Exame de Matemática de 2019

Correcção do exame de Matemática de 2019

1. Numa biblioteca A há 10000 livros, entre os quais 8000 escritos em Português. Noutra biblioteca B há-se 12000 livros com a mesma proporção entre o número de livros em Português e o número total. Qual é o número de livros escritos noutras linguagens na biblioteca B?

   A: 4000 B: 2400 C: 2000 D: 1800 E: 3000

   Resolução: A proporção dos livros escritos em português na biblioteca A é $\dfrac{8000}{10000} = 0,8$. Assim, a proporção de livros escritos em outras línguas é $1 - 0,8 = 0,2$. Deste modo o número de livros escritos em outras línguas na biblioteca B é $0,2 \cdot 12000 = 2400$. Logo, a resposta certa á **B**.

2. Numa escola estudam 203 alunos. Eliminando as unidades, qual é a percentagem do erro relativo desta operação?

   A: 3 B: $2,5$ C: 2 D: $1,5$ E: 1

   Resolução: Eliminando as unidades temos 200 alunos, assim a percentagem do erro relativo é igual à $\dfrac{203-200}{203} \times 100\% \approx 1,5\%$. A resposta certa é **D**.

3. No mapa de parede de República de Moçambique no canto inferior direito está escrito: Escala $1 : 1300000$, o que significa que para 1 centímetro no mapa correspondem 1300000 centímetros de distância real. Neste mapa a distância de Beira à Tete mede, em linha recta, cerca de $32,7$ centímetros. Arredondando a resposta a três algarismos significativos, qual é a distância real de Beira à Tete em quilómetros (km)?

   A: $400\,km$ B: $405\,km$ C: $415\,km$ D: $425\,km$ E: $450\,km$

   Solução: Seja x a distância de Beira à Tete em centímetros, então

   $\begin{array}{l} 1\text{———-}1300000 \\ 32,7\text{——}x \end{array} \Longrightarrow x = 32,7 \cdot 1300000 = 42510000\,cm$. Seja y a mesma distância em km, então

   $\begin{array}{l} 1km\text{——-}\ 100000\,cm \\ y\text{———}42510000\,cm \end{array} \Longrightarrow y = \frac{42510000}{100000} = 425,1km \approx 425\,km$. Então, a resposta certa é **D**.

4. Um caderno custa 120 Meticais, o que em seis vezes é mais caro comparando com o preço duma caneta. O aluno comprou quatro cadernos e umas canetas, pagando 600 Meticais. Quantas canetas comprou o aluno?

A: 4 B: 6 C: 8 D: 10 E: 12

Solução: Seja n o número de canetas que o aluno comprou ao preço y por cada caneta. Então $6y = 120 \Longrightarrow y = 20$ e $4 \cdot 120 + n \cdot y = 600 \Longrightarrow n \cdot 20 = 120 \Longrightarrow n = 6$ canetas. A resposta certa é **B**.

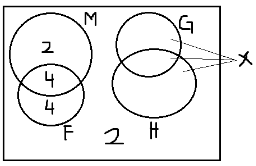
5. Uma solução de concentração de sal de 6% foi obtida misturando a solução A de massa de 3 kg e de concentração de 4% com a solução B de massa de 2 kg. Qual é a massa de sal da solução B?

   A: $0,2$ B: $0,6$ C: $0,35$ D: $0,2$ E: $0,18$

   Resolução: Seja α a percentagem de sal na solução B, então: $0,04 \cdot 3 + \alpha \cdot 2 = 0,06 \cdot 5 \Longrightarrow 2\alpha = 0,18$. Então, a resposta certa é **E**.

6. Uma turma da escola consta 24 alunos, entre eles seis alunos gostam de Matemática, oito de Física, quatro de Matemática e Física, dois nada gostam e os outros gostam de Geografia ou História. Quantos alunos gostam de Geografia ou História?
   A: 4 B: 6 C: 8 D: 10 E: 12

   Resolução: Seja x o número de alunos da turma que gostam de Geografia ou História. Representando num diagrama de Venn os dados do exercício temos:



   Deste diagrama temos: $2+4+4+2+x = 24 \Longrightarrow x = 12$. Então, a resposta certa é **E**.

7. Um grupo de 5 pessoas querem jogar em volley da praia formando as equipas 2 contra 2 jogadores. Quantos jogos com diferentes jogadores nas equipas podem ser realizados?

   A: 10 B: 8 C: 12 D: 20 E: 16

   Resolução: Suponhamos que temos os jogadores A, B, C, D, E então podemos formar $C_2^5 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5\cdot4\cdot3!}{2!\cdot3!} = 10$ equipas de forma diferente i.e., AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE. Consideremos a seguinte tabela

	AB	AC	AD	AE	BC	BD	BE	CD	CE	DE
AB										
AC										
AD										
AE										
BC			$\surd$	$\surd$						
BD		$\surd$		$\surd$						
BE		$\surd$	$\surd$							
CD	$\surd$			$\surd$			$\surd$			
CE	$\surd$		$\surd$		$\surd$	$\surd$				
DE	$\surd$	$\surd$				$\surd$				

   Da tabela acima vemos que temos 16 jogos com jogadores diferentes. A resposta certa é **E**.

8. Que ponto do plano cartesiano fica mais próximo à origem do sistema cartesiano, o ponto $A(-2,5)$, $B(-6,-1)$ ou o ponto médio C do segmento AB?

A: A B: B C: C D: tanto A como B E: Nenhuma das anteriores

Resolução: A distância entre dois pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1) é dada por $d = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$, então a distância de A à origem é
$d_A = \sqrt{(0 - (-2)^2 + (0 - 5)^2)} = \sqrt{29}$ e a distância de B à origem é $d_B = \sqrt{(0 - (-6)^2 + (0 - (-1))^2)} = \sqrt{37}$. Por outro lado, o ponto médio é $C = \frac{A+B}{2} = (-4, 2)$, logo a distância de C à origem é $d_B = \sqrt{(0 - (-4)^2 + (0 - (2))^2)} = \sqrt{20}$. Fica mais próximo da origem o ponto cuja é menor possível, então, a resposta certa é **C**.

9.

10. PASSE PARA A PERGUNTA SEGUINTE

11. Quantos jogos m de um campeonato de xadrez devem ser realizados entre 20 pessoas e qual é a probabilidade p de uma pessoa ser vencedora desta prova?

A: $m = 10$; $p = \frac{1}{10}$ B: $m = 190$; $p = \dfrac{1}{20}$ C: $m = 400$; $p = \frac{1}{40}$ D: $m = 200$; $p = \frac{1}{20}$ E: $m = 120$; $p = \frac{1}{40}$

Resolução: O número de jogos a realizar são $C_2^{20} = \frac{20!}{(20-2)!2!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18!}{18! \cdot 2!} = 190$ e a probabilidade de uma pessoa sair vencedora (número de casos favoráveis é 20) é $p = \frac{1}{20}$ onde 20 é o número de casos possíveis. Portanto, a resposta certa é **B**.

12. Simplificando a expressão com números complexos $\dfrac{(1+2i)^2(1-2i)^2}{|3+4i| \cdot |3-4i|}$ obtém-se:

A: $\dfrac{5}{16}$ B: $\dfrac{9}{7}$ C: $-\dfrac{5}{16}$ D: 1 E. -1

Resolução: Note que o conjugado de $a + bi$ é $a - bi$, $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$ e $|(a + bi)| \cdot |(a - bi)| = |(a + bi)(a - bi)| = a^2 + b^2$, então

$$\frac{(1+2i)^2 \cdot (1-2i)^2}{|3+4i| \cdot |3-4i|} = \frac{[(1+2i)(1-2i)]^2}{|(3+4i) \cdot (3-4i)|} = \frac{(1^2+2^2)^2}{3^2+4^2} = \frac{25}{25} = 1.$$ A resposta certa é **D**.

13. O domínio da expressão $\dfrac{x^2 - 9}{(x+5)(x-3)}$ é:

A: $x \in \mathbb{R}$
B: $x \in]-\infty, -5] \cup [3, +\infty[$
C: $x \in]-\infty, -5[\cup]-5, +\infty[$
D: $x \in]-\infty, -5] \cup [-5, 3[\cup[-3, +\infty[$
E: $x \in]-\infty, -5[\cup]-5, 3[\cup]-3, +\infty[$

Resolução : Para a existência da expressão $(x+5)(x-3) \neq 0 \Longrightarrow x \neq -5 \wedge x \neq 3$, então o domínio da expressão dada é $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5; 3\} =]-\infty, -5[\cup]-5, 3[\cup]3, +\infty[$. Logo, a resposta certa é **E**.

Note que as alternativas A, B e D contém por exemplo $x = 5$ para o qual a expressão não existe neste ponto, por isso não são correctas. A alternativa C possui está incompleta i.e., ela não contém a parte $]-5; 3[$ do domínio, com isso não é correcta.

14. Duas empresas alugam camiões. A Empresa A necessita de um depósito de 150000 Meticais e o pagamento de 5000 Meticais por um quilómetro, posteriormente. A Empresa B necessita de um depósito de 100000 Meticais e o pagamento de 7000 Meticais por um quilómetro, posteriormente. Para qual milhagem o pagamento de alugar camiões é o mesmo?

A: 100 B: 75 C: 50 D: 25 E: 10

Resolução : A função pagamento na empresa A é $P_A(x) = 150000 + 5000x$ e na empresa B é $P_B(x) = 100000 + 7000x$, onde x é a distância percorrida em quilómetros. Desta forma, os pagamentos serão iguais se $P_A(x) = P_B(x) \Longrightarrow 150000 + 5000x = 100000 + 7000x \Longrightarrow 2000x = 50000 \Longrightarrow x = 25$. Então, a resposta certa é **D**.

15. Considere o sistema $\left\{ \begin{array}{rcr} \lambda x + 2y & = & 4 + \lambda \\ 2x + \lambda y & = & -2 \end{array} \right.$. Segundo o parâmetro λ, a afirmação verdadeira é:

A: se $\lambda = 2$ o sistema tem uma e só única solução ;
B: se $\lambda = -2$ o sistema não tem solução ;
C: se $\lambda \neq 2$ e $\lambda \neq -2$ o sistema tem mais que uma solução ;
D: se $\lambda \neq 2$ e $\lambda \neq -2$ o sistema tem uma e só única solução ;
E: se $\lambda = 2$ o sistema tem mais que uma solução ;

Resolução : Aplicando o método de Crammer temos

$$\Delta = \left| \begin{array}{cc} \lambda & 2 \\ 2 & \lambda \end{array} \right| = \lambda^2 - 4; \quad \Delta_x = \left| \begin{array}{cc} 4+\lambda & 2 \\ -2 & \lambda \end{array} \right| = \lambda(4+\lambda) + 4 = \lambda^2 + 4\lambda 4;$$
$$\Delta_y = \left| \begin{array}{cc} \lambda & 4+\lambda \\ 2 & -2 \end{array} \right| = -2\lambda - 8 - 2\lambda = -4\lambda - 8$$

O sistema terá única soluão se $\Delta \neq 0 \Longrightarrow \lambda^2 - 4 \neq 0 \Longrightarrow \lambda \neq \pm 2$. Logo, a resposta certa é **D**.

- Caso $\Delta_x = 0$, $\Delta_y = 0$ e $\Delta = 0$, então o sistema terá várias soluções
- Caso $\Delta_x \neq 0$, $\Delta_y \neq 0$ e $\Delta = 0$, então o sistema não tem soluções

16. Para que o produto da matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ pelo vector $\begin{pmatrix} x+2 \\ y \end{pmatrix}$ seja igual ao vector $\begin{pmatrix} 3x-y \\ y+3 \end{pmatrix}$ os números x e y devem ser iguais, suficientemente aos valores:

A: 4 e 0 B: 3 e 0 C: 0 e 4 D: 2 e 2 E: 3 e 1

Reolução : Temos, $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x+2 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x-y \\ y+3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x+2+3y \\ 0\cdot(x+2)+4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x-y \\ y+3 \end{pmatrix}$, assim obtemos o seguinte sistema de equações lineares $\left\{ \begin{array}{l} x+3y+2 = 3x-y \\ 4y = y+3 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -x+2y = -1 \\ y = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 3 \\ y = 1 \end{array} \right.$

Desta forma, a resposta certa é **E**. Os valores em outras alternativas não satisfazem o sistema acima resolvido.

17. Resolvendo a equação $9x^2 + 6x + 1 = 0$ obtém-se:

A: $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{1}{3}$ B: $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = -\frac{1}{3}$ C: $x_1 = -\dfrac{1}{3}$, $x_2 = \dfrac{1}{3}$ D: $x_1 = \dfrac{1}{3}$, $x_2 = \dfrac{1}{3}$ E: $x_1 = -\dfrac{1}{3}$, $x_2 = 0$

Resolução: Usando a fórmula resolvente temos: $\Delta = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0$, então $x_1 = x_2 = \dfrac{-6}{2 \cdot 9} = -\dfrac{1}{3}$. Logo, a resposta certa é **B**. As outras alternativas não estão correctas porque possuem valores de x que não satisfazem a equação dada, por exemplo para $x = 0$ temos $9 \cdot 0^2 + 6 \cdot 0 + 1 = 1 \neq 0$, por isso A e E não são correctas.

18. Resolvendo a equação $|1 - x^2| = -1$ a resposta é:

A: $-\sqrt{2}$ B: $\sqrt{2}$ C: 0 D: 2 E: $\emptyset$

Resolução : Sabe-se que o módulo de um número é sempre não negativo, logo não existe valor de x para o qual $|1 - x^2| = -1 < 0$. Logo, a resposta certa é **E**.

19. Os zeros do polinómio $P(x) = x^2 + 2ax - 4$ são:

A: $x_{1,2} = \pm\sqrt{a^2 + 4}$ B: $x_{1,2} = \pm(a - 2)$ C: $x_{1,2} = \pm\sqrt{a + 1}$ D: $x_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 + 4}$
E: $x_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 + 4}$

Resolução : Usando a fórmula resolvente temos: $\Delta = (2a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 4(a^2 + 4) \Longrightarrow x_{1,2} = \dfrac{-2a \pm \sqrt{4(a^2 + 4)}}{2} = -a \pm \sqrt{a^2 + 4}$. Logo, a resposta certa é **E**. As outras alternativas simplesmente não satisfazem a equação dada.

20. Resolvendo a inequação $2x^2 - x - 1 > 0$ obtemos:

A: $x \in]-\infty; +\infty[$ B: $x \in]-\infty; -1] \cup]0; \infty[$ C: $x \in]-\infty; -0,5] \cup]1; \infty[$ D: $[0,5; 1]$ E: $x \in]-\infty; -1] \cup]0,5; \infty[$

Resolução: Primeiramente consideremos a equção $2x^2 - x - 1 = 0 \Longrightarrow \Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9 \Longrightarrow x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2} \Longrightarrow x_1 = -\dfrac{1}{2} \wedge x_2 = 1$. Visto que o coeficiente de x^2 é positivo, então a parábola tem concavidade voltada para cima, então a solução da inequação $2x^2 - x - 1 > 0$ é $x \in] - \infty; x_1[\cup]x_2; +\infty[=] - \infty; -\dfrac{1}{2}] \cup]1; +\infty[$. Logo, a resposta certa é **C**.

21. PASSE PARA A PERGUNTA SEGUINTE

22. Resolvendo a inequação $\sqrt{4 - x} < \sqrt{x - 2}$ a resposta é:

A. $] - 2, 2[$ B. $[2, 4]$ C. $]2, 3]$ D. $[3, 4]$ E. $]3, 4]$

Resolução: Para a existência das raizes quadradas envolvidas temos $4 - x \geq 0 \wedge x - 2 \geq 0 \Longrightarrow 2 \leq x \leq 4$. Resolvendo a inequação dada temos,

$$\sqrt{4 - x} < \sqrt{x - 2} \Longrightarrow |4 - x| < |x - 2| \Longrightarrow 4 - x < x - 2 \wedge 4 - x > -(x - 2)$$

$x > 3 \wedge 4 > 2 \Longrightarrow x > 3$. Combinando com as condições de domínio i.e., $2 \leq x \leq 4 \wedge x > 3 \Longrightarrow 3 < x \leq 4$. Logo, a resposta certa é **E**.

23. Resolvendo a equação $4^x - 2^{x+1} + 1 = 0$ o resultado é:

A. $x = -1$ B. $x = 1$ C. $x = 0$ D. $x = -2$ E. $x = 2$

Resolução: Seja $2^x = y$, então $4^x + 2^{x+1} = 1 \Longrightarrow (2^x)^2 - 2 \cdot 2^x + 1 = 0 \Longrightarrow y^2 - 2y + 1 = 0 \Longrightarrow (y-1)^2 = 0 \Longrightarrow y = 1 \Longrightarrow 2^x = 1 \Longrightarrow 2^x = 2^0 \Longrightarrow x = 0$. A resposta certa é **C**. As outras alternativas não estão correctas pois substituindo na equação não será igual a zero, por exemplo, para $x = 1 \Longrightarrow 4^1 - 2^{1+1} + 1 = 1 \neq 0$, por isso B não está certa.

24. Resolvendo a inequação $\log_3(x^2 - 1) \leq 1$ a resposta é:

A. $[-2, 2]$ B. $[-2, 0] \cup [1, 2]$ C. $]-1, 1[\cup[2, +\infty[$ D. $]-1, 1[$ E. $[-2, -1[\cup]1, 2]$

Resolução: Para a existência do logarítimo

$$x^2 - 1 > 0 \Longrightarrow (x+1)(x-1) > 0 \Longrightarrow$$
$$(x + 1 > 0 \wedge x - 1 > 0) \vee (x + 1 < 0 \wedge x - 1 < 0) \Longrightarrow (x > 1) \vee (x < -1).$$

Resolvendo a inequação dada temos

$$\log_3(x^2 - 1) \leq 1 \Longrightarrow \log_3(x^2 - 1) \leq \log_3 3 \Longrightarrow x^2 - 1 \leq 3 \Longrightarrow x^2 - 4 \leq \Longrightarrow$$
$$(x+2)(x-2) \leq 0 \Longrightarrow (x + 2 \leq 0 \wedge x - 2 \geq 0) \vee (x + 2 \geq 0 \wedge x - 2 \leq 0)$$
$$\Longrightarrow \emptyset \vee -2 \leq x \leq 2 \Longrightarrow -2 \leq x \leq 2.$$

Combinando com as condições de domínio i.e., temos

$$(x < -1 \vee x > 2) \wedge -2 \leq x \leq 2 \Longrightarrow -1 < x \leq -2 \vee 1 < x \leq 2.$$

Logo, a resposta certa é alternativa **E**.

25. As recta $y = 3x - 2$ e $y = kx + 1$ são perpendiculares quando:

A: $k = \frac{1}{2}$ B: $k = -\frac{1}{3}$ C: 3 D: $k = 1$ E: $k = -\frac{1}{2}$

Resolução: Duas rectas são perpendiculares se os seus declives são inversamente proporcionais com constante de proporcionalidada igual a -1, i.e., se $k = -\frac{1}{3}$, visto que o coefiente angular da primeira recta é igual a 3. Assim, a resposta certa é **B**.

26. As rectas $y = 2x + q$ e $y = px + 7$ não tem algum ponto em comum. Quais são p e q?

A. $p = 2$ e $q = 7$ B. $p = 2$ e $q \neq 7$ C. $p \neq 2$ e $q = 7$ D. $p \neq 2$ e $q \neq 7$ E. A Nenhuma das anteriores

Resolução: Duas rectas não possuem algum ponto em comum quando forem paralelas e não coincidentes e serão paralelas quando tem o mesmo declive, i.e., $p = 2$ e $q \neq 7$. Logo, a resposta certa é **B**.

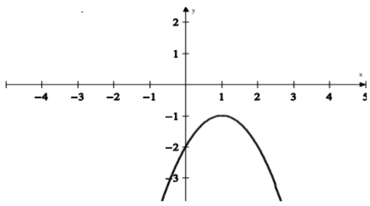
27. Um par de funções, $y = f(x)$ e sua inversa $y = f^{-1}(x)$ definidas nos seus domínios é:

A. $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$ B. $y = e^x$ e $y = \ln x$ C. $x = y^2$ e $y = \sqrt{x}$

D. $y = sen\, x$ e $y = \cos x$ E. $y = sen\, x$ e $y = sectx$

Resolução: Uma função admite inversa se ela for bijectiva i.e., injectiva e sobrejectiva. A função em A não é injectiva no seu domínio pois $f(-x) = f(x)$, portanto ela não possui inversa. A expressão $x = y^2$ não é funão, pois uma função $f(x)$ é uma aplicação para aqual, cada valor de x do seu domínio, existe apena um y do conjunto de chegada, tal que $y = f(x)$ e a expressão em alusão não satisfaz esta definição, por exemplo, para $x = 1 \Longrightarrow 1 = y^2 \Longrightarrow y = \pm 1$. Para as funções em D e E tem como inversa $y = arcsenx$ e não as funões apresentadas. Todas essas alternativas anteriormente descritas não são correcta pelos motivos indicados. A função $y = e^x$ em B é injectiva pois $\forall\, x_1,\, x_2 \in \mathbb{R}$ tais que $e^{x_1} = e^{x_2} \Longrightarrow x_1 = x_2$ e $\forall\, y \in \mathbb{R}^+$ temos $y = e^x \Longrightarrow x = \ln y \in \mathbb{R}$ o que quer dizer que é sobrejectiva. Logo, possui inversa e a inversa é obtida invertendo os papeis na última igaldade, i.e. $f^{-1}(x) = \ln x$. Deste modo, a resposta certa é **B**.

28. A parábola cujo gráfico está representado na figura tem a equação :



A: $y = (x-1)^2 - 1$ B: $y = (x-1)^2 + 1$ C: $y = -(x+1)^2 + 1$
D: $y = -(x-1)^2 - 1$ E: $y = -(x+1)^2 - 1$

Resolução: A parábola tem como vértice $V(1, -1)$ e passa pelo ponto $P(0, -2)$ e a sua equação pode ser obtida pela fórmula $y = a(x - x_v)^2 + y_v \Longrightarrow y = a(x-1)^2 - 1$. No ponto P temos $-2 = a(0-1)^2 - 1 \Longrightarrow a = -1$. Deste modo, a expressão analítica da função será $y = -(x-1)^2 - 1$. Logo, a resposta certa é **D**.

• As alternativas A e B simplesmente são incorrectas visto que as suas expressões são de parábolas com concavidade voltada para cima. Na alternativa C temos $x_v = -1$ enquanto que em E temos $y_v = 1$, no entanto os dois casos não condizem com o descrito no gráfico.

29. PASSE PARA A PERGUNTA SEGUINTE

30. O número de pontos de intersecção dos gráficos das funções $y = sen2x$ e $y = tgx$ no intervalo $]0, 2\pi[$ é igual a

A: 7 B: 6 C: 5 D: 3 E: 2

Resolução: Os gráficos das duas funções intersectam-se nos pontos em que $sen2x = tgx \Longrightarrow 2senx\cos x = \frac{senx}{\cos x} \Longrightarrow sen\,x\cos^2 x = sen\,x \Longrightarrow senx(2\cos^2 x - 1) = 0 \Longrightarrow senx = 0 \vee \cos^2 x = \frac{1}{2} \Longrightarrow x = k\pi \vee \cos x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow x = k\pi \vee x = \pm\frac{\pi}{4} + m\pi\ k,\, m \in \mathbb{Z}$. No intervalo $]0, 2\pi[$ temos $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}\pi$, π, $\frac{5\pi}{4}$ e $\frac{7\pi}{4}$. A resposta certa é alternativa **C**.

31. Simplificando a expressão $\dfrac{senx}{1+\cos x} + \dfrac{1+\cos x}{senx}$ obtém-se:

A: 2 B: $\frac{2}{\cos x}$ C: $\frac{\cos x}{2}$ D: $\frac{2}{senx}$ E: $\cos^2 x$

Resolução: Simplificando dentro do seu domínio i.e., quando $1 + cosx \neq 0 \wedge senx \neq 0$, temos

$$\frac{senx}{1+\cos x} + \frac{1+\cos x}{senx} = \frac{sen^2x + (1+\cos x)^2}{senx(1+\cos x)} = \frac{sen^2x + 1 + 2\cos x + sen^2x}{senx(1+\cos x)}$$
$$= \frac{2 + 2\cos x}{senx(1+\cos x)} = \frac{2(1+\cos x)}{senx(1+\cos x)} = \frac{2}{senx}.$$ Então, a resposta certa é **D**.

32. A função $f(x)$ está definida e contínua num segmento $[a, b]$ e admite $f'(x) > 0$ em $]a, b[$. Então $f(x)$ em $]a, b[$ é:

A: Monótona B: Decrescente C: Não é monótona D: Não é limitada E: $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$

Resolução: O sinal da derivada de uma função num determinado intervalo está directamente ligado a monotonia da função , neste caso Se $f'(x) < 0$ em $]a, b[$ então a função é monótona (decrescente) e se $f'(x) > 0$ em $]a, b[$ (que é o caso do presente exercício) então a função é monótona (crescente). Logo a resposta certa é **A**.

33. A função $f(x)$ está definida e contínua num segmento $[a, b]$ e admite $f'(x) < 0$ em $]a, b[$. Então $f(x)$ em $]a, b[$:
A: Não monótona B: Crescente C: Não é limitada
D: É decrescente E: $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$

Resolução: Da explicação do exercício anterior temos que se $f'(x) < 0$ em $]a, b[$ então a função é monótona decrescente, logo a resposta certa é **D**.

34. O gráfico da função cuja $f'(x) = 2$ é:
A: Uma recta
B: Uma hipérbole
C: Uma parébola da 2^a ordem com ramos virados para cima
D: Uma parébola da 2^a ordem com ramos virados para baixo
E: Uma parébola da 3^a ordem .

Resolução: Se $f'(x) = 2 \Longrightarrow f(x) = \int 2dx = 2x + c$ que é equação de uma recta. Logo, a resposta certa é **A**.

35. O ponto do gráfico da função $y = \sqrt{x}$ onde a tangente à esta curva tem equação $y = x + b$, satisfazendo o valor do parêmetro indicado b, é:

A: $(0, 0)$, se $b = 0$ B: $\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right)$, se $b = \dfrac{3}{4}$ C: $(-4, 2)$, se $b = 6$

D: $(1, 1)$, se $b = 2$ E: $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$, se $b = \dfrac{1}{4}$

Resolução: O declive da recta tangente ao gráfico da função $y = \sqrt{x}$ no ponto em causa é igual a 1, i.e., $\left(\sqrt{x}\right)'|_{x_0} = 1 \Longrightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}} = 1 \Longrightarrow x_0 = \dfrac{1}{4}$. Assim, $y_0 = \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$. Visto que a função $y = \sqrt{x}$ e $y = x + b$ são iguais, temos $\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4} + b \Longrightarrow b = \dfrac{1}{4}$. Logo, a resposta certa é **E**.

36. O limite da expressão $\dfrac{x^3 + 1}{x + 1}$ quando $x \to -1$ é:
A: Não existe B: 0 C: 1 D: 2 E: 3

Resolução: Temos: $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 1}{x + 1} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{(x + 1)(x^2 - x + 1)}{x + 1} = \lim\limits_{x \to 1}(x^2 - x + 1) = 3$. Então, a resposta certa é altenativa **E**.

37. O $\lim\limits_{x \to 0} e^{\frac{1}{x}}$ é:
A: ∞ B: 0 C: $-\infty$ D: e E: Não existe

Resolução: Note que a função $\frac{1}{x}$ comporta-se de forma diferente à esquerda e a direita de zero, i.e.,

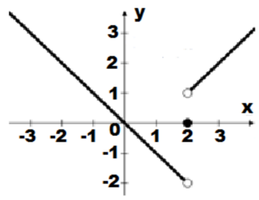
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty \text{ e } \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty,$$

então

$$\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = e^{-\infty} = 0 \text{ e } \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = e^{+\infty} = +\infty.$$

Logo não existe o $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}$. A resposta certa é **E**.

38. Na figura está representada parte do gráfico de uma função $f(x)$ definida em $\mathbb{R}$. O grupo das afirmações cerdadeiras é:



A: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = f(2)$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$
B: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \neq f(2)$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \neq f(2)$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ não existe
C: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \neq f(2)$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 2$
D: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = f(2)$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \neq f(2)$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ não existe
E: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \neq f(2)$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \neq f(2)$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 2$

Resolução: Fazendo leitura no gráfico temos $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -2$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 1$. Logo, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$, logo $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ não existe. A resposta certa é **B**.

- Alternativa A não está certa porque $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \neq -1 \neq f(2) = 0$ e de um modo similar mostramos que as alternativas C, D e E não são correctas.

39. A derivada da função $\dfrac{1+\cos x}{senx}$ é:

A: $\dfrac{1}{1+tgx}$ B: $\dfrac{1}{\cos x - 1}$ C: $\dfrac{1-senx}{\cos x}$ D: $-\dfrac{1+\cos x}{sen^2 x}$ E: $\dfrac{senx}{1+\cos x}$

Resolução: Temos:

$$\left(\frac{1+\cos x}{senx}\right)' = \frac{(1+\cos x)' senx - (senx)'(1+\cos x)}{sen^2 x} = \frac{-sen^2 x - \cos x(1+\cos x)}{sen^2 x}$$
$$= \frac{sen^2 x - \cos x - \cos^2 x}{sen^2 x} = \frac{-1-\cos x}{sen^2 x} = -\frac{1+\cos x}{sen^2 x}.$$

Logo, a resposta certa é **D**.

40. Compare as velocidades $v_1(t)$ e $v_2(t)$ de movimento de dois pontos materiais para o instante do tempo $t = \dfrac{\pi^2}{16}$, se as leis de movimento destes pontos são definidas pelas equações $S_1(t) = sen\sqrt{t}$ e $S_2(t) = sen\sqrt{\dfrac{t}{2}}$. Então,

A: $v_1 = v_2$ B: $v_1 > v_2$ C: $v_1 < v_2$ D: v_1 e v_2 são não comparáveis E: Nenhuma das anteriores

Resolução: A velocidade de num ponto material no tempo t_0 é igual a derivada da função deslocamento em relação ao tempo neste ponto, então ,

$$v_1(t) = S_1'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \cdot \cos\sqrt{t} \text{ e } v_2(t) = S_2'(t) = \frac{1}{4\sqrt{\frac{t}{2}}} \cdot \cos\sqrt{\frac{t}{2}}$$

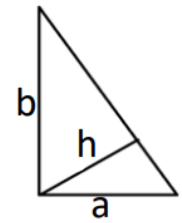
Logo,

$$v_1\left(\frac{\pi^2}{16}\right)=\frac{1}{2\sqrt{\frac{\pi^2}{16}}}\cdot\cos\left(\sqrt{\frac{\pi^2}{16}}\right)=\frac{2}{\pi}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{\pi};$$

$$v_2\left(\frac{\pi^2}{16}\right)=\frac{1}{4\sqrt{\frac{\frac{\pi^2}{16}}{2}}}\cdot\cos\sqrt{\frac{\frac{\pi^2}{16}}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\right).$$

Visto que $\cos x\leq 1,\ \forall x$ então $v_1\left(\frac{\pi^2}{16}\right)=\frac{\sqrt{2}}{\pi}>v_2\left(\frac{\pi^2}{16}\right)=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\right)$. Logo, a resposta certa é **B**.

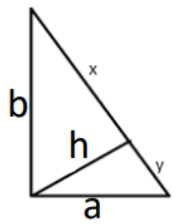
41. Qual é a medida da altura h do triângulo rectângulo de catetos a e b?



A: $h=\frac{b}{2}$ B: $h=\frac{ab}{2}$ C: $h=\frac{a^2+b^2}{ab}$

D: $h=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ E: $h=\sqrt{\frac{ab}{a^2+b^2}}$

Resolução: Sejam x e y as medidas ilustradas na figura ao lado, então $x+y=c$ tal que pelo teorema de Pitágora temos $c^2=(x+y)^2=a^2+b^2\Longrightarrow x+y=\sqrt{a2+b^2}$. Por outro lado temos que $x^2+h^2=b^2\wedge h^2+y^2=a^2$. Desta forma temos o seguinte sistema de equações



$$\begin{cases} a^2+b^2=(x+y)^2\\ x^2+h^2=b^2\\ h^2+y^2=a^2\end{cases}$$

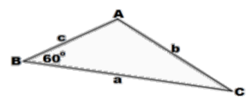
Somando as duas últimas equações temos $x^2+y^2+2h^2=a^2+b^2$ e da primeira equação temos $x^2+y^2+2h^2=(x+y)^2=x^2+y^2+2xy\Longrightarrow h^2=x.y$ Das duas últimas equações do sistema temos

$$\begin{cases} x^2+xy=b^2\\ xy+y^2=a^2\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases} x(x+y)=b^2\\ y(x+y)=a^2\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases} x\sqrt{a^2+b^2}=b^2\\ y\sqrt{a^2+b^2}=a^2\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases} x=\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\\ y=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{cases}$$

$$\text{Logo, } h^2=xy=\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\Longrightarrow h=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Então , a resposta certa é **D**.

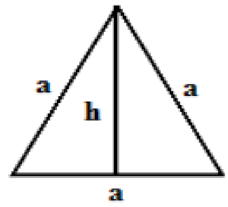
42. No $\triangle ABC$ o lado $a=6cm$, o lado $c=3cm$, o ângulo $\angle B=60^o$. A medida do lado b é igual à:



A: 5 B: $5\sqrt{3}$ C: 4 D: $3\sqrt{3}$ E: $\sqrt{3}$

Resolução: Usando o teorema dos cossenos temos $b^2=a^2+c^2-2a\cdot b\cdot\cos\angle B\Longrightarrow b^2=6^2+3^3-2\cdot 6\cdot 3\cos 60^o$ $\Longrightarrow b^2=45-36\cdot\frac{1}{2}\Longrightarrow b^2=27\Longrightarrow b=3\sqrt{3}$. A resposta certa é alternativa **D**.

43. Em quantas vezes aumentará a medida de altura h de um triângulo equilátero se o seu perímetro será aumentado em seis vezes, de modo que o triângulo resultante também seja equilátero?



A: 3 B: 6 C: 12 D: 2 E: 4

Resolução: Sejam h_1 a altura do triângulo resultante após o aumento do perímetro, P e $P_1 = P + 6P = 7P$ os perímetros dos triângulos inicial e após o aumento, reespectivamente. Visto que o triângulo resultante também é equilátero, então os dois triângulos são semelhantes, então

$$\frac{h_1}{h} = \frac{P_1}{P} \Longrightarrow \frac{h_1}{h} = \frac{7P}{P} = 7 \Longrightarrow h_1 = 7h = h + 6h,$$

o que quer dizer que a altura aumentará em 6 vezes. Logo, a resposta certa é alternativa **B**.

44. Sejam um paralelogramo e um rectângulo cujas bases e alturas são iguais. Qual destas afirmações é verdadeira?

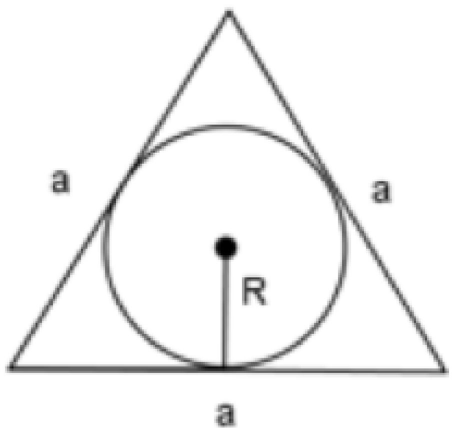
A. O perímetro e a área do paralelogramo são, correspondentemente maiores do que os do rectângulo
B. O perímetro e a área do rectângulo são, correspondentemente maiores do que os do paralelogramo
C. As áreas destas figuras são iguais, mas os perímetros não
D. Os perímetros destas figuras são iguais, mas as áreas não
E. Os perímetros e as áreas destas figuras são, suficientemente iguais

Resolução: Consideremos a seguinte figura:

Vemos que as figuras dada possuem áreas iguais a $b \cdot h$, por isso A, B, D e E não são verdadeiras. Notemos que $L > h$, logo o perímetro do paralelogramo é maior do que o perímetro do rectângulo. Deste modo, a resposta certa é **C**.

45. Qual é o raio R de um círculo inscrito num tringulo equilátero de lado a?

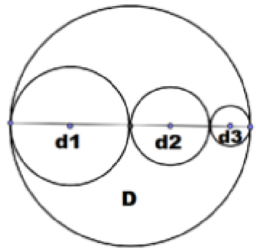
A: $R = \dfrac{a}{2}$ B: $R = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$ C: $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$
D: $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ E: $R = \dfrac{a}{3}$



Com apoio do Fundo de Desenvolvimento Instuticional

Resolução: O raio de uma circunferência inscrita num triângulo equilátero é igual a $\frac{1}{3}h$ onde h é altura do triángulo e $h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4} \Longrightarrow h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Então, $R = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. Logo, a resposta certa é **C**.

46. Os diâmetros de três círculos inscritos num círculo de diâmetro D satisfaçam às razões e a igualdade seguintes: $d_1 : d_2 : d_3 = 3 : 2 : 1$ e $d_1 + d_2 + d_3 = D$. Quais são as razões das áreas dos círculos inscritos?



A: $3 : 2 : 1$ B: $9 : 4 : 1$ C: $18 : 2 : 1$ D: $1 : 2/3 : 1/3$ E: $6 : 3 : 1$

Resolução: Usando as razões dadas temos:

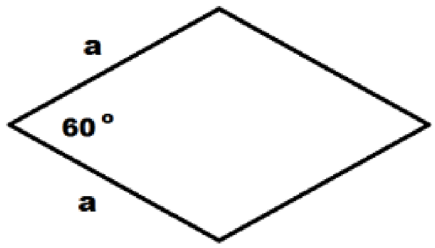
$$A_1 = \pi\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 = \frac{\pi d_1^2}{4}, \quad A_2 = \pi\left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = \frac{\pi d_2^2}{4} \text{ e } A_3 = \pi\left(\frac{d_3}{2}\right)^2 = \frac{\pi d_3^2}{4}.$$

Deste modo,

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\frac{\pi d_1^2}{4}}{\frac{\pi d_2^2}{4}} = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}, \quad \frac{A_2}{A_3} = \frac{\frac{\pi d_2^2}{4}}{\frac{\pi d_3^2}{4}} = \left(\frac{d_2}{d_3}\right)^2 = \left(\frac{2}{1}\right)^2 = \frac{4}{1},$$

assim temos as seguintes razões $9 : 4 : 1$. Logo, a resposta certa é **B**.

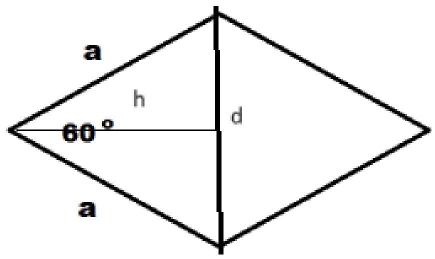
47. Seja losango de lado a e ângulo agudo 60^o. Qual deve ser raio R de um círculo com a mesma área?



A: $R = a$ B: $R = a\frac{\sqrt{3}}{2}$ C: $R = \frac{a\pi\sqrt{3}}{2}$ D: $R = a \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2\pi}}$ E: $R = \frac{a}{2}$

Resolução: Seja d a diagonal oposta ao ângulo dado, então pelo teorema dos cossenos temos:

$$d^2 = a^2 + a^2 - 2a^2\cos 60^o = 2a^2 - 2a^2 \cdot \frac{1}{2} = a^2 \Longrightarrow d = a,$$



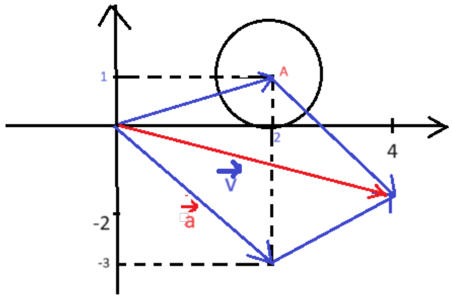
Logo, a diagonal divide o losango em dois triângulos equiláteros. A altura h divide $b = a$ em dois segmentos iguais. Assim, pelo teorema de pitágoras temos $h^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4} \Longrightarrow h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, deste modo,

$$A_\lozenge = 2A_\triangle = 2 \cdot \frac{d \cdot h}{2} = a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

Assim, a área do círculo é $A_\circ = \pi R^2 = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow R = \sqrt{\frac{a^2\sqrt{3}}{2\pi}} = a\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2\pi}}$. Logo, a resposta certa é a alternativa **D**.

48. Uma circunferência de raio R centrada no ponto A(2,1) é deslocada segundo o vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Qual é a equaão da circunferência em posição nova no mesmo sistema de coordenadas?

A: $(x+2)^2 + (x-3)^2 = R^2$ B: $(x+2)^2 + (x+1)^2 = R^2$ C: $(x-4)^2 + (x+2)^2 = R^2$
D: $(x-2)^2 + (x-1)^2 = R^2$ E: $(x+4)^2 + (x-2)^2 = R^2$



Resolução: As novas coordenadas do centro da circunfêrencia são dadas pela soma do vector $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e o vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ que é o vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ como ilustra a figura ao lado. Assim, a equação da circunferência na nova posição é $(x-4)^2+(x+2)^2 = R^2$. Logo, a resposta correcta é **B**.

49. As fórmulas que relacionam as coordenadas (x, y), $(x,\, y \in \mathbb{R})$ de um sistema cartesiano com ascoordenadas $(\rho\,,\, \varphi)$, $(\rho \geq 0,\, \varphi \in [0, 2\pi])$, do sistema polar, (as origens destes coincidem e o eixo das abcissas do sistema cartesiano coincide com o eixo polar ρ do sistema polar), são $x = \rho\cos\varphi$ e $y = \rho sen\varphi$. Exprima a equação de uma circunferência de raio R, centrada na origem do sistema cartesiano, na forma $\rho = \rho(\varphi)$.

A: $\rho = R$ B: $\rho = 2\pi R$ C: $\rho = \pi R^2$ D: $\rho = 2\pi$ E: $\rho = \pi R$

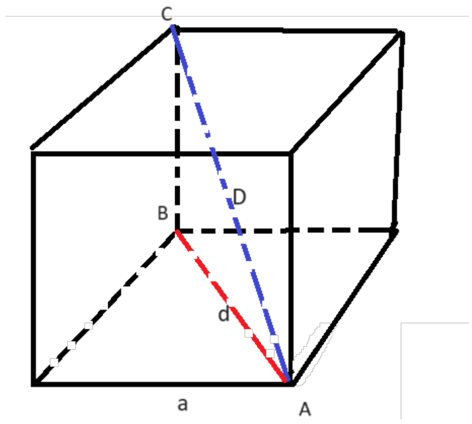
Resolução: A equação da circunferência de centro (x_0, y_0) e raio R é dada por $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = R^2$. Visto que no nosso caso a circunferência está centrada na origem, então ela toma a forma $x^2 + y^2 = R^2$. Subistituindo x e y pelas expressões dadas temos:

$$(\rho\cos\varphi)^2 + (\rho sen\varphi)^2 = R^2 \Longrightarrow \rho^2(\cos^2\varphi + sen^2\varphi) = R^2 \Longrightarrow \rho = R.$$

Assim, a resposta certa é **A**.

50. Comprimento de diagonal D de um cubo de lado de comprimento a é igual:

A: $D = 3a$ B: $D = a\sqrt{3}$ C: $D = a\sqrt{2}$ D: $D = 2a$ E: $D = 5a$



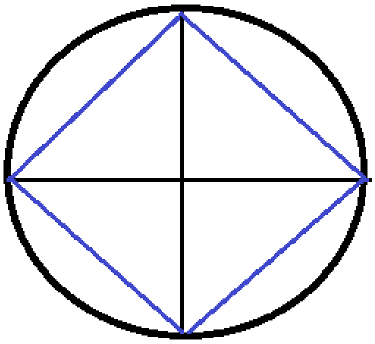
Resolução: Da figura ao lado d é a diagonal da face do cubo e é igal à $d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \Longrightarrow d = a\sqrt{2}$. Por outro lado, temos que o triângu.o ABC é rectângulo em B, então

$$D^2 = d^2 + a^2 = \left(a\sqrt{2}\right)^2 + a^2 = 3a^2 \Longrightarrow D = a\sqrt{3}.$$

Logo, a resposta certa é **B**.

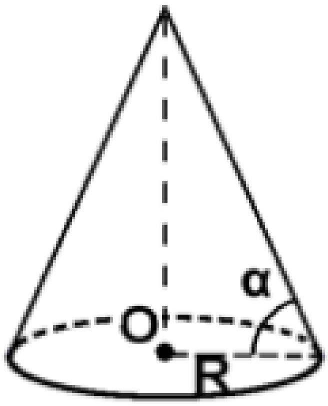
51. Numa circunferência de raio R, os seus dois diâmetros perpendiculares entre si, intersectando com a circunferência formam um quadrilátero inscrito, cuja área é igual a:

A. R^2 B. $2R^2$ C. $4R^2$ D. $8R^2$ E. $16R^2$



Rsolução: Visto que as diagonais são perpendiculares então o quadrilátero formado é um quadrado cujo lado é dado por $\ell^2 = R^2 + R^2 = 2R^2 \Longrightarrow \ell = R\sqrt{2}$, então a sua área é igual à $A = \ell^2 = \left(R\sqrt{2}\right)^2 = 2R^2$.

A resposta certa é **B**.



52. O raio da base dum cone é igual a R, a geratriz faz um ângulo α com a base. Então o volume V do cone é igual:

A. $V = \dfrac{1}{3}\pi R^3 ctg\alpha$ B. $V = \dfrac{1}{6}\pi R^3$ C. $V = \dfrac{1}{3}\pi R^3 tg\alpha$
D. $V = \pi R^3 \cos\alpha$ E. $V = \pi R^3 sen\alpha$

Resolução: Seja h a altura do cone, então $tg\alpha = \frac{h}{R} \Longrightarrow h = Rtg\alpha$. Deste modo, o volume do cone é dado por $V = \frac{1}{3}A_b \cdot h$ onde A_b denota a área da base do cone. Portanto, $V = \frac{1}{3}A_b \cdot h = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot Rtg\alpha = \frac{1}{3}R^3 tg\alpha$. Então, a resposta certa é **C**.

53. Os pontos da inflexõ do gráfico da função $f(x) = \frac{1}{9}(x^4 - 4x^3)$:

A. $x = 0$ e $x = 2$ B. $x = 1$ e $x = 3$ C. $x = 1$ e $x = 3$ D. $x = 3$ e $x = 4$ E. Não existem

Rsolução: O ponto x_0 é ponto de inflexão se $f''(x_0) = 0$ ou não existe. A função dada tem como domínio toda recta real e $f''(x) = \frac{1}{9}(12x^2 - 24x) = 0 \Longrightarrow x = 0 \vee x = 2$.

x	$]-\infty, 0[$	0	$]0, 2[$	2	$]2, +\infty[$
$f'(x)$	$+$	0	-	0	$+$
$f(x)$	$\bigcup$	0	$\bigcap$	-16	$\bigcup$

A função tem como pontos de inflexão $x = 0 \wedge x = 2$. Então, a resposta certa é **A**.

54. As assímptotas verticais A_v, horizontais A_H e oblíquas A_0 da função $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$ são:

A. $A_v : x = 1$; A_H e A_O não existem
B. $A_v : x = 1$; A_H não existe e $A_O : y = x + 2$

C. $A_v : x = 1$; $A_H\, y = 0$ e A_O não existe
D. $A_v : x = 0$; $A_H\, y = 0$ e A_O não existe
E. Não tem assintotas

Resolução: Para a existência da função dada $(x-1)^2 \neq 0 \Longrightarrow x \neq 0$. Então $x = 1$ é potencial candidadato à A_v. Calculando

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^3}{(x-1)^2} = \frac{1}{(0^-)^2} = +\infty,$$

então $x = 1$ é A_v. A função não tem A_H pois

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty \quad \text{e}$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{(x-1)^2} = -\infty.$$

Seja

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x(x-1)^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^3\left(1-\frac{1}{x}\right)^2} = 1$$

então

$$b = \lim_{x\to+\infty}[f(x) - x] = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{(x-1)^2} - x\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - x(x-1)^2}{(x-1)^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2 + x}{(x-1)^2} = 2.$$

Então $y = x + 2$ é A_O. Deste modo, a resposta certa é **B**.

55. A primitiva $F(x)$ da função $f(x) = sen2x$, sendo C uma constante arbitrária é:

A. $F(x) = \cos 2x + C$ B. $F(x) = \dfrac{1}{2}\cos 2x + C$ C. $F(x) = 2sen2x + C$
D. $F(x) = -\dfrac{1}{2}\cos 2x + C$ E. $F(x) = -\dfrac{1}{2}sen2x + C$

Rsolução: A primitiva $F(x)$ da função $f(x)$ é uma função tal que $F'(x) = f(x)$ e ela pode ser obtiva da seguinte forma

$$F(x) = \int f(x)dx = \int sen2xdx = -\frac{1}{2}\cos 2x + C.$$

A resposta certa é **D**. As funções nas outras alternativas não satisfazem a condição $F'(x) = f(x)$, por exemplo, a função em B, $F(x) = \frac{1}{2}\cos 2x + C \Longrightarrow F'(x) = -sen2x \neq sen2x$.