+2y-2x)-y(x-2y)}{x(x^2-4y^2)}=\frac{(x+y)(-x+2y)-y(x-2y)}{x(x^2-4y^2)}\\&=\frac{-(x+y)(x-2y)-y(x-2y)}{x(x^2-4y^2)}=\frac{(x-2y)[-(x+y)-y]}{x(x^2-4y^2)}\\&=\frac{(x-2y)(-x-2y)}{x(x^2-4y^2)}=\frac{-(x-2y)(x+2y)}{(x-2y)(x+2y)x}=-\frac{1}{x}.\end{aligned}$$

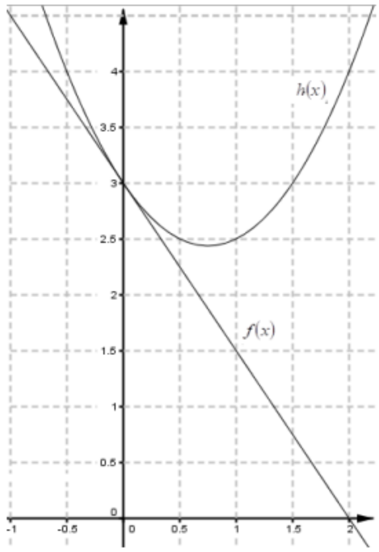
Logo, a resposta certa é **B**.

14. $x=2$ é raiz do polinómio $P(x)=x^3+ax^2-5x-2$. O valor de a é:

A: -1 B: 1 C: 0 D: 2 E: -2

Resolução : Sendo $x=2$ raiz do polinómio $P(x)$ então $P(2)=0\Longrightarrow 8+4a-10-2=0\Longrightarrow a=1$. Então, a resposta certa é **B**.

Com base no gráfico, responda às questões 15 a 20



15. A derivada da função no ponto $x = 0$ é:

    A: $\frac{3}{2}$ B: $\frac{2}{3}$ C: $-\frac{3}{2}$ D: $-\frac{2}{3}$ E: $-\frac{1}{3}$

    Resolução : As duas funções representadas no gráfico possuem derivadas iguais no ponto $x = 0$ e essa derivada é igual ao decluve da recta $y = f(x)$. Esta recta passa pelos pontos $(x_0, y_0) = (0, 3)$ e $(x_1, y_1) = (2, 0)$, então o declive dessa recta é $a = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{0-3}{2-0} = -\frac{3}{2}$. Logo, a resposta certa é **C**.

16. A solução da equação $f(x) - h(x) = 0$ é:

    A: $x = 2$ B: $x = 3$ C: $x = 0$ D: $x = -3$ E: $x = -2$

    Reolução : $f(x)$ e $h(x)$ são iguais nos pontos onde se tocam e isso apenas contece para $x = 0$. Desta forma, a resposta certa é **C**.

17. Para $h(x) = 3$, o valor de x é:

    A: 0 B: $1,5$ C: 2 D: 0 ou $1,5$ E: 0 ou 2

    Resolução: Fazendo leitura do gráfico vemos que $h(x) = 3$ quando $x = 0$ ou $x = 1.5$. Logo, a resposta certas é **D** .

18. A expressão analítica da função é:

    A: $f(x) = -3x + 3$ B: $f(x) = -2x + 3$ C: $f(x) = -x + 3$
    D: $f(x) = -\frac{3}{2}x + 3$ E: $f(x) = \frac{3}{2}x + 3$

    Resolução : Como vimos no exercício 15, o declive da recta $y = f(x)$ é $a = -\dfrac{3}{2}$. Vimos também que passa pelo ponto $(0, 3)$, então $y = -\frac{3}{2}(x - 0) + 3 \Longrightarrow y = -\frac{3}{2}x + 3$. Logo, a resposta certa é **D**.

19. $h(x) \leq 3$ se:

    A: $x \in]0; 1,5[$ B: $x \in [0; 1,5[$ C: $x \in]0; 1,5]$
    D: $x \in [0; 1,5]$ E: Nenhuma das anteriores

Resolução : $h(x) \leq 3$ é a parte do gráfico de $h(x)$ que fica de baixo da recta $y = 3$ e isso acontece no intervalo $[0; 1, 5]$ Então, a resposta certa é **D**.

20. Os valores de que satisfazem a inequação $f(x) < h(x)$ são:

A: $\mathbb{R}$ B: $\mathbb{R}^+$ C: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ D: $\mathbb{R}^-$ E: $\mathbb{R} \setminus \{3\}$

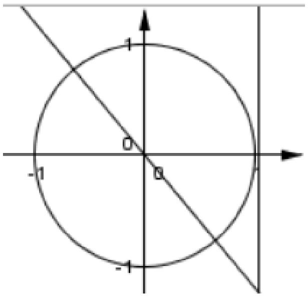
Resolução: A solução da inequação $f(x) < h(x)$ corresponde aos valores de x para os quais o gráfico de $f(x)$ está abaixo do gráfico de $h(x)$. Isso acontece em todo o eixo real com excepção do ponto $x = 0$, onde elas são iguais. Assim $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Logo, a resposta certa é **C**.

21. Dada a função $g(x) = 2^x$, a expressão $g(k+1) - g(k)$ é igual a:

A: $g(k+1)$ B: $g(k)$ C: $g(k-1)$ D: 1 E: $g(2k+1)$

Resolução: Temos: $g(k+1) - g(k) = 2^{k+1} - 2^k = 2^k(2-1) = 2^k = g(k)$. Logo, a alternativa certa é **B**.

22. A solução de $tg(x) > -\sqrt{3}$ é:



A. $-\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

B. $\frac{5\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

C. $\frac{5\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$

D. $-\frac{3\pi}{2} + k\pi < x < -\frac{\pi}{6} + k\pi$

E. $-\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$

Resolução: A função tgx tem como período π, então

$$tg(x) > -\sqrt{3} \Longrightarrow tgx > tg\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Longrightarrow -\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

A resposta certa é **E**.

23. Seja dada a função $y = e^{2x}$. A solução da equação $y - xy' = 0$ é

A. $x = -\frac{1}{2}$ B. $x = 0 \vee x = -\frac{1}{2}$ C. $x = \frac{1}{2}$
D. $x = -1$ E. $x = 1$

Resolução: Temos: $y' = 2e^{2x} \Longrightarrow y - xy' = 0 \Longrightarrow e^{2x} - 2xe^{2x} = 0 \Longrightarrow 1 - 2x = 0 \Longrightarrow x = \frac{1}{2}$.

A resposta certa é **C**.

24. O produto $(2 + ki)(2 + i)$ é um número imaginário para k igual à:

A. $k = -1$ B. $k = 1$ C. $k = 4$ D. $k = -4$ E. $k = -3$

Resolução: Efectuando a multiplicação temos $(2 + ki)(2 + i) = 4 + 2(k+1)i - k$. Este número será imaginário puro se $4 - k = 0 \Longrightarrow k = 4$. Logo, a resposta certa é alternativa **C**.

25. Calculando $\lim \left(\sqrt{n(n-1)} - n\right)$ obtém-se:

A: $\frac{1}{2}$ B: $+\infty$ C: $-\frac{1}{2}$ D: 1 E: $\frac{1}{4}$

Resolução: $\lim\left(\sqrt{n(n-1)}-n\right)=[\infty-\infty]$. Levantando esta indeterminação, temos:

$$\begin{aligned}\lim\left(\sqrt{n(n-1)}-n\right)&=\lim\frac{\left(\sqrt{n(n-1)}-n\right)\left(\sqrt{n(n-1)}+n\right)}{\sqrt{n(n-1)}+n}\\&=\lim\frac{n(n-1)-n^2}{\sqrt{n^2-n}+n}=\lim\frac{-n}{n\sqrt{1-\frac{1}{n}}+n}=\lim\frac{-n}{2n}=-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Assim, a resposta certa é **C**.

26. Das funções seguintes aquela cuja primitiva é igual a própria função é:

A. $y=\ln x$ B. $y=\sqrt{x}$ C. $y=2^{3x}$ D. $y=e^x$ E. $y=x^3$

Resolução: A primitiva de uma função $f(x)$ é uma função $F(x)$ para a qual $F'(x)=f(x)$. De acordo com o enunciado, pretendemos encontrar a função $f(x)$ tal que $f(x)=F(x)$ ou por outras palavras $F'(x)=F(x)=f(x)$. A única função que tem essa propriedade é $y=e^x$. Logo, a resposta certa é **D**.

27. A solução de $\log_{\frac{1}{2}}(x+2)\geq 3$ é:

A. $\frac{15}{8}\leq x\leq 2$ B. $\frac{15}{8}<x<2$ C. $-2\leq x\leq\frac{15}{8}$ D. $x\leq-\frac{15}{8}$ E. $-2<x\leq-\frac{15}{8}$

Resolução: Para a existência do logarítimo $x+2>0\Longrightarrow x>-2$.

$$\log_{\frac{1}{2}}(x+2)\geq 3\Longrightarrow\log_{\frac{1}{2}}(x+2)\geq\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^3\Longrightarrow x+2\leq\frac{1}{8}\Longrightarrow x\leq-\frac{15}{8}.$$

Combinando com o domínio da expressão temos $x>-2\wedge x\leq-\frac{15}{8}\Longrightarrow -2<x\leq-\frac{15}{8}$. A resposta certa é **E**.

28. A solução de $e^{\sqrt{x}}(1-x)<0$ é:

A: $x<1$ B: $x>1$ C: $0<x<1$ D: $0\leq x<1$ E: $x\leq 1$

Resolução: Para a existência da expressão $x\geq 0$. O sinal da expressão $e^{\sqrt{x}}(1-x)$ depende inteiramente de $(1-x)$ visto que $e^{\sqrt{x}}>0$ em todo o seu domínio. Assim, $e^{\sqrt{x}}(1-x)<0\Leftrightarrow 1-x<0\Longrightarrow x>1$. Combinando com a condição de domínio temos: $x>1$, então, resposta certa é **B**.

29. O produto das raizes de $2^{\sqrt{x^2-7}}=2^3$ é:

A: 16 B: -16 C: -12 D: 1 E: 9

Resolução: Para que a equação tenha sentido,

$$x^2-7\geq 0\Longrightarrow(x+\sqrt{7})(x-\sqrt{7})\geq 0\Longrightarrow(x-\sqrt{7}\geq 0\wedge x+\sqrt{7}\geq 0)\vee(x\leq\sqrt{7}\wedge x+\sqrt{7}\leq 0)\Longrightarrow$$

$$(x\geq\sqrt{7}\wedge x\geq\sqrt{7})\vee(x\leq\sqrt{7}\wedge x\leq-\sqrt{7})\Longrightarrow x\geq\sqrt{7}\vee x\leq-\sqrt{7}.$$

Resolvendo a equação dada temos: $2^{\sqrt{x^2-7}}=2^3\Longrightarrow\sqrt{x^2-7}=3\Longrightarrow x^2-7=9\Longrightarrow x^2=16\Longrightarrow x=\pm 4$. Note que $-4<-\sqrt{7}$ e $4>\sqrt{7}$, então as raizes são $x=\pm 4$ e o seu produto é igual a -16. A resposta certa é alternativa **B**.

30. A distância entre $A(2,3)$ e $B(-2,-2)$ é:

A: 41 B: 5 C: $\sqrt{17}$ D: $\sqrt{41}$ E: 1

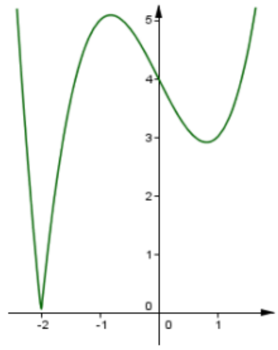
Resolução: A distância entre dois pontos $A(x_0, y_0)$ e $B(x_1, y_1)$ do plano é dada por $d = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$, então $d = \sqrt{(-2-2)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{41}$. Então, a resposta certa é **D**.

31. A primitiva de $x^3 - 2x$ é:

A: $\frac{x^4}{4} - 2x^2$ B: $3x^2 - 2 + c$ C: $3x^2 - 2$ D: $\frac{x^2}{3} - \frac{x}{2} + c$ E: $\frac{x^4}{4} - x^2 + c$

Resolução: A primitiva de $f(x)$ é uma função $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$ e ela pode ser determinada da seguinte forma $F(x) = \int f(x)dx = \int (x^2 - 2x)dx = \frac{x^4}{4} - x^2 + c$. Assim a resposta é alternativa **E** é correcta.

32. Em relação a função apresentada é falso afirmar que:



A: A função é decrescente em $]-\infty, -2[\cup]-1, 1[$
B: A função tem um ponto de inflexão em $x = 0$
C: A derivada da função é nula em $x = -1$ e $x = 1$
D: Em $]-2, 1[$ a segunda derivada é negativa
E: A função admite um máximo relativo em $x = -1$

Resolução:

• Na altenativa **D** diz-se que em $]-2, 1[$ a segunda derivada é negativa, isso não constitui a verdade pois no intervalo $]0, 1[\subset]-2, 1[$ a segunda derivada é é positiva, visto que ela possui concavidade voltada para cima neste intervalo.

A resposta certa é **D**.

33. A expressão analítica da função representada na figura ao lado é:

A: $y = x^3 - 2x + 4$ B: $y = |x|^3 - 2|x| + 4$ C: $y = |-x^3 - 2x + 4|$
D: $y = |x^3 - 2x + 4|$ E: Nenhuma das anteriores.

Resolução: A função ilustrada no gráfico possui como zero da função $x = -2$ e apenas duas alternativas cujo $x = -2$ é zero, **A** e **D**.
A função tem como pontos críticos $x = -2$, $x = -1$ e $x = 1$. Analisando a função em **A** temos que $y' = 3x^2 - 2 = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ e não correspondem aos pontos estacionários/crítios do gráfico dado. Então **A** não é correcta, consequentemente **D** também, visto que é módulo da função em **A**. Nenhuma das alternativas de A a D, é correcta. A resposta certa é **E**.

34. PASSE PARA A PERGUNTA SEGUINTE

35. O $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$ é:

A: $\frac{3}{2}$ B: $-\frac{3}{2}$ C: $-\frac{1}{2}$ D: $\frac{1}{2}$ E: $\frac{3}{2}$.

Resolução: Temos:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x+1}=\frac{3}{2}.$$

Então, a resposta certa é altenativa **E**.

36. A derivada de $\dfrac{3x}{(2x-1)^2}$ é:

A: $\dfrac{3}{(2x-1)^2}$ B: $-\dfrac{3}{(2x-1)^3}$ C: $-\dfrac{3}{(2x-1)^2}$

D: $\dfrac{3}{(2x-1)^3}$ E: $-\dfrac{3(2x+1)}{(2x-1)^3}$

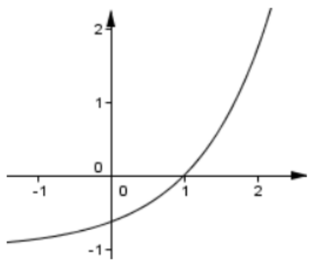
Resolução: Temos:

$$\begin{aligned}\left[\frac{3x}{(2x-1)^2}\right]' &= \frac{(3x)'\cdot(2x-1)^2-3x\cdot[(2x-1)^2]'}{(2x-1)^4}\\ &= \frac{3\cdot(2x-1)^2-3x\cdot 2(2x-1)\cdot(2x-1)'}{(2x-1)^4}\\ &= \frac{3\cdot(2x-1)^2-3x\cdot 2(2x-1)\cdot 2}{(2x-1)^4}\\ &= \frac{6x-3-12x}{(2x-1)^3}\\ &= \frac{-6x-3}{(2x-1)^3}=-\frac{3(2x+1)}{(2x-1)^3}\end{aligned}$$

A resposta certa é **E**.

37. Na figura ao lado está representada a função $y=g(x)$. O domínio da função $f(x)=\sqrt{g(x)}$ é:

A: $[0,+\infty[$ B: $]0,+\infty[$ C: $]-\infty,1[$ D: $[1,+\infty[$ E: $]1,+\infty[$



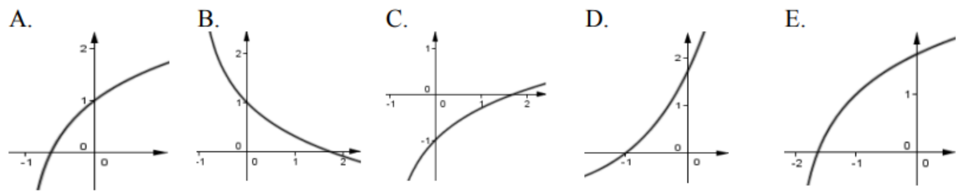
Resolução: Para a existência da raiz quadrada $g(x)\geq 0 \Longrightarrow x\geq 1$. Logo, a resposta certa é **D**. Nas outras alternativas os intervalos possuem valores para os quais a raiz quadrada não tem sentido em $\mathbb{R}$, por exemplo $x=0$ faz parte dos domínios em A, B, C e $f(0)=\sqrt{g(0)}$ e $g(0)<0$, logo $f(0)$ não existe em $\mathbb{R}$. A alternativa E peca por não incluir $x=1$, visto que $f(1)=\sqrt{g(1)}=\sqrt{0}=0$ existe.

38. O valor de $g\left(\frac{1}{2}\right)$ é:

A: $\frac{1}{4}$ B: $-\frac{1}{4}$ C: $\frac{1}{2}$ D: $-\frac{3}{2}$ E: $-\frac{5}{2}$

Resolução: Fazendo leitura ao gráfico apenas podemos concluir que $-1<g(\frac{1}{2})<0$, não tendo assim informação suficiente para determinar o valor $g(x)$ da função nesse ponto. A resposta mais próxima é **B**.

39. O gráfico da função inversa de $y = g(x)$ é:



Resolução: A função dada apresenta aspectos de uma função exponencial crescente tal que $g(1) = 0$ e $g(0) < 0$. Neste caso a sua inversa $g^{-1}(x)$ teria $g^{-1}(0) = 1$ e $\exists\, c < 0 : g^{-1}(c) = 0$. O único gráfico com essas características é o da alternativa **A**.

40. Sabe-se que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Nestas condições é falso afirmar que:
A: A função tem uma assímptota vertical em $x = 2$
B: A função não admite derivada em $x = 2$
C: A função tem limite em $x = 2$
D: A função tem no mínimo um zero
E: A função tem uma assímptota horizontal em $y = 1$

Resolução: Visto que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$ então $y = 1$ é assímptota horizontal. Dado que os limites laterais no ponto $x = 2$ são infinitos então $x = 2$ é ponto de descontinuidade da segunda espécie, portanto não é derivável e não tem limite nesse ponto, isto contradiz a afirmação em **C** i.e., **C** é falsa e é a alternativa certa. Visto que pela esquerda de $x = 2$ a funçõ tende a $+\infty$ e pela direita para $-\infty$, então ela possui um zero algures.

41. A solução de $\cos x - sen x = 0$ em $[0, 2\pi]$ é:

A: $x = 0$ B: $x = \frac{\pi}{4}$ C: $x = \frac{\pi}{4} \vee x = \dfrac{3\pi}{4}$ D: $x = \frac{\pi}{4} \vee x = \dfrac{5\pi}{4}$ E: $x = \dfrac{5\pi}{4}$

Resolução: $\cos x - sen x = 0 \Longrightarrow \cos x = sen x \Longrightarrow x = \frac{\pi}{4} + +k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Então em $[0, 2\pi]$ temos $x = \frac{\pi}{4} \vee x = \frac{5\pi}{4}$. Portanto, a resposta certa é alternativa **D**.

- As alternativas B e E simplesmente estão incompletas. As alternativas A e C possuem valores de x que não satisfazem a equação dada, neste caso $x = 0$ e $x = \frac{3\pi}{4}$ não satisfazem a equação.

42. O produto $(x-1)(x^2 + ax + b)$ é igual a $x^3 + x^2 - 5x - b$ quando a e b tomam valores:
A: $a = 2$ e $b = -3$ B: $a = 2$ e $b = -7$ C: $a = 0$ e $b = -5$
D: $a = 0$ e $b = 5$ E: $a = 2$ e $b = -5$

Resolução: Igualando as duas expressões temos:

$$
\begin{aligned}
&(x-1)(x^2 + ax + b) = x^3 + x^2 - 5x - b \Longrightarrow \\
&x^3 + (a-1)x^2 + (b-a)x - b = x^3 + x^2 - 5x - b \\
&a - 1 = 1 \Longrightarrow a = 2 \\
&b - a = -5 \Longrightarrow b = -3.
\end{aligned}
$$

A resposta certa é **A**.

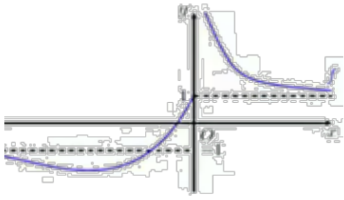
Na figura abaixo está representado o gráfico da função $y = f(x)$. Com base no gráfico responda as questões 44 e 45.

43. Sabendo que $g(x) = \ln x$, o limite $\lim\limits_{x\to 1} f[g(x)]$ é igaul a:

A: -1 B: 0 C: 1 D: $-\frac{1}{2}$ E: $\frac{1}{2}$

Resolução: $\lim\limits_{x\to 1} f[g(x)] = f[g(1)] = f(-\infty) = -1$. Então a resposta certa é **A**.

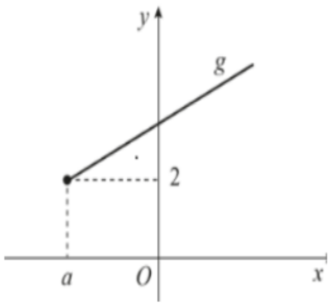
44. Em relação a função $y = f(x)$ reepresentada ao lado é falso afirmar:



A: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 1$
B: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$
C: $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -1$
D: $f'(x) \neq 0$ em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$
E: $f(x)$ é contínua em $x \neq 0$

Resolução: A alternativa certa é **D** visto que o gráfico cruza a assímptota horizontal $y = -1$ e ainda quando tende para -1 quando $x \to -\infty$. Então algures $]-\infty, 0[$ a função possui extremo e visto que a função é contínua e diferenciável nesse intervalo, então $\exists c \in]-\infty, 0[$: $f'(c) = 0$.

45. A função $y = \log_3\left(-x - \frac{1}{3}\right)$ e a função representada na figura ao lado tem a mesma ordenada em $x = a$. O valor de a é:



A: $-\frac{26}{3}$ B: $-\frac{28}{3}$ C: $\frac{28}{3}$ D: $\frac{26}{3}$ E: $-\frac{25}{3}$

Resolução: Visto que a função representada no gráfico e $y = \log_3\left(-x - \frac{1}{3}\right)$ tem a mesma ordenada em $x = a$, então $y(a) = \log_3\left(-a - \frac{1}{3}\right) = 2 \Longrightarrow \log_3\left(-a - \frac{1}{3}\right) = \log_3 3^2 \Longrightarrow -a - \frac{1}{3} = 9 \Longrightarrow a = -\frac{1}{3} - 9 = -\frac{28}{3}$. Logo, a resposta certa é **B**.

46. O domínio da função $y = \log_3\left(-x - \frac{1}{3}\right)$ é:

A: $\left]-\infty, -\frac{1}{3}\right]$ B: $\left]-\infty, -\frac{1}{3}\right[$ C: $\left[-\frac{1}{3}, +\infty\right[$
D: $\left]-\frac{1}{3}, +\infty\right[$ E: $\left]\frac{1}{3}, +\infty\right[$

Resolução: $D_y = \{x \in \mathbb{R} : -x - \dfrac{1}{3} > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x < -\dfrac{1}{3}\} = \left]-\infty, -\dfrac{1}{3}\right[$. Deste modo, a resposta certa é a alternativa **B**.

47. A função inversa de $y = \log_3\left(-x - \frac{1}{3}\right)$ é:

A: $y = 3^x - \dfrac{1}{3}$ B: $y = 3^x + \dfrac{1}{3}$ C: $y = -\left(3^x - \dfrac{1}{3}\right)$ D: $y = \left(-3^x - \dfrac{1}{3}\right)^3$ E: $y = -\left(3^x + \dfrac{1}{3}\right)$

Resolução: Uma função possui inversa se for injectiva e sobrejectiva. Sejam $x_1, x_2 \in D_y$, tal que $y(x_1) = y(x_2) \Longrightarrow \log_3\left(-x_1 - \frac{1}{3}\right) = \log_3\left(-x_2 - \frac{1}{3}\right) \Longrightarrow -x_1 - \frac{1}{3} = -x_2 - \frac{1}{3} \Longrightarrow x_1 = x_2$. Logo a função dada é injectiva. O contradomínio da função dada é $CD_y = \mathbb{R}$, então seja $y \in \mathbb{R}$, então $y = \log_3\left(-x - \frac{1}{3}\right) \Longrightarrow -x - \frac{1}{3} = 3^y \Longrightarrow x = -\left(3^y + \frac{1}{3}\right)$, isto mostra que $\forall y \in CD_y, \exists\, x \in D_y : y = y(x)$, então a função dada é sobrejectiva. Então ela possui inversa. Se em $x = -\left(3^y + \dfrac{1}{3}\right)$ trocarmos os papeis de x e y, temos $y^{-}(x) = -\left(3^x + \frac{1}{3}\right)$. Logo, a resposta certa é a alternativa **E**.

48. Considere a sucessão $v_n = \frac{3n-2}{n+1}$, indique a afirmação <u>falsa</u>.

A: $\dfrac{21}{9}$ é termo da sucessão B: $\dfrac{1}{2} \le v_n \le 3$ C: $v_5 = \dfrac{13}{6}$

D: $\lim v_n = 3$ E: A sucessão é monótona crescente

Resolução: Note que $\lim v_n = \lim \frac{3n-2}{n+1} = \lim \frac{3n(1-\frac{2}{3n})}{n(1-\frac{1}{n})} = 3$, então ela é limitada e $\left|\frac{3n+1}{n+1}\right| \le \frac{3n}{n} = 3 \Longrightarrow -3 \le v_n \le 3 \Longrightarrow \frac{1}{2} \le v_n \le 3$. $v_5 = \frac{3\cdot 5-2}{5+1} = \frac{13}{6}$. Se o número $\frac{21}{9}$ for termo da sucessão, então $\exists\, n : \frac{3n-2}{n+1} = \frac{13}{9} \Longrightarrow 27n - 18 = 13n + 13 \Longrightarrow 14n = 31$, então não existe n natural para o qual $\frac{13}{9}$ é termo da sucessão. A afirmação em **A** é falsa. Por ouro lado temos que

$$
\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= \frac{3(n+1)-2}{n+2} - \frac{3n-2}{n+1} \\
&= \frac{(3n+1)(n+1) - (3n-2)(n+2)}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{3n^2+4n+1-(3n^2+4n-4)}{(n+1)(n+2)} = \frac{5}{(n+1)(n+2)} > 0,
\end{aligned}
$$

então a sucessão é monótona crescente. Assim, a resposta certa é **A**.

49. Numa progressão geométrica $u_1 = -\frac{3}{5}$ e $u_2 = -\frac{2}{5}$. $\lim \frac{1}{u_n}$ é igual a:

A: 1 B: 0 C: $-\infty$ D: 3 E: 2

Resolução: Sendo progressão geométrica temos que $u_n = u_1 \cdot q^{n-1} \Longrightarrow q = \dfrac{u_2}{u_1} = -\dfrac{2}{5} \div \left(-\dfrac{3}{5}\right) = \dfrac{2}{3} \Longrightarrow$ $u_n = -\dfrac{3}{5} \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$. Então,

$$
\lim \frac{1}{u_n} = \lim \frac{1}{-\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}} = -\frac{5}{3}\lim\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} = -\infty.
$$

A resposta certa é **C**.

50. A soma dos primeiros doze termos de uma progressão aritimética de razão 2 é 168. O sexto termo dessa progressão é:

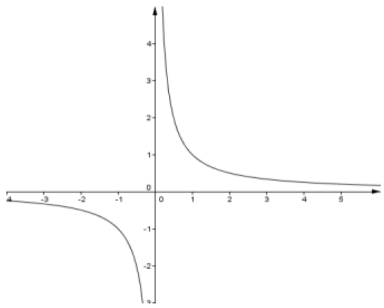
A. 28 B. 12 C. 13 D. 25 E. 22

Rsolução: Sendo uma progressão aritmética, então a soma dos primeiros n termos é dada por $S_n = \dfrac{(u_1+u_n)\cdot n}{2} \Rightarrow \dfrac{12(u_1+u_{12})}{2} = 168 \Rightarrow u_1 + u_{12} = 28 \Rightarrow u_1 + u_1 + 11d = 28 \Longrightarrow 2u_1 + 11\cdot 2 = 28 \Rightarrow u_1 = 3$. Logo, $u_6 = u_1 + 5d = 3 + 5\cdot 2 = 13$. Então, a resposta certa é **C**.

Em relação ao gráfico da função $y = h(x)$ representada em maixo responda as questões 51 a 56

51. A função inversa de $y = h(x)$ é:

A. $h^{-1}(x) = \frac{1}{x}$ B. $h^{-1}(x) = -\frac{1}{x}$ C. $h^{-1}(x) = x^3$
D. $h^{-1}(x) = \ln x$ E. $h^{-1}(x) = e^x$



Rsolução: A função $h(x)$ tem como assímptotas horizontal $y = 0$ e vertical $x = 0$, e não intersecta os eixos coordenados, então é a função homógrafa $h(x) = \frac{1}{x}$ e esta função é injectiva, visto que para todos x_1, x_2 do seu domínio se $h(x_1) = h(x_2) \Longrightarrow \frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} \Longrightarrow x_1 = x_2$. Ela é sobrejectiva, i.e., para todo y do seu contradomínio, $\exists x$ do domínio tal que $y = h(x) = \frac{1}{x} \Longrightarrow x = \frac{1}{y}$. Assim, a função $h(x)$ possui inversa e a sua inversa obtemos por trocar os papeis de x e y na última igualdade, i.e., $h^{-1}(x) = \frac{1}{x}$. Então, a resposta certa é **A**.

52. A primitiva de $y = h(x)$ é:

A. $H(x) = \ln^2 x + c$ B. $H(x) = \ln|x| + c$ C. $H(x) = x^4 + c$
D. $H(x) = e^x + c$ E. $H(x) = e^{-x} + c$

Rsolução: A primitiva de $h(x)$ é uma função $H(x)$ tal que $H'(x) = h(x)$, então $H(x)$ pode-se determinar da seguinte forma $H(x) = \int h(x)dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$. Claramente que a função $\ln x + c$ é primitiva de $\frac{1}{x}$ no caso $x > 0$. Então, a resposta certa é **B**.

53. O $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{h(x)}$ é:
A. 0 B. 1 C. $-\infty$ D. -1 E. $+\infty$

Rsolução: $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{h(x)} = \frac{1}{-\infty} = 0$. Assim, a resposta certa é **A**.

54. O valor de $h(0)$ é:

A. 0 B. $+\infty$ C. $-\infty$ D. -1 E. Não existe

Rsolução: $x = 0$ é assímptota da vertical de $h(x)$, portanto a função não está definida neste ponto, i.e., $h(0)$ não existe. A resposta certa é **E**.

55. É falso afirmar que $y = h(x)$:

A: A função tem descontínudade da segunda espécie em $x = 0$
B: Admite uma derivada em $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
C: É simétrica em relação a origem
D: A função é injectiva
E: $h(x) = h(-x)$

Resolução: A função é injectiva, ímpar e tem descontinuidade da segunda espéciem em $x = 0$, portanto as alternativas A, B, C e D são verdadeiras. Logo, a alternativa certa é **E**.

56. Em $x = -3$ a função $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x + 3}$:

A: Tem uma assímptota vertical
B: Tem uma assímptota horizontal
C: É descontínua não eliminável
D: É descontínua eliminável
E: $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 - 9}{x + 3} = +\infty$

Resolução: Visto que $x = -3$ é ponto rejeitado no domínio de $f(x)$ e

$$\lim_{x \to -3} \frac{x^2 - 9}{x + 3} = \lim_{x \to -3} \frac{(x - 3)(x + 3)}{x + 3} = \lim_{x \to -3} (x - 3) = -3,$$

então $x = -3$ é ponto de descontinuidade eliminável. Logo, a resposta certa é **D**.